SUR LA NON FACTORISATION DES ELEMENTS DE L'ESPACE DE HARDY $H^1(U^2)$

BY

JEAN-PIERRE ROSAY

I. Introduction

Nous reprenons d'une façon générale les notations de [4]. En particulier U^n désigne le polydisque unité de $\mathbf{C}^n$, $H^1(U^n)$ et $H^2(U^n)$ les espaces de Hardy classiques sur le polydisque.

Il est bien connu que tout élément de $H^1(U)$ peut s'écrire comme le produit de deux éléments de $H^2(U)$. Ce résultat ne demeure pas en plusieurs variables. On sait que W. Rudin a montré que dès que $n \geq 4$, il existe un élément de $H^1(U^n)$ qui n'est pas le produit de deux éléments de $H^2(U^n)$, cf. [4, pp. 63.67].

Nous noterons θ l'application de $H^2(U^2) \times H^2(U^2)$ dans $H^1(U^2)$ qui à tout couple d'éléments de $H^2(U^2)$ associe leur produit. Dans le livre de W. Rudin, deux questions sont dégagées: θ est-elle surjective? θ est-elle ouverte en (0, 0) (i.e. l'image de tout voisinage de (0, 0) est-elle un voisinage de 0)?

L'équivalence de ces deux questions n'est pas évidente; en effet P. J. Cohen a donné dans [1] l'exemple de deux espaces de Banach E et F et d'une application bilinéaire surjective de $E \times E$ sur F non ouverte en (0, 0).

Ma contribution à la question est de montrer que l'application θ est surjective si et seulement si elle est ouverte en (0, 0) (c'est fondamentalement ce qui est fait dans le paragraphe III).

D'autre part J. Miles a montré dans [3] que l'application θ n'est pas ouverte en (0, 0) (il en déduit la non factorisation dans $H^1(U^3)$ en suivant la fin de la démonstration du Théorème 4.2.2 de [4]).

Finalement nos deux résultats donnent la proposition suivante:

PROPOSITION. *Il existe un élément de $H^1(U^2)$ qui ne peut pas s'écrire comme le produit de deux éléments de $H^2(U^2)$.*

Je suis très reconnaissant au Professeur W. Rudin d'avoir porté à ma connaissance le résultat de J. Miles, pour la commodité du lecteur je reproduis dans le paragraphe II la démonstration simplifiée qu'il m'a communiquée.

II. Un Lemme

LEMME (J. Miles). *Pour toute constante $C > 0$, il existe $F \in H^1(U^2)$ vérifiant $\|F\|_1 \leq 1$ et telle que pour tout h et $k \in H^2(U^2)$ vérifiant $F = hk$ on ait $\|h\|_2$ ou $\|k\|_2 > C$.*

Received December 23, 1974.

Démonstration. Pour un entier N, qu'à la fin il suffira d'avoir choisi suffisamment grand on pose, z et w désignant deux variables complexes:

$$P(z, w) = z^{N-2}w^2 + z^{N-3}w^3 + \cdots + w^N \quad et \quad f(z, w) = z^{N-1} + P(z, w).$$

Supposons que $f = hk$. Considérons les développement de h et k en série de polynômes homogènes:

$$h = H_i + H_{i+1} + \cdots, \quad k = K_{N-1-i} + K_{N-i} + \cdots,$$

avec H_i et $K_{N-1-i} \neq 0$, et les indices désignant les degrés. On a alors:

(1) $H_i K_{N-1-i} = z^{N-1}$

(2) $H_i K_{N-i} + H_{i+1} K_{N-1-i} = P.$

Observons tout d'abord que $i = 0$ ou $N - 1$. En effet si on avait $0 < i < N - 1$, H_i et K_{N-1-i} seraient d'après (1) des monomes de z de degrés positifs, donc z diviserait P d'après (2), ce qui est faux. Les deux cas étant symétriques, on supposera que $i = 0$. Alors (1) montre que $H_0 = A$ et $K_{N-1} = (1/A)z^{N-1}$, où A est une constante non nulle.

Donc (2) s'écrit $AK_N + H_1(z^{N-1}/A) = P$. Puisque P et $H_1(z^{N-1}/A)$ sont orthogonaux, on en déduit que

$$\|AK_N\|_2 \geq \|P\|_2 = \sqrt{N-1}$$

d'où

$$\|h\|_2 \|k\|_2 \geq |A| \, \|K_N\|_2 \geq \sqrt{N-1}.$$

Cependant $\|f\|_1 \sim \operatorname{Log} N$ si N est assez grand (cela se ramène à remarquer que dans $H^1(U)$ si $\Phi_N(\lambda) = 1 + \cdots + \lambda^N$ on a $\|\Phi_N\|_1 \sim \operatorname{Log} N$ quand N tend vers l'infini [4, p. 64]). On obtient donc le lemme si, C étant donné, on a choisi N assez grand en prenant $F = (f/\|f\|_1)$.

III. Démonstration de la proposition

Nous raisonnerons par l'absurde, nous supposerons que θ est surjective. Soit B la boule unité fermée de $H^2(U^2)$. Observons que $\theta(B \times B)$ est fermé dans $H^1(U^2)$. En effet, soit f un élément de $H^1(U^2)$ qui est limite d'une suite (f_p) d'éléments de $\theta(B \times B)$, écrivons chaque f_p sous la forme $f_p = h_p k_p$ avec $\|h_p\|_2$ et $\|k_p\|_2 \leq 1$, $B \times B$ est compact pour la topologie faible soit (h, k) un point adhérent à la suite (h_p, k_p), on a $f = hk$ car les évaluations aux points de U^2 sont continues pour la topologie faible, donc $f \in \theta(B \times B)$.

Si θ est surjective, $H^1(U^2)$ est une union dénombrable d'homothétiques de $\theta(B \times B)$; $\theta(B \times B)$ est donc d'intérieur non vide. Il existe donc un polynôme en (z, w), z et w désignant des variables complexes, identiquement nul pour $z = 1$ appartenant à l'intérieur de $\theta(B \times B)$, car de tels polynômes sont denses dans $H^1(U^2)$.

En multipliant ce polynôme par une constante on obtient que il existe une constante C et un polynôme $R(z, w)$ vérifiant $R(1, \cdot) \equiv 0$ tels que pour tout

$g \in H^1(U^2)$ vérifiant $\|R - g\|_1 \leq 2$, il existe h et $k \in H^2(U^2)$ vérifiant $\|h\|_2$ et $\|k\|_2 \leq C$ et $g = hk$. D'autre part d'après le lemme il existe $F \in H^1(U^2)$ vérifiant $\|F\|_1 < 1$ et tel que pour tout h et $k \in H^2(U^2)$ vérifiant $F = hk$, on ait $\|h\|_2$ ou $\|k\|_2 > C + 1$. Puisque l'image par θ du produit de la boule fermée de rayon $C + 1$ par elle même est fermée, on peut choisir pour F un polynôme vérifiant $F(1, \cdot) \equiv 0$; et il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $F' \in H^1(U^2)$ et $\|F' - F\|_1 \leq \varepsilon$ alors pour tout h et $k \in H^2(U^2)$ vérifiant $F' = hk$ on ait $\|h\|_2$ ou $\|k\|_2 > C + 1$. Dans la suite R, C, F et ε sont fixés avec les propriétés énoncées ci-dessus.

Pour tout entier $p \geq 1$ soit T_p la transformation conforme du disque sur lui-même:

$$T_p(z) = \frac{[1 - (1/p)] - z}{1 - [1 - (1/p)]z}.$$

Soit Ψ_p un élément inversible de $H^\infty(U)$, tel que sur le cercle unité on ait

$$|\Psi_p| = \text{Max}\,(|T_p'|, 1),$$

T_p' désignant naturellement la dérivée de T_p.

On pose $g_p(z, w) = F(T_p(z), w)\,\Psi_p(z) + R(z, w)$. Si p est assez grand on a $\|F(T_p(z), w)\,\Psi_p(z)\|_1 \leq 2$. En effet, si $|T_p'(z)| \leq 1$, on a

$$-\frac{\pi}{\sqrt{p}} \leq \arg T_p(z) \leq \frac{\pi}{\sqrt{p}} \quad (\text{mod } 2\pi),$$

donc

$$\|F(T_p(z), w)\Psi_p(z)\|_1$$

$$\leq \sup_{|\arg z| \leq \pi/\sqrt{p},\, |z| = |w| = 1} |F(z, w)| + \int_{\mathbf{T}^2} |F(T_p(z), w)|\,|T_p'(z)|\, dm_1(z)\, dm_1(w)$$

or cette dernière intégrale est égale d'après la formule du changement de variable à $\|F\|_1$ donc ≤ 1, et du seul fait que $F(1, \cdot) \equiv 0$,

$$\sup_{|\arg z| \leq \pi/\sqrt{p},\, |w| \leq 1} |F(z, w)|$$

tend vers 0 quand p tend vers l'infini.

Par suite, si p est assez grand, il existe h et $k \in H^2(U^2)$ tels que $\|h\|_2$ et $\|k\|_2 \leq C$ et $F(T_p(z), w)\Psi_p(z) + R(z, w) = h(z, w)k(z, w)$.

D'où puisque $T_p = T_p^{-1}$,

$$F(z, w) + \frac{R(T_p(z), w)}{\Psi_p(T_p(z))} = \frac{h(T_p(z), w)}{\sqrt{\Psi_p(T_p(z))}}\,\frac{k(T_p(z), w)}{\sqrt{\Psi_p(T_p(z))}}$$

où $\sqrt{\Psi_p}$ désigne une détermination continue quelconque de la racine carrée de Ψ_p.

Du seul fait que $|\Psi_p| \geq 1$ et que $R(1, \cdot) \equiv 0$,

$$\left\| \frac{R(T_p(z), w)}{\Psi_p(T_p(z))} \right\|_1 \leq \varepsilon$$

pour p assez grand. Par choix de ε, il vient

$$\left\|\frac{h(T_p(z), w)}{\sqrt{\Psi_p(T_p(z))}}\right\|_2 \quad \text{ou} \quad \left\|\frac{k(T_p(z), w)}{\sqrt{\Psi_p(T_p(z))}}\right\|_2 > C + 1.$$

Supposons par exemple que

$$\left\|\frac{h(T_p(z), w)}{\sqrt{\Psi_p(T_p(z))}}\right\|_2 > C + 1.$$

Alors en utilisant le fait que $T_p = T_p^{-1}$ et donc que $1/T_p'(T_p(z)) = T_p'(z)$ on a les inégalités et égalités suivantes:

$$\begin{aligned}
(C + 1)^2 &< \int_{\mathbf{T}^2} \frac{|h(T_p(z), w)|^2}{|\Psi_p(T_p(z))|}\, dm_1(z)\, dm_1(w) \\
&\leq \int_{\mathbf{T}^2} \frac{|h(T_p(z), w)|^2}{|T_p'(T_p(z))|}\, dm_1(z)\, dm_1(w) \\
&= \int_{\mathbf{T}^2} |h(T_p(z), w)|^2 |T_p'(z)|\, dm_1(z)\, dm_1(w) \\
&= \int_{\mathbf{T}^2} |h(z, w)|^2\, dm_1(z)\, dm_1(w).
\end{aligned}$$

Donc $\|h\|_2 > C + 1$, contrairement à ce qui précède. C'était la contradiction souhaitée.

Remarque. Il résulte de la démonstration de la proposition que l'ensemble des éléments de $H^1(U^2)$ qui peuvent s'écrire comme produit de deux éléments de $H^2(U^2)$ est un ensemble de première catégorie.

Added in proof. C. Horowitz a donné récemment l'exemple d'une application bilinéaire surjective de $\mathbf{C}^3 \times \mathbf{C}^3$ sur $\mathbf{C}^4$ non ouverte en (0, 0), cf. [5].

Références

1. P. J. Cohen, *A counterexample to the closed graph theorem for bilinear maps*, J. Funct. Anal., vol. 16 (1974) pp. 235–240.
2. J. Miles, *Zéro sets in $H^p(U^n)$*, Illinois J. Math., vol. 17 (1973), pp. 458–464.
3. ———, *A factorisation theorem in $H^1(U^3)$*, Proc. Amer. Math Soc., à paraitre.
4. W. Rudin, *Function theory in polydiscs*, W. A. Benjamin, N.Y., 1969.
5. C. Horowitz, *An elementary counterexample to the open mapping principle for bilinear maps*, à paraitre.

Universite de Provence
Marseille, France
Laboratoire de Mathematiques de Marseille
Marseille, France