ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 32, Number 1, Spring 1988

SUR L'ALGEBRE DE COHOMOLOGIE CYCLIQUE D'UN ESPACE 1-CONNEXE APPLICATIONS A LA GEOMETRIE DES VARIETES

PAR

MICHELINE VIGUÉ-POIRRIER[1]

Introduction

Dans toute la suite, X désigne un espace topoligique 1-connexe, pointé par x_0, et ayant le type d'homotopie d'un C.W. complexe de type fini, et k est un corps de caractéristique zéro. Il a été prouvé dans [2, I] que la K-théorie algébrique rationnelle réduite de X, notée

$$\tilde{K}_{*+1}(X) \otimes \mathbf{Q}$$

et égale à

$$K_{*+1}(X) \otimes \mathbf{Q}/K_{*+1}(x_0) \otimes \mathbf{Q},$$

est isomorphe à l'homologie cyclique réduite de X, notée $H\tilde{C}_*(X, \mathbf{Q})$ et égale à

$$HC_*(X, \mathbf{Q})/HC_*(\{x_0\}, \mathbf{Q}).$$

Ensuite, il a été prouvé dans [2, II] que $HC_*(X, k)$ est isomorphe à l'homologie équivariante de l'espace des lacets libres sur X, notée $H_*^{S^1}(X^{S^1}, k)$ et égale à

$$H_*\left(X^{S^1} \times_{S_1} ES^1, k\right).$$

Enfin, dans [5], on a décrit le modèle minimal de Sullivan de $X^{S^1} \times_{S^1} ES^1$ à partir du modèle de X, ainsi que le modèle de la fibration

$$p\colon X^{S^1} \times_{S^1} ES^1 \to BS^1 = \mathbf{C}P^\infty.$$

On voit que $H^*(X^{S^1} \times_{S^1} ES^1)$ a une structure de module gradué sur l'anneau de polynômes $H^*(BS^1, k) \simeq k[\alpha]$ où $\deg \alpha = 2$.

Received May 28, 1986.
[1]UA au CNRS 751.

Dans cette note, le théorème 1 décrit avec précision la structure de $k[\alpha]$-module sur $H^*(X^{S^1} \times_{S^1} ES^1)$, et on montre que $\mathrm{rg}_{k[\alpha]} HC^*(X) = 1$, pour tout X. Diverses propositions en découlent facilement. En particulier, on retrouve le corollaire 3 de [5] sans aucun calcul, (à savoir que $H^*(X)$ s'injecte dans $HC^{*-1}(X)$). On a immédiatement une formule pour la K-théorie algébrique rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac-Lane (proposition 2). Ce résultat était déjà dans [8], mais découlait de longs calculs. Si $A(X)$ désigne l'espace de Waldhausen de la K-théorie algébrique d'un espace X 1-connexe, et si $\mathrm{Wh}^D(X)$ est la fibre homotopique de l'application de stabilisation $A(X) \to A^S(X)$, on donne une formule pour les dimensions des groupes d'homotopie rationnelle de $\mathrm{Wh}^D(X)$, (théorème 2). Des calculs explicites sont effectués pour $X = K(\mathbf{Z}, n)$, $S^n, \mathbf{C}P^n, \prod_{j=1}^p K(\mathbf{Z}, 2j)$. Ensuite nous rappelons la théorie de Burghelea-Lashof permettant de calculer, en basses dimensions, les groupes d'homotopie rationnelle de $\mathrm{Diff}\, M^n$, le groupe des difféomomorphismes d'une variété C^∞ compacte M de dimension n. Les théorèmes précédents nous donnent les valeurs des entiers $\dim \prod_i(\mathrm{Diff}\, M) \otimes \mathbf{Q}$ lorsque $H^*(M, R)$ est une algèbre tronquée à un générateur (théorème 3), lorsque M est une grassmannienne complexe et $i \leq 8$ (théorème 4).

Remarque 1. Grâce à la théorie de Quillen [10] qui établit une équivalence de catégories entre les types d'homotopie rationnelle de C.W. complexes 1-connexes et les algèbres de Lie différentielles graduées minimales sur $\mathbf{Q}$, le théorème 1 s'étend à la cohomologie cyclique de toute $\mathbf{Q}$-algèbre de chaînes connexe (A, d) ayant une structure d'algèbre de Hopf différentielle graduée cocommutative; (il suffit de travailler avec l'espace X dont le modèle de Quillen est le modèle minimal de l'algèbre de Lie différentielle graduée $\mathrm{Prim}(A, d)$.

Remarque 2. Dans [16], nous donnons un modèle pour calculer l'homologie cyclique d'une algèbre de chaînes commutative graduée et nous montrons l'analogue du théorème 1.

Exposé des résultats

Nous renvoyons le lecteur à [2], [5] et [14], pour la définition de l'homologie cyclique, la K-théorie algébrique d'un espace, et à [7], [11], [13], pour la définition et le calcul du modèle minimal de Sullivan d'un espace. Comme X est 1-connexe, l'espace X^{S^1} muni de la topologie compacte ouverte, ainsi que l'espace équivariant $X^{S^1} \times_{S^1} ES^1$ sont nilpotents, et la théorie de [7] s'applique. Rappelons que le fibré

$$X^{S^1} \to X^{S^1} \times_{S^1} ES^1 \xrightarrow{p} BS^1$$

induit, en cohomologie, une suite exacte de Gysin:

$$\cdots \to H^{*-1}(X^{S^1}, k) \to H^{*-2}\left(X^{S^1} \times_{S^1} ES^1, k\right)$$
$$\xrightarrow{S} H^*\left(X^{S^1} \times_{S^1} ES^1, k\right) \to H^*(X^{S^1}, k) \to \cdots$$

qui, lorsqu'on identifie $H^*(X^{S^1} \times_{S^1} ES^1, k)$ à $HC^*(X, k)$ est isomorphe à la suite exacte de Connes. De plus, le morphisme S de $k[\alpha]$-module gradué est la multiplication par le générateur α de $H^*(BS^1, k)$. Tous les résultats sont formulés en cohomologie, mais, par dualité, les mêmes résultats sont vrais en homologie.

Dans la théorie du modèle minimal de Sullivan [7], [11] on associe à tout espace X, une $\mathbf{Q}$-algèbre différentielle graduée minimale, appelée modèle minimal de X, et notée $\mathscr{M}_X = (\Lambda Z, d_X)$ où $Z = \oplus_{n>0} Z^n$ est un espace vectoriel gradué, avec $Z^n \simeq \mathrm{Hom}(\Pi_n(X), \mathbf{Q})$, d_X est une différentielle de degré +1 telle que si $z \in Z^n$, alors $d_X z$ appartient à l'algèbre engendrée par les générateurs $z_i \in Z^i$, $i < n$, de plus $H^*(\mathscr{M}_X, d_X) \simeq H^*(X, \mathbf{Q})$. Si $(\Lambda Z, d)$ est le modèle minimal de X, on définit $\overline{Z} = \oplus_{p>0} \overline{Z}^p$ par $\overline{Z}^p = Z^{p+1}$; l'application identique $i: Z^{p+1} \to \overline{Z}^p$ s'étend en une dérivation de degré -1 de $\Lambda Z \to \Lambda Z \otimes \Lambda \overline{Z}$ par $i(z_1 \wedge z_2) = i(z_1) \wedge z_2 + (-1)^{\deg z_1} z_1 \wedge i(z_2)$ et on prolonge i à $\overline{Z}$ par 0. On définit sur $\Lambda Z \otimes \Lambda \overline{Z}$ une différentielle $\bar{d}$ par $\bar{d}_{|\Lambda Z} = d$ et $\bar{d}i + i\bar{d} = 0$, on définit sur $\Lambda\alpha \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda \overline{Z}$ une différentielle D par $D\alpha = 0$, $D = \bar{d} + \alpha i$ sur $\Lambda Z \otimes \Lambda \overline{Z}$. Dans [5] et [12], on a montré:

THÉORÈME [5]. *Soit X un espace 1-connexe de modèle minimal de Sullivan $(\Lambda Z, d)$; alors $(\Lambda Z \otimes \Lambda \overline{Z}, \bar{d})$ est le modèle de X^{S^1}, $(\Lambda\alpha \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda \overline{Z}, D)$ est le modèle de $X^{S^1} \times_{S^1} ES^1$, et les morphismes*

$$(\Lambda\alpha, 0) \xrightarrow{i} (\Lambda\alpha \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda \overline{Z}, D) \xrightarrow{q} (\Lambda Z \otimes \Lambda \overline{Z}, \bar{d})$$

(*où i est l'inclusion, q la projection*), *sont les modèles de la fibration*

$$X^{S^1} \to X^{S^1} \times_{S^1} ES^1 \to BS^1.$$

On a

$$H^*(BS^1, k) = HC^*(\{x_0\}, k) = k[\alpha] \quad \textit{avec } \deg \alpha = 2.$$

Remarque. $HC^*(X, k)$ est un module gradué de type fini sur l'anneau principal $k[\alpha]$, il admet donc une décomposition en somme directe d'un module libre de rang fini et d'un module de torsion. Le théorème suivant dit que, pour tout espace X, la partie libre est de rang 1.

THÉORÈME 1. *Soit X un espace 1-connexe, on note $(\Lambda Z, d)$ le modèle minimal de Sullivan de X, et $(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, \bar{d})$ celui de X^{S^1}. Alors le $k[\alpha]$-module gradué $HC^*(X, k)$ admet une décomposition en somme directe de $k[\alpha]$-modules gradués du type: $HC^*(X, k) = k[\alpha] \oplus V^*$ où $V^* = \oplus_{n>0} V^n$ est un $k[\alpha]$-module gradué de torsion, défini à partir de $(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, \bar{d})$. De plus, V^* possède une seconde graduation $V^* = \oplus_{p \geq 1} V_p^*$ telle que, pour tout $p \geq 1$, $\alpha^p \cdot V_p^* = 0$, et pour chaque $n > 0$, on a $V_p^n = 0$ si $p > n + 2$.*

Remarque. Le théorème 3.5. de [1] dit que si V est une variété *compacte* sur laquelle agit le cercle S^1 et si F est l'ensemble des points fixes de cette action, alors $\Sigma_i \dim H^i(F, \mathbf{R}) = \operatorname{rang} H^*(V \times_{S^1} ES^1, \mathbf{R})$ (où $\operatorname{rg} H^*(V \times_{S^1} ES^1, \mathbf{R})$ est le rang de la partie libre du $H^*(BS^1)$-module principal $H^*(V \times_{S^1} ES^1)$). On voit que ce théorème est faux si V n'est pas compacte; en effet, soit M une variété compacte 1-connexe et $V = M^{S^1}$, alors l'ensemble des points fixes de l'action de S^1 sur M^{S^1} est M, et on a toujours

$$\operatorname{rg} H^*\left(M^{S^1} \times_{S^1} ES^1, \mathbf{R}\right) = 1,$$

d'après le théorème 1.

Le démonstration du théorème 1 utilise plusieurs lemmes. Je remercie Yves Félix de m'avoir montré les lemmes 1 et 2.

LEMME 1. *Tout cocycle $\mu \in \Lambda\alpha \otimes \Lambda^+(Z \oplus \bar{Z})$ s'écrit $\mu = D\mu' + i(\omega)$, $\omega \in \Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}$, $\bar{d}i(\omega) = 0$.*

Preuve. Soit $\mu \in \Lambda\alpha \otimes \Lambda^+(Z \oplus \bar{Z})$ et $D\mu = 0$, écrivons

$$\mu = \mu_0 + \alpha\mu_1 \cdots + \alpha^p \mu_p \quad \text{avec } \mu_j \in \Lambda^+(Z \oplus \bar{Z}).$$

On a

$$0 = D\mu = \bar{d}\mu_0 + \alpha\left(i(\mu_0) + \bar{d}\mu_1\right) \cdots + \alpha^j\left(i(\mu_{j-1}) + \bar{d}\mu_j\right) \cdots + \alpha^{p+1} i(\mu_p).$$

D'où $i(\mu_p) = 0$, $i(\mu_{p-1}) + \bar{d}\mu_p = 0, \ldots, i(\mu_0) + \bar{d}\mu_1 = 0$, $\bar{d}\mu_0 = 0$. Il est clair que $\tilde{H}_*(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, i) = 0$, donc si $i(\mu_p) = 0$, il existe $\nu_p \in \Lambda^+(Z \oplus \bar{Z})$ tel que $\mu_p = i(\nu_p)$; on a alors $0 = i(\mu_{p-1}) + \bar{d}i(\nu_p) = i(\mu_{p-1} - \bar{d}\nu_p)$. Par le même raisonnement, on détermine $\nu_{p-1} \in \Lambda^+(Z \oplus \bar{Z})$ tel que $\mu_{p-1} = \bar{d}\nu_p + i(\nu_{p-1})$. De proche en proche, on détermine $\nu_{p-1}, \ldots, \nu_0$ tels que si $0 \leq j \leq p - 1$, on a $\mu_j = \bar{d}\nu_{j+1} + i(\nu_j)$; la condition $\bar{d}\mu_0 = 0$ implique que $\bar{d}i(\nu_0) = 0$. Alors μ s'écrit $\mu = i(\nu_0) + D(\nu_1 + \alpha\nu_2 + \cdots + \alpha^{p-1}\nu_p)$.

LEMME 2. *Le k-espace vectoriel gradué*

$$V^* = \frac{\operatorname{Im} i \cap \ker \bar{d}}{\bar{d}(\operatorname{Im} i)} = \frac{i(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}) \cap \operatorname{Ker} d}{\bar{d}(i(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}))}$$

peut être muni d'une structure de $k[\alpha]$*-module, et on a* $HC^*(X, k) \simeq k[\alpha] \oplus V^*$. *De plus, si on pose, pour* $p \geq 1$,

$$V_p^* = \frac{i(\Lambda Z \otimes \Lambda^{p-1}\overline{Z}) \cap \operatorname{Ker} \bar{d}}{\bar{d}(i(\Lambda Z \otimes \Lambda^{p-1}\overline{Z}))},$$

on a $V^* = \oplus_{p \geq 1} V_p^*$, *et* $V_p^n = 0$ *si* $p > n + 2$.

Preuve. Il découle, du lemme 1, une k-application linéaire surjective de $\operatorname{Im} i \cap \operatorname{Ker} \bar{d}$ sur $H^*(\Lambda\alpha \otimes \Lambda^+(Z \oplus \overline{Z}), D)$. Comme, pour $\nu \in \Lambda^+(Z \oplus \overline{Z})$ tel que $\bar{d}i(\nu) = 0$, on a $D(i(\nu)) = 0$, cette application définit une application surjective de $\operatorname{Im} i \cap \operatorname{Ker} \bar{d}/\bar{d}(\operatorname{Im} i)$ sur $H^*(\Lambda\alpha \otimes \Lambda^+(Z \oplus \overline{Z}), D)$. Un calcul semblable à celui de la preuve du lemme 1 montre que cette application linéaire est injective. Cette bijection entre V^* et $H^*(\Lambda\alpha \otimes \Lambda^+(Z \oplus \overline{Z}), D)$ permet de transporter à V^*, la structure de $k[\alpha]$-module de $H^*(\Lambda\alpha \otimes \Lambda^+(Z \oplus \overline{Z}), D)$ de la manière suivante: soit $v \in V^*$, alors $v = [i(\varphi)]$ avec $\bar{d}i(\varphi) = 0$, $\alpha i(\varphi) = D\varphi - \bar{d}\varphi$ et $i(\bar{d}\varphi) = 0$, donc $\bar{d}\varphi = i(\varphi')$ et $\bar{d}i(\varphi') = 0$. La classe de $i(\varphi')$ dans V^* est indépendante du représentant choisi pour v, on peut donc poser $\alpha \cdot v = [\bar{d}\varphi] = [i(\varphi')]$. De la décomposition en somme directe de $k[\alpha]$-modules,

$$HC^*(X) = k[\alpha] \oplus H^*(\Lambda\alpha \otimes \Lambda^+(Z \oplus \overline{Z}), D),$$

il découle la formule $HC^*(X, k) = k[\alpha] \oplus V^*$. On remarque que, pour $p \geq 1$,

$$i(\Lambda Z \otimes \Lambda^{p-1}\overline{Z}) \subset \Lambda Z \otimes \Lambda^p\overline{Z},$$

donc $\operatorname{Im} i = \oplus_{p \geq 1} i(\Lambda Z \otimes \Lambda^{p-1}\overline{Z})$. D'autre part,

$$\bar{d}i(\Lambda Z \otimes \Lambda^{p-1}\overline{Z}) = -i\bar{d}(\Lambda Z \otimes \Lambda^{p-1}\overline{Z}) \subset i(\Lambda Z \otimes \Lambda^{p-1}\overline{Z}),$$

ceci prouve que si on pose

$$V_p^* = \left[i(\Lambda Z \otimes \Lambda^{p-1}\overline{Z}) \cap \operatorname{Ker} \bar{d}\right]/\bar{d}\left(i(\Lambda Z \otimes \Lambda^{p-1}\overline{Z})\right),$$

on a

$$V^* = \bigoplus_{p \geq 1} V_p^*.$$

LEMME 3. *Pour tout* $p \geq 1$, *on a* $\alpha^p \cdot V_p^* = 0$.

Preuve. Soit $v \in V_p^*$, $v = [i(\varphi)]$, $\varphi \in \Lambda Z \otimes \Lambda^{p-1}\overline{Z}$, et $\bar{d}i(\varphi) = 0$. D'après le lemme 1, $\alpha^p i(\varphi)$ est de la forme $D\mu + i(\varphi_p)$, avec $\bar{d}i(\varphi_p) = 0$; de plus,

$$\mu = \varphi_{p-1} + \alpha\varphi_{p-2} + \cdots + \alpha^{p-2}\varphi_1 + \alpha^{p-1}\varphi,$$

et la suite $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ est déterminée par $\bar{d}\varphi = i(\varphi_1)$, $\bar{d}\varphi_1 = i(\varphi_2), \dots, \bar{d}\varphi_{p-1} = i(\varphi_p)$. Comme $\varphi \in \Lambda Z \otimes \Lambda^{p-1}\bar{Z}$, on en déduit que

$$\varphi_1 \in \Lambda Z \otimes \Lambda^{p-2}\bar{Z},\ \varphi_2 \in \Lambda Z \otimes \Lambda^{p-3}\bar{Z}, \dots, \varphi_{p-1} \in \Lambda Z.$$

La condition $i(\bar{d}\varphi_{p-1}) = 0$ implique que $\varphi_p = 0$, d'où

$$\alpha^p i(\varphi) = D(\mu). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Ceci achève la démonstration du théorème 1.

Ce théorème permet d'avoir immédiatement le résultat suivant:

PROPOSITION 1. *L'application β: $(\Lambda Z, d) \to (\Lambda\alpha \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda\bar{Z}, D)$ définie par*

$$\beta(\omega) = (-1)^{\deg \omega} i(\omega)$$

pour $\omega \in \Lambda Z$, est un morphisme de complexes qui, en cohomologie, induit un isomorphisme de $H^{*+1}(X, k)$ sur V_1^*.

COROLLAIRE. (i) $\widetilde{HC}^{*-1}(X, k) \simeq H^*(X, k) \oplus (\oplus_{p \geq 2} V_p^{*-1})$
(ii) $\tilde{K}_*(X) \otimes k \simeq H_*(X, k) \oplus \mathrm{Hom}(\oplus_{p \geq 2} V_p^{*-1}, k)$.

Démonstration. Soit $\omega \in \Lambda Z$, $d\omega = 0$; alors $\beta(\omega) \in i(\Lambda Z) \cap \operatorname{Ker} d$ donc $\beta^*[\omega] \in V_1^*$, et réciproquement, tout élément de V_1^* est l'image par β^* d'un élément de $H^*(\Lambda Z, d)$. Si $\beta^*[\omega] = 0$ dans V_1^*, cela veut dire qu'il existe $\omega' \in \Lambda Z$ tel que $\beta(\omega) = \bar{d}i(\omega')$, d'où

$$i\left((-1)^{\deg \omega}\omega + \bar{d}\omega'\right) = 0,$$

d'où

$$\omega = (-1)^{\deg \omega}\bar{d}\omega',$$

$[\omega] = 0$ dans $H^*(\Lambda Z, d)$.

PROPOSITION 2. *Soit X un espace 1-connexe, ayant le type d'homotopie rationnelle d'un produit fini d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane,*

$$X \sim_{\mathbf{Q}} \prod_{j=1}^{p} K(\mathbf{Z}, n_j) \quad (n_j \geq 2);$$

alors $HC^*(X, k) = k[\alpha] \oplus V^*$. La série de Poincaré $P_{V^*}(t) = \sum \dim V^i t^i$ est *donnée par la formule*

$$P_{V^*}(t) = \frac{1}{1+t}\left[\prod_{n_j \text{ pair}} \frac{(1+t^{n_j-1})}{(1-t^{n_j})} \times \prod_{n_j \text{ impair}} \frac{(1+t^{n_j})}{(1-t^{n_j-1})} - 1\right]$$

Démonstration. On a vu que

$$V^* = (\operatorname{Im} i \cap \operatorname{Ker} \bar{d})/\bar{d}(\operatorname{Im} i).$$

Si $X = \prod_{j=1}^{p} K(\mathbf{Z}, n_j)$, son modèle minimal de Sullivan est

$$\left(\Lambda(x_{n_1}, \ldots, x_{n_p}), d = 0\right)$$

où x_{n_j} est un générateur de degré n_j. Le modèle minimal de X^{S^1} est

$$\left(\Lambda\left(x_{n_j}, \bar{x}_{n_j}\right), \bar{d} = 0\right).$$

Soit i la dérivation de degré -1 prolongeant l'application identique $x_{n_j} \mapsto \bar{x}_{n_j}$. On a, pour tout $m \geq 1$, une courte suite exacte d'espaces vectoriels gradués,

$$0 \to (\operatorname{Ker} i)^m \to (\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z})^m \xrightarrow{i} (\operatorname{Im} i)^{m-1} \to 0,$$

et $V^m = (\operatorname{Ker} i)^m = (\operatorname{Im} i)^m$ puisque $\bar{d} = 0$. On en déduit donc que

$$\dim(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z})^m = \dim V^m + \dim V^{m-1};$$

de là, on tire la formule annoncée.

Ces résultats vont nous permettre de faire des calculs en K-théorie algébrique rationnelle définie par Waldhausen [14]. Il construit un foncteur A de la catégorie des espaces topologiques 1-connexes dans celle des espaces de lacets infini; la projection d'un espace X sur son point de base x_0 induit une application $A(X) \to A(\{x_0\})$, on appelle $\tilde{A}(X)$ sa fibre homotopique, et on a une décomposition $A(X) \simeq \tilde{A}(X) \times A(x_0)$. Par définition, pour $i > 0$, on pose

$$K_i(X) = \Pi_i(A(X)), \tilde{K}_i(X) = \Pi_i(\tilde{A}(X)) = \Pi_i(A(X))/\Pi_i(x_0).$$

On définit, de manière classique, l'application de stabilisation

$$\begin{aligned} \alpha(X)\colon A(X) = \tilde{A}(X) \times A(x_0) &\to \varinjlim_n \Omega^n \tilde{A}(\Sigma^n X) \times \varinjlim_n \Omega^n \tilde{A}(S^n) \\ &= A^S(X). \end{aligned}$$

On appelle $\mathrm{Wh}(X)$ la fibre homotopique de $\alpha(X)$. On suppose désormais que X a le type d'homotopie d'un CW complexe fini, Waldhausen démontre les résultats suivants:

(1) $A(X) \simeq A^S(X) \times \mathrm{Wh}(X)$ sur les rationnels.

(2) $\Pi_i(A^S(X)) \otimes \mathbf{Q} \simeq H_i(X, \mathbf{Q})$, $i > 0$.

(3) Si $f: X \to Y$ induit un isomorphism en homotopie rationnelle pour $i \leq k$, alors $\Pi_i(\mathrm{Wh}(X)) \otimes \mathbf{Q} = \Pi_i(\mathrm{Wh}(Y)) \otimes \mathbf{Q}$ pour $i \leq k$.

Le théorème 1 permet de donner une formule explicite pour la série de Poincaré d'homotopie de $\mathrm{Wh}(X)$ définie par

$$\Pi_{\mathrm{Wh}(X)}(t) = \sum_{i>0} \dim(\Pi_i(\mathrm{Wh}(X)) \otimes \mathbf{Q}) t^i.$$

THÉORÈME 2. *Soit X un espace 1-connexe pointé de cohomologie cyclique*

$$HC^*(X, k) = k[\alpha] \oplus \left(\bigoplus_{p \geq 1} V_p^* \right);$$

alors on a

$$\Pi_{\mathrm{Wh}(X)}(t) = \frac{t}{1 - t^4} + tP_{\oplus_{p \geq 2} V_p^*}(t) = \Pi_{\mathrm{Wh}(\{x_0\})}(t) + tP_{\oplus_{p \geq 2} V_p^*}(t)$$

où

$$P_{\oplus_{p \geq 2} V_p^*}(t) = \sum_i \dim\left(\oplus_{p \geq 2} V_p^i \right) t^i$$

Démonstration. On a, pour $i > 0$,

$$\begin{aligned} \Pi_i(A(X) \otimes k &= K_i(X) \otimes k \\ &= \tilde{K}_i(X) \otimes k \oplus K_i(x_0) \otimes k \\ &= H_i(X, k) \oplus \mathrm{Hom}\left(\oplus_{p \geq 2} V_p^{i-1}, k \right) \oplus K_i(x_0) \otimes k \end{aligned}$$

d'où

$$\Pi_i(\mathrm{Wh}(X)) \otimes k = K_i(x_0) \otimes k \oplus \mathrm{Hom}\left(\oplus_{p \geq 2} V_p^{i-1}, k \right).$$

Il est bien connu que

$$\sum_{i>0} \dim K_i(x_0) \otimes k = \frac{t}{1 - t^4} = \sum_{i>0} \dim(\Pi_i(\mathrm{Wh}(x_0) \otimes k) t^i,$$

on en déduit la formule annoncée.

COROLLAIRE 2.1. *Si* $X = K(\mathbf{Z}, n)$, $n \geq 2$, *alors* $\Pi_{\mathrm{Wh}(X)}(t) = \Pi_{\mathrm{Wh}(x_0)}(t)$. $\mathrm{Wh}(X)$ *a les mêmes groupes d'homotopie rationnelle que le point.*

Ce résultat est évident à partir du théorème 2, car, dans ce cas, on a $\oplus_{p \geq 2} V_p^* = 0$. Il généralise des calculs de [3].

COROLLAIRE 2.2. *Soit* X *un espace* 1-*connexe pointé tel que* $H^*(X, \mathbf{Q})$ *soit une algèbre tronquée à un générateur de la forme* $\mathbf{Q}[u]/(u^{n+1})$, $n \geq 1$, $\deg u = 2p$. *Alors*

$$\Pi_{\mathrm{Wh}(X)}(t) = \Pi_{\mathrm{Wh}(x_0)}(t) + \frac{t^{2(pn+2p-1)}(1 - t^{2pn})}{(1 - t^{2p})(1 - t^{2(pn+p-1)})}$$

Exercice 2.3. Soit $X = K(\mathbf{Z}, 2) \times K(\mathbf{Z}, 4)$, alors

$$\Pi_{\mathrm{Wh}(X)}(t) = \Pi_{\mathrm{Wh}(x_0)}(t) + \frac{t^5}{(1 - t^2)(1 - t^4)}$$

et donc $\Pi_{2i}(\mathrm{Wh}(X) \otimes \mathbf{Q} = 0$ pour tout $i > 0$.

Nous allons montrer que les théorèmes 1 et 2 ont des aplications intéressantes au calcul des groupes d'homotopie rationnelle d'une variété différentiable M de dimension n à bord ∂M. On note $\mathrm{DiFF}M$ le groupe des difféomorphismes C^∞ qui sont l'identité sur ∂M, et on munit $\mathrm{DiFF}M$ de la topologie compacte ouverte. Le résultat géométrique clé dans cette théorie est exposé dans [3] et [4] et peut se résumer ainsi: il existe une fonction croissante $\omega(n)$ qui tend vers l'infini avec n (en fait, $\omega(n) \sim n/12$), telle que le $(\omega(n) - 1)$-étage de Postnikov de $\mathrm{DiFF}M$, localisé en 0, a le type d'homotopie de l'espace total d'un fibré principal

$$(*) \qquad T_1(M) \to \left[(\mathrm{DiFF}M)_{\omega(n)-1}\right]_0 \to T_2(M).$$

L'espace $T_2(M)$ est le localisé du groupe simplicial des difféomorphismes par blocs, et ses groupes d'homotopie rationnelle peuvent être entièrement calculés à l'aide de la théorie de la chirurgie, l'espace $T_1(M)$ est un espace de lacet infini, dont le type d'homotopie rationnelle ne dépend que de celui de M, et peut être calculé à partir de la K-théorie algébrique rationnelle de M. Pour décrire $T_1(M)$, Burghelea et Lashof construisent un foncteur S de la catégorie des CW complexes finis dans celle des espaces de lacets infini tel que:

(i) Il existe une application naturelle $\theta(X)$: aut $X \to S(X)$ où aut X est le monoïde topologique des équivalences d'homotopie simple de X.

(ii) Pour tout fibré vectoriel stable $\xi \in \widetilde{KO}(X)$, il existe une involution

$$\tau(\xi): S(X) \to S(X)$$

qui induit une décomposition $S(X)_0 = (S^{\xi}(X)_+) \times (S^{\xi}(X)_-)$.

(iii) Il existe une transformation naturelle de foncteurs $S \to \Omega \mathrm{Wh}$ qui, pour tout CW complexe fini, est une équivalence d'homotopie rationnelle.

Si M est une variété de dimension n, on pose $\varepsilon(n) = (-1)^n$, on considère le fibré tangent $\nu = T(M)$, et on note $\theta_{\varepsilon(n)}$ le composé de l'application $\theta(M)$ définie plus haut avec la projection de $S(M)$ sur le facteur $S^{\nu}(M)_{\varepsilon(n)}$. On montre, (théorème 2.B de [3]), que $T_1(M)$ a le type d'homotopie de $\Omega S^{\nu}(M)_{\varepsilon(n)}$ et que l'application classifiante t définissant le fibré $(*)$ à partir du fibré universel est le composé

$$T_2(M) = (\overline{\mathrm{DiFF}}\, M)_0 \to (\mathrm{aut}\, M)_0 \xrightarrow{\theta_{\varepsilon(n)}} S(M)_{\varepsilon(n)}.$$

On remarque donc que si l'application induite par θ entre les groupes d'homotopie rationnelle

$$\Pi_i(\mathrm{aut}\, M) \otimes \mathbf{Q} \to \Pi_i(S(M)) \otimes \mathbf{Q} = \Pi_{i+1}(\mathrm{Wh}(M)) \otimes \mathbf{Q}$$

est nulle pour $i < K$ fixé, alors la fibration

$$T_1(M) \to \left[(\mathrm{DiFF} M)_{\omega(n)-1}\right]_0 \to T_2(M)$$

est triviale en basses dimensions, et donc on a

$$\begin{array}{c} 0 \to \Pi_i(T_1(M)) \otimes \mathbf{Q} \to \Pi_i(\mathrm{DiFF} M) \otimes \mathbf{Q} \to \Pi_i(T_2(M)) \otimes \mathbf{Q} \to 0 \\ \| \\ \Pi_{i+1}(S^{\nu}(M)_{\varepsilon(n)}) \otimes \mathbf{Q} \end{array}$$

pour $i \leq \inf(\omega(n) - 1, K)$. Dans [9], W. Meier utilise cette remarque pour calculer les groupes d'homotopie de certaines variétés dont l'homologie rationnelle est concentrée en degrés pairs. Grâce au thoérème 2 de ce travail, nous allons retrouver ou améliorer les résultats de Burghelea et Meier.

THÉORÈME 3. *Soit M une variété compacte* 1-*connexe telle que* $H^*(M, \mathbf{R})$ *soit une algèbre tronquée à un générateur de la forme* $\mathbf{R}[u]/(u^{n+1})$, $n \geq 1$, $\deg u = 2p$. *Alors on a, pour* $0 < j < \omega(2np)$:

Si j est pair, $\Pi_j(\mathrm{DiFF} M) \otimes Q = 0$.

Si j est impair,

$$\begin{aligned}\dim \Pi_j(\mathrm{DiFF} M) \otimes \mathbf{Q} \\ &= \dim \Pi_j(\operatorname{aut} M) \otimes \mathbf{Q} \\ &\quad + \dim \widetilde{KO}(\Sigma^{j+1}(M \cup pt)) \otimes \mathbf{Q} + \dim \Pi_{j+1}(S^\nu(M)_+) \otimes \mathbf{Q},\end{aligned}$$

où

$$\dim \Pi_j(\operatorname{aut} M) \otimes \mathbf{Q} = \begin{cases} 2 & si\, j = 2p - 1, \\ 1 & si\, j = 2kp - 1, \quad 2 \leq k \leq n + 1, \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

$$\dim \Pi_{j+1}(S^\nu(M)_+) \otimes \mathbf{Q} = \begin{cases} 0 & si\, j \equiv 1\ (4), \\ \leq 1 & si\, j \equiv 3\ (4), \end{cases}$$

$$\dim \widetilde{KO}\left(\Sigma^{j+1}(M \cup p^t\right) \otimes \mathbf{Q} = n + 2.$$

Preuve. D'après le corollaire 2.2, on a $\Pi_{2i}(\mathrm{Wh}(M) \otimes \mathbf{Q}) = 0$ si $i \leq \dim M$. Par ailleurs, le corollaire 2 de [9] montre que $\Pi_{2i}(\operatorname{aut} M) \otimes \mathbf{Q} = 0$, ceci entraine que l'application

$$\theta_j\colon \Pi_j(\operatorname{aut} M) \otimes \mathbf{Q} \to \Pi_j(S(M)) \otimes \mathbf{Q} = \Pi_{j+1}(\mathrm{Wh}(M)) \otimes \mathbf{Q}$$

est nulle pour tout $j < \dim M$. Le fibré

$$\Omega S^\nu(M)_+ \to \left[(\mathrm{DiFF} M)_{\omega(n)-1}\right]_0 \to \left(\overline{\mathrm{DiFF}}\, M\right)_0$$

est donc trivial en dimension $j < \dim M$. Le calcul de

$$\dim \Pi_j(\operatorname{aut} M) \otimes \mathbf{Q}$$

résulte du corollaire 2 de [9], et celui de

$$\dim \widetilde{KO}\left(\Sigma^{j+1}(M \cup pt)\right) \otimes \mathbf{Q},$$

du fait que si Y est un espace compact, on a $\widetilde{KO}(Y) \otimes \mathbf{Q} = \oplus_{k>0} H^{2k}(Y, \mathbf{Q})$.

Passons au cas plus intéressant des grassmanniennes complexes

$$G_{n,k} = U(n)/U(k) \times U(n-k) \quad \text{où } 2 \leq k \leq n - k.$$

Ce sont des variétés kählériennes compactes 1-connexes de dimension complexe $k(n-k)$. On a

$$H^*(G_{n,k}, \mathbf{C}) = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_k] \otimes \mathbf{C}[y_1, \ldots, y_{n-k}]/I$$

avec $\deg x_i = \deg y_i = 2i$, pour $i \leq n - k$, et l'idéal I est engendré par les relations $\Sigma_{q+r=p} x_q \otimes y_r$, $1 \leq p \leq n$, $q \geq 0$, $r \geq 0$, où, par convention $x_0 = y_0 = 1$. Il est facile de voir que

$$H^*(G_{n,k}, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_k]/(f_1, \ldots, f_k)$$

où $(f_1, \ldots, f_k)$ forment une suite régulière de polynômes homogènes en les x_i, avec $\deg f_1 = 2(n - k + 1) \leq \deg f_2 = 2(n - k + 2) \leq \cdots \leq \deg f_k = 2n$. Comme le type d'homotopie rationnelle de $G_{n,k}$ ne dépend que de sa cohomologie, le morphisme de projection φ^*,

$$\mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_k] \to \mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_k]/(f_1, \ldots, f_k),$$

se relève en une application continue φ: $(G_{n,k})_0 \to Y = K(\mathbf{Q}, 2) \times \cdots \times K(\mathbf{Q}, 2k)$ qui est une équivalence d'homotopie rationnelle en dimension $i < 2(n - k + 1)$; voir [13]. D'après la théorie générale de la K-théorie algébrique de [14], on en déduit que

$$\dim \Pi_i(\mathrm{Wh}(G_{n,k})) \otimes \mathbf{Q} = \dim \Pi_i(\mathrm{Wh}(Y)) \otimes \mathbf{Q}$$

pour $i < 2(n - k + 1)$. On a alors une généralisation du théorème 5 de [9]:

THÉORÈME 4. *Soit $M = G_{n,k}$ la grassmannienne complexe des k-plans de* $\mathbf{C}^n$ $(2 \leq k \leq n - k)$. *Alors, si* $8 \leq \inf(\omega(2k(n - k)) - 1, 2(n - k) + 1)$, *on a*:
(i) $\Pi_2(\mathrm{DiFF} M) \otimes \mathbf{Q} = \Pi_4(\mathrm{DiFF} M) \otimes \mathbf{Q} = \Pi_6(\mathrm{DiFF} M) \otimes \mathbf{Q} = 0$.
(ii) *Si* $k = 2$, $\Pi_{2i}(\mathrm{DiFF} M) \otimes Q = 0$, *si* $2i \leq \inf(\omega(4(n - 2)) - 1, 2(n - 2) + 1)$;
si $k > 2$, $\dim \Pi_8(\mathrm{DiFF} M) \otimes Q \leq 1$.
(iii) *Soit*

$$N_{2i+1} = \mathrm{Ker}\left[\Pi_{2i+1}(\mathrm{DiFF} M) \otimes \mathbf{Q} \to \Pi_{2i+1}(\overline{\mathrm{DiFF} M}) \otimes \mathbf{Q} \to 0\right]$$

pour $0 \leq i \leq 3$. *Alors* $N_1 = 0$, $\dim N_3 \leq 2$, $\dim N_5 \leq 1$ *si* $k = 2$ *et* $\dim N_5 \leq 2$ *si* $k > 2$; $\dim N_7 \leq 3$ *si* $k = 2$, $\dim N_7 \leq 5$ *si* $k = 3$ *et* $\dim N_7 \leq 6$ *si* $k > 3$.

La démonstration du théorème 4 est semblable à celle du théorème 3. Elle utilise l'exercice 2.3 pour $k = 2$, et si $k > 2$ le lemme suivant dont la preuve est laissée au lecteur.

LEMME 4. *Soit* $Y = \Pi_{j=1}^k K(\mathbf{Z}, 2j)$ *et* $k \geq 3$; *alors on a*

$$\Pi_{\mathrm{Wh}(Y)}(t) = \frac{t}{1 - t^4} + \frac{t^5 + t^7 + a_k t^9 + t^{10} \cdot Q(t)}{\prod_{j=1}^{k} (1 - t^{2j})}$$

où $Q(t) \in \mathbf{Z}[t]$ *et* $Q(0) = 1$, $a_k = 2$ *si* $k > 3$, $a_k = 1$ *si* $k = 3$.

Nous allons terminer cette note par une remarque qui a, sans doute, des applications en théorie quantique des champs; voir [15].

Remarque. Soit V une variété C^∞ compacte 1-connexe, et soit $(\Lambda Z, d)$ le modèle minimal de Sullivan de V. Alors $(\Lambda Z \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}, d \otimes 1)$ est le modèle minimal de l'algèbre de de Rham $\Omega^*(V)$, et $(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}, \bar{d} \otimes 1)$ est le modèle minimal de l'algèbre de de Rham $\Omega^*(V^{S^1})$. Posons, pour tout $s \in \mathbf{R}$, $d_s = \bar{d} \otimes 1 + si$, on a $d_s^2 = 0$, et on peut définir le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $W_s = \operatorname{Ker} d_s / \operatorname{Im} d_s$, par analogie avec la construction de Witten. Mais il faut se souvenir que V^{S^1} n'est pas compacte, et que l'action $\mu\colon S^1 \times V^{S^1} \to V^{S^1}$ n'est pas différentiable! On peut montrer, grâce au théorème 1 et au lemme 5.3 de [1] que, pour tout $s \neq 0$, on a $W_s \simeq \mathbf{R}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. ATIYAH and R. BOTT, *The moment map and equivariant cohomology*, Topology, vol 23. (19..) pp. 1–28.
2. D. BURGHELEA, *Cyclic homology and algebraic K-theory of topological Spaces I, II*, Topology, vol. 25 (1986), pp. 303–317.
3. ———, *The rational homotopy groups of DiFF M and Homeo(M) in the stability range*, Lecture Notes in Math., vol. 763, Springer-Verlag, pp. 604–626.
4. D. BURGHELEA and R. LASHOF, *Geometric transfer and the homotopy type of the automorphism groups of a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 269 (1982) pp. 1–38.
5. D. BURGHELEA and M. VIGUÉ-POIRRIER, *A model for cyclic homology and algebraic K-theory of 1-connected spaces*, J. Differential Geom., vol. 22 (1985), pp. 243–253.
6. T. GOODWILLIE, *Cyclic homology, derivations and the free loop space*, Topology, vol. 24 (1985), pp. 187–215.
7. S. HALPERIN, *Lectures on minimal models*, Mémoire SMF n°9/10, 1983.
8. W. HSIANG and R. STAFFELDT, *Rational algebraic K-theory of a product of E.M.L-spaces*, Contemporary Math., vol. 19 (1983), pp. 95–114.
9. W. MEIER, *Some topological properties of Kähler manifolds and homogeneous spaces*, Math. Z., vol. 183 (1983), pp. 473–481.
10. D. QUILLEN, *Rational homotopy theory*, Ann of Math., vol. 90 (1969), pp. 205–295.
11. D. SULLIVAN, *Infinitesimal computations in topology*. Publ. Math. IHES, France, n°47 (1977), pp. 269–331.
12. D. SULLIVAN and M. VIGUÉ-POIRRIER, *The homology theory of closed geodesics problem*, J. Differential Geom., vol. 11 (1976), pp. 633–644.
13. M. VIGUÉ-POIRRIER, *Réalisation de morphismes donnés en cohomologie et suite spectrale d'Eilenberg-Moore*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 265 (1981), pp. 447–484.
14. F. WALDHAUSEN, *Algebraic K-theory of topological spaces*, Proc. S.P.M. n°32 (1976), pp. 35–60.
15. E. WITTEN, *Supersymmetry and Morse theory*. J. Differential Geom., vol. 17 (1982), pp. 661–692.
16. D. BURGHELEA and M. VIGUÉ-POIRRIER, *Cyclic homology of commutative algebras*, Proc. Meeting on Algebraic Homotopy, Louvain, Belgique, 1986, à paraître dans L. N. M.

37 PARC D'ARDENAY
91120 PALAISEAU, FRANCE