# ZENTRALISATOREN ZENTRALER INVOLUTIONEN IN $L_n(2)$

VON

ULRICH DEMPWOLFF

Der folgende Satz soll bewiesen werden:

SATZ. *Es sei $G$ eine endliche, einfache Gruppe und $H$ sei der Zentralisator einer 2-zentralen Involution $z$ aus $G$. Es sei $H$ eine zerfallende Erweiterung einer extraspeziellen Gruppe $E$ der Ordnung $2^{2n+1}$ durch $L_n(2)$. Dann ist $G \cong L_{n+2}(2)$ für $n = 4, 5, 6, \cdots$.*

*Bemerkung.* Eine Involution nennen wir 2-zentral, wenn sie im Zentrum einer $S_2$-Untergruppe von $G$ liegt. Im Falle $n = 3$ gilt unter den Voraussetzungen des Satzes, dass $G \cong L_5(2)$, $M_{24}$ oder $H_2$. Diese Aussage folgt aus dem allgemeineren Resultat von Held und Schoenwaelder [4]. Ähnlich wie in dieser Arbeit zeigen wir, dass unter den Voraussetzungen des Satzes die Struktur von $H$ eindeutig bestimmt ist. Man ist dann in der Lage, die Klassifikation der linearen Gruppen durch M. Suzuki [7] anzuwenden.

Stets halten wir im Weiteren an folgenden Bezeichnungen fest: Es sei $z$ eine 2-zentrale Involution und $H = C_G(z)$ mit $H = E \cdot L$, $E \lhd H$ und $L \cap E = 1$. Dabei ist $E$ eine extraspezielle Gruppe der Ordnung $2^{2n+1}$, d.h. der Weite $n$, und $L \cong L_n(2)$ für $n \geq 4$. Ein besonderes Interesse beansprucht der Fall $n = 4$. In diesem Fall sind a priori drei wesentlich verschiedene Strukturen für $H$ zulässig. Davon kann allerdings nur eine der Zentralisator einer 2-zentralen Involution in einer einfachen Gruppe sein. Den Beweis des Satzes führen wir über eine Reihe von Hilfssätzen.

## 1. Bezeichnungen und Eigenschaften der Gruppen $L_n(2)$

Im wesentlichen werden wir die Bezeichnungen von Gorenstein [3] verwenden. Wir führen einige weitere Bezeichnungen ein. Es sei $X$ eine Untergruppe der Gruppe $G$. Dann definieren wir:

$A(X)$ = äussere Automorphismengruppe von $X$

$z^X = \{z^x \mid x \in X\}$ für $z$ aus $G$

$z \sim y$; $z \sim_X y$ $z$ ist zu $y$ konjugiert; $z$ ist zu $y$ in $X$ konjugiert

$z \nsim y$ $z$ ist nicht zu $y$ konjugiert

Die Elemente der Gruppe $L_n(2) = GL(n, 2)$ werden identifiziert mit den nichtsingulären $n \times n$-Matrizen über $F_2$, dem Körper mit zwei Elementen. Ein Element $x$ aus $L_n(2)$ wird damit durch $x = (x_{ij})$; $x_{ij} \in F_2$ ; $i, j = 1, \cdots, n$ beschrieben. Schreiben wir etwa

$$x = \begin{bmatrix} X & \\ Y & Z \end{bmatrix},$$

Received August 25, 1971.

so sei damit stets eine Zerlegung der Matrix in Untermatrizen geeigneter Grösse gemeint; in diesem Fall mit $X$, $Y$ und $Z$ bezeichnet. Der freigelassene Raum repräsentiere dabei stets die 0-Matrix. Für $i = 1, \cdots, [n/2]$ setzen wir

$$j_i = \begin{bmatrix} I_i & & \\ & I_{n-2i} & \\ I_i & & I_i \end{bmatrix}$$

wobei $I_i$ die $i$-dimensionale Einheitsmatrix bezeichne. Wir vermerken:

LEMMA 1.1. *Es besitzt $L_n(2)$ genau $[n/2]$ Konjugiertenklassen von Involutionen. Sie werden repräsentiert durch $j_i$ für $1 \leq i \leq [n/2]$.*

LEMMA 1.2. *Es sei $V$ ein Vektorraum der Dimension $n + k$ über $F_2$ und $n \geq 4$. Es sei $M \cong L_n(2)$ eine Untergruppe von $GL(V)$.*

(i) *In $V$ existiere ein $k$-dimensionaler Unterraum $U$ derart, dass $M$ den Raum $U$ zentralisiert und auf $V/U$ wie die volle Automorphismengruppe operiert. Dann existiert ein $M$-invarianter Unterraum $X$ von $V$ mit $X \oplus U = V$.*

(ii) *In $V$ existiere ein $n$-dimensionaler Unterraum $W$ derart, dass $M$ auf dem Raum $W$ wie die volle Automorphismengruppe operiert und $V/W$ zentralisiert. Dann existiert ein $M$-invarianter Unterraum $X$ von $V$ mit $X \oplus W = V$.*

Der Leser beweist Lemma 1.2 (i) leicht durch Induktion nach $k$ unter Beachtung der Tatsache, dass im Falle $k = 1$ keine $M$-Bahn von nichttrivialen Elementen aus $V$ der Länge $2^{n+1} - 2$ existiert. Teil (ii) des Lemmas folgt sofort aus Teil (i).

LEMMA 1.3. *Es sei $V$ ein Vektorraum der Dimension $n$ und $L_1$ eine Untergruppe der Automorphismengruppe $GL(V)$ von $V$ mit $L_1 \cong GL(n - 1, 2)$. Dann operiert $L_1$ reduzibel auf $V$.*

*Beweis.* Für $2 \leq n \leq 8$ prüft man leicht nach, dass die Aussage des Lemmas zutrifft. Insbesondere folgt aus Lemma 1.2, dass für $5 \leq n \leq 8$ stets $GL(V)$ nur eine Konjugiertenklasse von Untergruppen hat, die isomorph sind zu $GL(n - 1, 2)$.

Es sei nun $n > 8$ und $V$ sei ein $F_2$-Vektorraum der Dimension $n$. Es operiere $L_1 \cong GL(n - 1, 2)$ treu und irreduzibel auf $V$. Es sei $r$ ein Element der Ordnung 3 aus $L_1$ derart, dass $C_{L_1}(r) = \langle r \rangle \times X$ mit $X \cong L_{n-3}(2)$. Wir haben $V = V^0 \oplus V^1$ mit $V^0 = C_V(r)$ und $V^1 = [V, r]$. Es sind $V^0$ und $V^1$ unter $X$ invariant und $\dim V^1 = 2k$.

Angenommen, $k > 1$. Dann ist $\dim V^0 = n - 2k < n - 3$ und $X$ zentralisiert $V^0$. Also operiert $X$ treu auf $V^1$. Setze $V^* = V^1 \otimes_{F_2} F_4$ (es sei $F_4$ der Körper mit 4 Elementen) und betrachte die Einbettung von $X \times \langle r \rangle$ in $GL(V^*)$. Es ist $r$ in $GL(V^*)$ ein diagonalisierbares Element und folglich

$$C_{GL(V^*)}(r) \cong GL(k, 4) \times GL(k, 4).$$

Da $X$ einfach ist, ist $X$ eine Untergruppe von $GL(k, 4)$. Es ist

$$|X| = 2^{(n-4)(n-3)/2} \prod_{i=1}^{n-3} (2^i - 1),$$

$$|GL(k, 4)| = 2^{k(k-1)} \prod_{i=1}^{k} (2^i + 1)(2^i - 1)$$

und $k \leq [n/2]$.

Offenbar fallen sofort die Fälle $n = 8$ und $n = 9$ aus. Für $n \geq 10$ ist stets $2^{(n-4)(n-3)/2} > 2^{k(k-1)}$, ein Widerspruch. Also ist $k = 1$.

Nach Induktion haben wir nun eine $X$-invariante Zerlegung

$$V^0 = \langle u \rangle \oplus V^*$$

und $X$ operiert wie die volle Automorphismengruppe von $V^*$. Ferner ist $\dim V^1 = 2$ und $[V^1 \oplus \langle u \rangle, X] = 0$. Ist $n - 1$ gerade, so existiert eine elementar-abelsche Untergruppe $E$ in $C_{L_1}(r)$ der Ordnung $3^{(n-1)/2}$ mit

$$[E, V] = [C_{L_1}(r), V] = V^* \oplus V^1.$$

Ist $n - 1$ ungerade, so seien $E_1$ und $E_2$ zwei elementar-abelsche Untergruppen der Ordnung $3^{(n-2)/2}$ in $C_{L_1}(r)$, die die folgende Bedingung erfüllen:

(F) $E_1$ und $E_2$ haben in dem $L_1$ zugrundeliegenden $F_2$-Vektorraum $W$ der Dimension $n - 1$ keinen gemeinsamen Fixpunkt.

Dann gilt $[V, E_1] + [V, E_2] = [V, C_{L_1}(r)] = V^* \oplus V^1$.

Es sei zunächst $n - 1$ gerade und $E$ elementar-abelsch der Ordnung $3^{(n-1)/2}$. Wie wir oben bemerkt haben, ist dann

$$[V, E] = V^* \oplus V^1 \quad \text{unter} \quad \langle C_{L_1}(s) \mid s \sim_{L_1} r,\ s \in E \rangle$$

invariant. Für $n - 1 \geq 6$ bedeutet dies, dass auch $V^* \oplus V^1$ unter $L_1$ invariant ist.

Es sei nun $n - 1$ ungerade. Es sei $s$ aus $X$ und $s \sim_{L_1} r$. Es seien $E$ und $E_1$ zwei elementar-abelsche Untergruppen der Ordnung $3^{(n-2)/2}$ aus $C_{L_1}(r)$, die die Bedingung (F) erfüllen und für die gilt $E \sim_{L_1} E_1$, $\langle r \rangle = E \cap E_1$, und $s \in E$. Ferner existiert eine Untergruppe $E_2$ von $E_1$ mit $| E_2 \times \langle s \rangle | = 3^{(n-2)/2}$ derart, dass das Paar $E$, $E_2 \times \langle s \rangle$ die Bedingung (F) erfüllt. Nach dem oben Gesagten bedeutet dies, dass $V^* \oplus V^1$ unter $C_{L_1}(s)$ invariant ist. Für $n - 1 \geq 7$ wird dann $V^* \oplus V^1$ von $L_1$ normalisiert.

## 2. Eigenschaften extraspezieller Gruppen und vorbereitende Lemmas

Zunächst sei daran erinnert, dass es eine eineindeutige Korrespondenz zwischen den extraspeziellen 2-Gruppen und den regulären, orthogonalen Vektorräumen von geradzahliger Dimension über $F_2$ gibt (siehe [5; III, 13.8]). Diese orthogonalen Vektorräume $V$ besitzen ein symplektisches Skalarprodukt—etwa durch $(\cdot,\cdot)$ bezeichnet—und eine quadratische Form $g$. Ein Element $v$ aus $V^{\#}$ mit $g(v) = 0$ heisst isotrop, die übrigen Elemente aus $V^{\#}$ heissen nicht-isotrop. Ein Unterraum $U$ von $V$ heisst isotrop, falls für alle $u$ und $u'$ aus $U$ stets $(u, u') = 0$ und $g(u) = g(u') = 0$ gilt. Für einen Unterraum $U$ von $V$ setzen wir

$$U^{\perp} = \{v \mid v \in V,\ (v, u) = 0 \text{ für alle } u \in U\} \quad \text{und} \quad \operatorname{rad} U = U \cap U^{\perp}.$$

Ein Paar von Vektoren $\{v, w\}$ heisst hyperbolisches Paar, falls $g(v) = g(w) = 0$ und $(v, w) = 1$. Zu einer vorgegebenen Dimension $2m$ existieren zwei Isomorphietypen von regulären, orthogonalen Räumen über $F_2$ :

(1) $V$ ist ein Raum von maximalen Index, d.h. $V$ hat einen isotropen Unterraum der Dimension $m$.

(2) $V$ hat Index $m - 1$, d.h. maximale, isotrope Unterräume von $V$ haben die Dimension $m - 1$.

Extraspezielle 2-Gruppen, die zu den Vektorräumen aus (1) korrespondieren, nennen wir vom Typ $D \cdots D$, extraspezielle 2-Gruppen, die Vektorräumen aus (2) zugeordnet sind, nennen wir vom Typ $D \cdots Q$.

An diesen Bezeichnungen wollen wir im Verlauf dieses ganzen Paragraphen festhalten.

Ohne Beweis geben wir an:

LEMMA 2.1. (a) *Es sei $X$ eine extraspezielle Gruppe der Ordnung $2^{2n+1}$, die das zentrale Produkt von $n$ Diedergruppen der Ordnung 8 ist (d.h. $X$ ist vom Typ $D \cdots D$). $X - Z(X)$ enthält dann genau $2^n(2^n + 1) - 2$ Elemente der Ordnung 2 und $2^n(2^n - 1)$ Elemente der Ordnung 4.*

(b) *Es sei $X$ eine extraspezielle Gruppe der Ordnung $2^{2n+1}$, die das zentrale Produkt von einer Quaternionengruppe der Ordnung 8 und $n - 1$ Diedergruppen der Ordnung 8 ist (d.h. $X$ ist vom Typ $D \cdots Q$). $X - Z(X)$ enthält dann genau $2^n(2^n - 1) - 2$ Elemente der Ordnung 2 und $2^n(2^n + 1)$ Elemente der Ordnung 4.*

LEMMA 2.2. *Es sei $V$ ein orthogonaler Vektorraum der Dimension $2n$ über $F_2$ mit $n \geq 4$. Es habe $V$ maximalen Index. In $V$ liege ein isotroper Teilraum $V_1$ der Dimension $n$ mit der folgenden Eigenschaft.*

*In der Gruppe der Automorphismen von $V$, $O(V)$, existiert eine Untergruppe $L \cong L_n(2)$, die $V_1$ normalisiert. Dann gilt:*

(i) *Ist $n \geq 5$, so existiert ein $L$-invarianter, isotroper Teilraum $V_2$ von $V$ mit $V = V_1 \oplus V_2$.*

(ii) *Ist $n = 4$, so treten möglicherweise zwei Fälle auf.*

(a) *Es existiert ein isotroper, $L$-invarianter Unterraum $V_2$ von $V$ mit $V = V_1 \oplus V_2$.*

(b) *$L$ operiert auf $V$ reduzibel aber nicht vollständig reduzibel. Die Wirkungsweise von $L$ auf $V$ ist eindeutig bestimmt (Im Beweis wird die Operation von $L$ auf $V$ beschrieben).*

*Beweis.* Es sei $V = V_1 \oplus V_2$, wo $V_1$ und $V_2$ isotrope Teilräume von $V$ sind. Ferner sei

$$V_1 = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle, \quad V_2 = \langle w_1, \cdots, w_n \rangle$$

und

$$\{v_1, w_1\}, \cdots, \{v_n, w_n\}$$

seien hyperbolische Paare. Sei $T \in O(V)$ mit $V_1 T = V_1$. Dann gilt für $i = 1, \cdots, n$

$$v_i T = \textstyle\sum_j a_{ij} v_j, \quad w_i T = \sum_j b_{ij} v_j + \sum_j c_{ij} w_j.$$

Wir setzen $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ und $C = (c_{ij})$. Aus $(v_i T, w_j T) = \delta_{ij}$,

$(w_i T, w_j T) = 0$ und $g(w_i T) = 0$ für $i, j = 1, \cdots, n$ folgt dann

$(*)$ $C = (A^{-1})^t$, $BC^t = CB^t$ und $\sum_j b_{kj} c_{kj} = 0$ für $k = 1, \cdots, n$.

Wir bezeichnen mit $X_{ij}$ die $n \times n$-Matrix über $F_2$, die in der $i$-ten Zeile an der $j$-ten Stelle eine 1 hat und deren übrigen Einträge aus 0 bestehen. Ferner setzen wir $T_{ij} = I_n + X_{ij}$ für $i \neq j$. Dann ist $T_{ij}$ eine Transvektion, und es ist wohlbekannt, dass die $T_{ij}$; $i \neq j$; $i, j = 1, \cdots, n$; $GL(n, 2)$ erzeugen. Aus $(*)$ und den Voraussetzungen des Lemmas folgt, dass $L$ als volle Automorphismengruppe auf $V_1$ operiert und dass die Darstellung von $L$ auf $V/V_1$ zu der Darstellung von $L$ auf $V_1$ kontragredient ist. Sei $\varphi$ die Abbildung von $GL(n, 2) = L_n(2)$ in $O(V)$ derart, dass $\operatorname{Im}\varphi = L$ ist. O.B.d.A. können wir annehmen, dass bezüglich unserer festen Basis von $V_1$ und $V_2$ die Gleichung

$$T_{ij}^{\varphi} = \begin{bmatrix} T_{ij} & \\ K_{ij} & T_{ji} \end{bmatrix}$$

gilt. Wir setzen $T_{ij}^{\varphi} = t_{ij}$.

Stets gilt $[t_{ij}, t_{lm}] = 1$ für $l \neq j$ und $m \neq i$. Weiter ist $[t_{ik}, t_{kj}] = t_{ij}$ für $i \neq j$.

Im Falle $n \geq 5$ ergibt sich hieraus, dass

$$K_{rs} = \sum_{i \neq s} k^i(r, s)\ (X_{is} + X_{si}) + k^r(r, s) X_{ss}.$$

Durch geeignete Abänderung der Basisvektorn $w_1, \cdots, w_n$ erhält man schliesslich $K_{rs} = 0$ für $1 \leq r, s \leq n$ und $r \neq s$. Wir überlassen die langwierige, jedoch triviale Nachrechnung dem Leser.

Im Falle $n = 4$ führt dasselbe Verfahren zu einer Festlegung der $K_{rs}$. Auch in diesem Fall führen wir die Rechnung nicht durch. Man erhält für die $K_{rs}$ die folgende Tabelle.

$$K_{41} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{42} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{43} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_{31} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{34} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix},$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Aus $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ ergeben sich die Fälle (a) und (b) von (iib).

LEMMA 2.3. *Die Voraussetzungen seien wie in Lemma* 2.2 (iib). *Ist dann $v$ ein isotropes Element aus $V - V_1$, so hat $v$* 120 *Konjugierte unter $L$, d.h. alle isotropen Elemente aus $V - V_1$ sind unter $L$ konjugiert. Ferner $C_L(v) \cong L_3(2)$.*

*Beweis.* Die Bezeichnungen seien wie im Beweis von Lemma 2 (ii) gewählt. Offenbar

$$C_L(w_1) \subseteq \langle t_{14}, t_{24}, t_{34}, t_{13}, t_{23}, t_{43}, t_{12}, t_{32}, t_{42}\rangle.$$

Ferner ist klar, dass

$$C_L(w_1) \cap \langle t_{14}, t_{13}, t_{12}\rangle = 1.$$

Es folgt $|C_L(w_1)| \leq 168$. Es gibt also $k \geq |L_4(2)|/168 = 120$ Konjugierte unter $L$ von $w_1$. Andererseits liegen in $V - V_1$ nach 2.1 genau 120 isotrope Elemente, was die Behauptung beweist.

LEMMA 2.4. *Es sei $H = C_G(E)$. Dann gilt $z^G \cap E = \{z\}$.*

*Beweis.* Sei $H = C_G(E)$, so gilt $H = E \times L$. Es sei $S = E \times S^*$ eine $S_2$-Untergruppe von $H$, wobei $S^*$ die $S_2$-Untergruppe der linken, unteren Dreiecksmatrizen von $L$ ist; d.h. $j_1, \cdots, j_{[n/2]} \in S^*$. Also $Z(S) = \langle z, j_1\rangle$. Wir bezeichnen mit $K_k(X)$ das *k-te* Glied der absteigenden Zentralreihe (Bezeichnung wie in [5; III, 2.2]). Nach [5; III, 16.4] gilt $K_{n-1}(S) = \langle j_1\rangle$. Also $\langle j_1\rangle$ char $S$. Es folgt $z \not\sim_G j_1 \not\sim_G zj_1 \not\sim_G z$.

Angenommen, $y$ ist aus $E - \langle z\rangle$ und $y \sim z$. Ist $W = C_S(y)$, so $|S:W| = 2$. Sei $S_1$ eine $S_2$-Untergruppe von $C_G(y)$ mit $W \subseteq S_1$. Also $S$, $S_1 \subseteq N_G(W)$ und $S$ und $S_1$ sind in $N_G(W)$ konjugiert. Weiterhin gilt $Z(W) = \langle z, j_1, y\rangle$ und $Z(W) \cap \mho_1(W) = \langle z, j_1\rangle$. Also bleibt $z$ bei der Konjugation von $S$ zu $S_1$ in $N_G(W)$ fest. Es folgt der Widerspruch $S_1 \subseteq H$.

LEMMA 2.5. $H = C_G(z) \neq C_G(E)$.

*Beweis.* Die Bezeichnungen seien wie im Beweis von 2.4 gewählt. Wir nehmen an, dass $H = C_G(E)$. Nach 2.4 ist $z$ zu keinem Element aus $E - \langle z\rangle$ konjugiert. Ebenso wie im Beweis von 2.4z eigt man, dass $z$ nicht zu $yj_1$ konjugiert is für $y \in E - \langle z\rangle$.

Ist $e$ und $e'$ aus $Z(S)$, so sind $e$ und $e'j_k$ für $k \geq 2$ nicht konjugiert: Angenommen, dies wäre der Fall. Wir setzen $W = C_S(e'j_k)$. Es gilt

$$Z(W) = \langle z, j_1, j_k\rangle \quad \text{und} \quad [Z_2(W), W] = \langle z, j_1\rangle.$$

Folglich ist $N_G(W) \subseteq H$. Es sei $S_1$ eine $S_2$-Untergruppe von $C_G(e'j_k)$, so $W \subset S_1$ und $W \subset N_{S_1}(W) \subseteq H$. Aber $W$ ist eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(e'j_k)$.

Angenommen, es ist $z$ zu $yj_k$ konjugiert mit $y \in E - \langle z\rangle$ und $k \geq 2$. Wir setzen $W = C_S(yj_k)$. Dann ist $Z(W) = \langle z, y, j_1, j_k\rangle$. Sei $S_1$ eine $S_2$-Untergruppe von $C_G(yj_k)$ mit $W \subset S_1$. Da $Z(S_1)$ von $z$ zentralisiert wird, folgt $Z(S_1) \subseteq Z(W)$. Da $yj_k$ aus $Z(S_1)$, enthält $Z(S_1)$ auch ein Element der

Gestalt $j_1^\alpha j_k^\beta z^\gamma$ mit $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Wäre $\beta = 1$, so $e \sim e'j_k$ mit $e, e'$ aus $Z(S)$. Wäre $\gamma = 0$, so sind die Elemente $yj_k$ und $yj_1j_k$ aus $Z(S_1)$ konjugiert. Wäre schliesslich $\alpha = 0$, so ist $z \in Z(S_1)$, was ebenfalls unmöglich ist. Es folgt $Z(S_1) = \langle zj_1, yj_k\rangle$. Andererseits ist $j_k$ zu $j_1j_k$ in $S^*$ konjugiert und $y$ zu $zy$ in $E$ konjugiert. Das ergibt den Widerspruch $yj_k \sim zyj_1j_k$. Also gilt $z^G \cap S = \{z\}$. Ein Resultat von Glauberman liefert den Widerspruch $G = O(G)\cdot H$.

*Bemerkung.* Von nun an können wir stets annehmen, dass $L$ treu auf $E$ und $V = E/\langle z\rangle$ operiert, da $L$ einfach ist.

## 3. Der Fall $n = 4$

Während des gesamten Abschnittes sei $n = 4$ und $V = E/\langle z\rangle$. Es sei $s$ ein Element der Ordnung 15, der sogenannte Singer-Zyklus (siehe [5; II, 7.3]), aus $L$. Dann existiert ein Element $r$ mit $o(r) = 4$ und $N_L(\langle s\rangle) = \langle s, r\rangle$.

Angenommen, $s^3$ operiere nicht fixpunktfrei auf dem orthogonalen Vektorraum $V$. Dann gilt $V = V_0 \oplus V_1$ mit $V_0 = C_V(s^3)$ und $V_1 = [V, s^3]$. $V_0$ und $V_1$ sind $\langle s, r\rangle$-invariante Unterräume von $V$ und die Urbilder dieser Räume sind extraspezielle Gruppen der Weite 2. Angenommen, es operiert $s^5$ treu auf $V_1$. Dann wird $\langle s, r\rangle$ treu auf $V_1$ dargestellt. Also liegt $\langle s, r\rangle$ in der äusseren Automorphismengruppe einer extraspeziellen Gruppe der Weite 2. Es sei $E^*$ das Urbild von $V_1$ in $E$. Ist $E^*$ vom Typ $D \cdots D$, so gilt $5 \nmid |A(E^*)|$. Also ist $E^*$ vom Typ $D \cdots Q$ und $A(E^*) = \Sigma_5$ (der symmetrischen Gruppe auf 5 Symbolen).

Aber $\Sigma_5$ enthält kein Element der Ordnung 15. $s^5$ operiert also zentralisierend auf $V_1$ und wird auf $V_0$ treu dargestellt. Es folgt $V_0 = V_{10} \oplus V_{20}$ mit $V_{10} = C_{V_0}(s^5)$ und $V_{20} = [V_0, s^5]$. Angenommen, $V_{10} = 0$. Dann existiert ein Element $y$ der Ordnung 3 mit $y \sim_L s^5$, $y \in C_L(s^5)$ und $\langle y, s^3\rangle = A_5$. Da $y$ $V_0$ und $V_1$ normalisiert und $s^3$ nicht zentralisiert, wird $y$ auf $V_1$ treu dargestellt. Da das Urbild von $V_1$ in $E$ vom Typ $D \cdots Q$ ist, kann $y$ nicht fixpunktfrei auf $V_1$ operieren. Es folgt, dass $y$ treu auf $V_0$ dargestellt wird und $C_{V_0}(y) \neq 0$. Somit $ys^5 \nsim y^{-1}s^5$, was im Widerspruch zu $L \cong A_8$ steht. Es folgt $V_{10} \neq 0$. Ist $y \sim s^5$ und $y \in C_L(s^5)$, so folgt $\dim C_V(ys^5) = 4$.

Es operiere nun $s^3$ fixpunktfrei auf $V$. Es ist $V = V_0 \oplus V_1$ mit $V_0 = C_V(s^5)$ und $V_1 = [V, s^5]$. Da die $V_i (i = 1, 2)$ auch $s^3$-invariant sind, operiert $\langle s, r\rangle$, eine Gruppe der Ordnung 60, treu auf $V_1$. Angenommen, $V_1 \neq V$, so ist $\dim V_1 = 6$, da sonst $\dim V_1 = 2$ oder $\dim V_1 = 4$ und $A(E^*)$ kein Element der Ordnung 15 enthalten kann, wenn $E^*$ das volle Urbild von $V_1$ in $E$ bezeichnet. Andererseits wird $V_1$ von $s^3$ normalisiert und $\dim [V_1, s^3] \leq 4$, was der fixpunktfreien Aktion von $s^3$ auf $V$ widerspricht. Also $V_1 = V$ und $s^3$ und $s^5$ operieren fixpunktfrei und treu auf $V$. $V$ hat eine $s$-invariante Zerlegung in isotrope Teilräume der Dimension 4 der Gestalt $V = V_1 \oplus V_2$ und $s$ operiert transitiv auf $V_i^\#$ $(i = 1, 2)$

Wir haben bewiesen:

LEMMA 3.1. *Es sei s ein Element der Ordnung* 15 *aus* $L$. *Dann trifft einer der folgenden Fälle zu.*

(i) $s^3$ *und* $s^5$ *operieren fixpunktfrei auf* $V$. $V$ *hat eine s-invariante Zerlegung in isotrope Teilräume* $V_i$ $(i = 1, 2)$ *mit* $\dim V_i = 4$, $V = V_1 \oplus V_2$ *und s operiert transitiv auf* $V_i^{\#}$. $E$ *ist vom Typ* $D \cdots D$.

(ii) $s^3$ *operiert treu auf einem echten Teilraum* $V_1$ *von* $V$, *dessen Urbild* $E_1$ *in* $E$ *vom Typ* $D \cdots Q$ *ist.* $s^3$ *zentralisiert einen Teilraum* $V_0$ *der Dimension* 4. *Sind* $s^5$ *und* $y$ *Vertreter der zwei Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung* 3 *aus* $L$, *so gilt* $\dim C_V(s^5) = 6$ *und* $\dim C_V(y) = 4$.

LEMMA 3.2. *In* $A_8$ *ist jede Untergruppe* $X$ *vom Index* 15 *isomorph zu einer elementar-abelschen Gruppe* $F$ *der Ordnung* 8, *die durch* $L_2(7)$ *zerfallend erweitert ist.*

Den Beweis dieses und auch des folgenden Lemmas überlassen wir dem Leser.

LEMMA 3.3. *Es sei* $F_{21}$ *eine Frobeniusgruppe der Ordnung* 21 *in* $A_8$ *und* $X$ *eine Untergruppe von* $A_8$, *die* $F_{21}$ *enthält mit* $|F_{21}| < |X| < |A_8|$. *Ist* $|A_8 : X| \neq |A_8|$, *so ist* $|X| \in \{168, 2^6 \cdot 3 \cdot 7\}$.

Es liege nun der Fall (i) von 3.1 vor. Ist $s$ ein Element der Ordnung 15, so hat $V$ eine $N$-invariante Zerlegung $V = V_1 \oplus V_2$ in isotrope Teilräume der Dimension 4, wobei $N = N_L(\langle s \rangle)$. Beachte dabei, dass die Darstellung, die $\langle s \rangle$ auf $V_1$ erfährt kontragredient zu der Darstellung ist, die $\langle s \rangle$ auf $V_2$ erfährt, und somit die Zerlegung $N$-invariant wird. Die Menge der isotropen Elemente aus $V$ zerfällt somit in $N$-Bahnen der folgenden Längen:

$$60, 30, 15, 15, 15.$$

Dabei werden zwei $N$-Bahnen der Länge 15 durch $V_1^{\#}$ und $V_2^{\#}$ repräsentiert. Ein Element der Ordnung 7 aus $L$ fixiert in $V$ genau zwei isotrope Elemente. Es folgt, dass entweder eine $L$-Bahn der Länge 120 oder eine $L$-Bahn der Länge 105 von isotropen Vektoren existiert, da keine $L$-Bahn der Länge 135 existieren kann. Wir haben die folgenden Möglichkeiten von Längen der $L$-Bahnen:

(1) 120, 15
(2) 105, 15, 15
(3) 105, 30.

Es fällt (3) sofort aus, da $A_8$ keine Untergruppe vom Index 30 enthält. Im Falle (2) ist eine der $L$-Bahnen $V_1^{\#}$ oder $V_2^{\#}$ und 2.2 lässt sich anwenden. Liegt nun der Fall 1 vor und ist die Bahn der Länge 15 $V_1^{\#}$ oder $V_2^{\#}$, so lässt sich ebenfalls 2.2 anwenden. In diesen Fällen normalisiert $L$ einen isotropen Teilraum der Dimension 4.

Angenommen, es seien die Elemente der Bahn $B$ der Ordnung 15 im Fall (1) nicht die nichttrivialen Elemente eines isotropen Unterraumes von $V$. $\langle B \rangle$

ist ein $L$-invarianter Teilraum von $V$. Wäre $\langle B\rangle \neq V$, so wäre für $i = 1$ oder $i = 2$ sicher $0 \subset V_i \cap \langle B\rangle \subset V_i$, was im Widerspruch zu der Tatsache steht, dass $\langle s\rangle$ transitiv auf den $V_i^{\#}$ operiert. Also $\langle B\rangle = V$. Es sei $X$ der Stabilisator des Punktes $v_1$ aus $B$. Nach 3.2 ist $X$ die zerfallende Erweiterung einer elementar-abelschen Gruppe $F$ durch $L_2(7)$. Mit $\langle v_1\rangle$ ist auch $\langle v_1\rangle^\perp$ $X$-invariant. Wir wählen eine Basis von $V$ in der Gestalt $v_1, \cdots, v_4, w_1, \cdots, w_4$ derart, dass $\{v_1, w_4\}$, $\{v_2, w_3\}$, $\{v_3, w_2\}$ und $\{v_4, w_1\}$ hyperbolische Paare sind. Bzgl. dieser Basis haben die Matrizen für Elemente aus $X$ die Gestalt

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ B & A & \\ C & D & 1 \end{bmatrix}.$$

$A$ ist dabei eine 6-dimensionale, orthogonale Matrix zu einem orthogonalen Vektorraum von maximalem Index. Wir betrachten den Homomorphismus

$$X \ni x = \begin{bmatrix} 1 & & \\ B & A & \\ C & D & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi} A.$$

Es sei $X = F \cdot K$ mit $F \cap K = 1$ und $K \cong L_2(7)$. Klar ist, dass

$$K \cap \operatorname{Ker} \varphi = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{rad} \langle v_1\rangle^\perp = \langle v_1\rangle.$$

$\langle v_1\rangle^\perp/\langle v_1\rangle$ ist damit ein orthogonaler, $X$-invarianter Vektorraum von maximalem Index. Nach Held und Schoenwaelder [4; 3.2, 3.3 und §4] folgt, dass für ein Element $k$ aus $K$ bzgl. dieser Basis (bei geeigneter Wahl von $v_2, v_3, v_4, w_1, w_2, w_3$) die Zuordnung

$$k \to \begin{bmatrix} 1 & & & \\ A & k & & \\ B & K(k) & k^* & \\ C & D & E & 1 \end{bmatrix}$$

gilt, wobei $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $K(k)$ und $k^*$ Funktionen von $k$ sind. Für $K(k)$ unterscheiden wir die Fälle:

(A) $K(k) = 0$ für alle $k$ aus $K$.
(B) Es existieren gewisse $k$ aus $K$ mit $K(k) \neq 0$.

Ferner können wir annehmen, dass einem gewissen Element $r_0$ aus $K$ der Ordnung 3 die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & D & & & \\ & & & D^* & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

zugeordnet ist mit

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es sei $r_1$ ein Element der Ordnung 3 aus $C_L(r_0)$, das fixpunktfrei auf $V$ operiert. $V^0 = C_V(r_0)$ und $V^1 = [V, r_0]$ sind $r_1$-invariant.

Angenommen, $v_1^{r_1} = v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} w_3^{\alpha_3} w_4$. Da $r_1$ fixpunktfrei operiert, ist dann $v_1^{r_1 r_1} = v_1^{\alpha_1+1} v_2^{\alpha_2} w_3^{\alpha_3} w_4$. Es folgt

$$0 = g(v_1^{r_1}) = \alpha_1 + \alpha_2\alpha_3 \quad \text{und} \quad 0 = g(v_1^{r_1 r_1}) = \alpha_1 + 1 + \alpha_2\alpha_3,$$

ein Widerspruch.

Also $v_1^{r_1} \in \langle v_1 \rangle^{\perp}$.

Es liege zunächst der Fall (A) vor. Nach [4; §3] liegen die Elemente aus

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle - \langle v_1 \rangle \quad \text{und} \quad \langle v_1, w_1, w_2, w_3 \rangle - \langle v_1 \rangle$$

in $K$-Bahnen der Länge 7. Die übrigen Elemente aus $\langle v_1 \rangle^{\perp} - \langle v_1 \rangle$ liegen in $K$-Bahnen der Länge 21. Wir unterscheiden für $\alpha = 0, 1$.

(a) $v_1^{r_1} = v_1^{\alpha} v_2$
(b) $v_1^{r_1} = v_1^{\alpha} w_3$
(c) $v_1^{r_1} = v_1^{\alpha} v_2 w_3$.

Im Fall (a) ist $\langle v_1, \cdots, v_4 \rangle$ $Y$-invariant mit $Y = \langle K, r_1 \rangle$. Aus 3.3 folgt $|L : Y| = 8$ und $Y$ operiert transitiv auf $\langle v_1, \cdots, v_4 \rangle^{\#}$. Somit $\langle B \rangle \neq V$, ein Widerspruch. Genauso folgt in Fall (b) der Widerspruch. Liegt aber der Fall (c) vor, so liegt $v_1$ sicher in einer $L$-Bahn, die mehr als 15 Elemente besitzt.

Es liege nun der Fall (B) vor. Aus [4; §3] folgt, dass alle Elemente aus $\langle v_1, \cdots, v_4 \rangle - \langle v_1 \rangle$ in $K$-Bahnen der Länge 7 liegen. Die übrigen isotropen Elemente aus $\langle v_1 \rangle^{\perp} - \langle v_1 \rangle$ verteilen sich in $K$-Bahnen der Länge 28. Wir unterscheiden wieder dieselben Fälle (a)–(c) wie unter (A). Trifft der Fall (b) oder (c) zu, so liegt $v_1$ in einer $L$-Bahn die mehr als 15 Elemente enthält, ein Widerspruch. Im Fall (a) ist aber $\langle v_1, \cdots, v_4 \rangle$ $Y$-invariant und $\langle B \rangle = \langle v_1, \cdots, v_4 \rangle \neq V$, was ebenso falsch ist. Wir haben gezeigt:

LEMMA 3.4. *Liegt der Fall* (i) *von Lemma* 3.1 *vor, so normalisiert $L$ einen isotropen Teilraum der Dimension* 4.

Es liege der Fall (ii) von Lemma 3.1 vor. Ist $E$ vom Typ $D \cdots D$, so enthält $V$ 135 isotrope und 120 nicht-isotrope Elemente. Ist $E$ vom Typ $D \cdots Q$, so enthält $V$ 119 isotrope und 136 nicht-isotrope Elemente.

Es sei $F_{21} = \langle s, r \rangle$ eine Frobeniusgruppe der Ordnung 21 aus $L$ mit $o(s) = 7$ und $o(r) = 3$. Dann sind $V_0 = C_V(s)$ und $V_1 = [V, s]$ reguläre, orthogonale Teilräume von $V$ mit $\dim V_0 = 2$ und $\dim V_1 = 6$. $r$ normalisiert $V_0$ und $V_1$. Nach [4; 1.3, 1.5] ist das Urbild von $V_1$ in $E$ vom Typ $D \cdots D$ und $C_{V_1}(r)$ hat die Dimension 2. Aus 3.1 (ii) folgt $V_0 \subseteq C_V(r)$ und das Urbild zu $V_0$ in $E$

ist eine Diedergruppe der Ordnung 8 falls $E$ vom Typ $D \cdots D$ ist und eine Quaternionengruppe der Ordnung 8 falls $E$ vom Typ $D \cdots Q$ ist.

Eine echte Untergruppe $X$ von $L$, die $F_{21}$ echt enthält, hat nach 3.3 entweder die Ordnung 168 oder $2^6 \cdot 3 \cdot 7$, falls $|L : X| \neq 8$. Im Stabilisator $X$ eines Elementes $v_0$ aus $V_0$ liegt $F_{21}$. Angenommen, $X = F_{21}$, so liegt $v_0$ in einer $L$-Bahn der Länge $2^6 \cdot 3 \cdot 5$, was unmöglich ist.

Es habe $L$ eine Bahn von Elementen aus $V^{\#}$ der Länge 8 (wobei es gleichgültig ist, ob diese Bahn aus isotropen oder nicht-isotropen Elementen besteht und ob $E$ vom Typ $D \cdots D$ oder $D \cdots Q$ ist). Sind diese 8 Elemente linear abhängig, so erzeugen sie einen echten Teilraum $V^*$ von $V$, auf dem $L$ treu operiert. Ist $\dim V^* = 7$, so hat $V^*$ einen Teilraum $V^0 = \operatorname{rad} V^*$ mit $\dim V^0 = 1$, der von $L$ zentralisiert wird. Ist $\dim V^* = 6$, so kann $V^*$ kein regulärer, orthogonaler Raum sein, da darin keine $L$-Bahn der Länge 8 von nichttrivialen Elementen liegt (benutze $SO(V^*) \cong A_8$). Anderenfalls ist aber $\dim \operatorname{rad} V^* = 2$ und $\operatorname{rad} V^*$ wird von $L$ zentralisiert. Ist $\dim V^* = 5$, so ist $\dim \operatorname{rad} V^* = 1$ oder $\dim \operatorname{rad} V^* = 3$ und $V^*$ enthält auf jeden Fall einen nichttrivialen Teilraum $V^0$, der von $L$ zentralisiert wird. Der Fall $\dim V^* = 4$ tritt nicht auf, da dann $V^*$ notwendigerweise isotrop ist und $L$ transitiv auf $V^{*\#}$ operiert. Sind die 8 Elemente der $L$-Bahn linear unabhängig, so ist ihre Summe ein nichttrivialer Fixvektor von $L$. Also gilt:

($*$) Besitzt $L$ eine Bahn der Länge 8 von Elementen aus $V$, so besitzt $L$ auch einen Fixvektor aus $V^{\#}$.

Es sei $|X| = 168$ und es liege der Type $D \cdots Q$ für $E$ vor. Dann ist $v_0$ nicht-isotrop und liegt in einer $L$-Bahn der Länge 120. Die restlichen $L$-Bahnen von nicht-isotropen Elementen verteilen sich auf eine Menge der Mächtigkeit 16.

Da $A_8$ keine Untergruppe vom Index 16 hat, haben wir entweder zwei $L$-Bahnen der Länge 8 oder wenigstens eine $L$-Bahn der Länge 1. Wegen ($*$) haben wir in beiden Fällen einen nichttrivialen Fixvektor.

Ebenso haben wir einen Fixvektor nach Aussage ($*$), falls $|L : X| = 8$.

Es sei nun $|X| = 168$ und es sei $E$ vom Type $D \cdots D$ Dann erhalten wir eine $L$-Bahn der Länge 120 von isotropen Elementen und eine $V$-Bahn der Länge 15, da keine 7 isotrope Elemente von $L$ zentralisiert werden können.

Ist $|X| = 2^6 \cdot 3 \cdot 7$, so $|L : X| = 15$ und ist $E$ vom Typ $D \cdots D$, so hat $L$ eine Bahn von 15 isotropen Elementen; ist $E$ vom Typ $D \cdots Q$, so hat $L$ eine Bahn von 15 nicht-isotropen Elementen.

Angenommen, es enthält $V$ eine $L$-Bahn von 15 Elementen. Es sei $X$ der Stabilisator eines Elementes $v_1$ dieser Bahn. Dann ist $X$ nach 3.2 die zerfallende Erweiterung einer elementar-abelschen Gruppe der Ordnung $2^3$ durch $L_2(7)$. $X$ operiert dann treu auf $\langle v_1 \rangle^{\perp} / \langle v_1 \rangle$ und $\langle v_1 \rangle^{\perp} / \langle v_1 \rangle$ ist isomorph zu einem regulären, symplektischen Vektorraum. Nach [4; 1.5] hat ein Element $r$ der Ordnung 3 aus $X$ einen Zentralisator der Dimension 4 in $V$. Es sei $r_1$

ein Element der Ordnung 3 aus $C_L(r)$, das gemäss 3.1 (ii) einen Zentralisator der Dimension 6 in $V$ hat. Dann gilt $C_V(r) \subseteq C_V(r_1)$ und $v_1 \in C_V(r_1)$. Es folgt der Widerspruch $r_1 \in X$. Wir haben somit gezeigt:

(**) $L$ hat einen nichttrivialen Fixvektor $v_0$, und $L$ besitzt keine Bahn von 15 nichttrivialen Elementen aus $V$.

Wir wissen, dass eine Frobeniusgruppe $F_{21}$ der Ordnung 21 einen regulären Unterraum $V_0$ von $V$ der Dimension 2 zentralisiert. $V_0$ enthält den Fixvektor $v_0$ von $L$.

Angenommen, $V_0$ ist nicht $L$-invariant. Dann gilt für $v$ aus $V_0 - \langle v_0 \rangle$, dass $v$ in einer $L$-Bahn von 8, 15 oder 120 Elementen liegt (siehe 3.3). $L$-Bahnen der Länge 15 treten nicht auf und in $\langle v_0 \rangle^\perp$ gibt es $L$-Bahnen der Länge 35 von isotropen bzw. nicht-isotropen Elementen, sodass auch keine $L$-Bahn der Länge 120 auftritt. Ist $X$ der Stabilisator von $v$ in $L$, so gilt $| L : X | = 8$, $X \cong A_7$ und $V_0$ ist $X$-invariant. Sei $V = V_0 \oplus V_1$ eine Zerlegung in $X$-invariante Unterräume, so sind $V_0$ und $V_1$ regulär und das Urbild zu $V_1$ in $E$ ist nach [4; 1.3] vom Typ $D \cdots D$. Da $L_2(7)$ isomorph in $X$ eingebettet ist, bilden die 35 isotropen Elemente von $V_1$ und die 28 nicht-isotropen Elemente $X$-Bahnen. Ist $E$ vom Typ $D \cdots D$, so haben die $X$-Bahnen der isotropen Elemente aus $V$ die Längen 35, 35, 35, 28, 1, 1, und die $X$-Bahnen der nicht-isotropen Elemente haben die Längen 28, 28, 28, 35, 1. Ist $E$ vom Typ $D \cdots Q$, so haben die $X$-Bahnen der isotropen Elemente aus $V$ die Längen 35, 28, 28, 28, und die $X$-Bahnen der nicht-isotropen Elemente haben die Längen 28, 35, 35, 35, 1, 1, 1. Es existiert keine $L$-Bahn der Länge 8.

Damit ist $V_0$ $L$-invariant. $V_0^\perp$ ist ebenfalls $L$-invariant und da $V_0$ regulär, ist $V = V_0 \oplus V_0^\perp$. Wir haben bewiesen:

Lemma 3.5. *Es liege der Fall* (ii) *von Lemma* 3.1 *vor. Dann hat $E$ eine $L$-invariante Zerlegung $E = E_1 E_2$, $E_1 \cap E_2 = \langle z \rangle$ derart, dass $E_1$ von der Ordnung $2^7$ und vom Typ $D \cdots D$ ist und $L$ treu auf $E_1$ operiert. $L$ zentralisiert $E_2$ und $E_2$ ist eine Diedergruppe der Ordnung* 8, *falls $E$ vom Typ $D \cdots D$ ist. $E_2$ ist eine Quaternionengruppe der Ordnung* 8, *falls $E$ vom Type $D \cdots Q$ ist.*

Nach Lemma 2.2, 3.1, 3.4 und 3.5 haben wir die folgenden Fälle zu unterscheiden:

(A) Der Fall, in dem $L$ fixpunktfrei, reduzibel und vollständig reduzibel auf $V$ operiert.

(B) Der Fall, in dem $L$ fixpunktfrei und reduzibel, aber nicht vollständig reduzibel auf $V$ operiert.

(C) Der Fall, in dem $L$ einen Teilraum der Dimension 2 in V zentralisiert.

## A. Der Fall, in dem $L$ fixpunktfrei, reduzibel und vollständig reduzibel auf $V$ operiert.

Lemma 3.6. *Es ist $H$ isomorph zu dem Zentralisator einer 2-zentralen Involution aus $L_6(2)$ und $G \cong L_6(2)$.*

*Beweis.* Nach 2.2 und 1.2, ist $H$ isomorph zur Gruppe der Matrizen der Gestalt

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ A & X & \\ B & C & 1 \end{bmatrix}$$

mit

$$X \in GL(4, 2), \qquad A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_4 \end{bmatrix}, \qquad B = (\beta), \qquad C = (\gamma_1, \cdots, \gamma_4)$$

und $\alpha_1, \cdots, \alpha_4, \beta, \gamma_1, \cdots, \gamma_4 \in F_2$. Suzukis' Kennzeichnung der linearen Gruppen [7; Theorem 1, p. 1045] liefert die Behauptung.

**B. Der Fall, in dem $L$ fixpunktfrei und reduzibel, aber nicht vollständig reduzibel auf $V$ operiert.** Nach 2.2 haben wir einen elementar-abelschen Normalteiler $E_1$ in $E$ der Ordnung $2^5$. In $E_1$ liegt nach 1.2 eine $L$-invariante Untergruppe $E_1^*$ mit $|E_1^*| = 2^4$ und $E_1 = \langle z \rangle \times E_1^*$. Wir wählen nun einen weiteren elementar-abelschen Normalteiler $E_2$ der Ordnung $2^5$, der unter einem Element der Ordnung 15 invariant ist und für den $E_1 \cap E_2 = \langle z \rangle$ und $E = E_1 E_2$ gilt (siehe 3.1). Es sei

$$E_1^* = \langle z_1, \cdots, z_4 \rangle \quad \text{und} \quad E_2 = \langle z, y_1, \cdots, y_4 \rangle$$

derart, dass $\langle z_i, y_i \rangle$ Diedergruppen der Ordnung 8 sind für $1 \leq i \leq 4$. Bei der Zuordnung $z_i\langle z \rangle \to v_i$ und $y_i\langle z \rangle \to w_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ sollen $z_i$ und $y_i$ so gewählt sein, dass die gewählte Notation mit den Bezeichnungen von dem Beweis von 2.2 konsistent ist. Sofern nicht besonders erwähnt, seien für $H/\langle z \rangle$ die Bezeichnungen von 2.2 übernommen. Die Multiplikationstafel von $H/\langle z \rangle$ wurde im Beweis von 2.2 bestimmt.

Für eine Involution $e$ aus $E - E_1$ ist nach 2.3.

$$N_L(e\langle z \rangle) \cong L_2(7).$$

Also $C_L(e) = N_L(e\langle z \rangle)$. Setze nun $e = z_4 y_4$. $e$ ist ein Element der Ordnung 4 und

$$N_L(e\langle z \rangle) \supseteq \langle t_{41}, t_{42}, t_{43}, t_{32} t_{23}, t_{31} t_{13} t_{32}, t_{12} t_{21} t_{31} \rangle.$$

Weiterhin $\langle t_{31}, t_{32}, t_{21} \rangle \cap N_L(e\langle z \rangle) = 1$. $\langle t_{41}, t_{42}, t_{43} \rangle$ ist ein Normalteiler in $N_L(e\langle z \rangle)$ auf dem

$$X = N_L(e\langle z \rangle)/\langle t_{41}, t_{42}, t_{43} \rangle$$

treu operiert. Da $|X| \leq 168 = 8.3.7$ und $3 \mid |X|$, folgt aus $2 \mid |X|$ dann

$$\langle t_{31}, t_{32}, t_{21} \rangle \cap N_L(e\langle z \rangle) \neq 1,$$

ein Widerspruch. Also gilt $2 \nmid |X|$ und da $|X| > 3$, folgt $|X| = 21$. $N_L(e\langle z \rangle)$ ist das semidirekte Produkt einer elementar-abelschen Gruppe $F$ der Ordnung 8 mit einer Frobeniusgruppe $F_{21}$ der Ordung 21 und $F_{21}$ operiert treu auf $F$. Da

$$O^2(N_L(e\langle z\rangle)) = N_L(e\langle z\rangle),$$

haben wir gezeigt:

LEMMA 3.7. *Ist $e$ aus $E - E_1$, so $N_L(e\langle z\rangle) = C_L(e)$.*

Da $C_H(E_1) = E_1$, operiert $H/E_1$ treu auf $E_1$, Bzgl. der festgehaltenen Basis $z, z_1, \cdots, z_4$ von $E_1$ betrachten wir die Wirkung eines Erzeugendensystems von $H/E_1$ auf diese Basis. Da $E_1^*$ $L$-invariant ist haben wir für $l$ aus $L$:

$$lE_1 \to \begin{bmatrix} 1 & \\ & \mathfrak{L} \end{bmatrix}.$$

Dabei sei mit $L \ni l \to \mathfrak{L} \in GL(4, 2)$ ein Isomorphismus von $L$ auf $GL(4, 2)$ bezeichnet. Weiter

$$y_1 E_1 \to \begin{bmatrix} j_1 & \\ & I_3 \end{bmatrix}, \quad y_2 E_1 \to \begin{bmatrix} j_1 & \\ & I_2 \end{bmatrix}, \quad y_3 E_1 \to \begin{bmatrix} j_1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{und} \quad y_4 E_1 \to j_1 .$$

$H/E_1$ ist isomorph zur Gruppe der Matrizen von der Gestalt

$$\begin{bmatrix} 1 & X \\ A & \end{bmatrix}$$

mit

$$X \in GL(4, 2), \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_4 \in F_2 .$$

Die $H/E_1$-Konjugiertenklassen von Involutionen sind repräsentiert durch $y_4 E_1$, $y_3 t_{41} E_1$, $t_{41} E_1$ und $t_{42} t_{31} E_1$, wie man leicht nachprüft.

Es sei $e = z^{\alpha} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} z_4^{\alpha_4} y_3 t_{41}$ ein Element aus $y_3 t_{41} E_1$. Dann gilt

$$e^2 = z^{\beta} z_1^{\alpha_4} y_3 y_3^{t_{41}} = z^{\beta} z_1^{\alpha_4} z_2 \quad (\text{mit } \beta \in \{0, 1\}).$$

Also enthält $y_3 t_{41} E_1$ keine Involution.

Da $y_4$ genau 240 Konjugierte hat, liegt in $E - E_1$ genau eine $H$-Klasse von Involutionen, die durch $y_4$ repräsentiert wird.

Die Gruppe $E_1 L$ können wir mit der Gruppe der Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & R & \\ B & A & 1 \end{bmatrix}$$

identifizieren, wo $R \in GL(4, 2)$, $B = (\beta)$, $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_4)$ und $\alpha_1, \cdots, \alpha_4$, $\beta \in F_2$. $E_1$ entspricht der Menge der Matrizen mit $R = I_4$ und $z \to j_1$. $L$ entspricht denjenigen Matrizen mit $A = 0$ und $B = 0$.

Den Involutionen aus $t_{41} E_1$ entsprechen die Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & j_1 & \\ B & A & 1 \end{bmatrix}$$

mit $\alpha_4 = 0$. $C_L(t_{41}) \cdot E_1$ wird durch diejenigen Matrizen repräsentiert für die $R$ aus $C_{GL(4,2)}(j_1)$ ist. Es sei $e$ aus $C_{E_1}(t_{41})$ und $e$ werde durch eine Matrix von der obigen Gestalt mit $R = I_4$ repräsentiert. $v$ aus $C_L(t_{41})$ werde durch die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & X & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

dargestellt. Dem Element $e^v$ entspricht dann die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & I_4 & \\ B & AX & 1 \end{bmatrix}.$$

Da ferner $t_{41}$ zu $z_1 t_{41}$ konjugiert ist, verbleiben die folgenden 'Normalformen' für Involutionen aus $t_{41} E_1$:

$$t_{41}, \ t_{41} z, \ t_{41} z_3, \ t_{41} z_3 z.$$

Welche Elemente liegen in $C_E(t_{41})$? Es sei

$$e = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} z_4^{\alpha_4} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} y_3^{\beta_3} y_4^{\beta_4}$$

aus $C_E(t_{41})$. Dann ist

$$e^{t_{41}} = z^{\gamma} z_1^{\alpha_4+\beta_1+\beta_4} z_2^{\beta_3} z_3^{\beta_2} z_4^{\beta_1} y_4^{\beta_1} e$$

mit $\gamma \in \{0, 1\}$. Es folgt $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ und $\alpha_4 = \beta_4$.

Da $z_4 y_4$ die Gruppe $C_{E_1}(t_{41})$ zentralisiert, gibt es genau 4 Repräsentanten von $H$-Klassen von Involutionen in $t_{41} E_1$, nämlich $t_{41}$, $t_{41} z$, $t_{41} z_3$, $t_{41} z_3 z$.

Es ist $C_{E_1}(t_{42} t_{31}) = \langle z, z_1, z_2 \rangle$. Die Involutionen aus $t_{42} t_{31} E_1$ haben demnach die Gestalt $t_{42} t_{31} e$ mit $e$ aus $C_{E_1}(t_{42} t_{31})$. $z_3^{\alpha} z_4^{\beta}$ transformiert $t_{42} t_{31}$ in $z_1^{\alpha} z_2^{\beta} t_{42} t_{31}$. Folglich sind alle Elemente der Mengen $t_{42} t_{31} \langle z_1, z_2 \rangle$ und $z t_{42} t_{31} \langle z_1, z_2 \rangle$ untereinander konjugiert, und diese Mengen sind $C_L(t_{42} t_{31})$-invariant. Es sei

$$e = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} z_4^{\alpha_4} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} y_3^{\beta_3} y_4^{\beta_4}$$

aus $C_E(t_{42} t_{31})$. Es ist

$$e^{t_{42} t_{31}} = z^{\gamma} z_1^{\alpha_3+\beta_4} z_2^{\alpha_4+\beta_3} z_3^{\beta_2} z_4^{\beta_1} y_3^{\beta_1} y_4^{\beta_2} e.$$

Es folgt $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $\alpha_4 = \beta_3$ und $\alpha_3 = \beta_4$. Auf jeden Fall gilt $e \in C_E(C_{E_1}(t_{42} t_{31}))$. Damit ist das folgende Resultat gezeigt:

Lemma 3.8. *$H$ hat genau 9 Klassen von Involutionen. Sie werden repräsentiert durch $z$, $z_1$, $y_4$, $t_{41}$, $t_{41} z$, $t_{41} z_3$, $t_{41} z_3 z$, $t_{42} t_{31}$, $t_{42} t_{31} z$.*

Es sei $S = E \cdot S^*$, wobei wir in $L$ mit $S^*$ die Elemente bezeichnen, die auf $E_1^*$ bzgl. unserer festen Basis durch linke, untere Dreiecksmatrizen dargestellt werden. $S$ ist eine $S_2$-Untergruppe von $H$. An dieser Bezeichnung halten wir während des ganzen Abschnittes B fest.

Setze $W = C_S(z_1)$. Dann ist $|S : W| = 2$ und $W$ ist eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(z_1)$. Eine einfache Rechnung zeigt

$$[W, W] = E_1\langle y_3, y_4\rangle[S^*, S^*].$$

Weiter findet man $K_3(W) = E_1\langle y_4\rangle K_3(S^*) = E_1\langle y_4, t_{41}\rangle$ (Bezeichnung wie bei [5; III, 2.2] bzw. in Beweis von 2.4).

Da $z_1$ und $zz_1$ in $S \subseteq N_G(W)$ konjugiert sind, haben $z_1$ und $zz_1$ gleich viele Quadratwurzeln in $K_3(W)$. Da keine Quadratwurzel dieser Elemente in $K_3(W) \cap E$ liegt, haben sie die Gestalt $vt_{41}$ mit $v$ aus $K_3(W) \cap E$. Sei

$$v = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} z_4^{\alpha_4} y_4^{\beta_4},$$

so

$$v^{t_{41}} = z^{\gamma} z_1^{\alpha_4+\beta_4} v \quad (\text{mit } \gamma \in \{0, 1\}).$$

Alle Lösungen der Gleichung $x^2 = z_1$ bzw. $x^2 = zz_1$ in $K_3(W)$ sind aus der Menge

$$z_4 t_{41}\langle z, z_1, z_2, z_3\rangle$$

und aus der Menge

$$y_4 t_{41}\langle z, z_1, z_2, z_3\rangle$$

zu wählen. Jede der beiden Gleichungen hat also $2^4$ Lösungen.

Andererseits sind alle Elemente der Menge

$$z_4 y_4 t_{41}\langle z, z_1, z_2, z_3\rangle \cup z_4 y_4 t_{41}\langle z, z_1, z_2, z_3\rangle.$$

Lösungen der Gleichung $x^2 = z$; d.h. wir haben wenigstens $2^5$ Lösungen in $K_3(W)$. Da $Z(W) = \langle z, z_1\rangle$, ist $\langle z\rangle$ char $N_G(W)$ und es gilt:

LEMMA 3.9. *$C_G(z_1)$ hat eine $S_2$-Untergruppe der Ordnung $2^{14}$ und $z_1 \not\sim_G z$.*

Wir betrachten nun die Involution $y_4$. Nach 2.2 ist

$$C_{S^*}(y_4) = \langle t_{41} t_{43} t_{21}, t_{32} t_{41}, t_{31} t_{42} t_{41}\rangle$$

und $W = C_S(y_4) = E_2\langle z_1, z_2, z_3\rangle \cdot C_{S^*}(y_4)$ ist eine $S_2$-Untergruppe in $C_H(y_4)$.

Man rechnet leicht nach, dass

$$[W, W] = \langle z, z_1, z_2, z_3, y_2, y_3, y_4\rangle\langle t_{31} t_{42} t_{41}\rangle.$$

In $\langle z, z_1, z_2, z_3, y_2, y_3, y_4\rangle$ hat die Gleichung $x^2 = z$ insgesamt 48 Lösungen. Setze $t = t_{31} t_{42} t_{41}$. Da $y_4$ keine Quadratwurzel in $E$ hat, haben die Quadratwurzeln von $y_4$ in $[W, W]$ die Gestalt $et$ mit $e$ aus $E \cap [W, W]$. Es sei

$$e = z^{\alpha'} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} y_2^{\beta_2} y_3^{\beta_3} y_4^{\beta_4}.$$

Dann gilt

$$(et)^2 = z^{\gamma} z^{\alpha_3+\beta_2} y_4^{\beta_2} \quad \text{mit } \gamma \in \{0, 1\}.$$

Notwending dafür, dass $et$ eine Wurzel von $y_4$ ist, ist $\alpha_3 = \beta_2 = 1$.

Da $y_4$ und $zy_4$ in $N_S(W)$ konjugiert sind, erhält man höchstens 16 Lösungen der Gleichung $x^2 = y_4$ bzw. $x^2 = zy_4$ in $[W, W]$. Da $Z(W) = \langle z, y_4\rangle$, ist $\langle z\rangle$ char $W$ und es folgt:

LEMMA 3.10. *Eine $S_2$-Untergruppe von $C_G(y_4)$ hat die Ordnung $2^{11}$ und $y_4 \not\sim_G z$.*

Klar ist, dass $t_{41}$ und $zt_{41}$ denselben Zentralisator in $H$ haben. Es sei $u = t_{41}$ oder $u = t_{41}z$. Dann gilt $C_{S^*}(u) = S^*$ und es folgt, dass $W = C_S(u) = C_E(u) \cdot S^*$ eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(u)$ ist. Mit 3.7 ergibt sich sofort

$$C_E(u) = \langle z, z_1, z_2, z_3, z_4 y_4 \rangle.$$

Ferner ist $Z(W) = \langle z, z_1, t_{41} \rangle$. In $N_S(W)$ findet die folgende Konjugation statt: $t_{41} \sim z_1 t_{41}$, $zt_{41} \sim zz_1 t_{41}$.

Es sei $s$ aus $S^*$ und $s^2 = t_{41}$. $s$ sei bzgl. der Basis $z_1, \cdots, z_4$ von $E_1^*$ die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ A & B & \\ C & D & 1 \end{bmatrix}$$

zugeordnet. Angenommen,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann folgt, $0 = A + BA$, $0 = DB + D$. Ist

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = (\delta_1, \delta_2),$$

so $\alpha_1 = \delta_2 = 0$. Damit ist $s$ aber eine Involution und $s^2 \neq t_{41}$. Die Lösungen der Gleichung $x^2 = t_{41}$ mit $x$ aus $S^*$ liegen also in

$$\langle t_{41}, t_{42}, t_{43}, t_{21}, t_{31} \rangle.$$

Da mit $x$ auch $xt_{41}$ eine Lösung der obigen Gleichung ist, betrachten wir von den 12 Lösungen nur: $t_{21}t_{42}$, $t_{21}t_{42}t_{43}$, $t_{21}t_{42}t_{31}$, $t_{31}t_{43}$, $t_{31}t_{43}t_{42}$ und $t_{31}t_{21}t_{43}$.

Man rechnet nach, dass

$$C_{C_E(u)}(t_{21}t_{42}) = C_{C_E(u)}(t_{21}t_{42}t_{43}) = \langle z, z_1, z_3 \rangle$$

$$C_{C_E(u)}(t_{21}t_{42}t_{31}) = C_{C_E(u)}(t_{31}t_{43}t_{21}) = \langle z, z_1, z_2 z_3 \rangle$$

$$C_{C_E(u)}(t_{31}t_{43}t_{42}) = C_{C_E(u)}(t_{31}t_{43}) = \langle z, z_1, z_2 \rangle.$$

Offenbar hat man insgesamt $2^4 \cdot 6$ Lösungen der Gleichung $x^2 = t_{41}$ bzw. $x^2 = z_1 t_{41}$.

Sei $x^2 = zt_{41}$. Es folgt $x = vs$ mit $v \in C_E(u)$, $s \in S^*$, $s^2 = t_{41}$ und $v^s = zv$. Nach 3.7 ist somit die Gleichung $x^2 = zt_{41}$ in $W$ unlösbar.

Wir betrachten Lösungen der Gleichung $x^2 = z$. Es sei $vs$ eine solche Lösung mit $s$ aus $S^*$ und $v$ aus $C_E(u)$. Aus 3.7 folgt $s^2 = 1$, $v^s = v$ und $v^2 = z$.

Wegen $C_{S^*}(z_4 y_4) \cap \langle t_{21}, t_{31}, t_{32} \rangle = 1$, ist

$$C_{S^*}(z_4 y_4) = \langle t_{41}, t_{42}, t_{43} \rangle.$$

Da $\langle t_{41}, t_{42}, t_{43}\rangle \subseteq C_S(\langle z, z_1, z_2, z_3\rangle)$, sind alle Elemente der Nebenklasse

$$z_4\, y_4\langle t_{41}, t_{42}, t_{43}\rangle\langle z, z_1, z_2, z_3\rangle$$

Lösungen der Gleichung $x^2 = z$. Wir haben damit wenigstens $2^7$ Lösungen in $W$. Auf Grund von 3.9 folgt $\langle z\rangle \lhd N_G(W)$. Also:

LEMMA 3.11. *Es sei* $u = t_{41}$ *oder* $u = zt_{41}$. *Eine* $S_2$*-Untergruppe von* $C_G(u)$ *hat die Ordnung* $2^{11}$ *und* $u \not\sim_G z$.

Nun bezeichnen wir mit $u$ entweder $z_3\, t_{41}$ oder $zz_3\, t_{41}$. Es sei $vs$ aus $C_H(u)$. Dann $s \in C_L(t_{41})$. Ferner ist

$$C_E(u) = \langle z, z_1, z_2, z_3, z_4\, y_4\rangle.$$

Weiter ist

$$W = \langle t_{41}, t_{42}, t_{43}, t_{21}, z_4\, t_{31}, t_{23}\rangle C_E(u) \subseteq C_H(u)$$

eine 2-Gruppe derart, dass $WE/E$ eine $S_2$-Untergruppe von $H/E$ ist. Also ist $W$ eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(u)$.

$$Z(W) = \langle z, z_1, z_3\, t_{41}\rangle.$$

In $N_H(W)$ findet folgende Konjugation statt: $u \sim z_1\, u$, $zu \sim zz_1\, u$.

Wir betrachten Lösungen der Gleichung $x^2 = z$. Im Beweis von 3.11 wurde gezeigt, dass alle Elemente der Menge

$$z_4\, y_4\langle t_{41}, t_{42}, t_{43}\rangle\langle z, z_1, z_2, z_3\rangle$$

Lösungen dieser Gleichung sind; d.h. wir haben wenigstens $2^7$ Lösungen.

Nun betrachten wir Lösungen der Gleichung $x^2 = u$. Es sei vs eine Lösung mit $sE \in (L \cap W)E/E$ und $v \in C_E(u)$.

Da $s^2E = t_{41}E$, folgt wie in dem Beweis von 3.11, dass

$$s \in \langle t_{41}, t_{42}, t_{43}, t_{21}, z_4\, t_{31}\rangle.$$

Jede Lösung $x$ lässt sich durch Elemente aus $Z(W)$ abändern. So können wir für $v$ den Ansatz $v = z_2^{\beta_2} z_3^{\beta_3} (z_4\, y_4)^{\beta_4}$ machen und $s$ dürfen wir aus der Menge

$$\{t_{21}\, t_{42},\ t_{21}\, t_{42}\, t_{43},\ t_{21}\, t_{42}\, z_4\, t_{31},\ z_4\, t_{31}\, t_{42},\ z_4\, t_{31}\, t_{43}\, t_{42},\ z_4\, t_{31}\, t_{43}\, t_{21}\}$$

wählen.

Jedes Element aus $C_E(u)$ lässt sich eindeutig in der Form

$$z^{\varepsilon} z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} z_3^{\varepsilon_3} (z_4\, y_4)^{\varepsilon_4}$$

darstellen mit $\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_4$ aus $\{0, 1\}$.

Die Wirkung unserer 6 Elemente, die für $s$ in Frage kommen, auf $C_E(u)$ können somit durch $5 \times 5$-Matrizen beschrieben werden, die sich durch die oben beschriebene, eindeutige Zerlegung der Elemente aus $C_E(u)$ bestimmen. Es sei $y_4^{t_{21}} = z^{\alpha_1} z_1\, z_2\, y_4$ und $y_4^{t_{21} t_{31}} = z^{\alpha_2} z_1\, z_2\, z_3\, y_4$, so

$$t_{21}t_{42} \to \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & \\ \alpha_1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad t_{21}t_{42}t_{43} \to \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & \\ \alpha_1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$t_{21}t_{42}z_4t_{31} \to \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ \alpha_2+1 & 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix},$$

$$z_4t_{31}t_{43} \to \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ \alpha_1+\alpha_2+1 & 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix},$$

$$z_4t_{31}t_{43}t_{42} \to \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ \alpha_1+\alpha_2+1 & 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix},$$

$$z_4t_{31}t_{43}t_{21} \to \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ \alpha_2+1 & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es gilt

$$s^2 = t_{41} \quad \text{für } s \in \{t_{21}t_{42},\ t_{21}t_{42}t_{43}\}$$

$$s^2 = z_1z_3t_{41} \quad \text{für } s \in \{z_4t_{31}t_{43},\ z_4t_{31}t_{43}t_{21}\}$$

$$s^2 = z_2t_{41} \quad \text{für } s = t_{21}t_{42}z_4t_{31}$$

$$s^2 = z_1z_2z_3t_{41} \quad \text{für } s = z_4t_{31}t_{43}t_{42}$$

Es ist $(vs)^2 = vv^s s^2$. Mit dem Ansatz $v = z_2^{\beta_2}z_3^{\beta_3}(z_4y_4)^{\beta_4}$ gilt:

$$v^{t_{21}t_{42}} = z^{\alpha_1\beta_4}z_1^{\beta_2+\beta_4}z_3^{\beta_4}v$$

(Es folgt $\beta_2 = \beta_4 = 1$),

$$v^{t_{21}t_{42}z_4t_{31}} = z^{\beta_4(\alpha_2+1)}z_1^{\beta_2+\beta_3+\beta_4}z_2^{\beta_4}v$$

(Es treten keine Lösungen auf),

$$v^{z_4t_{31}t_{43}} = z^{\beta_4(\alpha_1+\alpha_2+1)}z_1^{\beta_3+\beta_4}z_2^{\beta_4}v$$

(Es folgt $\beta_3 = 1$ und $\beta_4 = 0$),

$$v^{z_4 t_{31} t_{43} t_{42}} = z^{\beta_4(\alpha_1+\alpha_2+1)} z_1^{\beta_3+\beta_4} z_2^{\beta_4} v$$

(Es folgt $\beta_3 = 0$ und $\beta_4 = 1$),

$$v^{z_4 t_{31} t_{43} t_{21}} = z^{\beta_4(\alpha_2+1)} z_1^{\beta_2+\beta_3} z_3^{\beta_4} v$$

(Es folgt $\beta_2 + \beta_3 = 1$ und $\beta_4 = 0$).

Schliesslich gilt $v^{t_{21} t_{42}} = v^{t_{21} t_{42} t_{43}}$. Da man eine Standartlösung der Gestalt $vs$ noch um ein Element aus $Z(W)$ abändern kann, haben die Gleichungen $x^2 = u$ und $x^2 = zu$ höchstens $5 \cdot 2^4$ Lösungen in $W$. Mit 3.9 folgt $\langle z \rangle \lhd N_G(W)$ und es gilt:

Lemma 3.12. *Es sei* $u = z_3 t_{41}$ *oder* $z z_3 t_{41}$. *Eine* $S_2$-*Untergruppe von* $C_G(u)$ *hat Ordnung* $2^{11}$ *und* $z \not\sim_G u$.

Es sei nun $u = t_{42} t_{31}$ bzw. $u = z t_{42} t_{31}$. Es ist

$$C_{S^*}(u) = \langle t_{41}, t_{42}, t_{31}, t_{32}, t_{21} t_{43} \rangle.$$

$W = C_S(u) = C_E(u) \cdot C_{S^*}(u)$ ist eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(u)$. Ferner

$$C_E(u) = \langle z, z_1, z_2, z_3 y_4, z_4 y_3 \rangle \quad \text{und} \quad Z(W) = \langle z, z_1, t_{42} t_{31} \rangle.$$

$C_E(u)$ ist elementar-abelsch der Ordnung $2^5$. Es sei $S^0 = W \cap S^*$. Wir betrachten die Wirkung der Erzeugenden von $S^0$ auf $C_E(u)$ bzgl. der Basis $z, z_1, z_2, z_3 y_4, z_4 y_3$.

$$t_{41} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ \alpha_1 & 1 & & 1 & \\ \alpha_2 & 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}, \qquad t_{42} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ \alpha_3 & & 1 & 1 & \\ \alpha_4 & 1 & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$t_{31} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ \alpha_3 & & 1 & 1 & \\ \alpha_4 & 1 & & & 1 \end{bmatrix}, \qquad t_{32} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ \alpha_5 & 1 & 1 & 1 & \\ \alpha_6 & & 1 & & 1 \end{bmatrix},$$

$$t_{21} t_{43} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ \alpha_7 & 1 & & 1 & \\ \alpha_8 & & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da $t_{41} t_{42} t_{32}$ auf $C_E(u)/\langle z \rangle$ die 1-Darstellung erfährt, ist

$$t_{41} t_{42} t_{32} \in C_L(C_E(u)) \quad \text{und} \quad \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_3 \quad \text{und} \quad \alpha_6 = \alpha_2 + \alpha_4.$$

Aus $(t_{21} t_{43} t_{32})^2 = t_{42} t_{31} t_{41}$ folgt $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = \alpha_5 + \alpha_7$, und da $z_3 y_4$ von

$t_{41}\, t_{21}\, t_{43}$ zentralisiert wird, ist $\alpha_1 = \alpha_7$. Setze

$$S^{00} = \langle t_{41}, t_{42}, t_{32}, t_{31}\rangle.$$

Sei $t, s \in S^{00}$, so

$$[t\,(t_{21}\,t_{43})^{\alpha},\, s\,(t_{21}\,t_{43})^{\beta}] = t^{(t_{21}t_{43})^{\alpha}}\,(st)^{(t_{21}t_{43})^{\alpha+\beta}}\,s^{(t_{21}t_{43})^{\beta}}$$

Wegen $s^{(t_{21}t_{43})^{\alpha}}\cdot s \in \langle t_{41}, t_{42}\,t_{31}\rangle$ für $s \in S^{00}$, folgt

$$[S^0, S^0] = \langle t_{41}, t_{42}\,t_{31}\rangle$$

und

$$[W, W] = \langle z_1, z_2, z_3\,z_4\rangle[S^0, S^0] \text{ oder } \langle z, z_1, z_2, z_3\,z_4\rangle[S^0, S^0]$$

Auf jeden Fall hat $z_1$ als einziges Element aus $Z(W)$ eine Wurzel in $[W, W]$. Also $\langle z_1\rangle$ char $W$. Ferner findet in $N_S(W)$ die Konjugation $u \sim z_1 u$ und $zu \sim zz_1 u$ statt. Wir nehmen an, dass $u$ zu $z$ in $G$ konjugiert ist. Wir wissen, dass $W$ eine $S_2$-Untergruppe von $C_G(u, z)$ ist mit $Z(W) = \langle z, z_1, u\rangle$ und $\langle z_1\rangle$ char $W$.

Indem wir nun die Rollen von $u$ und $z$ vertauschen, folgt mit Hilfe von 3.8, 3.9, 3.10, 3.11 und 3.12 und mit dem oben Bewiesenen, dass eine $S_2$-Untergruppe $S_1$ von $C_G(u)$ existiert mit $W \subseteq S_1$ und $z_1 \sim zz_1$ in $N_{S_1}(W)$, ein Widerspruch zu 3.9.

Wir haben gezeigt, dass $\langle z\rangle$ in $H$ bezüglich $G$ schwach abgeschlossen ist. Ein Satz von Glauberman [2] liefert:

LEMMA 3.13. $G = O(G)\cdot H$.

**C. Der Fall, in dem $L$ einen Teilraum der Dimension 2 in $V$ zentralisiert.** Es sei $E_0$ das zentrale Produkt von drei Diedergruppen der Ordnung 8 und $L \cong A_8$ operiere treu auf $E_0$. Wir setzen $V_0 = E_0/\langle z\rangle$. $V_0$ ist ein orthogonaler Vektorraum mit 35 isotropen und 28 nicht-isotropen Elementen. Klar ist, dass $L \cong SO(V_0)$. Es seien

$$E_1 = \langle z, z_1, z_2, z_3\rangle \quad\text{und}\quad E_2 = \langle z, y_1, y_2, y_3\rangle$$

elementar-abelsche Normalteiler der Ordnung $2^4$ von $E_0$ mit $E_1 E_2 = E_0$ und $E_1 \cap E_2 = \langle z\rangle$. Ferner seien $\langle z_i, y_i\rangle$ Diedergruppen der Ordnung 8 für $1 \le i \le 3$; d.h. wenn wir die Zuordnung $v_i \to z_i\langle z\rangle$ und $w_i \to y_i\langle z\rangle$ für $1 \le i \le 3$ machen, sind $\{v_i, w_i\}$ hyperbolische Paare in $V_0$.

Es sei $t$ aus $O(V_0)$ und $t$ sei die Matrix

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

bzgl. der Bassis $v_i, w_i$ zugeordnet (die Blockeinteilung der Matrix entspreche der Zerlegung von $V_0$ in die isotropen Teilräume $V_1 = E_1/\langle z\rangle$ und $V_2 = E_2/\langle z\rangle$). Ist $B = (b_{ij})$ und $C = (c_{ij})$, so setze

$$\delta(t) = \sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}\,c_{ij}.$$

Dann ist $\delta$ die Dicksonsche Pseudodeterminante (siehe [1]) und Ker $\delta = SO(V_0) \cong L$.

Die Elemente mit $B = 0$ liegen also in $SO(V_0)$ und $L$ hat eine Untergruppe, deren Elemente eine Wirkung auf $V_0$ haben, die durch diese Matrizen beschrieben werden. Indem wir num $L$ mit $SO(V_0)$ identifizieren, ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$\begin{bmatrix} A & \\ C & D \end{bmatrix}$$

aus $L$ ist

$$A = (D^{-1})^t, \quad CD^t = DC^t \quad \text{und} \quad \textstyle\sum_j c_{kj}\, d_{kj} = 0 \text{ für alle } k$$

und $D = (d_{ij})$ und $C = (c_{ij})$.

Insbesondere repräsentieren die Elemente der Menge $S^*$, bei denen $A$ eine linke untere Dreiecksmatrix ist, eine $S_2$-Untergruppe von L. $S^*$ hat einen Normalteiler $P$ bestehend aus denjenigen Matrizen mit $A = D = I_3$. Offenbar ist $l_1$ von der Gestalt

$$\begin{bmatrix} I_3 & \\ X & I_3 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ein Element von $P$ und $\langle l_1 \rangle = Z(S^*)$. Es gilt

$$C_{V_0}(l_1) = \langle v_1, v_2, v_3, w_3 \rangle.$$

Setze

$$l_2 = \begin{bmatrix} j_1 & \\ Y & j_1^t \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da $C_{V_0}(l_2) = \langle v_1, v_2, w_2, v_3 w_3 \rangle$, können $l_1$ and $l_2$ nicht in $L$ konjugiert sein und $l_1$ und $l_2$ repräsentieren die zwei Konjugiertenklassen von Involutionen in $L$.

Wir bezeichnen mit $H_0$ das semidirekte Produkt von $E_0$ mit $L$ und bestimmen die Konjugiertenklassen von Involutionen in $H_0/\langle z \rangle$. Als Vertreter von Involutionen aus $V_0$ haben wir $v_1$ und $v_1 w_1$. Vertreter von Involutionen aus $H_0/\langle z \rangle - V_0$ können wir darstellen in der Form $vl_i$ $(i = 1, 2)$ mit $v$ aus $C_{V_0}(l_i)$.

Wegen

$$l_1^{w_2{}^\alpha w_3{}^\beta} = v_1^\beta v_2^\alpha l_1$$

ist jedes Element aus $vl_1\langle v_1, v_2 \rangle$ zu $vl_1$ in $H_0/\langle z \rangle$ konjugiert. Welche der Elemente $l_1$, $v_3 l_1$, $w_3 l_1$, $v_3 w_3 l_1$ sind unter $C_L(l_1)$ konjugiert?

Setze

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und sei

$$x = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

aus $C_L(l_1)$ so

$$\begin{bmatrix} A + BX & B \\ C + DX & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ XA + C & XB + D \end{bmatrix}.$$

Es sei $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ und $D = (d_{ij})$. Es folgt $b_{ij} = 0$ für alle $(i, j) \neq (3, 3)$. Ferner $a_{13} = a_{23} = d_{31} = d_{32} = 0$ und $d_{11} = a_{22}$, $d_{12} = a_{21}$, $d_{21} = a_{12}$, $d_{22} = a_{11}$. Weiter $\delta(x) = c_{33} b_{33} = 0$. Schliesslich

$$g(v_1) = g(v_1^x) = a_{33} b_{33} = 0 \quad \text{und} \quad 1 = (v_3, w_3) = (v_3^x, w_3^x) = a_{33} d_{33} + c_{33} b_{33}.$$

Dabei ist mit $g$ die zu $V_0$ gehörige quadratische Form und mit $(\ ,\ )$ das zugehörige symplektische Skalarprodukt bezeichnet. Wir haben $b_{33} = 0$. Die Elemente $l_1$, $v_3 l_1$, $w_3 l_1$ und $v_3 w_3 l_1$ sind in $H_0/\langle z\rangle$ nicht konjugiert.

Wegen

$$l_2^{w_1^\alpha w_3^\beta} = v_1^{\alpha+\beta}(v_3 w_3)^\alpha l_2$$

ist jedes Element aus $vl_2\langle v_1, v_3w_3\rangle$ zu $vl_2$ in $H_0/\langle z\rangle$ für $v$ aus $V_0$. Welche Elemente aus

$$\{l_2, v_2 l_2, w_2 l_2, v_2 w_2 l_2\}$$

sind unter $C_L(l_2)$ konjugiert?

Da $g(v_2 w_2) = 1$ und $g(v_2) = g(w_2) = 0$, können $v_2 l_2$ und $w_2 l_2$ nicht zu $v_2 w_2 l_2$ konjugiert sein. Andererseits ist

$$x = \begin{bmatrix} J & K \\ K & J \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aus $C_L(l_2)$, da $\delta(x) = 0$. Es ist $v_2^x = w_2$ und $w_2^x = v_2$. Somit haben wir gezeigt:

Lemma 3.14. *$H_0/\langle z\rangle$ hat genau 9 Klassen von Involutionen. Sie werden repräsentiert durch $v_1$, $v_1 w_1$, $l_1$, $v_3 l_1$, $w_3 l_1$, $v_3 w_3 l_1$, $l_2$, $v_2 l_2$ und $v_2 w_2 l_2$.*

Da $e$ aus $E_0 - \langle z\rangle$ zu $ze$ in $E_0$ konjugiert ist, haben wir in $E_0$ drei $H_0$-Konjugiertenklassen, repräsentiert durch $z$, $z_1$ und $z_1 y_1$.

Setze $z_3^{l_1} = z^{\chi_3} z_3$ und $y_3^{l_1} = z^{\eta_3} y_3$. Also $l_1^{z_3} = z^{\chi_3} l_1$ und $l_1^{y_3} = z^{\eta_3} l_1$. Ist also $\chi_3$ oder $\eta_3$ ungleich 0, so sind $l_1$ und $zl_1$ konjugiert.

Wir haben also

| Tab. 1 | $\chi_3 = \eta_3 = 0$ | $\eta_3 = 1,\ \chi_3 = 0$ | $\chi_3 = \eta_3 = 1$ | $\eta_3 = 0,\ \chi_3 = 1$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $o(x)$ | $o(x)$ | $o(x)$ | $o(x)$ |
| $z_3 l_1$ | 2 | 2 | 4 | 4 |
| $y_3 l_1$ | 2 | 4 | 4 | 2 |
| $z_3 y_3 l_1$ | 4 | 2 | 4 | 2 |

Es sei $z_2^{l_2} = z^{\chi_2} z_2$. Da $z_2$ zu einem Element aus $y_2\langle z\rangle$ konjugiert ist, gilt $y_2^{l_2} = z^{\chi_2} y_2$.

In $H_0/\langle z\rangle$ gilt $l_2 \sim v_3 w_3 l_2$ und somit gilt in $H_0$, $l_2 \sim zz_3 y_3 l_2 \sim z_3 y_3 l_2 \sim zl_2$. Man hat

| Tab. 2 | $\chi_2 = 0$ | $\chi_2 = 1$ |
|---|---|---|
| $x$ | $o(x)$ | $o(x)$ |
| $z_2 l_2$ | 2 | 4 |
| $z_2 y_2 l_2$ | 4 | 4 |

Es gilt:

LEMMA 3.15. *Die Klassen derjenigen Elemente aus $H_0$, deren Bilder in $H_0/\langle z\rangle$ die Ordnung 2 haben werden repräsentiert durch $z_1$, $z_1 y_1$, $l_1$, $zl_1$, $z_3 l_1$ $zz_3 l_1$, $y_3 l_1$, $zy_3 l_1$, $zz_3 y_3 l_1$, $l_2$, $z_2 l_2$ und $z_2 y_2 l_2$.*

Nun ist in unserem Fall C $H$ das zentrale Produkt einer Diedergruppe der Ordnung 8 oder einer Quaternionengruppe der Ordnung 8 mit $H_0$. D.h. $E$ ist entweder vom Type $D \cdots D$ oder vom Typ $D \cdots Q$. Die zu $H_0$ noch hinzukommende Dieder oder Quaternionengruppe sei mit $E^* = \langle z_4, y_4\rangle$ bezeichnet, wobei $z_4$ und $y_4$ falls möglich Involutionen sind. Die bisherigen Notationen von Abschnitt C werden ebenfalls beibehalten. Ferner sei $E = E_1 E^*$ und $E_1^* = E_1\langle z_4\rangle$ und $E_2^* = E_2\langle y_4\rangle$. Mit der oben festgelegten Bezeichnung von $S^*$ sei $S = S^*E$. Dann ist $S$ eine $S_2$-Untergruppe von $H$.

Wir untersuchen zunächst, ob Fusion von $z$ mit Elementen aus $E - \langle z\rangle$ auftreten kann. Es ist

$$C_E(z_1) = E_1^*\langle y_2, y_3, y_4\rangle.$$

Indem man ein Element $s$ aus $S^*$ notfalls um $y_1$ abändert, sieht man leicht ein, dass $WE/E \cong S^*$ mit $W = C_S(z_1)$. Also ist $W$ eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(z_1)$ und $Z(W) = \langle z, z_1\rangle$. Weiter ist

$$Z_2(W) = \langle z, z_1, z_2, z_4, y_4\rangle$$

Im Fall $D \cdots D$ hat die Gleichung $x^2 = z$ in $Z_2(W)$ als Lösungen die Elemente der Menge

$$z_4 y_4\langle z, z_1, z_2\rangle$$

und im Fall $D \cdots Q$ als Lösungen die Elemente der Menge

$$z_4\langle z, z_1, z_2\rangle \cup y_4\langle z, z_1, z_2\rangle \cup z_4 y_4\langle z, z_1, z_2\rangle.$$

Die Gleichung $x^2 = z_1$ und $x^2 = zz_1$ hat keine Lösungen in $Z_2(W)$. Es folgt $\langle z\rangle$ char $W$ und $Z_1 \not\sim_G z$.

Wir betrachten jetzt Involutionen aus $E - E_0$. Es liege zunächst der Fall $D \cdots D$ vor. Dann sind $z_4$ und $y_4$ Involutionen. Ferner gilt $H_0 \subseteq C_H(z_4)$ und $C_E(z_4) = E_1^* E_2$. $W = C_S(z_4) = C_E(z_4)\cdot S^*$ ist also eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(z_4)$. $Z(W) = \langle z, z_4\rangle$. Es ist $Z(W) \cap \mho_1(W) = \langle z\rangle$ und somit $\langle z\rangle$ char $W$ und $z_4 \not\sim_G z$. Ebenso $y_4 \not\sim_G z$.

Da $S^* \subseteq C_L(v_1)$, ist $W = C_S(z_1 z_4)$ eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(z_1 z_4)$. Es ist $Z(W) = \langle z, z_1 z_4 \rangle$. Da $Z(W) \cap \mho_1(W) = \langle z \rangle$ char $W$, ist $z_1 z_4 \not\sim_G z$ und ebenso $z_1 y_4 \not\sim_G z$.

Gleichgültig ob $E$ vom Typ $D \cdots D$ oder $D \cdots Q$ ist, ist $z_1 y_1 z_4 y_4$ eine Involution.

$$C_H(z_1 y_1 z_4 y_4) = C_E(z_1 y_1 z_4 y_4) \cdot C_{H_0}(z_1 y_1)$$

und

$$C_E(z_1 y_1 z_4 y_4) = \langle z, z_2, z_3, y_2, y_3, z_1 y_1, z_4 y_4, z_1 z_4, y_1 y_4 \rangle.$$

Wir berechnen $C_L(v_1 w_1)$. Es sei $t$ aus $C_L(v_1 w_1)$, so ist $t$ bezüglich der Basis $v_1 w_1, v_2, v_3, w_2, w_3, w_1$ eine Matrix der Gestalt

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ A & B & J & \\ C & D & E & \\ F & G & H & 1 \end{bmatrix}$$

zugeordnet. Welche Elemente $t$ aus $C_L(v_1 w_1)$ operieren nicht treu auf $\langle v_1 w_1, v_2, v_3, w_2, w_3 \rangle$?

Eine notwendige Bedingung ist $A = C = D = J = 0$ und $B = E = I_2$. Es sei $F = (\varphi)$, $G = (\gamma_1, \gamma_2)$ und $H = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Aus $0 = (v_i, w_1) = (w_i, w_1)$ für $i = 2, 3$ folgt $\gamma_1 = \gamma_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Es verbleibt möglicherweise noch die Abbildung $t$ mit $v_1^t = w_1$, $w_1^t = v_1$ und $v_i^t = v_i$, $w_i^t = w_i$ für $i = 2, 3$. Aber $\delta(t) = 1$. Also operiert $C_L(v_1 w_1)$ treu auf $C_E(z_1 y_1)$.

Es gilt für eine $S_2$-Untergruppe $W$ von $C_H(z_1 y_1 z_4 y_4)$:

$$Z(W) = \langle z, z_1 y_1 z_4 y_4 \rangle = Z(C_E(z_1 y_1 z_4 y_4)).$$

Wegen $Z(W) \cap \mho_1(W) = \langle z \rangle$ char $W$, ist $z_1 y_1 z_4 y_4 \not\sim_G z$. Liegt der Fall $D \cdots Q$ für $E$ vor, so folgt in derselben Weise $z_1 y_1 z_4 \not\sim_G z$ und $z_1 y_1 y_4 \not\sim_G z$. Wir haben gezeigt:

LEMMA 3.16. *$z$ hat keine Fusion mit einem Element aus $E - \langle z \rangle$.*

Wir betrachten nun Involutionen aus $H$ an denen $l_1$ beteiligt ist.

Es sei $u = l_1$ oder $u = zl_1$. Es ist $S^*$ eine $S_2$-Untergruppe von $C_L(u)$. Ferner

$$C_E(u) = \langle z, z_1, z_2, z_3^{\chi_3+1}, y_3^{\eta_3+1}, (z_3 y_3)^{\chi_3 \eta_3}, z_4, y_4 \rangle.$$

$W = C_S(u) = S^* C_E(u)$ ist eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(u)$. Weiter

$$\langle z, u \rangle \subseteq Z(W) \subseteq \langle z, u, z_1 \rangle$$

und

$$\langle z_4, y_4 \rangle \subseteq Z_2(W) \subseteq Z(W) \langle z_4, y_4, z_2 \rangle Z_2(S^*).$$

Damit hat $z$ im Gegensatz zu den Elementen aus $u \langle z, z_1 \rangle$ Quadratwurzeln in $Z_2(W)$. Mit 3.16 folgt $\langle z \rangle \lhd N_G(W)$ und $l_1 \not\sim_G z$ und $zl_1 \not\sim_G z$.

Angenommen, $u = z_3 l_1$ oder $u = zz_3 l_1$ ist eine Involution. Dann ist $\chi_3 = 0$.

Wir haben falls $\eta_3 = 1$ ist

$$C_E(u) = E_1^* \langle y_3, y_4\rangle.$$

Ist $\eta_3 = 0$, so

$$C_E(u) = E_1^* \langle y_4\rangle.$$

Ist $s$ aus $S^*$, so $v_3^s \in v_3 \langle v_1, v_2\rangle$. Es existiert dann ein geeignetes $w$ aus $\langle w_1, w_2\rangle$ mit $ws \in C_{H_0/\langle z\rangle}(v_3 l_1)$. Sei $e$ ein Urbild von $w$ in $E$, so erreicht man bei eventueller Abänderung von $e$ zu $y_3 e$ stets, dass $es \in C_H(u)$. Ist $W = C_S(u)$, so folgt $WE/E \cong S^*$ und $W$ ist eine $S_2$-Untergruppe in $C_H(u)$. Wie im vorhergehenden Fall folgt

$$\langle z\rangle \lhd N_G(W),$$

was $z \not\sim_G u$ impliziert. Genauso folgt $y_3 l_1 \not\sim_G z$ und $zy_3 \not\sim_G z$.

Angenommen, $u = z_3 y_3 l_1$ oder $u = zz_3 y_3 l_1$ ist eine Involution, so $\chi_3 \neq \eta_3$. Wie im vorhergehenden Fall sieht man ein, dass $W = C_S(u)$ eine $S_2$-Untergruppe ist und $WE/E \cong S^*$. Der gleiche Schluss wie in den obigen Fällen führt zu $z \not\sim_G u$.

Jetzt betrachten wir Involutionen, an denen sowohl $l_1$ wie ein Element aus $E^* - \langle z\rangle$ beteiligt ist. Ist $z_4 l_1$ eine Involution, so ist $E$ vom Typ $D \cdots D$. Es ist

$$C_E(z_4 l_1) = \langle z, z_1, z_2, z_3^{1+\chi_3}, y_3^{1+\eta_3}, (z_3 y_3)^{\chi_3\eta_3}, (z_3 y_4)^{\chi_3}, (y_3 y_4)^{\eta_3}, z_4\rangle$$

Ferner $S^* \subseteq C_L(z_4 l_1)$. Also ist $W = C_S(z_4 l_1) = S^* C_E(z_4 l_1)$ eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(z_4 l_1)$. Klar ist,

$$\langle z, z_4 l_1\rangle \subseteq Z(W) \subseteq \langle z, z_1, z_4, z_4 l_1\rangle.$$

Die Elemente aus $z_4 l_1\langle z, z_1\rangle$ haben im Gegensatz zu $z$ keine Quadratwurzeln in $W$. Die Elemente aus $l_1\langle z, z_1\rangle$ sind nach unserer bisherigen Betrachtung nicht zu $z$ konjugiert, wie auch $z_1$ und $zz_1$ nicht zu $z$ konjugiert sind.

Es folgt $z_4 l_1 \not\sim_G z$. Ebenso folgt $y_4 l_1 \not\sim_G z$.

$z_3 l_1$ ist eine Involution, wenn $\chi_3 = 0$ und $z_3 l_1$ hat Ordnung 4 wenn $\chi_3 = 1$. Falls $\chi_3 = 0$ und $z_3 z_4 l_1$ eine Involution ist, so ist $E$ vom Typ $D \cdots D$. $W = C_S(z_3 z_4 l_1)$ ist eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(z_3 z_4 l_1)$ und

$$\langle z, z_3 z_4 l_1\rangle \subseteq Z(W) \subseteq \langle z, z_1, z_4, z_3 z_4 l_1\rangle.$$

Wie im vorhergehenden Fall folgt, dass

$$\langle z\rangle \lhd N_G(W) \quad \text{und} \quad z_3 z_4 l_1 \not\sim_G z.$$

Ebenso ist $z$ zu keinem Element aus $\{z_3 y_4 l_1, y_3 z_4 l_1, y_3 y_4 l_1\}$ konjugiert.

Nun liege der Fall $\chi_3 = 1$ vor. Gleichgültig ob $E$ vom Typ $D \cdots D$ oder $D \cdots Q$ ist, ist $z_3 z_4 y_4 l_1$ eine Involution.

$$C_E(z_3 z_4 y_4 l_1) = \langle z, z_1, z_2, z_3 z_4, z_4 y_4, y_3^{\eta_3}, (y_3 y_4)^{1+\eta_3}\rangle.$$

$W = C_S(z_3 z_4 y_4 l_1)$ ist eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(z_3 z_4 y_4 l_1)$, wie leicht nachzuprüfen ist. Ferner

$$\langle z, z_3 z_4 y_4 l_1\rangle \subseteq Z(W) \subseteq \langle z, z_1, z_3 z_4 y_4 l_1\rangle.$$

Da $\langle z\rangle \subseteq [W, W]$ und $z_3 z_4 y_4 l_1\langle z, z_1\rangle \cap [W, W] = \emptyset$, folgt

$$\langle z\rangle \lhd N_G(W) \quad \text{und} \quad z_3 z_4 y_4 l_1 \not\sim_G z.$$

Ebenso $y_3 z_4 y_4 l_1 \not\sim_G z$. Falls $E$ vom Typ $D \cdots Q$ ist, ist natürlich $z$ zu keinem Element aus $\{z_3 y_4 l_1, z_3 z_4 l_1, y_3 y_4 l_1, y_3 z_4 l_1\}$ konjugiert.

Es sei jetzt $z_3 y_3 l_1$ an einer Involution beteiligt. $o(z_3 y_3 l_1) = 2$, falls $\chi_3 \neq \eta_3$ und $o(z_3 y_3 l_1) = 4$, falls $\chi_3 = \eta_3$.

Es sei zunächst $\chi_3 \neq \eta_3$. Es ist $z_3 y_3 z_4 l_1$ eine Involution falls der Typ $D \cdots D$ von $E$ vorliegt. O.B.d.A. ist $\chi_3 = 1$ und $\eta_3 = 0$.

$$C_E(z_3 y_3 z_4 l_1) = \langle z, z_1, z_2, z_3 z_4, y_3 y_4\rangle.$$

Man sieht leicht ein, dass $WE/E \cong S^*$ mit $W = C_S(z_3 y_3 z_4 l_1)$. $W$ ist eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(z_3 y_3 z_4 l_1)$. Weiter

$$\langle z, z_3 y_3 z_4 l_1\rangle \subseteq Z(W) \subseteq \langle z, z_1, z_3 y_3 z_4 l_1\rangle.$$

Aus $\langle z\rangle \subseteq Z(W) \cap [W, W] \subseteq \langle z, z_1\rangle$, folgt

$$\langle z\rangle \lhd N_G(W) \quad \text{und} \quad z_3 y_3 z_4 l_1 \not\sim_G z.$$

Ebenso $z_3 y_3 y_4 l_1 \not\sim_G z$.

Ist $\chi_3 = \eta_3$, so ist $z_3 y_3 z_4 y_4 l_1$ eine Involution, sowohl wenn $E$ vom Typ $D \cdots D$ wie vom Typ $D \cdots Q$ ist. Analog wie im vorhergehenden Fall verifiziert man, dass $z$ nicht in $G$ zu $z_3 y_3 z_4 y_4 l_1$ konjugiert ist. Im Fall $D \cdots Q$ ist genauso $z$ nicht in $G$ zu $z_3 y_3 z_4 l_1$ und $z_3 y_3 y_4 l_1$ konjugiert. Wir haben gezeigt:

LEMMA 3.17. *Es sei $u$ ein Element der Menge $\{l_1, z_3 l_1, y_3 l_1, z_3 y_3 l_1\}$ und $e$ aus $E^*$. Dann hat $z$ keine Fusion mit dem Element $eu$.*

Schliesslich haben wir noch Involutionen zu betrachten, an denen $l_2$ beteiligt ist.

Es sei $u = l_2$ oder $u = zl_2$. Dann

$$C_E(u) = \langle z, z_1, z_3 y_3, z_4, y_4, z_2 y_2, z_2^{1+\chi_2}, y_2^{1+\chi_2}\rangle.$$

Wir betrachten wieder die Darstellung von $S^*$ bzgl. der Basis $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$. Dann ist $C_{S^*}(l_2) = \langle l_1, t_0, t_1, t_2\rangle$ mit

$$t_0 \longrightarrow \begin{bmatrix} I_3 & \\ V & I_3 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$t_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} j_1 & & & \\ & 1 & & \\ & & j_1^t & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \qquad t_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & j_1 & & \\ & & 1 & \\ & Y & & j_1^t \end{bmatrix}$$

mit

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad |C_{S^*}(l_2)| = 2^5.$$

Da in $A_8$ eine nicht-2-zentrale Involution einen Zentralisator mit einem 2-Anteil $2^5$ an der Ordnung hat, ist $C_{S^*}(u) = C_{S^*}(l_2)$ eine $S_2$-Untergruppe von $C_L(u)$. Also ist $W = C_S(u) = C_E(u) \cdot C_{S^*}(u)$ eine $S_2$-Untergruppe in $C_H(u)$. Klar ist,

$$\langle z, u \rangle \subseteq Z(W) \subseteq \langle z, z_1, u \rangle.$$

Offenbar $\langle z_4, y_4 \rangle \subseteq Z_2(W)$. Ferner ist leicht nachzurechnen, dass im Urbild von $Z(C_{S^*}(l_2)/\langle l_2 \rangle)$ in $C_{S^*}(l_2)$ keine Quadratwurzeln von $l_2$ liegen. Also $z \not\sim_G u$ mit dem üblichen Schluss.

Es gilt

$$C_E(z_4 l_2) = \langle z, z_1, z_3 y_3, z_4, z_2^{1+\chi_2}, y_2^{1+\chi_2}, (z_2 y_4)^{\chi_2}, (y_2 y_4)^{\chi_2}, z_2 y_2 \rangle.$$

Damit ist $W = C_S(z_4 l_2) = C_E(z_4 l_2) \cdot C_{S^*}(z_4 l_2)$ eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(z_4 l_2)$. Weiter

$$\langle z, z_4, z_4 l_2 \rangle \subseteq Z(W) \subseteq \langle z, z_1, z_4, z_4 l_2 \rangle \quad \text{falls } \chi_2 = 0$$

und

$$\langle z, z_4 l_2 \rangle \subseteq Z(W) \subseteq \langle z, z_1, z_4 l_2 \rangle \quad \text{falls } \chi_2 = 1.$$

Kein Element aus $z_4 l_2 \langle z, z_1 \rangle$ hat eine Quadratwurzel in $W$. Mit Hilfe des vorausgegangenen Falles folgt $\langle z \rangle \lhd N_G(W)$.

Also $z_4 l_2 \not\sim_G z$. Ebenso $y_4 l_2 \not\sim_G z$.

Es sei $z_2 l_2$ eine Involution. Dann ist $\chi_2 = 0$.

$$C_E(z_2 l_2) = \langle z, z_1, z_3 y_3, z_4, y_4, z_2 \rangle.$$

$W = C_S(z_2 l_2)$ ist eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(z_2 l_2)$ mit $WE/E \cong S^*$. Wie leicht ersichtlich

$$\langle z, z_2 l_2 \rangle \subseteq Z(W) \subseteq \langle z, z_1, z_2 l_2, l_1 \rangle.$$

Die Elemente $l_2$ und $l_1 l_2$ haben in $C_{S^*}(l_2)$ genau $2^2$ Wurzeln. Bzgl. der Basis $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$ von $V_0$ werden diese Wurzeln $t$ durch Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ \alpha & 1 & 1 & & & \\ * & \gamma & \beta & 1 & 1 & 1+\alpha \\ * & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ * & 1 & 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

repräsentiert. Dabei repräsentiere $*$ eine Funktion in $\alpha, \beta, \gamma$.

Es sei $x = et$ aus $C_S(z_2 l_2)$ mit $e$ aus $E$ und $x^2 = u$ mit $u$ aus $z_2 l_2 \langle z, z_1, l_1 \rangle$. Da $(z_2 x)^2 = z_1 u$, liegen alle Lösungen der Gleichung $x^2 = u$ in Mengen der Form

$$x \langle z, z_1, z_3 y_3, z_4, y_4 \rangle.$$

Ist ferner $x$ eine Lösung von $u$, so ist $xz_4 y_4$ eine Lösung von $zu$. Für ein Element aus $z_2 l_2\langle z, z_1, l_1\rangle$ kann es also höchstens $2^2 \cdot 2^3 \cdot 3$ Lösungen in $W$ geben. Setze $X = \langle z, z_1, z_2\rangle$, so sind Lösungen der Gleichung $x^2 = z$ die Elemente der Mengen $z_3 y_3 X$, $z_4 y_4 X$, $z_3 y_3 z_4 X$, $z_3 y_3 y_4 X$, im Fall $D \cdots D$ und $z_3 y_3 X$, $z_4 y_4 X$, $y_4 X$, $z_4 X$ im Fall $D \cdots Q$. Multiplizieren wir diese Mengen mit $z_2 l_2$ so erhalten wir ebenfalls Lösungen dieser Gleichung. Da $t_0 \in C_{S^*}(z_2 l_2)$ und $X \subseteq C_E(t_0)$ sind auch die Elemente der Mengen

$$z_4 y_4 l_1 X,\ z_2 z_4 y_4 l_1 l_2 X,\ z_4 y_4 t_0 X,\ z_4 y_4 t_0 l_1 X \text{ und } z_2 z_4 y_4 l_1 l_2 t_0 X$$

Lösungen der Gleichung $x^2 = z$.

Wir haben also wenigstens $2^3 \cdot 13 = 2^3(2^2 \cdot 3 + 1)$ Lösungen in $W$. Mit 3.16 und 3.17 folgt $\langle z\rangle \lhd N_G(W)$ und $z_2 l_2 \not\sim_G z$. Ebenso folgt $y_2 l_2 \not\sim_G z$ falls $\chi_2 = 0$.

Genauso wie wir gezeigt haben, dass $z_4 l_2$ keine Fusion mit $z$ hat, zeigt man, dass sowohl im Fall $\chi_2 = 0$ wie im Fall $\chi_2 = 1$ $z$ keine Fusion mit $z_2 z_4 l_2$, $z_2 y_4 l_2$ und $z_2 z_4 y_4 l_2$ hat.

Schliesslich betrachten wir noch Involutionen, an denen $z_2 y_2 l_2$ beteiligt ist. Da $o(z_2 y_2 l_2) = 4$, (sowohl für $\chi_2 = 0$ wie für $\chi_2 = 1$) können wir annehmen, dass unsere Involution die Gestalt $z_2 y_2 z_4 y_4 l_2$ hat (im Fall $D \cdots Q$ verlaufen die Argumente für $z_2 y_2 y_4 l_2$ und $z_2 y_2 z_4 l_2$ genauso). Es ist

$$C_E(z_2 y_2 z_4 y_4 l_2) = \langle z, z_1, z_3 y_3, z_2 y_2, z_4 y_4, y_2^{\chi_2}, z_2^{\chi_2}, (z_2 z_4)^{1+\chi_2}, (y_2 z_4)^{1+\chi_2}\rangle.$$

Es sei $s$ ein beliebiges Element aus $C_{S^*}(l_2)$. Bzgl. der Basis $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$ von $V_0$ ist $s$ eine Matrix der Gestalt

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ * & 1 & & & & \\ * & a_{32} & 1 & & & \\ * & * & * & 1 & * & * \\ * & a_{32} & a_{32} & & 1 & a_{32} \\ * & a_{32} & 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

zugeordnet ($*$ repräsentiert dabei Elemente, die wir nicht weiter zu beachten haben).

Ist $a_{32} = 0$, so braucht $s$ nur um ein Element der Gestalt $z_2^\alpha z_4^\beta$ abgeändert zu werden, um zu erreichen, dass

$$z_2^\alpha z_4^\beta s \in C_S(z_2 y_2 z_4 y_4 l_2).$$

Ist aber $a_{32} = 1$, so ändern wir $s$ mit $z_3 y_1 z_4^\alpha$ ab und erreichen ebenfalls, dass $z_3 y_1 z_4^\alpha s \in C_S(z_2 y_2 z_4 y_4 l_2)$. Auf jeden Fall ist $W = C_S(z_2 y_2 z_4 y_4 l_2)$ eine $S_2$-Untergruppe von $C_H(z_2 y_2 z_4 y_4 l_2)$ mit $WE/E \cong C_{S^*}(l_2)$. Hieraus ergibt sich

$$\langle z, z_2 y_2 z_4 y_4 l_2\rangle \subseteq Z(W) \subseteq \langle z, z_1, z_4 y_4, z_2 y_2 z_4 y_4 l_2\rangle.$$

Alle Elemente aus $z_4 y_4\langle z, z_1, z_2 y_2 z_4 y_4 l_2\rangle$ haben Ordnung 4 und die Elemente aus $z_2 y_2 z_4 y_4 l_2\langle z, z_1\rangle$ haben keine Quadratwurzel in $W$. Es folgt $\langle z\rangle \lhd N_G(W)$ und $z_2 y_2 z_4 y_4 l_2 \not\sim_G z$. Sir haben gezeigt:

LEMMA 3.18. *Es sei u ein Element aus* $\{l_2, z_2 l_2, y_2 l_2, z_2 y_2 l_2\}$ *und e aus* $E^*$. *Dann hat z keine Fusion mit dem Element eu.*

LEMMA 3.19. $G = O(G)\cdot H$.

*Beweis.* Aus 3.15, 3.16, 3.17 und 3.18 folgt, dass $\langle z\rangle$ in $H$ bzgl. $G$ schwach abgeschlossen ist. Ein Resultat von Glauberman [2] liefert die Behauptung.

## 4. Der Fall $n \geq 5$

LEMMA 4.1. *Ist* $n = 5$, *so* $G \cong L_7(2)$.

*Beweis.* Es sei $s_{31}$ ein Element der Ordnung 31 aus $L$ und $s_5$ ein Element der Ordnung 5 aus $N_L(\langle s_{31}\rangle)$. $V = E/\langle z\rangle$ zerfällt in zwei $\langle s_{31}\rangle$-invariante Teilräume $V_1$ und $V_2$ der Dimension 5. $s_{31}$ operiert fixpunktfrei auf $V_1^\#$ und $V_2^\#$. Also sind $V_1$ und $V_2$ isotrope Unterräume von $V$ und $E$ ist vom Typ $D \cdots D$. Ferner sind $V_1$ und $V_2$ sogar $N_L(\langle s_{31}\rangle)$-invariant, da $\langle s_{31}\rangle$ die kontragrediente Darstellung zu der von $V_1$ auf $V_2$ erfährt. Nach 2.1 besitzt $V$ genau 527 isotrope Elemente. Damit haben wir die folgenden $N_L(\langle s_{31}\rangle)$-Bahnen von isotropen Elementen:

$$V_1^\#, V_2^\#, B_1, B_2, B_3.$$

Dabei ist $|V_1^\#| = |V_2^\#| = 31$ und $|B_i| = 155$ für $1 \leq i \leq 3$.

Setze $V_0 = C_V(s_5)$ und $V^* = [V, s_5]$. Da $V_0$ genau zwei isotrope Elemente enthält (siehe [5; II, 7.3]), ist das Urbild zu $V_0$ in $E$ eine Diedergruppe der Ordnung 8. Folglich ist das Urbild zu $V^*$ in $E$ das zentrale Produkt von vier Diedergruppen der Ordnung 8. Es sei $s_3$ aus $C_L(s_5)$ mit $o(s_3) = 3$. Dann normalisiert $s_3$ die Räume $V_0$ und $V^*$ und zentralisiert folglich $V_0$. Nach 3.1 operiert $s_3 s_5$ fixpunktfrei auf $V^*$ und die isotropen Elemente von $V^*$ liegen in $s_3 s_5$-Bahnen der Länge 15.

Da $527 = 31\cdot 17$, kann $L$ keine Bahn der Länge 527 in $V$ haben. Weder $B_1 \cup V_1^\# \cup V_2^\#$ noch $B_1 \cup B_2 \cup V_i^\#$ (für $1 \leq i \leq 2$) kann eine $L$-Bahn sein, da sonst $s_3 s_5$ mehr als zwei Fixpunkte in den isotropen Elementen hätte. Es bleiben die folgenden drei Möglichkeiten für $L$-Bahnen von isotropen Elementen:

(1) $V_1^\#, V_2^\#, B_1 \cup B_2 \cup B_3$
(2) $V_1^\#, V_2^\# \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$
(3) $V_1^\# \cup V_2^\#, B_1 \cup B_2 \cup B_3$.

Es fällt (2) wegen 2.2 aus. Angenommen, es liege (3) vor. Es sei $x$ aus $L$ mit $V_0 = V_1^x \neq V_1$ und $V_0 \neq V_2$. Dann

$$V_0^\# = (V_1^\# \cap V_0^\#) \cup (V_2^\# \cap V_0^\#),$$

was unmöglich ist. Da $L$ keine Darstellung vom Grad 2 hat, verbleiben wir mit Fall (1). Mit 1.2 und 2.2 folgt, dass $H$ isomorph ist zum Zentralisator einer 2-zentralen Involution in $L_7(2)$. Das Resultat von Suzuki [7; Theorem 1, p. 1045] ergibt die Behauptung des Lemmas.

LEMMA 4.2. *Ist $n \geq 6$, so $G \cong L_{n+2}(2)$.*

*Beweis.* Es sei schon für alle $5 \leq k \leq n - 1$ gezeigt:

(1) Es sei $V$ ein regulärer, orthogonaler $F_2$-Vektorraum der Dimension $2k$ und $L \cong L_k(2) \subseteq O(V)$. Dann ist $V$ vom Typ $D \cdots D$ und $L$ normalisiert einen isotropen Teilraum $V_1$ maximaler Dimension.

(2) Ist $V_0$ ein regulärer symplektischer Raum der Dimension $2m$, so ist $L_k(2) \not\subseteq Sp(V_0)$ für $k > m \geq 4$.

Für $n = 5$ folgen Aussagen (1) und (2) aus dem Beweis von 4.1 und [6; Satz 5]. Nun sei $k = n$.

Es sei $X$ elementar-abelsch der Ordnung $2^{n-1}$ aus $L$ und $N_L(X)/X \cong L_{n-1}(2)$. Wir setzen $V_0 = C_V(X)$. Es ist $V_0$ kein regulärer symplektischer Raum, da sonst auch $V_0^\perp$ regulär ist und $C_{V_0^\perp}(X) \neq 0$. Es sei $V_{00} = \text{rad}\, V_0$. Die Räume $V_{00}$ und $V_0/V_{00}$ sind unter $N_L(X)$ invariant. $V_0/V_{00}$ ist ein regulärer symplektischer Raum. Nach (2) trifft einer der folgenden Fälle zu:

(A) $\dim V_0/V_{00} = 2(n - 1)$, $\dim V_{00} = 1$;
(B) $N_L(X)$ operiert trivial auf $V_0/V_{00}$.

An den folgenden Bezeichnungen halten wir im weiteren Verlauf des Beweises fest: $N_L(X) = X \cdot L_1$ mit $L_1 \cong L_{n-1}(2)$ und $L_1 \cap X = 1$.

*Fall* (A). Dann enthält $V_0$ einen regulären, symplektischen Teilraum $V_r$ der Dimension $2(n - 1)$. Also sind $V_r$ und $V_r^\perp$ unter $X$ invariant, was $|X| = 2^{n-1}$ widerspricht.

*Fall* (*B*). Ist $\dim V_{00} \geq 2$, so ist $V_{00}^\perp/V_{00}$ regulär und $L_1$-invariant mit $\dim V_{00}^\perp/V_{00} = 2(n - \dim V_{00})$. Aus (2) folgt, dass $L_1$ trivial auf $V_{00}^\perp/V_{00}$ operiert. Wird $L_1$ nicht-trivial auf $V_{00}$ dargestellt, so folgt $\dim V_{00} \geq n - 1$. Operiert hingegen $L_1$ zentralisierend auf $V_{00}$, so auch auf $V_{00}^\perp$ und damit auf $V$, was falsch ist. Ist umgekehrt $\dim V_{00} \geq n - 1$, so operiert $L_1$ treu auf $V_{00}$. Ist jedoch $\dim V_{00} = 1$, so liegt Fall (A) vor. Also ist $\dim V_{00} \geq n - 1$ und $L_1$ wird treu auf $V_{00}$ dargestellt.

Es sei zunächst $\dim V_{00} = n - 1$. Dann operiert $L_1$ als volle Automorphismengruppe von $V_{00}$. Es ist $\dim V_{00}^\perp = n + 1$ und $V_{00}^\perp$ ist $L_1$-invariant. Aus 1.3 folgt $V_{00}^\perp = V_{00} \oplus V_r$, mit einem regulären, $L_1$-invarianten Teilraum $V_r$ von $V_{00}$. Also existiert ein bezüglich des symplektischen Skalarproduktes isotroper $L_1$-invarianter Teilraum $V_1$ der Dimension $n$. Ist aber $\dim V_{00} = n$, so setzen wir einfach $V_1 = V_{00}$.

Wir wählen eine Basis $v_1, \cdots, v_n, w_1, \cdots, w_n$ von $V$ derart, dass $\{v_1, w_1\}, \cdots, \{v_n, w_n\}$ orthogonale, hyperbolische Paare bezüglich des symplektischen Skalarproduktes sind und

$$V_1 = \langle v_1, \cdots, v \rangle.$$

Wir identifizieren $L$ mit $GL(n, 2)$ und $L_1$ mit den Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & Y \end{bmatrix}$$

wo $Y \in GL(n-1, 2)$. Nach 1.2 und 1.3 können wir unsere Basis so wählen, dass $l \in L_1$ von der obigen Gestalt bezüglich der Basis von $V$ die Matrix

$$l \to \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & Y & & \\ & & 1 & \\ & K(Y) & & Y^* \end{bmatrix}$$

zugeordnet ist, wo $Y^* = (Y^t)^{-1}$ und $K(Y)$ eine Funktion von $Y$ ist. Offenbar ist $R = \langle v_1, w_1 \rangle$ ein regulärer orthogonaler Raum und folglich ist es auch $R^\perp = \langle v_2, \cdots, v_n, w_2, \cdots, w_n \rangle$. Auf Grund von (1) und 2.2 dürfen wir annehmen, dass $R^\perp$ vom Typ $D \cdots D$ ist und $K(Y) = 0$ für alle $Y$. Für $0 \leq k \leq n-2$ setze in $L$

$$l_k = \begin{bmatrix} I_k & & \\ & J & \\ & & I_{n-2-k} \end{bmatrix} wo\ J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt $l_i \sim_L l_j$ für alle $0 \leq i, j \leq n-2$ und $l_1, \cdots, l_{n-2} \in L_1$. Da $l_0 \in C_L(l_i)$ für $i \geq 2$, folgt, dass

$$V^* = C_V(l_2, \cdots, l_{n-2}) \quad \text{und} \quad V^{**} = [V, \langle l_2, \cdots, l_{n-2} \rangle]$$

sicher $l_0$-invariant sind.

Es hat $l_0 l_i$ stets die Ordnung 3 für $2 \leq i \leq n-2$ und es ergibt sich

$$[V^{**}, l_0] = 0 \quad \text{und} \quad [V^*, l_0] = V^*.$$

Es sei o.B.d.A. $V^* = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle$. Es operiert $l_0$ fixpunktfrei auf $V^*$ und somit ist $V^*$ vom Typ $D \cdots D$. Da die $v_i$ und $w_i$ für $i \geq 2$ isotrop sind, ist auch $v_1$ und $w_1$ isotrop.

Es sei weiter

$$v_1^{l_0} = v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} w_1\, w_2^{\beta_2}$$

Aber dann ist ($g$ sei die quadratische Form zu $V$)

$$g(v_1^{l_0}) = \alpha_1 + \alpha_2 \beta_2 \quad \text{und} \quad g(v_1^{l_0^2}) = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 \beta_2,$$

ein Widerspruch.

Also $v_1^{l_0} \in \langle v_1, v_2 \rangle \cup \langle v_1, w_2 \rangle$. Somit ist entweder $v_1$ oder $\langle v_1, w_2, \cdots, w_n \rangle$ unter $L$ invariant und $V$ ist vom Typ $D \cdots D$. Also ist (1) gezeigt.

Es sei $W$ ein regulärer, orthogonaler $F_2$-Vektorraum der Dimension $2m+1$ mit rad $W = \langle w \rangle$ und $g(w) = 1$. Dann ist $O(W) \cong Sp(2m, 2)$. Damit folgt (2) aus (1) und der Tatsache, dass $V$ nach 2.2 eine eindeutige Zerlegung in $L$-invariante, isotrope Teilräume $V_1 \oplus V_2$ hat.

Die Voraussetzungen des Satzes, 2.2 und das Resultat von Suzuki [7; Theorem 1, p. 1045] führen zur Aussage des Lemmas.

## Referenzen


1. J. Dieudonne, *Pseudo Discriminant and Dickson Invariant*, Pacific J. Math., vol. 5 (1955), pp. 907–910.
2. G. Glauberman, *Central elements in core-free groups*, J. Algebra, vol. 4 (1966), pp. 403–421.
3. D. Gorenstein, *Finite groups*, Harper and Row, New York, 1968.
4. D. Held and U. Schoenwaelder, *A characterization of the simple group $M_{24}$*, Math. Zeitschrift, vol. 117 (1970), pp. 289–308.
5. B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer, New York, 1967.
6. ———, *Singer Zyklen in klassischen Gruppen*, Math. Zeitschrift, vol. 117 (1970), pp. 141–150.
7. M. Suzuki, *Characterizations of linear groups*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 75 (1969), pp. 1043–1091.



Johannes Gutenberg Universität
Mainz, Deutschland