ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 29, Number 1, Spring 1985

ANNEAUX D'ENTIERS DANS LE MEME GENRE

PAR

JACQUES QUEYRUT[1]

Soit $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers et $\mathbf{Q}$ son corps des fractions. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$. Si N est une extension finie de $\mathbf{Q}$ incluse dans $\overline{\mathbf{Q}}$, on note G_N le groupe de galois de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur N et $\mathbf{Z}_N$ l'anneau des entiers de N.

Soit Γ un groupe fini.

On note $\mathscr{E}(\Gamma)$ l'ensemble des extensions finies N de $\mathbf{Q}$ incluses dans $\overline{\mathbf{Q}}$ telles que Γ soit isomorphe à un sous-groupe du groupe des $\mathbf{Q}$-automorphismes de N. Si $N \in \mathscr{E}(\Gamma)$, $\mathbf{Z}_N$ a une structure de $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module de rang défini $r = [N^{\Gamma} : \mathbf{Q}]$.

THEOREME A. *Soient N et N' deux extensions finies de $\mathbf{Q}$ et soit Γ un groupe fini. On suppose que*:

(1) *N et N' appartiennent à $\mathscr{E}(\Gamma)$;*

(2) *$\mathbf{Z}_N$ et $\mathbf{Z}_{N'}$ sont des $\mathbf{Z}[\Gamma]$-modules localement isomorphes.*

Alors il existe un $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module X de type fini sans $\mathbf{Z}$-torsion et un isomorphisme de $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module de $\mathbf{Z}_N \oplus X$ dans $\mathbf{Z}_{N'} \oplus X$.

Ce résultat peut s'exprimer de la façon suivante: soit $\mathfrak{D}$ un ordre de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Q}[\Gamma]$, on note $\mathscr{G}_{\oplus}(\mathfrak{D})$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathfrak{D}$-modules de type fini sans $\mathbf{Z}$-torsion, modulo les suites exactes scindées (voir [6]). Alors sous les hypothèses du théorème 1, $[\mathbf{Z}_N] = [\mathbf{Z}_{N'}]$ dans $\mathscr{G}_{\oplus}(\mathbf{Z}[\Gamma])$.

Ce résultat a été conjecturé et démontré dans un cas particulier par S.M.J. Wilson [12]. Dans le cas où $\mathbf{Z}_N$ est un $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module projectif (cas modéré), $\mathbf{Z}_N$ et $\mathbf{Z}[\Gamma]^r$ sont dans le même genre d'après un résultat de Swan [*S*] et A. Fröhlich a démontré le résultat plus précis suivant: pour tout $N \in \mathscr{E}(\Gamma)$ tel que $\mathbf{Z}_N$ soit un $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module projectif, alors $[\mathbf{Z}_N] = r[\mathbf{Z}[\Gamma]]$ dans $\mathscr{G}_{\oplus}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ [3] (voir [7], corollaire 1 au théorème 1).

Dans le cas général le genre de $\mathbf{Z}_N$ est encore mal connu. Toutefois, on démontre ici qu'un théorème de Leopoldt [5] se généralise sous la forme suivante:

Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}_N$ de N, on pose pour tout entier i,

$$\Gamma_i(\mathfrak{p}_N) = \{\gamma \in \Gamma, \gamma(x) - x \in \mathfrak{p}_N^{i+1}, \forall\, x \in \mathbf{Z}_N\},$$

Received November 29, 1982

[1]Ce travail a été achevé alors que j'étais l'hôte de l'Université de l'Illinois et que je bénéficiais d'une aide financière de la N.S.F. Je remercie le Départment de Mathématiques d'Urbana pour sa chaleureuse hospitalité.

$e_i(\mathfrak{p}_N) = |\Gamma_i|^{-1}\Sigma_{\gamma\in\Gamma_i}\gamma$ où $|\Gamma_i|$ désigne l'ordre de Γ_i et avec la convention que $e_i(\mathfrak{p}_N) = 1$ si $\Gamma_i(\mathfrak{p}_N) = \{1\}$.

Soit $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathbf{Z}_N, \mathbf{Q}[\Gamma])$ l'ordre de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Q}[\Gamma]$ engendré par $\mathbf{Z}[\Gamma]$ et les idempotents $e_i(\mathfrak{p}_N)$ pour tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}_N$ et pour tout entier i supérieur ou égal à 1. Pour tout $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module M, on note $M^{\mathfrak{D}}$ le plus grand sous-module de M stable par $\mathfrak{D}$.

On note enfin $\mathrm{Tor}_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(\mathbf{Z}_N)$ le groupe de torsion donné par la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tor}_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(\mathbf{Z}_N) \to \mathfrak{D}(\mathbf{Z}_N, \mathbf{Q}[\Gamma]) \otimes_{\mathbf{Z}[\Gamma]} \mathbf{Z}_N \to \mathfrak{D}(\mathbf{Z}_N, \mathbf{Q}[\Gamma])\mathbf{Z}_N \to 0.$$

THEOREME B. *On suppose que Γ est cyclique, alors pour $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathbf{Z}_N, \mathbf{Q}[\Gamma])$, on a dans $\mathscr{G}_\oplus(\mathfrak{D})$ l'égalité:*

$$\left[\mathbf{Z}_N^{\mathfrak{D}}\right] - r\left[\mathbf{Z}[\Gamma]^{\mathfrak{D}}\right] = \sum_{\mathfrak{p}_N, i} \left[(e_{i+1}(\mathfrak{p}_N) - e_i(\mathfrak{p}_N))\mathrm{Tor}_{\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma_i(\mathfrak{p}_N)]}\left(\mathbf{Z}_N^{\Gamma_i(\mathfrak{p}_N)}\right)\right].$$

Remarque. Si T est un $\mathfrak{D}$-module de torsion, on note [10] l'élément de $\mathscr{G}_\oplus(\mathfrak{D})$ égal à $[M] - [M']$ où M, M' et T sont liés par une suite exacte $0 \to M' \to M \to T \to 0$ et M et M' sont des $\mathfrak{D}$-modules sans torsion.

En fait, Leopoldt traite le cas où $N^\Gamma = \mathbf{Q}$; il montre de plus que

$$\mathfrak{D}(\mathbf{Z}_N, \mathbf{Q}[\Gamma]) = \{\lambda \in \mathbf{Q}[\Gamma], \lambda\mathbf{Z}_N \subset \mathbf{Z}_N\}$$

et que $\mathbf{Z}_N$ est libre sur $\mathfrak{D}(\mathbf{Z}_N, \mathbf{Q}[\Gamma])$ engendré par un élément construit à l'aide des sommes de Gauss associées aux caractères de Γ. Ce dernier résultat ici est généralisé sous la forme du théorème 3.1.

Dans le premier paragraphe, on définit la notion d'espaces résolvants et de modules résolvants comme étant des éléments des groupes de Grothendieck relatifs définis dans [8]. Il est donc fait largement appel à cet article pour toutes les notions algébriques nécessaires ici. En particulier le théorème A est démontré en utilisant le diagramme (9) de [8].

Dans le deuxième paragraphe, on rappelle la définition des sommes de Gauss galoisiennes et on leur associe un élément dans les groupes de Grothendieck relatifs dont il est question ci-dessus.

Dans le troisième paragraphe, on étudie le cas des extensions cycliques; le cas général du théorème A en est déduit dans le dernier paragraphe. Comme d'habitude la clé de la démonstration est le théorème 3.1 qui donne le lien entre les modules résolvants et les sommes de Gauss.

1. Espaces et modules résolvants

Soit N une extension séparable finie d'un corps K et soit Γ un groupe d'automorphismes de N laissant K fixe ($K \subset N^\Gamma$).

L'algèbre $K[\Gamma]$ est munie d'une involution, notée $\lambda \to \bar{\lambda}$, définie par

$$\bar{\lambda} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma \gamma^{-1} \quad \text{si } \lambda = \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma \gamma.$$

On construit à partir de l'application trace, notée $tr_{N/K}$, une forme hermitienne $Tr_{N/K}$ de N sur $K[\Gamma]$ en posant

$$Tr_{N/K}(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} tr_{N/K}(x\gamma(y))\gamma, \quad \forall\, x, y \in N$$

On a donc: $Tr_{N/K}(\gamma(x), y) = \gamma Tr_{N/K}(x, y)$,

$$Tr_{N/K}(x, \gamma(y)) = Tr_{N/K}(x, y)\gamma^{-1} \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

Soit $\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})$, l'ensemble des K-isomorphismes de N dans une clôture séparable $\bar{K}$ de K contenant N; Γ est donc un sous-ensemble de $\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})$.

Soit G_K le groupe de Galois de $\bar{K}$ sur K, l'application qui à $g \in G_K$ associe la restriction de g à N, notée $\mathrm{Res}_{\bar{K}}^{N}(g)$, donne une bijection de l'ensemble des classes G_K/G_N dans $\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})$. Par la suite on identifiera ces deux ensembles.

On note $K[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})]$ le K-espace vectoriel de base les éléments de $\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})$; $\forall v \in \mathrm{Is}_K(N, \bar{K})$, $v \circ \gamma^{-1}$ appartient à $\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})$ pour tout $\gamma \in \Gamma$; $K[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})]$ a donc une structure de $K[\Gamma]$-module, telle que

$$\gamma\Big(\sum_v x_v v\Big) = \sum_v x_{v \circ \gamma} v = \sum_v x_v (v \circ \gamma^{-1}).$$

Soit r le degré de N^Γ sur K; r est le rang de N et de $K[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})]$ en tant que $K[\Gamma]$-modules.

On munit $K[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})]$ d'une forme hermitienne sur $K[\Gamma]$ en posant:

$$\forall x = \sum_v x_v v, \quad \forall y = \sum_v y_v v, \quad h(x, y) = \sum_{v,\ w} x_v y_w l_\Gamma(v, w)$$

où l_Γ est l'application de $\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})$ dans $K[\Gamma]$ définie par:

$$\begin{aligned} l_\Gamma(v, w) &= \gamma \quad \text{si } w = v\gamma \quad \text{avec } \gamma \in \Gamma \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

On a pour tout v dans Γ,

$$h(\gamma(x), y) = \gamma h(x, y), \quad h(x, \gamma(y)) = h(x, y)\gamma^{-1}.$$

Enfin, on note $T_{N/K}$ l'application de $\bar{K} \otimes_K N$ dans $\bar{K}[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})]$ définie par

$$T_{N/K}(k \otimes x) = k \sum_{v \in \mathrm{Is}_K(N, \bar{K})} v(x) v.$$

PROPOSITION 1.1. *L'application $T_{N/K}$ est une isométrie de $\bar{K} \otimes_K N$ sur $\bar{K}[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})]$ munis respectivement des formes hermitiennes obtenues par extension des scalaires à partir de $Tr_{N/K}$ et h.*

Démonstration. Le fait que $T_{N/K}$ est une application bijective vient de l'égalité des dimensions sur $\bar{K}$ et du théorème d'indépendance des K-isomorphismes de N dans $\bar{K}$. Il est clair que l'on a pour tout $x, y \in N$,

$$\begin{aligned} h\big(T_{N/K}(x), T_{N/K}(y)\big) &= \sum_{v,w} v(x)w(y)l_\Gamma(v,w) \\ &= \sum_{v} \sum_{\gamma\in\Gamma} v(x)v\gamma(y)\gamma \\ &= Tr_{N/K}(x, y). \end{aligned}$$

Soit $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ un système de représentants des orbites de Γ dans $\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})$; c'est une base orthogonale et normale de $K[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})]$ sur $K[\Gamma]$ ($h(\sigma_i, \sigma_j) = 0$ si $i \neq j$ et $h(\sigma_i, \sigma_i) = 1$). L'application de $K[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})]$ dans $K[\Gamma]^r$ qui à $\lambda = \sum_v \lambda_v v$ associe $(\sum_\gamma \lambda_{\sigma_i \circ \gamma}\gamma^{-1})_{i=1,\dots,r}$ est une isométrie si on munit $K[\Gamma]^r$ de la forme hermitienne canonique suivante:

$$\big((x_i)_{i=1,\dots,r}, (y_i)_{i=1,\dots,r}\big) \to \sum_{i=1}^{r} x_i\bar{y}_i.$$

Soit $\mathscr{K}_{0,\bar{K}/K}(K[\Gamma])$ le groupe de Grothendieck relatif, défini dans [8, § 2], permettant de classifier les objets formés des triplets $[V, \alpha, W]$ où V et W sont des $K[\Gamma]$-modules de type fini et α est un $\bar{K}[\Gamma]$-isomorphisme de $\bar{K} \otimes_K V$ dans $\bar{K} \otimes_K W$.

DEFINITION 1.2. L'élément $[N, T_{N/K}, K[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})]]$ de $\mathscr{K}_{0,\bar{K}/K}(K[\Gamma])$ est appelé espace résolvant de N dans $K[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})]$. On le note $\mathrm{r}_{K[\Gamma]}(N/K)$, ou plus simplement $\mathrm{r}(N/K)$.

La proposition 1.1 montre que $\bar{K} \otimes_K N$ est isomorphe à $\bar{K}[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})]$. Comme l'extension des scalaires de K à $\bar{K}$ donne une injection de $\mathscr{K}_0(K[\Gamma])$ dans $\mathscr{K}_0(\bar{K}[\Gamma])$ [6, § 2], N est un $K[\Gamma]$-module isomorphe à $K[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})]$. Soit φ un tel isomorphisme.

Soit $\delta_{\bar{K}/K}$ l'homomorphisme de $\mathscr{K}_1(\bar{K}[\Gamma])$ dans $\mathscr{K}_{0,\bar{K}/K}(K[\Gamma])$ qui, à $[\bar{K}[\Gamma], \alpha]$, associe $[K[\Gamma], \alpha, K[\Gamma]]$ et rend la suite suivante exacte (voir [8, § 1]):

$$\mathscr{K}_1(K[\Gamma]) \to \mathscr{K}_1(\bar{K}[\Gamma]) \xrightarrow{\delta_{\bar{K}/K}} \mathscr{K}_{0,\bar{K}/K}(K[\Gamma]) \to 0.$$

On a

$$\delta_{\bar{K}/K}\big(\big[\bar{K}[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})], T_{N/K} \circ \varphi^{-1}\big]\big) = \big[N, T_{N/K}, K[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})]\big].$$

Soit $R(\Gamma)$ le groupe des caractères virtuels de Γ, identifié à $\mathscr{K}_0(\overline{K}[\Gamma])$. Le groupe $\mathscr{K}_1(\overline{K}[\Gamma])$ est alors isomorphe à $\mathrm{Hom}(R(\Gamma), \overline{K}^*)$ par l'application Det (voir [8, § 1]). Si V est un $\overline{K}[\Gamma]$-module de caractère ρ,

$$\mathrm{Det}_\rho\left(\left[\overline{K}\left[Is_K(N, \overline{K})\right], T_{N/K} \circ \varphi^{-1}\right]\right)$$

est le déterminant de l'endomorphisme de $\mathrm{Hom}_{\overline{K}[\Gamma]}(V, \overline{K}[\mathrm{Is}_K(N, \overline{K})])$ défini par $T_{N/K} \circ \varphi^{-1}$.

Soit $\mathfrak{R}(K[\Gamma])$ le sous-groupe de torsion de $\mathscr{K}_{0, \overline{K}/K}(K[\Gamma])$. Le groupe G_K opère sur $\mathscr{K}_{0, \overline{K}/K}(K[\Gamma])$ et sur $\mathfrak{R}(K[\Gamma])$.

PROPOSITION 1.3. (1) *L'espace résolvant* $\mathfrak{r}_{K[\Gamma]}(N/K)$ *appartient à* $\mathfrak{R}(K[\Gamma])^{G_K}$.

(2) *L'application* ϕ *de* $\Phi = \mathrm{Hom}(G_K, \mathscr{K}_1(K[\Gamma]))$ *associée à* $\mathfrak{r}_{K[\Gamma]}(N/K)$ (*voir* [8, § 2, *proposition* 2.3]) *est définie par*

$$\phi(g) = \left[K\left[\mathrm{Is}_K(N, \overline{K})\right], g\right]$$

où $g \in G_K$ *opère sur* $\mathrm{Is}_K(N, \overline{K})$ *par* $v \to g \circ v$.

(3) *Soit* $W_{\mathbf{Q}, \infty}(\rho)$ *la partie infinie de la constante de l'équation fonctionnelle des séries L d'Artin* (*voir* [13, *définition* 7.2]). *Pour tout caractère symplectique* ρ,

$$\mathrm{Det}_\rho\left(\left[\mathbf{Q}[\mathrm{Is}_\mathbf{Q}(N, \overline{\mathbf{Q}})], T_{N/\mathbf{Q}} \circ \varphi^{-1}\right]\right) W_{\mathbf{Q}, \infty}\left(\mathrm{Ind}_{G_N \Gamma}^{G_\mathbf{Q}}(\rho)\right)^{-1}$$

est un nombre totalement réel et positif quel que soit φ.

Remarque. D'après la proposition 1.3 de [8], $\mathfrak{r}_{\mathbf{Q}[\Gamma]}(N/\mathbf{Q})$ est déterminé de façon unique par la proposition 1.3 ci-dessus.

Démonstration. Soit N' la clôture galoisienne de N sur K dans $\overline{K}$. Par restriction à $N' \otimes_K N$ (inclus dans $\overline{K} \otimes_K N$), $T_{N/K}$ définit un $K[\Gamma]$ isomorphisme de $N' \otimes_K N$ dans $N'[\mathrm{Is}_K(N, \overline{K})]$. On a

$$\left[N' \otimes_K N, T_{N/K}, N'\left[\mathrm{Is}_K(N, \overline{K})\right]\right] = n\left[N, T_{N/K}, K\left[\mathrm{Is}_K(N, \overline{K})\right] = 0\right.$$

si $n = [N' : K]$. Donc $\mathfrak{r}_{K[\Gamma]}(N/K)$ appartient à $\mathfrak{R}(K[\Gamma])$.

Soit $g \in G_K$; on note g^* l'endomorphisme de $\overline{K}[\mathrm{Is}_K(N, \overline{K})]$ qui, à $\Sigma_v \lambda_v v$, associe $\Sigma_v g^{-1}(\lambda_v) v$. Par définition de l'action de G_K sur $\mathscr{K}_1(\overline{K}[\Gamma])$, on a

$$g\left(\left[\overline{K}\left[\mathrm{Is}_K(N, \overline{K})\right], T_{N/K} \circ \varphi^{-1}\right]\right)$$
$$\left[\overline{K}\left[\mathrm{Is}_K(N, \overline{K})\right], g^* \circ T_{N/K} \circ \varphi^{-1} \circ (g^*)^{-1}\right].$$

Soit $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ un sytème de représentants des orbites de Γ dans $\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})$, on a

$$\begin{aligned} g^* \circ T_{N/K} \circ \varphi^{-1} \circ (g^*)^{-1}(\sigma_i) &= g^* \circ T_{N/K}(1 \otimes \varphi^{-1}(\sigma_i)) \\ &= g^*\Big(\sum_v v(\varphi^{-1}(\sigma_i))v\Big) \\ &= \sum_v (g^{-1} \circ v \circ \varphi^{-1})(\sigma_i) v \\ &= g(T_K \circ \varphi^{-1}(\sigma_i)). \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} &g\big(\big[\bar{K}[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})], T_{N/K} \circ \varphi^{-1}\big]\big) \\ &\qquad \big[\bar{K}[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})], g\big] + \big[\bar{K}[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})], T_{N/K} \circ \varphi^{-1}\big]. \end{aligned}$$

Comme $\delta_{\bar{K}/K}([\bar{K}[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})], g]) = 0$, cette relation achève la démonstration de la première partie de la proposition. La deuxième partie est alors immédiate. La troisième partie se déduit de la proposition 2.5 de [4] en utilisant la base $(\varphi^{-1}(\sigma_i))_{i=1,\ldots,r}$ de N sur $\mathbf{Q}[\Gamma]$.

Soit A_K un anneau de Dedekind de corps des fractions K et soit A_N la clôture intégrale de A_K dans N.

Soit $\bar{\mathscr{G}}_{\oplus,\mathrm{rel}}(A_K[\Gamma])$ (resp. $\bar{\mathscr{K}}_{0,\mathrm{rel}}(A_K[\Gamma])$) le groupe de Grothendieck relatif permettant de classifier les objets formés des triplets $[M, \alpha, M']$ où M et M' sont des $A_K[\Gamma]$-modules de type fini sans torsion (resp. projectifs) et α est un $\bar{K}[\Gamma]$-isomorphisme de $\bar{K} \otimes_{A_K} M$ sur $\bar{K} \otimes_{A_K} M'$ (voir [8, § 3]).

DEFINITION 1.4. Soit M un $A_K[\Gamma]$-module de type fini sans torsion (resp. projectif) qui soit un réseau de A_K dans N et soit I un $A_K[\Gamma]$-module de type fini sans torsion (resp. projectif) qui soit un réseau de A_K sans $K[\mathrm{Is}_K(N, \bar{K})]$. On appelle module radical de M dans I l'élément $[M, T_{N/K}, I]$ de $\bar{\mathscr{G}}_{\oplus,\mathrm{rel}}(A_K[\Gamma])$ (resp. $(\bar{\mathscr{K}}_{0,\mathrm{rel}}(A_K[\Gamma]))$).

On le note $r_{A_K[\Gamma]}(M, I)$ ou plus simplement $\mathrm{r}(M, I)$.

Il est clair que l'image par extension des scalaires de A_K à K de $\mathrm{r}_{A_K[\Gamma]}(M, I)$ dans $\mathscr{K}_{0,\bar{K}/K}(K[\Gamma])$ est égale à $\mathrm{r}_{K[\Gamma]}(N/K)$.

Soit $\mathfrak{R}_\Phi(\mathscr{C}(A_K[\Gamma])$ le sous-groupe de $\bar{\mathscr{G}}_{\oplus,\mathrm{rel}}(A_K[\Gamma])$ formé des éléments $[M, \alpha, M']$ tels que $[K \otimes_{A_K} M, \alpha, K \otimes_{A_K} M']$ appartienne à $\mathfrak{R}(K[\Gamma])^{G_K}$ (voir [8, § 2 et 3]). D'après la proposition 1.3, $\mathrm{r}_{A_K[\Gamma]}(M, I)$ appartient à $\mathfrak{R}_\Phi(\mathscr{C}(A_K[\Gamma]))$.

Nous allons maintenant établir quelques propriétés fonctionnelles des modules résolvants.

Restriction aux sous-groupes K—N^{Γ}—N^{Δ}—N.

PROPOSITION 1.5. *Soit Δ un sous-groupe de Γ et soit $\mathrm{Res}_{\Gamma}^{\Delta}$ l'homomorphisme de $\mathscr{K}_{0,\overline{K}/K}(K[\Gamma])$ (resp. $\overline{\mathscr{G}}_{\oplus,\mathrm{rel}}(A_K[\Gamma])$) dans $\mathscr{K}_{0,\overline{K}/K}(K[\Delta])$ (resp. $\overline{\mathscr{G}}_{\oplus,\mathrm{rel}}(A_K[\Delta])$) obtenu à partir de la restriction des scalaires de Γ à Δ. Alors*

$$\mathrm{Res}_{\Gamma}^{\Delta}\big(\mathfrak{r}_{K[\Gamma]}(N/K)\big) = \mathfrak{r}_{K[\Delta]}(N/K),$$
$$\mathrm{Res}_{\Gamma}^{\Delta}\Big(\mathfrak{r}_{A_K[\Gamma]}(M,I)\Big) = \mathfrak{r}_{A_K[\Delta]}(M,I)$$

pour tous modules M et I vérifiant les conditions de la définition 1.4.

La démonstration est une conséquence immédiate des définitions.

Restriction aux sous-corps F—K—N^{Γ}—N.

Soit F un sous-corps de K; si s est le degré de F sur K, N a une structure de $F[\Gamma]$-module de rang rs.

LEMME 1.6. *Soit $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$ un système de représentants des classes de G_F modulo G_K. Soit ε l'isomorphisme*

$$\overline{K} \otimes_F K\big[\mathrm{Is}_K(N,\overline{K})\big] \to \overline{K}\big[\mathrm{Is}_F(N,\overline{K})\big],$$
$$k \otimes \sum_v \lambda_v v \to k \sum_v \sum_{i=1}^{s} \tau_i(\lambda_v)\tau_i v.$$

(1) *L'élément $[K[\mathrm{Is}_K(N,\overline{K})], \varepsilon, F[\mathrm{Is}_F(N,\overline{K})]]$ de $\mathscr{K}_{0,\overline{K}/F}(F[\Gamma])$ appartient à $\mathfrak{R}(F[\Gamma])^{G_F}$ et ne dépend pas du choix du système de représentants de G_F modulo G_K.*

(2) *La fonction ϕ de $\Phi = \mathrm{Hom}(G_F, \mathscr{K}_1(K[\Gamma]))$ associée est donnée par*

$$\phi(g) = r\big[F\big[\mathrm{Is}_F(K,\overline{K})\big], g\big]$$

où $g \in G_F$ opère sur $\mathrm{Is}_F(K,\overline{K})$ par $v \to g \circ v$ et $r = [N^{\Gamma}\colon K]$).

(3) *Soit $r_{K/\mathbf{Q}}$ le caractère de la représentation de $G_{\mathbf{Q}}$ dans $G_K/G_{\mathbf{Q}}$. Pour tout caractère symplectique ρ, $\mathrm{Det}_\rho([K[\mathrm{Is}_K(N,\overline{K})], \varepsilon \circ \varphi^{-1}])W_{\mathbf{Q},\infty}(r_{K/\mathbf{Q}})^{\dim\rho}$ est un nombre totalement réel et positif pour tout $\mathbf{Q}[\Gamma]$ isomorphisme φ de $\mathbf{Q}[\mathrm{Is}_Q(N,\overline{Q})]$ dans $K(\mathrm{Is}_K(N,\overline{K})]$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$\big[K\big[\mathrm{Is}_K(N,\overline{K})\big], \varepsilon, F\big[\mathrm{Is}_F(N,\overline{K})\big]\big] = r\big[K, T_{K/F}, F\big[\mathrm{Is}_F(N,\overline{K})\big]\big]$$

dans $\mathscr{K}_{0,\overline{K}/F}(F[\Gamma])$. Le résultat découle alors de la proposition 1.3.

Proposition 1.7. *Soit* Res_K^F *l'homomorphisme de* $\mathfrak{R}(K[\Gamma])^{G_K}$ *(resp.* $\mathfrak{R}_\Phi(\mathscr{C}(A_K[\Gamma]))^{G_K}$*) dans* $\mathfrak{R}(F[\Gamma])^{G_F}$ *(resp.* $\mathfrak{R}_\Phi(\mathscr{C}(A_F[\Gamma]))^{G_F}$*) obtenu à partir de la restriction des scalaires de* K *à* F *et* A_K *à* A_F *(voir* [8, §5]). *Alors*

$$\mathfrak{r}_{F[\Gamma]}(N/F) = \mathrm{Res}_K^F\big(\mathfrak{r}_{K[\Gamma]}(N/K)\big) + \big[K\big[\mathrm{Is}_K(N,\overline{K})\big], \varepsilon, F\big[\mathrm{Is}_K(N,\overline{K})\big]\big].$$

Pour tout réseau M *de* A_K *dans* N *stable par* Γ, *pour tout réseau* I *(resp.* J*) de* A_K *(resp.* A_F*) dans* $K[\mathrm{Is}_K(N,\overline{K})]$ [*resp.* $F[\mathrm{Is}_F(N,F)]$] *stable par* Γ, *on a*

$$\mathfrak{r}_{A_F[\Gamma]}(M,J) = \mathrm{Res}_K^F\Big(\mathfrak{r}_{A_K[\Gamma]}(M,I)\Big) + [I,\varepsilon,J].$$

Démonstration. Par définition de l'homomorphisme Res_K^F,

$$\mathrm{Res}_K^F\big(\mathfrak{r}_{K[\Gamma]}(N/K)\big) = \big[N, T'_{N/K}, K\big[\mathrm{Is}_K(N,\overline{K})\big]\big]$$

où $T'_{N/K}$ est l'isomorphisme rendant le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\overline{K}\otimes_F N \arrow[r, "T'_{N/K}"] \arrow[d, "\wr"'] & \overline{K}\otimes_F K\big[\mathrm{Is}_K(N,\overline{K})\big] \arrow[d, "\wr"'] \\
\bigoplus_{i=1}^{s} \tau_i^*(\overline{K}\otimes_K N) \arrow[r, "\bigoplus_{i=1}^{s} \tau_i^*\circ T_{N/K}\circ(\tau_i^*)^{-1}"] & \bigoplus_{i=1}^{s} \tau_i^*\big(\overline{K}\otimes_K K\big[\mathrm{Is}_K(N,\overline{K})\big]\big).
\end{tikzcd}$$

On a donc $\forall k\in\overline{K}, \forall x\in N, T'_{N/K}(k\otimes x) = k\sum_{v\in \mathrm{Is}_K(N,\overline{K})} v(x)\otimes v$. D'où $\varepsilon\circ T'_{N/K} = T_{N/F}$. On en déduit la relation

$$\begin{aligned}\big[N, T_{N/F}, F\big[\mathrm{Is}_F(N,\overline{K})\big]\big] &= \big[N, T'_{N/K}, K\big[\mathrm{Is}_K(N,K)\big]\big] \\ &\quad + \big[K\big[\mathrm{Is}_K(N,\overline{K})\big], \varepsilon, F\big[\mathrm{Is}_F(N,\overline{K})\big]\big].\end{aligned}$$

Le reste de la proposition est alors évident.

Corollaire 1.8. *Supposons que* $K = N^\Gamma$, *on a alors dans* $\overline{\mathscr{G}}_{\oplus,\mathrm{rel}}(A_F[\Gamma])$ *l'égalité*

$$\mathfrak{r}_{A_F[\Gamma]}(M,J) = \mathrm{Res}_K^F\Big(\mathfrak{r}_{A_K[\Gamma]}(M,I)\Big) + [I,\varepsilon,J]$$

pour tout réseau I, J, M, *vérifiant les hypothèses de la proposition* 1.7.

Restriction aux sous-groupes et aux sous-corps

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & E \arrow[drr, dash] & & & \\
& N^\Gamma \arrow[rrr, dash] & & & N^\Delta \arrow[r, dash] & N.
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION 1.9. *Soit Δ un sous-groupe de Γ et soit E une extension de K telle que $K \subset E \subset N^{\Delta}$; on a dans $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(A_K[\Delta])$ l'égalité suivante:*

$$\mathrm{Res}_{\Gamma}^{\Delta}\left(\mathfrak{r}_{A_K[\Gamma]}(M,I)\right) = \mathrm{Res}_{E}^{K}\left(\mathfrak{r}_{A_E[\Delta]}(M,I)\right) + [I,\varepsilon,J]$$

pour tout réseau M de A_K dans N stable par $A_E[\Gamma]$, et pour tout réseau J de A_K dans $K[\mathrm{Is}_K(N,\bar{K})]$ (resp. I de A_E dans $E[\mathrm{Is}_E(N,\bar{K})]$) stable par Γ (resp. Δ).

La démonstration est une conséquence immédiate des propositions 1.5 et 1.7.

Passage au quotient.

Soit Δ un sous-groupe distingué de Γ, le foncteur produit tensoriel par $K[\Gamma/\Delta]$ sur $K[\Gamma]$ (resp. par $A_K[\Gamma/\Delta]$ sur $A_K[\Gamma]$) donne un homomorphisme de $\mathfrak{R}(K[\Gamma])^{G_K}$ sur $\mathfrak{R}(K[\Gamma/\Delta])^{G_K}$ (resp. $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(A_K[\Gamma])$ sur $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(A_K[\Gamma/\Delta])$] que l'on note $\theta_{\Gamma/\Delta}$.

PROPOSITION 1.10. *On a les deux égalités*

$$\theta_{\Gamma/\Delta}\left(\mathfrak{r}_{K[\Gamma]}(N/K)\right) = \mathfrak{r}_{K[\Gamma/\Delta]}(N^{\Delta}/K),$$

$$\theta_{\Gamma/\Delta}\left(\mathfrak{r}_{A_K[\Gamma]}(M,I)\right) = \mathfrak{r}_{A_K[\Gamma/\Delta]}\left(tr_{N/N^{\Delta}}(M),\left(\sum_{\delta\in\Delta}\delta\right)I\right)$$

pour tout réseau M et I, vérifiant les conditions de la définition 1.4.

Démonstration. Soit $w_{\Delta} = \Sigma_{\delta\in\Delta}\delta$. L'application $\sigma \otimes v \to \sigma w_{\Delta}(v)$ induit par isomorphisme de $K[\Gamma/\Delta] \otimes_{K[\Gamma]} V$ sur $w_{\Delta}(V) = V^{\Delta}$ pour tout $K[\Gamma]$-module V.

On veut maintenant étudier le passage du cas global au cas local. On suppose que K est une extension de degré fini de $\mathbf{Q}$ et que A_k est égal à $\mathbf{Z}_K$ l'anneau des entiers de K. On note $\mathscr{P}(\mathbf{Z}_K)$ l'ensemble des idéaux premiers de $\mathbf{Z}_K$. L'indexation par un élément $\mathfrak{p}$ de $\mathscr{P}(\mathbf{Z}_K)$ désignera la complétion en $\mathfrak{p}$.

Soit $x \in \mathfrak{R}_{\Phi}(\mathscr{C}(\mathbf{Z}_K[\Gamma]))$, par définition il existe un entier n tel que l'image de nx dans $\mathfrak{R}(K[\Gamma])^{G_K}$ est triviale. Il existe donc $y \in \mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}_K[\Gamma])$ tel que l'image de y dans $\mathfrak{R}_{\Phi}(\mathscr{C}(\mathbf{Z}_K[\Gamma]))$ soit égale à nx. On définit ainsi un homomorphisme, noté j, de

$$\mathfrak{R}_{\Phi}(\mathscr{C}(\mathbf{Z}_K[\Gamma])) \quad \text{dans} \quad \mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}_K[\Gamma]) \otimes_{\mathbf{Z}} Q$$

(voir [8, §3]). $\mathfrak{R}_{\Phi}(\mathscr{C}(\mathbf{Z}_K[\Gamma]))$ est alors le produit fibré de $\mathfrak{R}(K[\Gamma])^{G_K}$ et de $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}_K[\Gamma]) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ au-dessus de $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}_K[\Gamma]) \otimes_{\mathbf{Z}} (Q/\mathbf{Z})$.

Soit N' la clôture galoisienne de N sur K dans $\bar{K}$ et soit $n = [N' \colon K]$, on a ici

$$j\left(\mathfrak{r}_{A_K[\Gamma]}(M,I)\right) = \left[\mathbf{Z}_{N'} \otimes_{\mathbf{Z}_K} M, T_{N/K}, \mathbf{Z}_{N'} \otimes_{\mathbf{Z}_K} I\right] \otimes \frac{1}{n}.$$

Par complétion, on obtient un isomorphisme de

$$\mathcal{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}_K[\Gamma]) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \quad \text{dans} \quad \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}_K)} \mathcal{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}\left(\mathbf{Z}_{K_\mathfrak{p}}[\Gamma]\right) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$$

(voir [6, proposition 1.12]).

Si F est un sous-corps de K, on a alors le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}_K[\Gamma]) \arrow[r, "\mathrm{Res}_K^F"] \arrow[d, "\int"'] & \mathcal{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}_F[\Gamma]) \arrow[d, "\int"'] \\
\bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}_K)} \mathcal{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}\left(\mathbf{Z}_{K_\mathfrak{p}}[\Gamma]\right) \arrow[r, "\bigoplus_{\mathfrak{q} \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}_F)} \sum_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}} \mathrm{Res}_{K_\mathfrak{p}}^{F_\mathfrak{q}}"] & \bigoplus_{\mathfrak{q} \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}_F)} \mathcal{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}\left(\mathbf{Z}_{F_\mathfrak{q}}[\Gamma]\right).
\end{tikzcd}$$

En particulier, on a dans $\mathcal{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}_{K_\mathfrak{p}}[\Gamma])$ l'égalité suivante:

$$j\left(\mathfrak{r}_{\mathbf{Z}_K[\Gamma]}(M, I)\right)_\mathfrak{p} = \sum_{\substack{\mathfrak{P}/\mathfrak{p} \\ \mathfrak{P} \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}_{N'})}} \left[\mathbf{Z}_{N'_\mathfrak{P}} \otimes_{\mathbf{Z}_K} M, T_{N/K}, \mathbf{Z}_{N'_\mathfrak{P}} \otimes_{\mathbf{Z}_K} I\right] \otimes n^{-1}.$$

Extension du groupe de décomposition.

Pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathbf{Z}_N$, on note $\Gamma(\mathfrak{P})$ le groupe de décomposition de $\mathfrak{P}$ dans Γ.

On suppose que $K = N^\Gamma$.

L'application $\gamma \otimes v \to v \circ \gamma^{-1}$ est un isomorphisme de

$$K_\mathfrak{p}[\Gamma] \otimes_{K_\mathfrak{p}[\Gamma(\mathfrak{P})]} K_\mathfrak{p}\left[\mathrm{Is}_{K_\mathfrak{p}}\left(N_\mathfrak{P}, \overline{K}_\mathfrak{p}\right)\right] \quad \text{dans} \quad K_\mathfrak{p}\left[\mathrm{Is}_K(N, \overline{K})\right].$$

L'application

$$1 \otimes x \to \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma(\mathfrak{P})} \gamma \otimes \gamma^{-1}(x)$$

est un isomorphisme de $K_\mathfrak{p} \otimes_K N$ dans $K_\mathfrak{p}[\Gamma] \otimes_{K_\mathfrak{p}[\Gamma(\mathfrak{P})]} N_\mathfrak{P}$.

PROPOSITION 1.11. *On suppose que* $K = N^\Gamma$. *Soit* $\mathrm{Ext}_{\Gamma(\mathfrak{P})}^\Gamma$ *l'homomorphisme de* $\mathcal{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}_{K_\mathfrak{p}}[\Gamma(\mathfrak{P})]) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ *dans* $\mathcal{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}_{K_\mathfrak{p}}[\Gamma]) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ *obtenu à partir de l'extension des scalaires de* $\Gamma(\mathfrak{P})$ *à* Γ. *Alors*

$$j\left(\mathfrak{r}_{\mathbf{Z}_K[\Gamma]}(M, I)\right)_\mathfrak{p} = \mathrm{Ext}_{\Gamma(\mathfrak{P})}^\Gamma\left(j\left(r_{\mathbf{Z}_{K_\mathfrak{p}}[\Gamma(\mathfrak{P})]}(M_\mathfrak{P}, I_\mathfrak{P})\right)\right)[\Gamma : \Gamma(\mathfrak{P})]^{-1}$$

pour tout réseau $M_{\mathfrak{B}}$ *(resp.* $I_{\mathfrak{B}}$*) de* $\mathbf{Z}_{K_{\mathfrak{p}}}$ *dans* $N_{\mathfrak{B}}$ *(resp.* $K_{\mathfrak{p}}[\mathrm{Is}_{K_{\mathfrak{p}}}(N_{\mathfrak{B}}, \overline{K}_{\mathfrak{p}})]$*) stable par* $\Gamma(\mathfrak{B})$ *et tout réseau* M *(resp.* I*) de* $\mathbf{Z}_K$ *dans* N *(resp.* $K[\mathrm{Is}_K(N, \overline{K})]$*) stable par* Γ *tel que*

$$\mathbf{Z}_{K_{\mathfrak{p}}}[\Gamma] \otimes_{\mathbf{Z}_{K_{\mathfrak{p}}}[\Gamma(\mathfrak{B})]} I_{\mathfrak{B}} \quad \left(\textit{resp.}\ \mathbf{Z}_{K_{\mathfrak{p}}} \otimes_{\mathbf{Z}_K} M\right)$$

soit un $\mathbf{Z}_{K_{\mathfrak{p}}}[\Gamma]$*-module isomorphe à*

$$\mathbf{Z}_{K_{\mathfrak{p}}} \otimes_{\mathbf{Z}_K} I \quad \left(\textit{resp.}\ \mathbf{Z}_{K_{\mathfrak{p}}}[\Gamma] \otimes_{\mathbf{Z}_{K_{\mathfrak{p}}}[\Gamma(\mathfrak{B})]} M_{\mathfrak{B}}\right)$$

par l'isomorphisme précédent.

Démonstration. On vérifie que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
N_{\mathfrak{B}} \otimes_{K_{\mathfrak{p}}} K_{\mathfrak{p}}[\Gamma] \otimes_{K_{\mathfrak{p}}[\Gamma(\mathfrak{B})]} N_{\mathfrak{B}} \arrow[r, "T_{N_{\mathfrak{B}}/K_{\mathfrak{p}}}"] \arrow[d] & N_{\mathfrak{B}} \otimes_{K_{\mathfrak{p}}} K_{\mathfrak{p}}[\Gamma] \otimes_{K_{\mathfrak{p}}[\Gamma(\mathfrak{B})]} K_{\mathfrak{p}}\left[\mathrm{Is}_{K_{\mathfrak{p}}}\left(N_{\mathfrak{B}}, \overline{K}_{\mathfrak{p}}\right)\right] \arrow[d] \\
N_{\mathfrak{B}} \otimes_{K_{\mathfrak{p}}} K_{\mathfrak{p}} \otimes_K N \arrow[r, "T_{N/K}"] & N_{\mathfrak{B}} \otimes_{K_{\mathfrak{p}}} K\left[\mathrm{Is}_K(N, \overline{K})\right].
\end{tikzcd}$$

2. Sommes de Gauss galoisiennes

Soit K un corps de nombres (i.e. une extension finie de $\mathbf{Q}$ incluse dans $\overline{\mathbf{Q}}$. On note $\mathscr{P}(K)$ l'ensemble des places de K.

Soit $J(K)$ le groupe des idèles de K; pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(K)$ on plonge $K_{\mathfrak{p}}^*$ dans $J(K)$ et K^* dans la diagonale de $J(K)$.

La définition des sommes de Gauss galoisiennes fait intervenir la théorie du corps de classes. L'application d'Artin est normalisée de telle sorte que les Frobenius géométriques, que l'on note $F_{K,\mathfrak{p}}$, correspondent aux uniformisantes. La théorie du corps de classes donne donc un homomorphisme de $J(K)/K^*$ dans G_K^{ab}, le quotient de G_K par l'adhérence de son sous-groupe des commutateurs.

Pour la suite, on fixe un caractère additif non trivial ψ_K du groupe $A(K)/K$ dans $\overline{\mathbf{Q}}^*$ où $A(K)$ est le sous-groupe des adèles de K. On note $\psi_{K,\mathfrak{p}}$ sa restriction à $K_{\mathfrak{p}}$:

$$K_{\mathfrak{p}} \to A(K)/K \xrightarrow{\psi} \overline{\mathbf{Q}}^*.$$

Soit $d_{\mathfrak{p}}$(ou d) un générateur de l'idéal $\mathfrak{p}^n \mathbf{Z}_{K_{\mathfrak{p}}}$ où n est le plus petit entier tel que $\psi_{K,\mathfrak{p}}(p^{-n}\mathbf{Z}_{K_{\mathfrak{p}}}) = 1$. L'idéal $\mathfrak{p}^n \mathbf{Z}_{N_{\mathfrak{p}}}$ est appelé le conducteur de $\psi_{K,\mathfrak{p}}$. On normalise $\psi_{K,\mathfrak{p}}$ de telle sorte que son conducteur soit égal à la différente de $K_{\mathfrak{p}}$ sur $\mathbf{Q}_p$.

Soit ρ un caractère de G_K de dimension 1; on appelle somme de Gauss abélienne l'élément $\tau_K^{ab}(\rho)$ de $\overline{\mathbf{Q}}^*$ défini par

$$\tau_K^{ab}(\rho) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(\mathbf{Z}_K)} \tau_{K,\mathfrak{p}}^{ab}(\rho)$$

avec

$$\tau_{K,\mathfrak{p}}^{ab}(\rho) = \sum_{x \in U_{K,\mathfrak{p}}^{(0)}/U_{K,\mathfrak{p}}^{(n)}} \rho_{\mathfrak{p}}\left(x/\gamma d_{\mathfrak{p}}\right)^{-1} \psi_{K,\mathfrak{p}}\left(x/\gamma d_{\mathfrak{p}}\right)$$

où $U_{K,\mathfrak{p}}^{(0)} = (\mathbf{Z}_{K,\mathfrak{p}})^*$, $U_{K,\mathfrak{p}}^{(n)} = 1 + \mathfrak{p}^n \mathbf{Z}_{K,\mathfrak{p}}$ pour $n \geq 1$.

$\rho_{\mathfrak{p}}$ est la composée des applications

$$K_{\mathfrak{p}}^* \to J(K)/K^* \to G_K^{ab} \xrightarrow{\rho} \overline{\mathbf{Q}}^*;$$

n est égal au produit scalaire de ρ et du caractère d'Artin (c'est la valuation en $\mathfrak{p}$ du conducteur d'Artin de $\mathfrak{p}$); γ est un générateur $\mathfrak{p}^n \mathbf{Z}_{K_{\mathfrak{p}}}$.

Il existe une unique application τ de $\cup_{K \subset \overline{\mathbf{Q}}} R(G_K)$ dans $\overline{\mathbf{Q}}^*$ où $R(G_K)$ désigne le groupe des caractères de G_K et où K parcourt l'ensemble des sous-extensions de $\overline{\mathbf{Q}}$ de degré fini sur $\mathbf{Q}$, vérifiant:

(1) $\tau_K(\rho) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(\mathbf{Z}_K)} \tau_{K,\mathfrak{p}}(\rho)$, $\forall \rho \in R(G_K)$, $\forall K \subset \overline{\mathbf{Q}}$.

(2) $\tau_{K,\mathfrak{p}}(\rho)\tau_{K,\mathfrak{p}}(\rho') = \tau_{K,\mathfrak{p}}(\rho + \rho')$, $\forall \rho, \rho' \in R(G_K)$, $\forall K \subset \overline{\mathbf{Q}}$, $\forall \mathfrak{p} \in \mathscr{P}(\mathbf{Z}_K)$.

(3) Si $\rho \in R(G_K)$ est de dimension 1, $\tau_{K,\mathfrak{p}}(\rho) = \tau_{K,\mathfrak{p}}^{ab}(\rho)$.

(4) Soit G_F un sous-groupe ouvert d'indice fini de G_K et soit $\rho \in R(G_F)$ de dimension 0, on note $\operatorname{Ind}_F^K(\rho)$ le caractère de G_K induit par ρ; on a

$$\tau_{K,\mathfrak{p}}\left(\operatorname{Ind}_F^K(\rho)\right) = \prod_{\substack{\mathfrak{P} \in \mathscr{P}(\mathbf{Z}_F) \\ \mathfrak{P}/\mathfrak{p}}} \tau_{F,\mathfrak{P}}(\rho).$$

Soit Γ un groupe fini et $N \in \mathscr{E}(\Gamma)$. Le groupe Γ est donc isomorphe au groupe G_{N^Γ}/G_N. On en déduit un homomorphisme injectif de $R(\Gamma)$ dans $R(G_{N^\Gamma})$.

Il existe un unique isomorphisme, noté Det, de $\mathscr{K}_1(\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma])$ sur $\operatorname{Hom}(R(\Gamma), \overline{\mathbf{Q}}^*)$ caractérisé par la propriété suivante; soit V un $\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]$-module et a un $\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]$-automorphisme de V; soit $\rho \in R(\Gamma)$ le caractère d'un $\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]$-module W; alors $\operatorname{Det}_\rho([V, a])$ est le déterminant d'un $\overline{\mathbf{Q}}$-endomorphisme de $\operatorname{Hom}_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(V, W)$ défini par a.

Soit K un corps contenu dans N^Γ.

On note $\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/K)$ (resp. $\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma],\mathfrak{p}}(N/K)$) l'élément de $\mathscr{K}_1(\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma])$ image par $(\operatorname{Det})^{-1}$ de l'homomorphisme de $R(\Gamma)$ dans $\overline{\mathbf{Q}}^*$ donné par le composé des homomorphismes suivants:

$$R(\Gamma) \to R(G_N{}^\Gamma) \xrightarrow{\mathrm{Ind}_{G_N\Gamma}^{G_K}} R(G_K) \xrightarrow{\tau_K(\text{resp. } \tau_{K,\mathfrak{p}})} \overline{\mathbf{Q}}^*$$

On choisit un plongement π de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{C}$; cela revient à choisir une place archimédienne de $\overline{\mathbf{Q}}$ prolongeant la valeur absolue de $\mathbf{Q}$. Si $\rho \in R(G_K)$, on note $W_K(\pi\rho)$ la constante de l'équation fonctionelle des séries L d'Artin pour le caractère $\pi\rho$ de G_K (à valeurs dans $\mathbf{C}$). On définit ainsi un homomorphisme de $R(G_K)$ dans $\mathbf{C}^*$. Pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(\mathbf{Z}_K)$, on note $W_{K,\mathfrak{p}}(\pi(\rho))$ la $\mathfrak{p}$-composante de W_K (voir [2] ou [10]). On a

$$W_K(\pi(\rho)) = \prod_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(K)} W_{K,\mathfrak{p}}(\pi(\rho)) \quad \text{et} \quad W_{K,\mathfrak{p}}(\pi(\rho)) = \pi(\tau_{K,\mathfrak{p}}(\rho))\sqrt{\mathfrak{f}_{K,\mathfrak{p}}(\rho)}$$

où $\mathfrak{f}_{K,\mathfrak{p}}(\rho)$ désigne la norme de K sur $\mathbf{Q}$ de la $\mathfrak{p}$-composante du conducteur d'Artin de ρ (voir [7, §1]).

Soit $\overline{\Delta}$ l'homomorphisme injectif de

$$\mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q},\Phi}}(R(\Gamma), J(\overline{\mathbf{Q}}))/\mathrm{Hom}^+_{G_{\mathbf{Q}}}(R(\Gamma), U(\overline{\mathbf{Q}})) \text{ dans } \mathfrak{R}_\Phi(\mathscr{C}(\mathbf{Z}[\Gamma]))$$

défini dans [8, théorème 4.3], où $\mathrm{Hom}^+_{G_{\mathbf{Q}}}(R(\Gamma), U(\overline{\mathbf{Q}}))$ désigne l'ensemble des

$$f \in \mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q}}}(R(\Gamma), U(\overline{\mathbf{Q}}))$$

tels que pour tout caractère symplectique ρ de Γ, $f(\rho)$ est un idèle totalement réel et positif.

On note $W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K)$ (resp. $W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K, \mathfrak{p})$) l'élément de $\mathfrak{R}_\Phi(\mathscr{C}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ image par $\overline{\Delta}$ de l'homomorphisme w' (resp. $w'_{\mathfrak{p}}$ défini de la façon suivante: on considère tout d'abord w (resp. $w_{\mathfrak{p}}$) le composé des homomorphismes suivants:

$$R(\Gamma) \to R(G_N{}^\Gamma) \xrightarrow{\mathrm{Ind}_{G_N\Gamma}^{G_K}} R(G_K) \xrightarrow{\pi} \mathscr{K}_0(\mathbf{C}[G_K]) \xrightarrow{W_K(\text{resp. } W_{K,\mathfrak{p}})} \mathbf{C}^*$$

où, par abus de notation, π désigne encore l'homomorphisme de

$$R(G_K) = \mathscr{K}_0(\overline{\mathbf{Q}}[G_K]) \text{ dans } \mathscr{K}_0(\mathbf{C}[G_K])$$

obtenu à partir du plongement π de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{C}$ choisi.

On pose alors: pour tout caractère ρ irréductible et non symplectique de Γ,

$$w'(\rho) = 1;$$

pour tout caractère ρ irréductible et symplectique de Γ,

$$w'(\rho)_p = 1$$

si p est une place non-archimédienne,

$$w'(\rho)_p = g\pi^{-1}\big(w\big(\pi g^{-1}(\rho)\big)\big)$$

si p est une place archimédienne correspondant au plongement πg^{-1} de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{C}$ (resp. $w'_{\mathfrak{p}}(\rho)_p = g\pi^{-1}(w_{\mathfrak{p}}(\pi g^{-1}(\rho)))$.

On a

$$W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K) = \sum_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(K)} W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K, \mathfrak{p}),$$

et pour tout $h \in G_{\mathbf{Q}}$, l'image par h de l'idèle $w'(h^{-1}\rho)$ a pour hp-composante:

$$\begin{aligned} h\big(\big(w'(h^{-1}\rho)_p\big)\big)_{hp} &= h\big(w'(h^{-1}\rho)_p\big) = hg\pi^{-1}\big(w\big(\pi g^{-1}h^{-1}\rho\big)\big) \\ &= w'(\rho)_{hp}. \end{aligned}$$

Donc la fonction ϕ de $\Phi = \operatorname{Hom}(G_{\mathbf{Q}}, \mathscr{K}_1(\mathbf{Q}[\Gamma]))$ associée à $W_{\mathbf{Q}[\Gamma]}(N/K)$ est triviale.

PROPOSITION 2.1. *Avec les notations et définition de* [8], *on a*:
(1) $\tau_{\overline{Q}[\Gamma]}(N/K)$ *appartient à* $\mathscr{R}_{\Phi}(\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma])$ *pour*

$$\Phi = \operatorname{Hom}\big(G_{\mathbf{Q}}, \mathscr{K}_1(\mathbf{Q}[\Gamma])\big).$$

L'espace radical $\delta_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}(\tau_{\overline{Q}[\Gamma]}(N/K))$ *appartient donc à* $\mathfrak{R}(\mathbf{Q}[\Gamma])^{G_{\mathbf{Q}}}$.
(2) *La fonction* ϕ *associée à* $\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N, K)$ *est définie par*

$$\phi(g) = \operatorname{Res}^{\mathbf{Q}}_{K}\big(\big[K\big[\operatorname{Is}_K(N, \overline{K}), g\big]\big]\big)$$

(*voir proposition* 1.3).
(3) *Pour tout caractère symplectique* ρ,

$$\operatorname{Det}_{\rho}\big(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/K)\big)W_{\infty}\big(\operatorname{Ind}^{G_K}_{G_N^{\Gamma}}(\rho)\big)\overline{\Delta}^{-1}\big(W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K)\big)(\rho)$$

est un idèle totalement réel et positif.

Démonstration. La première et la deuxième partie découlent de la formule:

$$g\tau_K\big(g^{-1}(\rho)\big) = \tau_K(\rho)\det{}_{\rho}\circ\operatorname{Ver}_{K/\mathbf{Q}}(g)$$

pour tout $g \in G_K$ et pour tout $\rho \in R(G_K)$, où $\operatorname{Ver}_{K/\mathbf{Q}}$ désigne le transfert de G_K à $G_{\mathbf{Q}}$. La troisième partie découle de la formule:

$$\tau_K(\rho)W_{K,\infty}(\rho) = W_K(\rho)\sqrt{\mathfrak{f}_K(\rho)}$$

pour tout $\rho \in R(G_K)$ où

$$\mathfrak{f}_K(\rho) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(\mathbf{Z}_K)} \mathfrak{f}_{K,\mathfrak{p}}(\rho).$$

COROLLAIRE 2.2. *Pour tout corps K tel que $K \subset N^{\Gamma}$, les espaces radicaux*

$$\mathrm{Res}_K^{\mathbf{Q}}\big(\mathrm{r}_{K[\Gamma]}(N/K)\big) - \delta_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}\big(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/K)\big) \quad et \quad \mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{Q}}\big(W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K)\big)$$

sont égaux.

Démonstration. Les fonctions ϕ de $\Phi = \mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q}}}(R(\Gamma), \mathscr{K}_1(\mathbf{Q}[\Gamma]))$ associées à ces deux espaces radicaux sont les mêmes (proposition 1.3, proposition 2.1). L'élément

$$\mathrm{Res}_K^{\mathbf{Q}}\big(\mathrm{r}_{K[\Gamma]}(N/K)\big) - \delta_{\overline{Q}/Q}\big(\tau_{\overline{Q}[\Gamma]}(N/K)\big) - \mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{Q}}\big(W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K)\big)$$

appartient donc à l'image de

$$\mathscr{K}_1(\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma])^{G_{\mathbf{Q}}}/\mathscr{K}_1(\mathbf{Q}[\Gamma]) \text{ dans } \mathscr{K}_{0,\overline{K}/K}(\mathbf{Q}[\Gamma])^{G_{\mathbf{Q}}} \text{ [8, proposition 2.3].}$$

Ce groupe par l'application Det est isomorphe à

$$\mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q}}}(R(\Gamma), \overline{\mathbf{Q}}^*)/\mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q}}}^{+}(R(\Gamma), \overline{\mathbf{Q}}^*).$$

Le résultat découle alors des propositions 1.3 et 2.1.

Dans [7], la démonstration du théorème 1 est basée sur la proposition 1.1 et la proposition 1.7. Or la proposition 1.1 est fausse (pour un contre-exemple voir [1], proposition 4.3). La proposition suivante achève la démonstration du théorème 1 de [7].

PROPOSITION 2.3. *Soit $\mathscr{G}_{\oplus}^{S}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbf{Z}[\Gamma]$-modules de type fini et sans $\mathbf{Z}$-torsion, relativement aux suites exactes scindées au dehors de S* (*voir* [6, *définition* 1.1]). *On suppose que S contient les nombres premiers p congrus à -1 modulo 4 et tels que $\mathbf{Z}_{N_p}$ ne soit pas un $\mathbf{Z}_p[\Gamma]$ module projectif; alors l'image de $W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K)$ dans $\mathscr{G}_{\oplus}^{S}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ est triviale.*

Démonstration. Soit $H^S(\mathscr{C}(\mathbf{Z}[\Gamma]))$ le sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q}}}(R(\Gamma), J(\overline{\mathbf{Q}}))$ formé des éléments f tels que:

Si $p \in S$, $f(\rho)_p$ est une unité pour les caractères de $\mathrm{Im}\, e_p$, l'ensemble des caractères ρ tels que $\rho(\gamma) = 0$ lorsque l'ordre de γ est divisible par p.

Si $p \notin S$, p non-archimédienne, $f(\rho)_p$ est une unité pour tous les caractères ρ de Γ.

Si p est la place archimédienne de $\mathbf{Q}$, $f(\rho)_p$ est totalement réel et positif pour tous les caractères ρ symplectiques de Γ.

Il suffit donc de montrer que pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(K)$, $w'_{\mathfrak{p}}$ appartient à

$$\mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q}}}\big(R(\Gamma), \overline{\mathbf{Q}}^*\big) H^S(\mathscr{C}(\mathbf{Z}[\Gamma])).$$

Si $\mathfrak{p}$ est une place infinie ou si $\mathfrak{p}$ est une place telle que $\mathbf{Z}_{N_p}$ soit un $\mathbf{Z}_p[\Gamma]$-module projectif (p est la caractéristique de $\mathbf{Z}_K/\mathfrak{p}\mathbf{Z}_K$), alors pour tout caractère ρ symplectique (donc à valeurs réelles et de déterminant 1), on a

$$W_{K,\mathfrak{p}}(g(\rho)) = W_{K,\mathfrak{p}}(\rho) = \pm 1$$

pour tout $g \in G_{\mathbf{Q}}$, d'où $w'_{\mathfrak{p}}$ appartient à $H^S(\mathscr{C}(\mathbf{Z}[\Gamma]))$. Si $\mathfrak{p}$ est une place non archimédienne telle que $p \not\equiv -1 \pmod 4$, $p = \mathrm{Card}(\mathbf{Z}_K/\mathfrak{p}\mathbf{Z}_K)$, on utilise la relation

$$W_{K,\mathfrak{p}}(\rho) = \tau_{K,\mathfrak{p}}(\rho)\Big(\sqrt{\mathfrak{f}_{K,\mathfrak{p}}(\rho)}\Big)^{-1}.$$

Si, de plus $\mathfrak{f}_{K,\mathfrak{p}}(\rho)$ est un carré alors $W_{K,\mathfrak{p}}(g(\rho)) = W_{K,\mathfrak{p}}(\rho) = \pm 1$ et $w'_{\mathfrak{p}}$ appartient à $H^S(\mathscr{C}(\mathbf{Z}[\Gamma]))$. Sinon il existe dans $\mathbf{Q}(\sqrt{\mathfrak{p}}) = \mathbf{Q}(\sqrt{\mathfrak{f}_{K,\mathfrak{p}}(\rho)})$ une unité de norme sur $\mathbf{Q}$ égale à -1, on choisit comme dans [4, proposition 6.1], une unité ayant le signe de $W_{K,\mathfrak{p}}(\rho)$ et construit un élément $w''_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q}}}(R(\Gamma), \overline{\mathbf{Q}}^*)$ tel que $w'_{\mathfrak{p}}(w''_{\mathfrak{p}})^{-1} \in H^S(\mathscr{C}(\mathbf{Z}[\Gamma]))$ (voir [7, proposition 1.7]).

Enfin, si $\mathfrak{p}$ est telle que $p \equiv -1 \bmod 4$ et $\mathbf{Z}_{N_p}$ ne soit pas un $\mathbf{Z}_p[\Gamma]$-module projectif, avec $p = \mathrm{Card}(\mathbf{Z}_K/\mathfrak{p}\mathbf{Z}_K)$; il existe une puissance de p telle que $p^n R(\Gamma) = \mathrm{Im}\, e_p \oplus \mathrm{Ker}\, d_p$ où $\mathrm{Ker}\, d_p$ est l'ensemble des caractères de Γ nuls sur les éléments d'ordre premier à p, la décomposition étant stable par action du groupe des $\overline{\mathbf{Q}}$-automorphismes; on note $w''_{\mathfrak{p}}$ la puissance p^n-ième de la restriction de $w'_{\mathfrak{p}}$ à $\mathrm{Im}\, e_p$. Le fait que les caractères de $\mathrm{Im}\, e_p$ soient combinaison linéaire de caractères induits par des caractères à valeurs réelles sur des groupes de Galois d'extension modérément ramifiées, entraîne que $w''_{\mathfrak{p}} \in H^S(\mathscr{C}(\mathbf{Z}[\Gamma]))$; et par suite, il en est de même pour $w'_{\mathfrak{p}}$.

Soit $[\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma], a] \in \mathscr{K}_1(\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma])$, l'élément $[I, a, I]$ de $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ ne dépend pas du choix du réseau I de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Q}[\Gamma]$ stable par Γ. On en déduit un homomorphisme $\bar{\delta}$ rendant la suite suivante exacte:

$$\mathscr{R}_{\Phi}(\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]) \xrightarrow{\bar{\delta}} \mathfrak{R}_{\Phi}(\mathscr{C}(\mathbf{Z}[\Gamma])) \to \mathscr{G}_{\oplus}(\mathbf{Z}[\Gamma]) \to \mathscr{K}_0(\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma])$$

où $\Phi = \mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q}}}(G_{\mathbf{Q}}, \mathscr{K}_1(\mathbf{Q}[\Gamma]))$ (voir [8, diagramme (9)]).

Le problème de l'étude de la structure galoisienne des anneaux d'entier revient à déterminer l'élément

$$U_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K) = \operatorname{Res}_K^{\mathbf{Q}}\Big(\mathrm{r}_{\mathbf{Z}_K[\Gamma]}(\mathbf{Z}_N, \mathbf{Z}_K[\operatorname{Is}(N, \overline{\mathbf{Q}})])\Big) \\ -\bar{\delta}\big(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/K)\big) - W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K)$$

de $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}[\Gamma])$. On sait donc que cet élément par définition appartient à $\mathfrak{R}_{\Phi}(\mathscr{C}(\mathbf{Z}[\Gamma]))$ et que son image dans $\mathfrak{R}(\mathbf{Q}[\Gamma])^{G_{\mathbf{Q}}}$ est triviale. Il appartient donc à $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}[\Gamma])$. Le théorème 11 de [3] montre que $U_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K) = 0$ dans le cas où $\mathbf{Z}_N$ est un $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module projectif.

On montre tout d'abord que $\bar{\delta}(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/K))$ et $W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K)$ ont les mêmes propriétés fonctionnelles que $\operatorname{Res}_K^{\mathbf{Q}}(\mathrm{r}_{\mathbf{Z}_K[\Gamma]}(M, I))$.

Restriction aux sous-groupes.

PROPOSITION 2.4. *Soit* Δ *un sous-groupe de* Γ.

$$\operatorname{Res}_\Gamma^\Delta\Big(\bar{\delta}\big(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/K)\big)\Big) = \bar{\delta}\big(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Delta]}(N/K)\big),$$
$$\operatorname{Res}_\Gamma^\Delta\big(W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K)\big) = W_{\mathbf{Z}[\Delta]}(N/K).$$

Démonstration. Le résultat découle de la commutativité du diagramme 17 de [8].

Restriction aux sous-corps.

PROPOSITION 2.5. *Soit* F *un sous-corps de* K.

$$\bar{\delta}\big(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/F)\big) = \bar{\delta}\big(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/K)\big) \\ + \operatorname{Res}_F^{\mathbf{Q}}\big([\mathbf{Z}_K[\operatorname{Is}_K(N, \overline{K})], \varepsilon, \mathbf{Z}_F[\operatorname{Is}_F(N, \overline{K})]]\big),$$
$$W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/F) = W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K).$$

Démonstration. Le résultat découle des théorèmes 8.1 (iii) de [13] et de l'invariance par induction de la constante de l'équation fonctionnelle des séries L d'Artin.

Passage au quotient.

PROPOSITION 2.6. *Soit* Δ *un sous-groupe de* Γ.

$$\theta_{\Gamma/\Delta}\Big(\bar{\delta}\big(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/K)\big)\Big) = \bar{\delta}\big(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma/\Delta]}(N^\Delta/K)\big),$$
$$\theta_{\Gamma/\Delta}\big(W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K)\big) = W_{\mathbf{Z}[\Gamma/\Delta]}(N^\Delta/K)\big).$$

Démonstration. Cela résulte de la définition de $\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/K)$ et de $W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K)$.

Extension du groupe de décomposition.
Il est clair que $j(W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K)) = 0$ car $2W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K) = 0$ (pour les caractères à valeurs réelles $W_K(\rho) = \pm 1$).

PROPOSITION 2.7. *On suppose que* $N^\Gamma = K$; *soit* $n = [N:K]$. *Avec les notations de la proposition* 1.11, *on a*

$$j\big(\bar{\delta}\big(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/K)\big)_p = \prod_{\mathfrak{p}/p} \operatorname{Ext}_{\Gamma(\mathfrak{P})}^{\Gamma}\big(j\big(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma(\mathfrak{P})],\mathfrak{p}}(N, N^{\Gamma(\mathfrak{P})})\big)_p [\Gamma:\Gamma(\mathfrak{P})]^{-1}.$$

3. Structure galoisienne des anneaux d'entiers d'extensions cycliques

Dans tout ce paragraphe, Γ est un groupe cyclique d'ordre n et N est une extension finie de $\mathbf{Q}$ incluse dans $\overline{\mathbf{Q}}$ telle que Γ soit isomorphe à un groupe d'automorphismes de N. On étudie la structure de $\mathbf{Z}_N$ en tant que $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module.

Soit $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathbf{Z}_N, \mathbf{Q}[\Gamma])$ l'ordre de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Q}[\Gamma]$ obtenu en adjoignant à $\mathbf{Z}[\Gamma]$ les idempotents $e_i(\mathfrak{P})$ pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathbf{Z}_N$ et tout i supérieur ou égal à 1.

LEMME 3.1. *Tout idéal de* $\mathbf{Z}_N$ *stable par* $\mathfrak{D}$ *est un* $\mathfrak{D}$*-module localement libre.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de N au-dessus du nombre premier p. Soit t le plus grand entier tel que $\Gamma_t(\mathfrak{P})$ soit non trivial. La démonstration se fait par récurrence sur t. Si $t \leq 0$, $\mathfrak{D}(\mathbf{Z}_N, \mathbf{Q}[\Gamma])_p = \mathbf{Z}_p[\Gamma]$ et l'extension N/N^Γ est modérément ramifiée en $\mathfrak{p}_N$, tout idéal de $\mathbf{Z}_N$ est un $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module localement libre en $p[U]$. Si $t > 0$, $\Gamma_t(\mathfrak{P})$ est cyclique d'ordre premier p et $(1 - e_t)\mathfrak{D}(\mathbf{Z}_N, \mathbf{Q}[\Gamma])_p$ est isomorphe à un produit d'anneaux d'entiers d'extensions cyclotomiques de $\mathbf{Q}_p$, donc pour tout idéal $\mathfrak{U}$ de $\mathbf{Z}_N$, stable par $\mathfrak{D}(\mathbf{Z}_N, \mathbf{Q}[\Gamma], (1 - e_t)\mathfrak{U}$ est localement libre en p. Enfin $e_t\mathfrak{U}$ est un idéal de $N^{\Gamma_t(\mathfrak{P})}$ et on applique l'hypothèse de récurrence.

Par le lemme de Schanuel (voir [6, lemme 1.4]), l'inclusion de la catégorie des $\mathfrak{D}$-modules de type fini sans torsion dans la catégorie de tous les $\mathfrak{D}$-modules de type fini donne un isomorphisme des groupes de Grothendieck correspondant. On identifie ces deux groupes et on pose $[M, 1, N] = [M/N]$ dans $\overline{\mathscr{G}}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$.

THEOREME 3.1. *Dans $\overline{\mathscr{G}}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$, on a l'égalité suivante*:

$$\operatorname{Res}_K^{\mathbf{Q}}\left(\left[\mathbf{Z}_N^{\mathfrak{D}}, T_{N/K}, \mathbf{Z}_K[\mathrm{Is}_K(N,\overline{\mathbf{Q}})]^{\mathfrak{D}}\right]\right) - \bar{\delta}\left(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/K)\right) = \sum_{\mathfrak{p}_{N,i}}\left[\left(e_{i+1}(\mathfrak{p}_N) - e_i(\mathfrak{p}_N)\right)\mathrm{Tor}_{\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma_i(\mathfrak{p}_N)]}\left(\mathbf{Z}_N^{\Gamma_i(\mathfrak{p}_N)}\right)\right]$$

pour $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathbf{Z}_N, \mathbf{Q}[\Gamma])$. (*Ici* $W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/K) = 0$).

Démonstration. D'après les propositions 1.7 et 2.5, on peut supposer que $K = N^{\Gamma}$. On utilise le diagramme 10 de [8]. Il suffit de démontrer que la relation est vraie dans $\mathfrak{R}_{\Phi}(\mathscr{C}(\mathfrak{D}))$. En effet, d'après les propositions 1.3 et 1.7 et le lemme 1.6 d'une part, et la proposition 2.1 d'autre part, la relation est vraie dans $\mathfrak{R}(\mathbf{Q}[\Gamma])^{G_{\mathbf{Q}}}$ après extension des scalaires de $\mathbf{Z}$ à $\mathbf{Q}$. Il reste donc à démontrer que la relation est vraie dans $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D}) \otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ après application de j. Comme $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$ est isomorphe à $\oplus_{p\in\mathscr{P}(\mathbf{Z})}\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D}_p)$, on se place dans la situation locale en utilisant les propositions 1.11 et 2.7. Pour la suite de la démontration on garde les mêmes notations, N sera donc une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $\mathfrak{P}_N$ l'idéal de $\mathbf{Z}_N$ au-dessus de p. On démontre le résultat par récurrence sur le nombre t d'idempotents $e_i(\mathfrak{P}_N)$ non triviaux. On a un isomorphisme entre $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$ et $\oplus\,\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}((e_{i+1}(\mathfrak{P}_N) - e_i(\mathfrak{P}_N))\mathbf{Z}_p[\Gamma])$. Si $t \leq 0$, l'extension N de K est modérément ramifiée et le résultat est bien connu ([3] et [7]). Si $t > 0$, on pose $\Delta = \Gamma_t(\mathfrak{P}_N)$; c'est au groupe cyclique d'ordre p. On pose $e_\Delta = e_i(\mathfrak{P}_N)$, $w_\Delta = pe_\Delta$, $\operatorname{Ker} w_\Delta = \{x \in \mathbf{Z}_N, w_\Delta(x) = 0\}$. L'ordre

$$(1 - e_\Delta)\mathfrak{D} = (1 - e_\Delta)\mathbf{Z}_p[\Gamma]$$

est maximal. Les deux suites suivantes de $(1 - e_\Delta)\mathfrak{D}$-modules sont exactes et scindées:

$$0 \to \operatorname{Ker} w_\Delta \to \mathbf{Z}_N/\mathbf{Z}_N^\Delta \xrightarrow{w_\Delta} \mathbf{Z}_N^\Delta/p\mathbf{Z}_N^\Delta \to \mathbf{Z}_N^\Delta/w_\Delta\mathbf{Z}_N \to 0,$$

$$0 \to \mathbf{Z}_N^\Delta/w_\Delta\mathbf{Z}_N \to \mathbf{Z}_N/w_\Delta\mathbf{Z}_N \to \mathbf{Z}_N/\mathbf{Z}_N^\Delta \to 0.$$

Comme $(1 - e_\Delta)\mathbf{Z}_p[\Gamma] \otimes_{\mathbf{Z}_p[\Gamma]}\mathbf{Z}_N$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_N/w_\Delta\mathbf{Z}_N$ et que

$$(1 - e_\Delta)\mathbf{Z}_N^{\mathfrak{D}} = \operatorname{Ker} w_\Delta,$$

on a le lemme suivant.

LEMME 3.2. *Dans* $\overline{\mathscr{G}}_{\oplus,\mathrm{rel}}((1-e_\Delta)\mathbf{Z}_p[\Gamma])$ *on a les égalités suivantes*:

$$\begin{aligned}
&\left[(1-e_\Delta)\mathbf{Z}_p[\Gamma]\otimes_{\mathbf{Z}_p[\Gamma]}\mathbf{Z}_N, T_{N/K}, (1-e_\Delta)\mathbf{Z}_p[\Gamma]\otimes_{\mathbf{Z}_p[\Gamma]}\mathbf{Z}_K[\mathrm{Is}_K(N,\overline{\mathbf{Q}})]\right]\\
&\qquad = \left[(1-e_\Delta)\mathbf{Z}_N^{\circledS}, T_{N/K}, (1-e_\Delta)\mathbf{Z}_K[\mathrm{Is}_K(N,\overline{\mathbf{Q}})]^{\circledS}\right]\\
&\qquad = \left[\mathbf{Z}_N/\mathbf{Z}_N^\Delta, T_{N/K}, \mathbf{Z}_K[\mathrm{Is}_K(N,\overline{\mathbf{Q}})]/w_\Delta\mathbf{Z}_K[\mathrm{Is}_K(N,\overline{\mathbf{Q}})]\right]\\
&\qquad\quad + \left[(1-e_\Delta)\mathrm{Tor}_{\mathbf{Z}_p[\Gamma]}(\mathbf{Z}_N)\right].
\end{aligned}$$

De plus $[(1-e_\Delta)\mathrm{Tor}_{\mathbf{Z}_p[\Gamma]}(\mathbf{Z}_N)] = [\hat{H}^0(\Delta,\mathbf{Z}_N)]$.

Le théorème 3.1 découle alors du lemme suivant.

LEMME 3.3.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_K^{\mathbf{Q}_p}\left(\left[\mathbf{Z}_N/\mathbf{Z}_N^\Delta, T_{N/K}, \mathbf{Z}_K[\mathrm{Is}_K(N,\overline{\mathbf{Q}})]/w_\Delta\mathbf{Z}_K[\mathrm{Is}_K(N,\overline{\mathbf{Q}})]\right]\right)\\
&\qquad\qquad = \delta\left(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/K)\right)
\end{aligned}$$

dans $\overline{\mathscr{G}}_{\oplus,\mathrm{rel}}((1-e_\Delta)\mathbf{Z}_p[\Gamma])$.

Démonstration. Soit Γ_p le p-sous-groupe de Sylow de Γ et soit Γ' le sous-groupe de Γ d'ordre premier à p. Comme $\Gamma = \Gamma'\times\Gamma_p$ l'algèbre

$$(1-e_\Delta)\mathbf{Z}_p[\Gamma]$$

est isomorphe à

$$(1-e_\Delta)\mathbf{Z}_p[\Gamma_p]\otimes\mathbf{Z}_p[\Gamma'].$$

Par restriction des scalaires de $(1-e_\Delta)\mathbf{Z}_p[\Gamma]$ à $\mathbf{Z}_p[\Gamma']$ on obtient donc un homomorphisme, noté $\mathrm{Res}_\Gamma^{\Gamma'}$ de $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}((1-e_\Delta)\mathbf{Z}_p[\Gamma])$ dans $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}_p[\Gamma'])$. En utilisant le fait que ces deux ordres sont maximaux et les descriptions de [6], on obtient un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}\left((1-e_\Delta)\mathbf{Z}_p[\Gamma]\right) & \xrightarrow{\mathrm{Res}_\Gamma^{\Gamma'}} & \mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}\left(\mathbf{Z}_p[\Gamma']\right)\\
\Big\downarrow S & & \Big\downarrow S\\
\mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q}_p}}\left(R,\overline{\mathbf{Q}}_p^*\right)/\mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q}_p}}\left(R,U_p\right) & \xrightarrow{F} & \mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q}_p}}\left(R(\Gamma'),\overline{\mathbf{Q}}_p^*\right)/\mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q}_p}}\left(R(\Gamma'),U_p\right)
\end{array}$$

où $\overline{\mathbf{Q}}_p$ est une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$ de groupe de Galois $G_{\mathbf{Q}_p}$; U_p est le groupe des unités de l'anneau des entiers de $\overline{\mathbf{Q}}_p$; $R(\Gamma')$ est le groupe des caractères de Γ'; R est le $\mathbf{Z}$-module libre de base $\varphi\chi^w$ où φ parcourt les caractères irréductibles de Γ', χ est un caractère irréductible et fidèle de Γ_p et w parcourt le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\chi)/\mathbf{Q}_p)$. Enfin l'image par F de f est l'application qui à φ associe

$$f\Bigg(\sum_{w\in\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\chi)/\mathbf{Q}_p}\varphi\chi^w\Bigg).$$

Il est alors clair que F est injective.

Posons

$$X = \mathrm{Res}_K^{\mathbf{Q}_p}\Big(\big[\mathbf{Z}_N/\mathbf{Z}_N^{\Delta}, T_{N/K}, \mathbf{Z}_K\big[\mathrm{Is}_K(N,\mathbf{Q})\big]/w_\Delta\mathbf{Z}_K\big[\mathrm{Is}_K(N,\mathbf{Q})\big]\big]\Big)$$
$$-\delta\big(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/K)\big).$$

Les propositions 1.3 et 2.1, montrent que $X \in \mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}((1-e_\Delta)\mathbf{Z}_p[\Gamma])$. Comme Γ' ne contient pas d'automorphisme sauvagement ramifié $\mathrm{Res}_{\Gamma}^{\Gamma'}(X) = 0$ d'après les résultats de Fröhlich [3].

PROPOSITION 3.4. *Soit $\mathfrak{M}$ un ordre maximal de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Q}[\Gamma]$ et $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}\Gamma}^{\mathfrak{M}}$ l'homomorphisme obtenu à partir d'extension des scalaires de $\mathbf{Z}[\Gamma]$ à $\mathfrak{M}$ de $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dans $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathfrak{M})$; alors*

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}[\Gamma]}^{\mathfrak{M}}\Big(\mathrm{r}_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(\mathbf{Z}_N, \mathbf{Z}[\mathrm{Is}_{\mathbf{Q}}(N,\overline{\mathbf{Q}})]) - \bar{\delta}\big(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/K)\big)\Big) = [\mathscr{T}]$$

où $\mathscr{T}$ est un module de torsion qui ne dépend que du genre de $\mathbf{Z}_N$.

Démonstration. On reprend les notations utilisées dans la démonstration du théorème 3.1. Soit Σ un sous-groupe de Γ contenant Δ d'indice p^2, ($\Sigma = \Gamma_{i-1}(\mathfrak{p}_N)$); $(e_\Delta - e_\Sigma)\mathbf{Z}_p[\Gamma]$ est un ordre maximal de $\mathbf{Z}_p$ dans $(e_\Delta - e_\Sigma)\mathbf{Q}_p[\Gamma]$; $(e_\Delta - e_\Sigma)\mathbf{Z}_p[\Gamma]\otimes_{\mathbf{Z}_p[\Gamma]}\mathbf{Z}_N$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_N/\mathrm{Ker}\, w_\Delta + \mathbf{Z}_N^{\Sigma}$ et $(e_\Delta - e_\Sigma)\mathbf{Z}_N^{\mathfrak{D}}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_N^{\Delta}/(\mathbf{Z}_N^{\Sigma})$. On obtient une suite exacte de $(e_\Delta - e_\Sigma)\mathbf{Z}_p[\Gamma]$-modules,

$$0 \to \big\{x\in\mathbf{Z}_N, w_\Delta(x)\in\big(\mathbf{Z}_N^{\Sigma}\big)\big\}/\mathrm{Ker}\, w_\Delta + w_{\Sigma/\Delta}\big(\mathbf{Z}_N^{\Delta}\big) \to \mathbf{Z}_N/\mathrm{Ker}\, w_\Delta + \mathbf{Z}_N^{\Sigma}$$
$$\xrightarrow{w_\Delta} \mathbf{Z}_N^{\Delta}/\mathbf{Z}_N^{\Sigma} \to \mathbf{Z}_N^{\Delta}/\mathbf{Z}_N^{\Sigma} + w_\Delta(\mathbf{Z}_N) \to 0.$$

Les classes des deux groupes de torsion

$$\big[\big\{x\in\mathbf{Z}_N, w_\Delta(x)\in\mathbf{Z}_N^{\Sigma}\big\}/\mathrm{Ker}\, w_\Delta + w_{\Sigma/\Delta}\big(\mathbf{Z}_N^{\Delta}\big)\big]$$

et

$$[\mathbf{Z}_N^{\Delta}/\mathbf{Z}_N^{\Sigma} + w_{\Delta}(\mathbf{Z}_N)]$$

ne dépendent que du genre de $\mathbf{Z}_N$.

La démonstration se fait alors par récurrence sur l'ordre de Γ.

4. Démonstration du théorème A

On utilise les notations et hypothèses du théorème A. Soit

$$U_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/\mathbf{Q}) = \mathrm{r}_{\mathbf{Z}_K[\Gamma]}(\mathbf{Z}_N, \mathbf{Z}[\mathrm{Is}(N, \overline{\mathbf{Q}})]) - \bar{\delta}(\tau_{\overline{\mathbf{Q}}[\Gamma]}(N/\mathbf{Q})) - W_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/\mathbf{Q}).$$

THEOREME 4.1. *Dans $\mathcal{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}[\Gamma])$, on a, pour N et N' appartenant à $\mathscr{E}(\Gamma)$ tels que $\mathbf{Z}_N$ et $\mathbf{Z}_{N'}$ soient des $\mathbf{Z}[\Gamma]$-modules localement isomorphes, $U_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/\mathbf{Q}) = U_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N'/\mathbf{Q})$.*

L'élément $U_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/\mathbf{Q})$ ne dépend donc que du genre de $\mathbf{Z}_N$.

Démonstration. Soit X_Γ l'ensemble des sous-groupes cycliques de Γ. L'homomorphisme de $\mathcal{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dans $\oplus_{\Delta \in X_\Gamma} \mathcal{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}[\Delta])$ donné par la somme des restrictions de Γ à Δ pour Δ parcourant X_Γ est injective. Les propositions 1.5 et 24 permettent de se ramener au cas où Γ est cyclique. Par hypothèse $U_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N/\mathbf{Q}) - U_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(N'/\mathbf{Q})$ appartient au noyau de l'homomorphisme de $\mathcal{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dans $\oplus_p \mathcal{G}_{\oplus}(\mathbf{Z}_p[\Gamma])$ qui à $[M, \alpha, N]$, associe $([N_p] - [M_p])_p$. Or, la restriction de l'extension des scalaires de $\mathbf{Z}[\Gamma]$ à un ordre maximal $\mathfrak{M}$ de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Q}[\Gamma]$ à ce noyau est injective. Le théorème 4.1 est alors une conséquence de la proposition 3.4.

REFERENCES

1. T. CHINBURG, *On the galois structure of algebraic integers and units*, à paraître.
2. P. DELIGNE, "Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L in *Modular functions of one variable II*, Lecture Notes in Math., n°349, Springer-Verlag, 1973, pp. 501–597.
3. A. FRÖHLICH, *Arithmetic and galois module structure for tame extensions*, J. Reine Angew. Math., vol. 286–287 (1976), pp. 380–439.
4. ______, *SOME PROBLEMS OF GALOIS MODULE STRUCTURE FOR WILD EXTENSIONS*, PROC. LONDON MATH. SOC., VOL. 37 (1978), PP. 193–212.
5. H. W. LEOPOLDT, *Über die Hauptordnung der ganzen elemente eines abelscher Zahlkörpers*, J. Reine Angew. Math., vol. 201 (1959), pp. 119–149.
6. J. QUEYRUT, *S-groupes des classes d'un ordre arithmétique*, J. Algebra, vol. 76 (1982), pp. 234–260.
7. J. QUEYRUT, *Structure galoisienne des anneaux d'entiers* I, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 31 (1981), pp. 1–35.
8. ______, *MODULES RADICAUX SUR DES ORDRES ARITHMÉTIQUES*, J. ALGEBRA, À PARAÎTRE.

9. R. SWAN, *Induced representations and projective modules*, Ann. of Math., vol. 71 (1960), pp. 552–578.
10. J. TATE, *Algebraic number fields: Local constants*, Proc. Sympos. Univ. Durham, Academic Press, London, 1977.
11. S. ULLOM, *Integral normal bases in Galois extensions of local fields*, Nagoya Math. J., vol. 39 (1970), pp. 141–148.
12. S. WILSON, *Extensions with identical wild ramification*, Séminaire de Théorie des Nombres, Université de Bordeaux I, 1980–1981.
13. J. MARTINET, Algebraic number fields: L functions and galois properties, Proc. Symposium Univ. Durham, Academic Press, London, 1977.

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
TALENCE, FRANCE