ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 29, Number 3, Fall 1985

# CONVERGENCE DE CERTAINES SÉRIES DE DIRICHLET A COEFFICIENTS POLYNÔMES

PAR

A. SEBBAR

## Introduction

Les exponentielles-polynômes apparaissent naturellement dès que l'on s'intéresse aux solutions d'un Opérateur différentiel d'ordre infini, à coefficients constants: soient $h$ une fonction entière dans $\mathbf{C}^n$, de type exponentiel nul et $h(D)$ l'opérateur différentiel d'ordre infini associé (obtenu en substituant $\partial/\partial z_i$ à $z_i$ dans le développement de $h$), si $-\lambda$ est un zéro de $h$ et

$$T = \sum_{|\nu| \leq m} (-1)^{|\nu|} a_\nu \delta_{-\lambda}^{(\nu)}$$

une distribution, portée par $\{-\lambda\}$ et annulée par $h$ (i.e., $hT$ est la distribution nulle), il est facile de vérifier que la fonction

$$Q(z) e^{-\langle \lambda, z \rangle} = \langle T_\zeta, e^{\langle \zeta, z \rangle} \rangle$$

est solution de $h(D)u = 0$, $Q(z)$ étant le polynôme $\sum_{|\nu| \leq m} a_\nu z^\nu$. D'autre part, selon un théorème de Martineau [6], toute solution $u$ holomorphe dans un ouvert $U$ convexe, de $f(D)u = 0$ est limite de solutions exponentielles-polynômes.

On appelera série d'exponentielles, à coefficients constants toute série

$$f(z) = \sum_{p \geq 1} a_p e^{-\langle \lambda_p, z \rangle}$$

où $(a_p)_{p \geq 1}$ est une suite de nombres complexes et $(\lambda_p)_{p \geq 1}$ est une suite dans $\mathbf{C}^n$ satisfaisant à

$$L = \limsup_{p \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} p}{|\lambda_p|} < +\infty.$$

Dans ce travail l'étude de ces séries suit celle faite par Valiron [8], Gallie [4], Blambert et Berland [2] et Simeon [7] dans le cas d'une variable complexe. On

Received March 30, 1983.

donne la forme des domaines maximaux de convergence absolue suivant que $L$ est nul ou fini.

On appelle série d'exponentielles-polynômes toute série de la forme

$$F(z) = \sum_{p \geq 1} Q_p(z) e^{-\langle \lambda_p, z \rangle}$$

où $(\lambda_p)_{p \geq 1}$ est comme ci-dessus et pour tout $p$, $Q_p$ est un polynôme de degré $\mu_p$ tels que

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{\mu_p}{|\lambda_p|} = 0.$$

Usant des propriétés de module minimum pour les polynômes on associe canoniquement, à toute série $F(z)$, une série $f(z)$ à coefficients constants dont le domaine maximal de convergence absolue ne diffère de l'ensemble de convergence absolue de $F(z)$ que par un ensemble d'intérieur vide.

## 1. Notations

On se place dans $\mathbf{C}^n$, $n \geq 2$, muni de son pseudo-produit scalaire. Si

$$z = (z_1, \dots, z_n), \qquad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$
$$\langle z, \lambda \rangle = z_1 \lambda_1 + \cdots + z_n \lambda_n.$$

On se donne une suite $(\lambda_p)_{p \geq 1}$, $\lambda_p \in \mathbf{C}^n$; $\lambda_1 \neq 0$ telle que $(|\lambda_p|)_{p \geq 1}$ soit strictement croissante tendant vers $+\infty$ et

$$L = \limsup_{p \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} p}{|\lambda_p|} < +\infty.$$

On appelle série d'exponentielles de fréquences $(\lambda_p)_{p \geq 1}$ une série de la forme

$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p e^{-\langle \lambda_p, z \rangle}, \quad a_p \in \mathbf{C}; \ z \in \mathbf{C}^n.$$

Pour tout entier $p \geq 1$ et pour tout $z \in \mathbf{C}^n$, on pose

$$d(p, z) = -\frac{\operatorname{Log} |a_p \exp(-\langle \lambda_p, z \rangle)|}{|\lambda_p|}$$
$$d_*(z) = \liminf_{p \to +\infty} d(p, z)$$

et, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$D_{*,\alpha} = \{z \in \mathbf{C}^n,\ d_*(z) > \alpha\}.$$

Il résulte facilement de ces considérations que l'application $d_*$ est concave, donc $D_{*,\alpha}$ est convexe pour tout réel $\alpha$; elle est aussi continue s'il existe un $z_0 \in \mathbf{C}^n$ tel que $d_*(z_0)$ soit réel.

On appelle série d'exponentielles-polynômes de fréquences $(\lambda_p)_{p \geq 1}$ toute série de la forme

$$F(z) = \sum_{p=1}^{\infty} Q_p(z) e^{-\langle \lambda_p, z\rangle}$$

où, pour tout $p$, $Q_p$ est un polynôme de degré $\mu_p$ satisfaisant à

$$\beta = \lim_{p \to +\infty} \frac{\mu_p}{|\lambda_p|} < +\infty.$$

On suppose $Q_p(0) \neq 0$, pour tout $p$ (ce n'est pas essentiel, on peut toujours se ramener à ce cas à l'aide d'une translation de l'origine). On désigne (suivant [2]) par:

$$Z(Q_p) = Z_p = \{z \in \mathbf{C}^n;\ Q_p(z) = 0\}$$

$$Z = \bigcup_{p \geq 1} Z_p.$$

$Z^*$ = l'ensemble dérivé de $Z$.

*Remarques.* (i) Lorsque $n \geq 2$, les zéros d'une fonction entière dans $\mathbf{C}^n$ ne sont pas isolés et on a

$$Z^\infty = \bigcap_k \bigcup_{p \geq k} Z_p \subset Z^*.$$

(ii) Si $\mathbf{C}^n \setminus Z^* \neq \emptyset$, pour tout $z \in \mathbf{C}^n \setminus Z^*$, il existe un entier $p_z$ tel que

$$\delta(p, z) = -\frac{\operatorname{Log}|Q_p(z) e^{-\langle \lambda_p, z\rangle}|}{|\lambda_p|}$$

soit réel pour tout $p \geq p_z$.

On pose, alors, pour tout $z$ dans $\mathbf{C}^n \setminus Z^*$,

$$\delta_*(z) = \liminf_{p \to +\infty} \delta(p; z),$$

et pour tout réel $\alpha$,

$$\mathscr{D}_{*,\alpha} = \{ z \in \mathbf{C}^n \setminus Z^*, \delta_*(z) > \alpha \}$$

## 2. Ensembles maximaux de convergence absolue

1. *Cas des séries d'exponentielles-polynômes.*

1.1 PROPOSITION. *L'application $\delta_*$ est Lipschitzienne sur les compacts de $\mathbf{C}^n \setminus Z^*$.*

Ceci est basé sur l'inégalité suivante, dite inégalité de Leray [3].

1.2 LEMME. *Soient $P \not\equiv 0$ un polynôme de degré total $\mu$ et $Z(P)$ l'ensemble de ses zéros. Pour tout $z$ et tout $z'$ dans $\mathbf{C}^n \setminus Z(P)$, on a*

$$|P(z')|^{-1} \leq |P(z)|^{-1} \left[ 1 + \frac{|z - z'|}{d_{z'}} \right]^{\mu},$$

*$d_{z'}$ étant la distance de $z'$ à $Z(P)$.*

Pour prouver la proposition remarquons que, si $z'$ est dans un compact $K$ de $\mathbf{C}^n \setminus Z^*$, il existe $\varepsilon > 0$, indépendant de $z'$, tel que $d(z', Z_p) \geq \varepsilon$. Appliquant le lemme ci-dessus à chaque $Q_p$ on obtient, pour $z$ aussi dans $K$,

$$\mathrm{Log} \left| \frac{Q_p(z)}{Q_p(z)} \right| \leq \mu_p \mathrm{Log}\left( 1 + \frac{|z - z'|}{\varepsilon} \right) \leq \mu_p K |z - z'| \quad \left( K \geq \frac{1}{\varepsilon} \right),$$

et donc

$$|\delta_p(z') - \delta_p(z)| \leq M |z - z'|$$

pour une constante $M$ convenable.

1.3 THEOREME. *Si $\beta = 0$ et*

$$L = \operatorname*{Lim\,sup}_{p \to +\infty} \frac{\mathrm{Log}\, p}{|\lambda_p|}$$

*est fini, la série $F(z) = \sum_{p=1}^{\infty} Q_p(z) e^{-\langle \lambda_p, z \rangle}$ converge uniformément et absolument sur les compacts de $\mathscr{D}_{*,L}$ et diverge dans $\mathbf{C}^n \setminus (\overline{\mathscr{D}}_{*,0} \cup Z^*)$.*

Observons d'abord que, si pour un $\alpha_0$ $\mathcal{D}_{*,\alpha_0} \neq \emptyset$: pour tout compact $K$ de $\mathcal{D}_{*,\alpha_0}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\mu$ positive telle que

$$\sup_{z \in K} |Q_p(z) e^{-\langle \lambda_p, z \rangle}| \leq \mu e^{-|\lambda_p|(\alpha_0 - \varepsilon)}$$

En effet, si $u_p(z) = \log|Q_p(z) e^{-\langle \lambda_p, z \rangle}| = -|\lambda_p| \delta(p, z)$ les fonctions $u_p(z)/|\lambda_p|$ sont alors des fonctions plurisousharmoniques vérifiant

$$\limsup_{p \to +\infty} \frac{u_p(z)}{|\lambda_p|} = -\delta_*(z) < -\alpha_0,$$

et l'inégalité résulte du lemme de Hartogs [5].

Soit alors $K$ un compact non vide de $\mathcal{D}_{*,L}$. Pour tout $z$ dans $K$ on a $\delta_*(z) > L$; comme $\delta_*$ est Lipschitzienne sur les compacts de $\mathcal{D}_{*,L}$ (Lemme 1.2) on peut trouver un réel $\alpha > 0$ tel que $\delta_*(z) > \alpha > L$ pour tout $z$ dans $K$. Si $\varepsilon$ est un réel positif inférieur à $(\alpha - L)/3$ on a les inclusions suivantes:

$$K \subset \mathcal{D}_{*,\alpha-\varepsilon} \subset \mathcal{D}_{*,\alpha-2\varepsilon} \subset \mathcal{D}_{*,L+\varepsilon}.$$

En prenant $\alpha_0 = \alpha - \varepsilon$ dans la remarque précédente on a

$$|Q_p(z) e^{-\langle \lambda_p, z \rangle}| \leq \mu e^{-|\lambda_p|(\alpha - 2\varepsilon)} \leq \mu e^{-|\lambda_p|(L+\varepsilon)},$$

ceci assure la convergence absolue et uniforme sur les compacts de $\mathcal{D}_{*,L}$. Pour prouver la seconde assertion du théorème on considère un point $z_0$ hors de $\overline{\mathcal{D}}_{*,0} \cup Z^*$. Il y a alors un $\alpha > 0$ tel que $\delta_*(z_0) < -\alpha$ et il existe une suite d'entiers $p_n$ tels que

$$\delta(p_n, z_0) < -\alpha, \qquad \lim_{n \to +\infty} p_n = +\infty.$$

Donc,

$$\begin{aligned} |Q_{p_n}(z_0) \exp(-\langle \lambda_{p_n}, z_0 \rangle)| &= \exp(-|\lambda_{p_n}| \delta(p_n, z_0)) \\ &\geq \exp \alpha |\lambda_{p_n}| \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

et la série $F(z)$ ne converge pas et le théorème est prouvé.

Dans le cas particulier où $L = 0$, la série $F(z)$ converge absolument et uniformément sur les compacts de $\mathcal{D}_{*,0}$ et diverge hors de $\mathcal{D}_{*,0}$, sauf, peut-être, en les points appartenant à $Z^*$. Dans la suite on notera $\mathcal{D}_a$ l'ensemble maximal de convergence absolue de la série $F(z)$, cet ensemble contient $\mathcal{D}_{*,L}$.

1.4 PROPOSITION. *Soit* $\mathscr{D}_a^* = \mathscr{D}_a \cap (\mathbf{C}^n \setminus Z^*)$, *si les fréquences* $\lambda_p$ *sont telles qu'il existe* $\lambda \in \mathbf{C}^n$ *vérifiant pour tout* $p$,

$$\left|\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} - \lambda\right| \leq \frac{1}{2A} \quad (A > 1)$$

*Alors l'intérieur* $(\mathscr{D}_a^*)^\circ$ *de* $\mathscr{D}_a^*$ *est non vide chaque fois que ce dernier est non vide.*

Soit $z_0 \in \mathscr{D}_a^*$, il existe $r_{z_0} > 0$, tel que pour tout $p$, $d(z_0, Z_p) > r_{z_0}$. Posons

$$R(p, z_0, z) = \left|\frac{Q_p(z)}{Q_p(z_0)}\right| e^{-\operatorname{Re}\langle\lambda_p, z - z_0\rangle}.$$

On va montrer que $R(p, z_0, z)$ est inférieur ou égal à 1 pour $z$ appartenant à un voisinage de $z_0$ indépendant des $p$ assez grands. Soit $C_{z_0, A}$ le cône

$$C_{z_0, A} = \{z \in \mathbf{C}^n;\ |z - z_0| \leq A \operatorname{Re}\langle z - z_0, \lambda\rangle\}$$

pour tout $z$ dans $C_{z_0, A}$ et hors de $Z^*$, on a, par le lemme 1.2,

$$R(p, z_0, z) \leq \left(1 + \frac{|z - z_0|}{d(z_0, Z_p)}\right)^{\mu_p} e^{-\operatorname{Re}\langle\lambda_p, z - z_0\rangle}.$$

Comme $\beta = 0$, pour $p$ assez grand et $\varepsilon < r_{z_0}/2A$, $R(p, z_0, z)$ vérifie

$$\begin{aligned} R(p, z_0, z) &\leq \left(1 + \frac{|z - z_0|}{d(z_0, Z_p)}\right)^{\varepsilon|\lambda_p|} \exp\left(|z - z_0|\left(\left|\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} - \lambda\right| - \frac{1}{A}\right)|\lambda_p|\right) \\ &\leq h(|z - z_0|)^{|\lambda_p|} \end{aligned}$$

où pour $x$ réel,

$$h(x) = \left(1 + \frac{x}{r_{z_0}}\right)^{\varepsilon} \exp\left(\left(\varepsilon_p - \frac{1}{A}\right)x\right)$$

et $\varepsilon_p$ est un réel supérieur ou égal à

$$\left|\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} - \lambda\right|.$$

Or $h(0) = 1$ et $h'(x) \leq 0$ si $\varepsilon_p \leq 1/2A$ donc $R(p, z_0, z) \leq 1$ pour $p$ grand et sous les hypothèses $z_0 \in \mathscr{D}_a^*$, $z \in C_{z_0,A} \cap (\mathbf{C}^n \setminus Z^*)$. En définitive, on a montré que

$$\bigcup_{z_0 \in \mathscr{D}_a^*} C_{z_0,A} \cap (\mathbf{C}^n \setminus Z^*) \subset (\mathscr{D}_a^*)^\circ,$$

ou encore

$$\bigcup_{\substack{z_0 \in \mathscr{D}_a^*, \\ A>1}} C_{z_0,A} \cap B(z_0, r_{z_0}) \subset (\mathscr{D}_a^*)^\circ.$$

Donc $(\mathscr{D}_a^*)^\circ$ est non vide si $\mathscr{D}_a^*$ est non vide. Un cas particulier de cette situation est lorsque la suite $(\lambda_p)_{p \geq 1}$ est telle que la suite

$$\left(\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}\right)_{p \geq 1}$$

converge vers $\lambda \in \mathbf{C}^n$, $|\lambda| = 1$.

2. *Cas de séries à coefficients constants; construction de Simeon.*

Ce que nous venons de dire à propos des sommes d'exponentielles polynômes se transmet intégralement aux séries d'exponentielles à coefficients constants. Les quantités $\delta(p, z)$ sont égales aux quantités $d(p, z)$ définis au § 1. Les ensembles $\mathscr{D}_{*,\alpha}$ sont égaux aux ouverts $D_{*,\alpha}$ et on a:

2.1 COROLLAIRE. *Soit $f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p e^{-\langle \lambda_p, z \rangle}$ une série d'exponentielles à coefficients constants; si*

$$L = \limsup_{p \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} p}{|\lambda_p|}$$

*est fini, la série $f$ converge absolument et uniformément sur les compacts de $D_{*,L}$ et diverge hors de $\overline{D}_{*,0}$. En particulier, si $L = 0$, $D_{*,0}$ est l'ouvert maximal de convergence absolue de $f(z)$.*

Dans [7], Simeon détermine, dans le cas d'une variable complexe et sous la condition $L < +\infty$, les domaines maximaux de convergence absolue de $f(z)$. Cette méthode s'étend au cas de plusieurs variables. On énonce, sans démonstrations, les résultats qui sont une adaptation facile de [7].

Pour toute partie $E$ de $\mathbf{C}^n$, et pour tout $z \in \mathbf{C}^n$, on note

$$\mathbf{N}_{z,E}^* = \left\{ p \in \mathbf{N}^*,\ d(p, z)\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} \in E \right\}.$$

On ordonne $\mathbf{N}^*_{z,E}$, s'il est non vide, en une suite $(n_p)_{p\geq 1}$ croissante et on pose

$$L_z(E)\begin{cases} = \limsup\limits_{p\to+\infty} \dfrac{\operatorname{Log} p}{|\lambda_p|} & \text{si } \mathbf{N}^*_{z,E} \text{ est infini} \\ = -\infty & \text{si } \mathbf{N}^*_{z,E} \text{ est infini ou vide,} \end{cases}$$

et

$$f_E(z) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{n_p} \exp\left(-\langle \lambda_{n_p}, z\rangle\right)$$

si $\mathbf{N}^*_{z,E}$ est non vide; $f_E(z) = 0$ sinon.

Il résulte aussitôt de ces formules que $L_z(\mathbf{C}^n) = L$, pour tout $z$ dans $\mathbf{C}^n$; que $L_z$ est croissante en tant qu'application d'ensembles et que si $E_\varepsilon$ est l'$\varepsilon$-voisinage de $E$ et si $L_{*,z}(E) = \lim_{\varepsilon\to 0} L_z(E_\varepsilon)$, alors l'application $E \to L_{*,z}(E)$ est croissante à valeurs dans $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Si le point à l'infini de $\mathbf{C}^n$ est noté $\infty$ et si $z_0 \in \mathbf{C}^n$, on pose

$$d(z_0, \infty) = 1/|z_0|,$$
$$\{\infty\}_\varepsilon = \{z \in \mathbf{C}^n;\, d(z,\infty) < \varepsilon\} = \{z \in \mathbf{C}^n;\, |z| > 1/\varepsilon\},$$
$$\mathbf{N}^*_{z,\{\infty\}_\varepsilon} = \left\{p \in \mathbf{N}^*,\, d(p,z)\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} \in \{\infty\}_\varepsilon\right\}$$
$$= \{p \in \mathbf{N}^*;\, |d(p,z)| > 1/\varepsilon\}.$$

On définit $L_z(\{\infty\}_\varepsilon)$ et $L_{*,z}(\{\infty\})$ comme précédemment et on a:

2.2 Proposition. (a) *Pour toute partie $E$ de $\mathbf{C}^n$, non vide, si $\overline{E}$ est l'adhérence de $E$, on a*

$$L_{*,z}(E) = L_{*,z}(\overline{E}) = \lim_{\varepsilon\to\infty} L_{*,z}(E_\varepsilon).$$

*Et si $\overline{E}$ est compact, pour tout $z \in \mathbf{C}^n$ il existe $z_1 \in \overline{E}$ tel que*

$$L_{*,z}(\overline{E}) = L_{*,z}(\{z_1\}).$$

(b) *Soient $E_i$, $1 \leq i \leq k$, $k$ parties de $\mathbf{C}^n$ et $E = \cup_{1\leq i\leq k} E_i$, alors pour tout $z$ dans $\mathbf{C}^n$,*

$$L_z(E) = \sup_{1\leq i\leq k} L_z(E_i)$$
$$L_{*,z}(E) = \sup_{1\leq i\leq k} L_{*,z}(E_i)$$

(c) *Soient* $z, z' \in D_{*,0}$; $z_1, z_1' \in \mathbf{C}^n$, $z_1 \neq 0$, $z \neq z'$. *Si*

$$z_1 - z_1' = \operatorname{Re}\left\langle \frac{z_1}{|z_1|}, z - z' \right\rangle \frac{z_1}{|z_1|},$$

*on a*

$$L_{*,z}(\{z_1\}) = L_{*,z'}(\{z_1'\}).$$

Prouvons, à titre d'exemple le point (c). On sait que

$$d(p, z) - d(p, z') = \operatorname{Re}\left\langle \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}, z - z' \right\rangle.$$

Tenant compte de l'hypothèse, on a

$$\left[z_1' - d(p, z')\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}\right] - \left[z_1 - d(p, z)\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}\right]$$
$$= |z - z'|\left\{\operatorname{Re}\left\langle \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}, \frac{z - z'}{|z - z'|} \right\rangle \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} - \operatorname{Re}\left\langle \frac{z_1}{|z_1|}, \frac{z - z'}{|z - z'|} \right\rangle \frac{z_1}{|z_1|}\right\}.$$

Or, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\varepsilon'$ dans $]0, \inf(\varepsilon, |z_1|)[$ tel que pour tout $p$ dans $\mathbf{N}^*_{z,\{z_1\}_{\varepsilon'}}$,

$$\left\{\operatorname{Re}\left\langle \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}, \frac{z - z'}{|z - z'|} \right\rangle \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} - \operatorname{Re}\left\langle \frac{z_1}{|z_1|}, \frac{z - z'}{|z - z'|} \right\rangle \frac{z_1}{|z_1|}\right\} < \frac{\varepsilon}{|z - z'|}. \tag{1}$$

Sinon, il existe $\varepsilon$ positif tel que pour tout $\varepsilon'$ dans $]0; \inf(\varepsilon, |z_1|)[$ il existe $n_{\varepsilon'}$ dans $\mathbf{N}^*_{z,\{z_1\}_{\varepsilon'}}$ tel que

(2)
$$\left\{\operatorname{Re}\left\langle \frac{\lambda n_{\varepsilon'}}{|\lambda n_{\varepsilon'}|}, \frac{z - z'}{|z - z'|} \right\rangle \frac{\lambda n_{\varepsilon'}}{|\lambda n_{\varepsilon'}|} - \operatorname{Re}\left\langle \frac{z_1}{|z_1|}, \frac{z - z'}{|z - z'|} \right\rangle \frac{z_1}{|z_1|}\right\} \geq \frac{\varepsilon}{|z - z'|}.$$

Mais $n_{\varepsilon'} \in \mathbf{N}^*_{z,\{z_1\}_{\varepsilon'}}$ signifie que

$$\left| d(n_{\varepsilon'}, z)\frac{\lambda n_{\varepsilon'}}{|\lambda n_{\varepsilon'}|} - z_1 \right| < \varepsilon'. \tag{3}$$

Les familles

$$\left(d(n_{\varepsilon'}, z)\right)_{\varepsilon'} \quad \text{et} \quad \left(d(n_{\varepsilon'}, z)\frac{\lambda n_{\varepsilon'}}{|\lambda n_{\varepsilon'}|}\right)_{\varepsilon'}$$

sont alors bornées, il existe une suite $(\varepsilon'_k)_{k\geq 0}$, $\lim_{k\to+\infty}\varepsilon'_k = 0$ telle que les deux suites

$$\left(d(n_{\varepsilon'_k}, z)\right)_{k\geq 0} \quad \text{et} \quad \left(d(n_{\varepsilon'_k}, z)\frac{\lambda n_{\varepsilon'_k}}{|\lambda n_{\varepsilon'_k}|}\right)_{k\geq 0}$$

convergent vers $l$ et $l\theta$ respectivement, $|\theta| = 1$ et $l > 0$ puisque $d_*(z) > 0$, par (3), on a $z_1 = l\theta$ et $z_1/|z_1| = \theta$. On obtient une contradiction en écrivant les inégalités (2) avec les indices $n_{\varepsilon'_k}$ et en faisant tendre $k$ vers l'infini, d'où (1). Ainsi, pour $\varepsilon' < \varepsilon$, $\mathbf{N}^*_{z,\{z_1\}_{\varepsilon'}} \subset \mathbf{N}^*_{z',\{z'_1\}_{2\varepsilon}}$ et, par suite,

$$L_{*,z}(\{z_1\}) \leq L_{*,z}(\{z'_1\}).$$

(i) Si $L_{*,z}(\{z_1\}) \geq 0$, on a aussi $L_{*,z}(\{z'_1\}) \geq 0$; comme $z'$ est dans $D_{*,0}$, on a $d_*(z') > 0$ et donc $z'_1 \neq 0$. En posant

$$\lambda = \operatorname{Re}\left\langle \frac{z_1}{|z_1|}, z - z'\right\rangle,$$

de

$$z_1 - z'_1 = \lambda\frac{z_1}{|z_1|},$$

on déduit

$$\frac{z'_1}{|z'_1|} = \varepsilon\frac{z_1}{|z_1|}, \qquad \varepsilon^2 = 1;$$

par conséquent:

$$z'_1 - z_1 = \operatorname{Re}\left\langle \frac{z'_1}{|z'_1|}, z' - z\right\rangle \frac{z'_1}{|z'_1|}.$$

La symétrie des rôles de $z_1$ et $z'_1$ donne $L_{*,z'}(\{z'_1\}) = L_{*,z}(\{z_1\})$.

(ii) Si $L_{*,z}(\{z_1\}) = -\infty$ on a, nécessairement, $L_{*,z'}(\{z'_1\}) = -\infty$; sinon, $L_{*,z'}(\{z'_1\}) \geq 0$, alors $z'_1 \neq 0$ et par symétrie $L_{*,z}(\{z_1\}) = L_{*,z'}(\{z'_1\})$ ce qui est absurde.

2.3 Corollaire. *L'application de $\overline{\mathbf{C}^n}$ dans $\mathbf{R}^+\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ qui à $z_1$ associe $L_{*,z}(\{z_1\})$ (resp. qui à $z_1$ associe $|z_1| - L_{*,z}(\{z_1\})$) est semi-continue supérieurement (resp. semi-continue inférieurement) pour $z$ fixé. En conséquence, si*

$$L = \limsup_{p\to+\infty}\frac{\operatorname{Log} p}{|\lambda_p|} < +\infty,$$

*il existe* $z_1^0 \in \mathbf{C}^n$ *tel que*

$$\inf_{z_1 \in \mathbf{C}^n} \{|z_1| - L_{*,z}(\{z_1\})\} = |z_1^0| - L_{*,z}(\{z_1^0\}).$$

*On pose, pour tout* $z \in \mathbf{C}^n$,

$$\rho_z = \inf_{z_1 \in \mathbf{C}^n} \{|z_1| - L_{*,z}(\{z_1\})\}$$

*et, pour tout* $\alpha$ *réel,*

$$\Delta_\alpha = \{z \in D_{*,0},\ \rho_z > \alpha\}.$$

La proposition générale concernant la convergence absolue des sommes d'exponentielles dans le cas $L$ fini, non nécessairement nul est:

2.4 PROPOSITION. *Si $L$ est positif et $\Delta_0$ est non vide, la série*

$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p e^{-\langle \lambda_p, z\rangle}$$

*converge absolument et uniformément sur les compacts de $\Delta_0$. Elle ne converge absolument en aucun point de $\mathbf{C}^n \setminus \overline{\Delta}_0$. Ainsi, $\Delta_0$ est l'ouvert maximal de convergence absolue de la série $f(z)$.*

## 3. Ensembles de convergence absolue des séries d'exponentielles-polynômes

Dans ce paragraphe, on considère des séries de la forme

$$F(z) = \sum_{p=1}^{\infty} Q_p(z) e^{-\langle \lambda_p, z\rangle}$$

où on suppose

$$\operatorname*{Lim}_{p \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} p}{|\lambda_p|} = 0, \qquad \lim_{p \to +\infty} \frac{\mu_p}{|\lambda_p|} = 0 \quad \text{et} \quad Q_p(0) \neq 0, \forall p.$$

$\mu_p$ désignant, pour tout $p$, le degré du polynôme $Q_p$; s'inspirant de [8] et utilisant la méthode des boules d'exclusion de [1], on va associer à la série $F(z)$, une série d'exponentielles, à coefficients constants $f(z)$, dont le domaine maximal de convergence absolue ne diffèrera de l'ensemble de convergence absolue de $F(z)$ que par un ensemble d'intérieur vide.

3.1 THEOREME. *Soit $F(z) = \sum_{p=1}^{\infty} Q_p(z) e^{-\langle \lambda_p, z \rangle}$ une série d'exponentielles-polynômes où les fréquences $(\lambda_p)_p$ et les degrés $\mu_p$ des polynômes $Q_p$ vérifient les conditions ci-dessus. Soient, pour tout $p \geq 1$, $A_p$ la hauteur de $Q_p$, $\mathscr{D}_a$ l'ensemble de convergence absolue de $F(z)$ et $D_a$ le domaine maximal de convergence absolue de $f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p e^{-\langle \lambda_p, z \rangle}$, alors:*

(i) $D_a \subset \mathscr{D}_a$,

(ii) $(\mathscr{D}_a \setminus (\overline{D}_a \cup Z^*))^\circ = \emptyset$,

*($Z^*$ étant l'ensemble défini dans le § 1; on rappelle que la hauteur d'un polynôme est le plus grand des modules de ses coefficients).*

3.2 LEMME. *Sous les hypothèses du théorème et s'il existe une constante $A > 1$ telle que*

$$\left| \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} - \lambda \right| \leq \frac{1}{2A}, \qquad \lambda \in \mathbf{C}^n, \qquad |\lambda| = 1$$

*alors $D_a \subset \mathscr{D}_a$.*

Soit, en effet, $z_0 \in D_a$; considérons comme avant le cône

$$C_{z_0, A} = \{ z \in \mathbf{C}^n;\ |z - z_0| \leq A \operatorname{Re}\langle z - z_0, \lambda \rangle \}$$

et un point $z_1$, arbitraire dans $\mathbf{C}^n$ (mais qui sera fixé dans la suite). On va étudier le rapport

$$R_{p, z_0, A}(z, z_1) = \frac{|Q_p(z) e^{-\operatorname{Re}\langle \lambda_p, z \rangle}|}{A_p e^{-\operatorname{Re}\langle \lambda_p, z_1 \rangle}}.$$

Les $A_p$ sont non nuls par définition. Pour tout $z$ dans $\mathbf{C}^n$,

$$|Q_p(z)| \leq A_p \theta(\mu_p) \{\max(1, |z|)\}^{\mu_p},$$

$\theta(\mu_p)$ étant le nombre de termes dans un polynôme de degré total $\mu_p$. Si de plus $z$ est dans $C_{z_0, A}$,

$$R_{p, z_0, A}(z, z_1) \leq \theta(\mu_p) \{1 + |z_0| + A \operatorname{Re}\langle z - z_0, \lambda \rangle\}^{\mu_p} \cdot e^{-\operatorname{Re}\langle \lambda_p, z - z_1 \rangle}$$

On distingue deux cas:

(a) $A \operatorname{Re}\langle z - z_0, \lambda \rangle \leq 1 + |z_0|$. Comme $\theta(\mu_p) \leq (\mu_p + 1)^{n+1}$, il vient

$$R_{p, z_0, A}(z, z_1) \leq 2^{(n+2)\mu_p} \cdot (1 + |z_0|)^{\mu_p} \cdot e^{-\operatorname{Re}\langle \lambda_p, z - z_1 \rangle};$$

tenant compte de l'hypothèse $\mu_p/|\lambda_p| \to 0$, $p \to +\infty$, on a

$$R_{p, z_0, A}(z, z_1) \leq e^{\varepsilon|\lambda_p| - \operatorname{Re}\langle z - z_1, \lambda_p\rangle}.$$

(b) $1 + |z_0| \leq A \operatorname{Re}\langle z - z_0, \lambda\rangle$. Par des majorations faciles ($z$ est dans le cône et les $\lambda_p$ vérifient la condition du lemme) on a

$$R_{p, z_0, A}(z, z_1) \leq (2^{n+2}A')^{\mu_p} \cdot e^{-\operatorname{Re}\langle z_0 - z_1, \lambda_p\rangle},$$

$A'$ étant une constante ne dépendant que de $A$; donc, si $\varepsilon$ est le même que dans le cas précédent, pour $p$ grand,

$$R_{p, z_0, A}(z, z_1) \leq e^{\varepsilon|\lambda_p| - \operatorname{Re}\langle z_0 - z_1, \lambda_p\rangle}.$$

Ce qui donne une majoration analogue au premier cas. Mais, puisque $z_0$ appartient à l'ouvert $D_a$, il y a un $r_{z_0} > 0$ tel que la boule $\{z \in \mathbf{C}^n, |z - z_0| \leq r_{z_0}\}$ soit contenue dans $D_a$; fixons maintenant $z_1$ par $z_1 = -r_{z_0}\bar{\lambda} + z_0$, où $\bar{\lambda}$ est le conjugué de $\lambda$, de sorte que $\operatorname{Re}\langle \lambda, \bar{\lambda}\rangle = 1$.

Si, dans le cas (a), on prend soin de considérer $\varepsilon$ inférieur à

$$\frac{A-1}{2A} r_{z_0},$$

on aura, successivement,

$$\begin{aligned}
\varepsilon|\lambda_p| - \operatorname{Re}\langle z - z_1, \lambda_p\rangle &= \varepsilon|\lambda_p| - \operatorname{Re}\langle z - z_0, \lambda_p\rangle - r_{z_0}\operatorname{Re}\langle \bar{\lambda}, \lambda_p\rangle \\
&\leq \left\{\varepsilon + r_{z_0}\left|\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} - \lambda\right| - r_{z_0}\right\}|\lambda_p| - \operatorname{Re}\langle z - z_0, \lambda_p\rangle.
\end{aligned}$$

Comme $\operatorname{Re}\langle z - z_0, \lambda_p\rangle \geq 0$ et

$$\varepsilon + r_{z_0}\left|\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} - \lambda\right| - r_{z_0} < \varepsilon + \frac{r_{z_0}}{2A} - r_{z_0} \leq 0$$

il vient (dans le cas a)

$$R_{p, z_0, A}(z_1 z_1) \leq 1.$$

Pour achever la preuve du lemme, on constate que, pour le même $z_1$ et le même

$\varepsilon$ que dans le cas (a), on a

$$\begin{aligned}\varepsilon|\lambda_p| - \mathrm{Re}\langle z_0 - z_1, \lambda_p\rangle &= \left(\varepsilon - r_{z_0}\mathrm{Re}\left\langle \bar{\lambda}, \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}\right\rangle\right)|\lambda_p| \\ &\leq \left(\varepsilon - r_{z_0}\mathrm{Re}\left\langle \bar{\lambda}, \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} - \lambda\right\rangle - r_{z_0}\right)|\lambda_p| \\ &\leq \left(\varepsilon - r_{z_0} + \frac{r_{z_0}}{2A}\right)|\lambda_p| \leq 0.\end{aligned}$$

Donc, dans le cas (b), on a aussi $R_{p, z_0, A}(z, z_1) \leq 1$ cela veut dire que si $z_0 \in D_a$ et $z_1 = -r_{z_0}\bar{\lambda} + z_0$, on a, pour tout $z$ dans $C_{z_0, A}$,

$$|Q_p(z)e^{-\langle\lambda_p, z\rangle}| \leq A_p e^{-\mathrm{Re}\langle\lambda_p, z_1\rangle}.$$

Comme la série de terme général $A_p e^{-\mathrm{Re}\langle\lambda_p, z_1\rangle}$ converge, tout le cône (fermé) $C_{z_0, A}$ est contenu dans l'ensemble $\mathscr{D}_a$ en particulier $z_0 \in \mathscr{D}_a$, ce qui achève la preuve du lemme.

Démontrons, à présent, la première affirmation du théorème. Notons par $\Lambda$ la suite $(\lambda_p)_{p \geq 1}$ et $\alpha(\Lambda)$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite

$$\left(\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}\right)_{p \geq 1};$$

$\alpha(\Lambda)$ est compact, contenu dans la sphère unité $S^{2n-1}$ de $\mathbf{C}^n$. Pour tout $A > 1$, il existe $k = k(A)$ points de $S^{2n-1}$, $\zeta_1, \dots, \zeta_k$, tels que si

$$V_i = \left\{z \in S^{2n-1}; |z - \zeta_i| \leq 1/2A\right\}.$$

Les $V_i$, $1 \leq i \leq k$, recouvrent $S^{2n-1}$ (donc aussi $\alpha(\Lambda)$). Soient

$$N_1 = \left\{p \in \mathbf{N}^*, \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} \in V_{\zeta_1}\right\},$$

$$N_i = \left\{p \in \mathbf{N}^* \Big\backslash \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} N_i\right), \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} \in V_{\zeta_k}\right\},$$

chacune des sommes partielles

$$F_i(z) = \sum_{p \in N_i} Q_p(z) e^{-\langle\lambda_p, z\rangle}$$

vérifie les conditions du lemme précédent, il en résulte que

$$\sum_{p=1}^{\infty} |Q_p(z_0)| e^{-\mathrm{Re}\langle \lambda_p, z_0 \rangle}$$

est fini, si $z_0 \in D_a$.

Reste à prouver que $(\mathscr{D}_a \setminus (\overline{D}_a \cup Z^*))^\circ = \emptyset$. Supposons le contraire, il y a donc un $z_0$ dans $\mathscr{D}_a$ et un réel $r_{z_0}$ tel que

$$B(z_0, 2r_{z_0}) \subset \mathscr{D}_a, \qquad B(z_0, 2r_{z_0}) \cap (\overline{D}_a \cup Z^*) = \emptyset.$$

Par application des inégalités de Cauchy aux fonctions analytiques on peut trouver $R > \sqrt{n}$ tel que

$$|z_0| \leq R \quad \text{et} \quad M(Q_p, R) = \sup_{|z| \leq R} \mathrm{Log}|Q_p(z)| \geq \mathrm{Log}\, A_p.$$

Comme $z_0$ est hors de $\overline{D}_a$, la série $f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p e^{-\mathrm{Re}\langle \lambda_p, z_0 \rangle}$ diverge, il existe par conséquent, une suite d'entiers $(p_n)$, tendant vers l'infini avec $n$ telle que

$$d(p_n, z_0) < -\alpha \tag{1}$$

où $\alpha$ est un réel strictement positif. On peut extraire de la suite $(p_n)_n$ une sous-suite qu'on note $p(n, j)_{j \geq 0}$ telle qu'il existe une suite de réels $(\rho_j)_{j \geq 0}$ avec $0 < \rho_j < 1/e$, satisfaisant en outre à:

(i) la suite

$$\left( \frac{\mu_{p(n,j)}}{|\lambda_{p(n,j)}|} \mathrm{Log}\, \rho_j \right)_{j \geq 0}$$

converge vers 0,

(ii) $\sum_{j \geq 0} \rho_j < +\infty$.

On a besoin du lemme suivant.

3.3 Lemme (Avanissian [1]). *Soit $Q$ un polynôme dans $\mathbf{C}^n$, de degré total $\mu$, $Q(0) \neq 0$ et $W_{R,Q} = Z(Q) \cap B(O, R)$, $Z(Q)$ étant l'ensemble des zéros de $Q$. Soit $\tau$, $1 < \tau < 2$, un réel tel que la réunion $E$ des boules fermées de rayon $\rho = (\tau - 1)R$ et centrées sur $W_{\tau R, Q}$ ne recouvre pas $B(O, R)$. Pour tout $z$, $|z| \leq R$ et hors de $E$, on a*

$$M(R, Q) - \frac{A\mu}{(\tau - 1)^{2n}} \leq \mathrm{Log}|P(z)|$$

*où $M(R, Q) = \sup_{|z| \leq R} \mathrm{Log}|Q(z)|$ et $A$ est une constante positive, ne dépendant que de la dimension de l'espace.*

Ceci dit considérons, pour chaque $j$, la racine $\tau_j$ comprise entre 1 et 2 de l'équation

$$\rho_j = \exp\left(-\frac{A}{(x-1)^{2n}}\right),$$

$\tau_j$ tend alors vers 1 supérieurement lorsque $j$ tend vers l'infini. Or, il existe $j_0$ tel que

$$BO(z_0, r_{z_0}) \cap W_{\tau_j R, Q_{p(n,j)}} = \emptyset.$$

($W_{\tau_j R, Q_{p(n,j)}}$ a la même signification que dans le lemme 3.3.)

Soit $\varepsilon < \alpha/2$ donné, puisque $\rho_j < 1$ pour $j$ grand, la première condition imposée à la suite $(\rho_j)_{j\geq 0}$ donne, pour $j$ grand,

$$\rho_j^{-\mu_{p(n,j)}} \leq e^{\varepsilon|\lambda_{p(n,j)}|} \tag{2}$$

par le lemme 3.3, on a

$$A_{p(n,j)}\rho_j^{\mu_{p(n,j)}} \leq e^{M(Q_{p(n,j)},R)}e^{-A\mu_{p(n,j)}(\tau_j-1)^{-2n}} \leq |Q_{p(n,j)}(z_0)|.$$

Par suite,

$$A_{p(n,j)}e^{-\operatorname{Re}\langle\lambda_{p(n,j)},z_0\rangle} \leq |Q_{p(n,j)}(z_0)|e^{-\operatorname{Re}\langle\lambda_{p(n,j)},z_0\rangle}\rho_j^{-\mu_{p(n,j)}}.$$

Comme $z_0$ est dans $\mathscr{D}_a$, pour $j$ grand, on a,

$$|Q_{p(n,j)}(z_0)|e^{-\operatorname{Re}\langle\lambda_{p(n,j)},z_0\rangle} \leq 1.$$

Donc,

$$A_{p(n,j)}e^{-\operatorname{Re}\langle\lambda_{p(n,j)},z_0\rangle} \leq \rho_j^{-\mu_{p(n,j)}}. \tag{3}$$

Par définition des quantités $d(p,z)$ définies au § 1, le premier membre de cette dernière inégalité est $e^{-|\lambda_{p(n,j)}|d(p(n,j),z_0)}$; par (2) et (3),

$$-|\lambda_{p(n,j)}|d(p(n,j),z_0) < \varepsilon|\lambda_{p(n,j)}|,$$

cela veut dire, compte tenu de $0 < \varepsilon < \alpha/2$, que

$$d(p(n,j),z_0) > -\frac{\alpha}{2}.$$

Ceci contredit (1) et achève complètement la démonstration du théorème.

## Bibliographie


1. V. Avanissian, *Ouverts d'exclusion dans* $\mathbf{C}^p$ $(p \geq 2)$ *pour les fonctions entières*, C.R. Acad. Sci. série A, vol. 27 A (1972), pp. 1915–1918.
2. M. Blambert et M. Berland, *Sur la convergence des éléments L.C dirichletiens*, C.R. Acad. Sci. série A, vol. 281 (1975), pp. 963–966.
3. J. Chaillou, *Les polynômes différentiels hyperboliques*, Collection Varia Mathematica, Gauthiers Villars,
4. T.M. Gallie, Region of convergence of Dirichlet series with complex exponents, J. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 7 (1956), pp. 627–629.
5. P. Lelong, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières* ($n$ *variables*), les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1968 (Séminaire de Mathématiques supérieures, Eté 1967, 28).
6. A. Martineau, *Equations différentielles d'ordre infini*, Bull. Soc. Math. France, vol. 95 (1967), pp. 109–154.
7. J. Simeon, *Familles normales de germes dirichletiens. Germes dirichletiens à exposants complexes*, Thèse de Doctorat es Sciences, Grenoble, 1972.
8. G. Valiron, *Sur les solutions des équations différentielles d'ordre infini et à coefficients constants*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), t. 46 (1929), pp. 25–53.


Université de Bordeaux
Bordeaux, France