

MAJORATION HARMONIQUE ET MOUVEMENT BROWNIEN

JEAN BROSSARD ET LUCIEN CHEVALIER

Soit ν un entier ≥ 2 , et soit D un domaine de \mathbf{R}^ν . Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_\nu) \in \mathbf{R}^\nu$, et tout entier k tel que $0 \leq k \leq \nu$, on pose

$$r_k(x) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}, \quad \text{et} \quad r(x) = r_\nu(x) = |x|.$$

Dans un récent travail [8], M. Essén a obtenu des conditions nécessaires et des conditions suffisantes, portant sur la fonction r_1 , pour que l'application r^p admette un majorant harmonique dans D , dans les cas où $p > 1$ et $p = 1$, et a posé quelques questions naturelles relatives au "cas limite" où $p = 1$.

Nous nous proposons de donner ici, au moyen de méthodes probabilistes, une démonstration plus rapide des résultats de [8] (théorèmes 1 et 2), une réponse aux questions posées, et un théorème dans le même esprit (théorème 5), valable pour tout $p > 0$. Essentiellement, les outils que nous utiliserons sont des propriétés bien connues du mouvement brownien et des inégalités de la théorie des martingales; celles qui interviennent dans notre démonstration des théorèmes 1, 2 et 5 sont une caractérisation des classes H^p ; elles sont classiques et ont déjà prouvé leur efficacité dans ce contexte (cf. [1], par exemple). Celles qui sont à la base des théorèmes 3 et 4 sont une caractérisation, plus récente, de la classe $L \log L$.

Le plan de l'article est le suivant: dans le §1, nous rappelons deux résultats qui permettent de caractériser de manière probabiliste l'existence de majorants harmoniques. Dans le §2, nous étudions le problème (de l'existence d'un majorant harmonique pour l'application r^p) dans le cas où $p > 1$. Le §3 est consacré au cas où $p = 1$, à propos duquel quelques questions étaient restées ouvertes. Enfin, nous obtenons dans le §4 un résultat nouveau de même nature, qui s'applique à tout exposant $p > 0$.

1. Deux lemmes techniques

Soit

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, (P^x)_{x \in \mathbf{R}^\nu})$$

Received April 3, 1991.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 31A05, 31B05; Secondary 42B30, 60G46.

© 1993 by the Board of Trustees of the University of Illinois
Manufactured in the United States of America

le mouvement brownien standard dans \mathbf{R}^ν ; pour tout $t \geq 0$, on posera

$$B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^\nu).$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}^\nu$, on notera E^x l'espérance mathématique relative à la probabilité P^x . On désignera par τ le temps de sortie du domaine D (pour le mouvement brownien (B_t)), i.e.,

$$\tau = \inf\{t \geq 0; B_t \in D^c\}.$$

On se donne enfin une suite croissante (D_n) de domaines relativement compacts dans D , telle que

$$D = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} D_n;$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note τ_n le temps de sortie du domaine D_n . On a ainsi

$$\tau = \sup_{n \in \mathbf{N}} \tau_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n.$$

Le résultat suivant est bien connu (cf. par exemple [6], pp. 141–142, compte tenu de l'expression probabiliste de la mesure harmonique):

LEMME 1. *Soit $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ une application sous-harmonique, à valeurs ≥ 0 . Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *la fonction f admet un majorant harmonique dans D ;*
- (ii) *il existe un point $x \in D$ tel que*

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} E^x(f(B_{\tau_n})) < +\infty;$$

- (iii) *pour tout point $x \in D$,*

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} E^x(f(B_{\tau_n})) < +\infty.$$

Pour tout processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$, et tout $t \geq 0$, on pose

$$X_t^* = \sup_{s < t} |X_s|.$$

Le résultat suivant est essentiellement connu (cf. Théorème 2.2 de [1], qui traite le cas où $k = \nu$); nous en donnons une nouvelle démonstration très simple, basée sur le calcul stochastique:

LEMME 2. Soit σ un temps d'arrêt relatif à la filtration canonique du mouvement brownien, qu'on suppose majoré par le temps de sortie de la boule de centre 0 et de rayon R , où R est un nombre > 0 arbitraire. Pour tout $x \in \mathbf{R}^{\nu}$, tout $p > 0$, et tout entier k tel que $2 \leq k \leq \nu$, on a l'inégalité

$$(1) \quad E^x \left(\left((r_k(B))_{\sigma}^* \right)^p \right) \leq C_{p,k} E^x \left((r_k(B_{\sigma}))^p \right),$$

où $C_{p,k}$ est une constante qui ne dépend que de p et k .

Démonstration. On notera C une constante ne dépendant que de p et k , dont la valeur peut changer de place en place. Supposons x non nul, et soit $\varepsilon \in]0, |x|$. On posera

$$\sigma_{\varepsilon} = \inf \{ t < \sigma, r_k(B_t) < \varepsilon \}.$$

Soit $p > 0$; le processus

$$(B_{t \wedge \sigma_{\varepsilon}})_{t \geq 0}$$

est une martingale bornée par R et à valeurs dans l'ensemble E_{ε} des points $z \in \mathbf{R}^{\nu}$ tels que $r_k(z) \geq \varepsilon$, ensemble dans lequel la fonction $(r_k)^p$ est de classe C^2 et vérifie $\Delta(r_k)^p = p(k+p-2)(r_k)^{p-2}$. On peut donc appliquer la classique "formule de Itô" [7, p. 71]; on obtient ainsi, pour tout $t \geq 0$,

$$(2) \quad \begin{aligned} (r_k(B_{t \wedge \sigma_{\varepsilon}}))^p &= p \int_0^{t \wedge \sigma_{\varepsilon}} (r_k^{p-1} \nabla r_k)(B_s) \cdot dB_s \\ &\quad + \frac{p(k+p-2)}{2} \int_0^{t \wedge \sigma_{\varepsilon}} r_k^{p-2}(B_s) ds + (r_k(x))^p, \end{aligned}$$

P^x -presque sûrement. Comme $(r_k)^{p-1} \nabla r_k$ est borné dans E_{ε} , le premier terme du second membre est une martingale de carré intégrable, nulle en 0; on obtient donc, en prenant l'espérance des deux membres et en faisant tendre t vers l'infini,

$$(3) \quad E^x \left((r_k(B_{\sigma_{\varepsilon}}))^p \right) = \frac{p(k+p-2)}{2} E^x \left(\int_0^{\sigma_{\varepsilon}} r_k^{p-2}(B_s) ds \right) + (r_k(x))^p.$$

Posons

$$A = \sqrt{E^x \left(\left((r_k(B))_{\sigma_{\varepsilon}}^* \right)^p \right)} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{E^x \left((r_k(B_{\sigma_{\varepsilon}}))^p \right)}.$$

En utilisant à nouveau l'égalité (2), une des inégalités de Burkholder-Gundy

([2]; [7], p. 154) et l'égalité (3), on obtient l'estimation

$$(4) \quad A^2 \leq CE^x \left(\left(\int_0^{\sigma_\varepsilon} r_k^{2p-2}(B_s) ds \right)^{1/2} \right) + B^2.$$

On observe que

$$\left(\int_0^{\sigma_\varepsilon} r_k^{2p-2}(B_s) ds \right)^{1/2} \leq ((r_k(B))_{\sigma_\varepsilon}^*)^{p/2} \left(\int_0^{\sigma_\varepsilon} r_k^{p-2}(B_s) ds \right)^{1/2},$$

et on revient à l'inégalité (4); en utilisant l'inégalité de Schwarz et l'égalité (3), on obtient une estimation de la forme $A^2 \leq CAB + B^2$, d'où résulte évidemment (puisque A et B sont finis) $A \leq CB$. Après quoi on fait tendre ε vers 0; on arrive ainsi, en utilisant le théorème de convergence dominée, à l'inégalité (1). Comme les constantes $C_{p,k}$ obtenues sont indépendantes de R , on peut affaiblir l'hypothèse de bornitude portant sur σ . On pourra voir [1] pour des résultats plus généraux sur ce point précis, dont nous n'aurons pas besoin ici.

2. Majoration harmonique de r^p dans le cas où $p > 1$

Cette question est liée aux relations qui existent entre les espaces communément appelés L^p et H^p (théorème de M. Riesz, définitions équivalentes de H^p , etc.). Du point de vue probabiliste, ce sont des inégalités de Doob et Burkholder-Gundy en théorie des martingales qui sont en jeu. L'utilisation de méthodes probabilistes va nous permettre de donner une nouvelle démonstration, simple et rapide, du résultat suivant:

THEOREME 1 (M. Essen [8]). *Soient ν un entier ≥ 1 , D un domaine de \mathbf{R}^ν et p un réel > 1 . La fonction r^p admet un majorant harmonique dans D si et seulement si la fonction $(r_1)^p$ en admet un.*

Démonstration. Nous définissons les suites (D_n) et (τ_n) comme dans le §1. Supposons que la fonction $(r_1)^p$ admette un majorant harmonique dans D ; comme $p \geq 1$, la fonction $(r_1)^p$ est sous-harmonique, donc le lemme 1 s'applique: il existe donc $x \in D$ tel que

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} E^x \left(\left| B_{\tau_n}^1 \right|^p \right) < +\infty.$$

Puisque $p > 1$, l'inégalité de Doob ([5]; [7], p. 147)) entraîne alors

$$E^x\left(\left(B_\tau^{1*}\right)^p\right) = \sup_{n \in \mathbf{N}} E^x\left(\left(B_{\tau_n}^{1*}\right)^p\right) < +\infty.$$

Donc, grâce aux inégalités de Burkholder-Gundy,

$$E^x\left(\tau^{p/2}\right) < +\infty.$$

Il est connu (théorème 3.1 de [1]) que cette dernière propriété est équivalente à l'existence d'un majorant harmonique de la fonction r^p dans D ; on peut aussi observer que, en utilisant dans l'autre sens les inégalités de Burkholder-Gundy, on obtient

$$E^x\left(\left(B_\tau^{i*}\right)^p\right) = \sup_{n \in \mathbf{N}} E^x\left(\left(B_{\tau_n}^{i*}\right)^p\right) < +\infty$$

pour $1 \leq i \leq \nu$, d'où on déduit aussitôt que

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} E^x\left(\left|B_{\tau_n}\right|^p\right) < +\infty.$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme 1 à la fonction sous-harmonique r^p pour achever la démonstration.

3. Majoration harmonique de r^p dans le cas où $p = 1$

Dans ce cas, ce sont des relations connues entre les classes de martingales H^1 et $L \log L$ qui vont fournir une démonstration simple du:

THEOREME 2 (M. Essen [8]). *Soient ν un entier ≥ 2 et D un domaine de \mathbf{R}^ν . On a les propriétés suivantes:*

(a) *Si la fonction $r_1 \log^+ r_1$ admet un majorant harmonique dans D , alors la fonction r en admet un.*

(b) *Si la fonction r admet un majorant harmonique dans D , et si le plus petit majorant harmonique ψ de r_1 dans D est tel que ψ/r soit borné à l'infini, alors la fonction $r_1 \log^+ r_1$ admet un majorant harmonique dans D .*

Démonstration. Commençons par prouver (a); en appliquant le lemme 1 à la fonction sous-harmonique $r_1 \log^+ r_1$, on obtient l'existence d'un point $x \in D$ tel que (avec les notations du §1)

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} E^x\left(\left|B_{\tau_n}^1\right| \log^+ \left|B_{\tau_n}^1\right|\right) < \infty.$$

On en déduit, grâce au résultat classique de J.L. Doob ([15], p. 317; [7], p. 147) que

$$E^x((B_\tau^{1*})) = \sup_{n \in \mathbf{N}} E^x((B_{\tau_n}^{1*})) < +\infty.$$

Les inégalités de Burkholder-Gundy entraînent alors la finitude de $E^x(\tau^{1/2})$, et on termine comme pour le théorème 1.

Passons à l'assertion (b); de nouveau, le lemme 1 donne l'existence d'un point $x \in D$ tel que

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} E^x(|B_{\tau_n}|) < +\infty.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on utilise alors le lemme 2 avec $\sigma = \tau_n$ et $k = \nu$ on en déduit

$$(5) \quad E^x(|B_\tau^*|) < +\infty.$$

Fixons $n \in \mathbf{N}$ et posons, pour tout $t \geq 0$,

$$M_t = \psi(B_{t \wedge \tau_n}).$$

Comme ψ est harmonique, on définit ainsi une martingale continue M , qui est à valeurs ≥ 0 puisque $\psi \geq r_1$. Dans la suite, on notera C un nombre indépendant de n , dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre. Par hypothèse, il existe deux réels a et b tels que $\psi(x) \leq b|x|$ pour tout $x \in D$ tel que $|x| \geq a$; par conséquent, pour tout $t \geq 0$,

$$(6) \quad M_t \leq \sup_{|x| \leq a} \psi(x) + b|B_{t \wedge \tau_n}|.$$

De (5) et (6) découle évidemment le fait que

$$E^x(M_{\tau_n}^*) \leq C.$$

Mais, M étant une martingale continue et ≥ 0 , ceci implique, en vertu d'un théorème de R.F. Gundy ([9]; [7], p. 149),

$$E^x(M_{\tau_n} \log^+ M_{\tau_n}) \leq C.$$

A fortiori, comme $\psi \geq r_1$,

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} E^x(|B_{\tau_n}^1| \log^+ |B_{\tau_n}^1|) < +\infty,$$

et le lemme 1 permet de conclure.

La condition de croissance imposée à ψ dans l'assertion (b) du théorème précédent n'est pas nécessaire pour que la fonction $r_1 \log^+ r_1$ admette un majorant harmonique dans D (cf. remarque 1, à la fin de ce paragraphe). Par contre, les théorèmes 3 et 4 qui suivent fournissent une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, et généralisent le théorème 2.

Le premier de ces résultats est une caractérisation probabiliste, qui complète également le théorème 3.1 de [1]:

THEOREME 3. *On conserve les notations du §1, et on note $L = (L_t)_{t \geq 0}$ le temps local en 0 de B^1 . Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *la fonction $r_1 \log^+ r_1$ admet un majorant harmonique dans D ;*
- (ii) *pour tout $x \in D$, $E^x(\tau^{1/2}) < +\infty$ et $E^x(L_\tau \log^+ L_\tau) < +\infty$.*

Démonstration. En adaptant notre méthode de démonstration des théorèmes précédents, le lecteur déduira facilement ce résultat de la caractérisation suivante de la classe $L \log L$ probabiliste, établie par les auteurs dans [3]:

LEMME 3. *Soit X une martingale locale continue, et soit L son temps local en 0; les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *$X \in L \log L$ (i.e., $\sup_{t \geq 0} E(|X_t| \log^+ |X_t|) < +\infty$);*
- (ii) *$X \in H^1$ (i.e., $E(\sup_{t \geq 0} |X_t|) < +\infty$, ou $E(\langle X, X \rangle^{1/2}) < +\infty$, $\langle X, X \rangle$ désignant la variation quadratique de X), $E(|X_0| \log^+ |X_0|) < +\infty$ et $E(L_\infty \log^+ L_\infty) < +\infty$.*

On peut voir que le théorème 3 implique le théorème 2: compte tenu de remarques déjà faites, le seul point non trivial est le fait que la condition de croissance portant sur le majorant harmonique ψ de r_1 implique la finitude de $E^x(L_\tau \log^+ L_\tau)$ pour un $x \in D$; nous allons en indiquer une démonstration. Pour cela, nous introduisons la martingale N définie par

$$N_t = E^x(L_\tau / \mathcal{F}_t) \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

où x est un point quelconque de D ; nous avons à prouver qu'elle est de classe $L \log L$ ou, ce qui revient au même puisqu'elle est à valeurs ≥ 0 , qu'elle est de classe H^1 (un vertu de lemme 3, ou du résultat antérieur (cf. [9]) de R.F. Gundy). Pour $0 \leq t \leq \tau$, on écrit $N_t = L_t + E^x((L_\tau - L_t) / \mathcal{F}_t)$ d'où, grâce à la propriété forte de Markov,

$$(7) \quad N_t = L_t + E^{B_t}(L_\tau).$$

D'autre part, on sait que, pour tout $z \in D$,

$$\psi(z) = E^z(r_1(B_\tau)) = E^z(|B_\tau^1|)$$

et que, pour tout $t \leq \tau$,

$$|B_t^1| = |B_0^1| + Y_t + L_t,$$

où Y est une martingale (pour toute probabilité P^z) nulle en 0 (formule de Tanaka). On a donc, pour tout $z \in D$, $\psi(z) = |z_1| + E^z(L_\tau)$, et par conséquent

$$(8) \quad E^z(L_\tau) \leq \psi(z) \quad \text{pour tout } z \in D.$$

Donc, si $\psi(z) \leq b|z|$ pour tout $z \in D$ tel que $|z| \geq a$, où a et b sont deux réels convenables, on déduit de (7) et (8) que

$$N_\tau^* \leq L_\tau + bB_\tau^* + \sup_{|z| \leq a} \psi(z),$$

et par conséquent

$$E^x(N_\tau^*) \leq (1 + b)E^x(B_\tau^*) + \sup_{|z| \leq a} \psi(z) < +\infty,$$

ce qui prouve que N est de classe H^1 , et achève la démonstration.

Etant donné la nature du problème étudié ici, il nous semble intéressant d'avoir un équivalent potentialiste à la condition (ii) du théorème 3. Pour y parvenir, nous allons introduire une version appropriée de la "densité de l'intégrale d'aire" de la fonction harmonique $x \rightarrow x_1$. L'utilisation de cette fonctionnelle, et la formulation du théorème qui va suivre, nous ont été suggérés par les résultats de [4]. Néanmoins, la situation présente (étude d'une fonction harmonique très simple, mais définie dans un domaine quelconque) et la situation envisagée dans [4] (étude d'une fonction harmonique quelconque, mais définie dans un domaine très simple) ne sont vraiment comparables qu'en dimension 2.

Avant d'énoncer la caractérisation annoncée, il est nécessaire d'introduire quelques notations:

Etant donné un domaine Δ de \mathbf{R}^ν , on note Δ'_1 l'ensemble des $x \in \Delta$ tels que $x_1 = 0$; pour tout $x \in \mathbf{R}^\nu$, on pose $x'_1 = (0, x_2, \dots, x_\nu)$. Pour toute fonction convenable u définie dans Δ , on note

$$\int_{\Delta} u(x) dx \quad \left(\text{resp. } \int_{\Delta'_1} u(x'_1) dx'_1 \right)$$

l'intégrale de u sur Δ par rapport à la mesure de Lebesgue ν -dimensionnelle (resp. l'intégrale de la restriction de u à Δ'_1 par rapport à la mesure de Lebesgue $(\nu - 1)$ -dimensionnelle). On désigne par $\partial_m D$ la frontière minimale de Martin du domaine D étudié. Soit $z \in D$, fixé une fois pour toutes;

on sait que, pour tout $\theta \in \partial_m D$, il existe une unique fonction harmonique minimale $K(\cdot, \theta)$ vérifiant la condition de normalisation $K(z, \theta) = 1$. Pour tout domaine greenien Δ de \mathbf{R}^v , on note \mathcal{G}^Δ sa fonction de Green. Enfin, si D est greenien nous posons, pour tout $\theta \in \partial_m D$,

$$d(\theta) = \int_{D_1} \mathcal{G}^D(z, x'_1) K(x'_1, \theta) dx'_1.$$

Remarquons que, si la fonction r admet un majorant harmonique dans D , alors D est greenien et par conséquent la fonctionnelle d est bien définie. Nous pouvons alors énoncer le

THEOREME 4. *Soit μ la mesure harmonique associée au point z ; alors, avec les notations précédentes:*

(a) *Si la fonction $r_1 \log^+ r_1$ admet un majorant harmonique dans D , alors la fonction r en admet un et la fonctionnelle d vérifie la condition*

$$(L) \quad \int_{\partial_m D} d(\theta) \log^+ d(\theta) \mu(d\theta) < +\infty;$$

(b) *On suppose de plus que $v = 2$ et que D est simplement connexe; si la fonction r admet un majorant harmonique dans D , et si la fonctionnelle d vérifie la condition (L) précédente, alors la fonction $r_1 \log^+ r_1$ admet un majorant harmonique dans D .*

Démonstration. *Preuve de (a).* D'après le théorème 3, l'hypothèse implique que $E^x(\tau^{1/2}) < +\infty$ et $E^x(L_\tau \log^+ L_\tau) < +\infty$. On a déjà vu que la première de ces propriétés équivaut à l'existence d'un majorant harmonique pour la fonction r dans D . Il reste donc à démontrer que la finitude de $E^x(L_\tau \log^+ L_\tau)$ implique la condition (L). Pour tout $\theta \in \partial_m D$, on note $P^{z, \theta}$ la probabilité du mouvement brownien issu du point z , conditionné par sa sortie de D au point θ , et $E^{z, \theta}$ l'espérance mathématique correspondante; ce mouvement brownien conditionné est le h -processus, au sens de Doob, associé à la fonction définie par $h(x) = K(x, \theta)$ pour tout $x \in D$; on sait qu'on a alors, pour tout temps d'arrêt $\sigma < \tau$, et toute variable aléatoire \mathcal{F}_σ -mesurable X (cf. [7], pp. 103–104),

$$(9) \quad E^{z, \theta}(X) = E^z \left(\frac{K(B_\sigma, \theta)}{K(z, \theta)} X \right) = E^z(K(B_\sigma, \theta) X).$$

Notre principal outil sera:

LEMME 4. *Soit u une fonction harmonique définie dans le domaine D , supposé greenien, et soit $\Lambda = (\Lambda_t)_{0 \leq t \leq \tau}$ le temps local en 0 de la martingale*

locale $(u(B_t))_{0 \leq t < \tau}$; pour tout $\theta \in \partial_m D$, on a l'égalité

$$E^{z, \theta}(\Lambda_\tau) = \int_D \mathcal{G}^D(z, x) K(x, \theta) \Delta|u|(d\theta).$$

La démonstration de ce résultat est essentiellement la même que celle du lemme 1 de [4]. En prenant pour u l'application $x \rightarrow x_1$, et en explicitant $\Delta|u|$ dans ce cas, on obtient l'égalité

$$(10) \quad E^{z, \theta}(L_\tau) = d(\theta) \quad \text{pour tout } \theta \in \partial_m D.$$

On en déduit, au moyen de l'inégalité de Jensen,

$$d(\theta) \log^+ d(\theta) \leq E^{z, \theta}(L_\tau \log^+ L_\tau) \quad \text{pour tout } \theta \in \partial_m D,$$

et par conséquent

$$(11) \quad \int_{\partial_m D} d(\theta) \log^+ d(\theta) \mu(d\theta) \leq \int_{\partial_m D} E^{z, \theta}(L_\tau \log^+ L_\tau) \mu(d\theta).$$

La condition (L) résultera donc de l'inégalité (11) et de l'égalité

$$\int_{\partial_m D} E^{z, \theta}(L_\tau \log^+ L_\tau) \mu(d\theta) = E^z(L_\tau \log^+ L_\tau),$$

que nous allons démontrer. Il est clair qu'il suffit de prouver cette égalité avec τ_n , où n est un entier assez grand pour que $z \in D_n$, à la place de τ (avec les notations du §1); en utilisant l'égalité (9) et le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_{\partial_m D} E^{z, \theta}(L_{\tau_n} \log^+ L_{\tau_n}) \mu(d\theta) = E^z \left(L_{\tau_n} \log^+ L_{\tau_n} \int_{\partial_m D} K(B_{\tau_n}, \theta) \mu(d\theta) \right),$$

d'où le résultat puisque, pour tout $x \in D$,

$$\int_{\partial_m D} K(x, \theta) \mu(d\theta) = 1.$$

Preuve de (b). Nous identifions \mathbf{R}^2 et \mathbf{C} . Puisque la fonction r admet un majorant harmonique dans D , on a nécessairement $D \subsetneq \mathbf{C}$. Il existe donc une application bijective et holomorphe f du disque unité U de \mathbf{C} sur D , et on peut supposer de plus que $f(0) = z$. En vue d'utiliser certains résultats de [4], nous introduisons la densité de l'intégrale d'aire "non tangentielle" de la

fonction $\operatorname{Re}(f)$, notée $d^<(\operatorname{Re}(f))$ et définie dans ∂U par

$$d^<(\operatorname{Re}(f))(\theta) = \int_{\Gamma_\theta} \Delta |\operatorname{Re}(f)| (dz),$$

où Γ_θ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1/2\} \cup \{\theta\}$, privée du point θ . Le théorème 2 de [4] se transposant sans difficulté au disque, on en déduit que la fonction $\operatorname{Re}(f)$ est de classe $L \log L$ si (et seulement si) elle est de classe H^1 (ces deux notions étant relatives à la mesure de Lebesgue sur ∂U), et si de plus

$$(12) \quad \int_{\partial U} d^<(\operatorname{Re}(f))(\theta) \log^+ d^<(\operatorname{Re}(f))(\theta) d\theta < +\infty.$$

On voit, en utilisant les résultats de [1], que $\operatorname{Re}(f) \in H^1$ si et seulement si la fonction r admet un majorant harmonique dans D , et que $\operatorname{Re}(f) \in L \log L$ si et seulement si la fonction $r_1 \log^+ r_1$ en admet un. Par conséquent, il nous suffit de prouver que la condition (12) implique (L). Posons, pour tout $\theta \in \partial U$,

$$d(\operatorname{Re}(f))(\theta) = \int_U \mathcal{G}^U(0, x) P(x, \theta) \Delta |\operatorname{Re}(f)| (dx),$$

où $P(x, \cdot)$ désigne le noyau de Poisson relatif au point x , pour tout $x \in U$. En utilisant l'expression bien connue de \mathcal{G}^U et de P , on voit sans difficulté qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in \Gamma_\theta$, $\mathcal{G}^U(0, x) P(x, \theta) \geq C$. Par conséquent, (12) implique

$$(13) \quad \int_{\partial U} d(\operatorname{Re}(f))(\theta) \log^+ d(\operatorname{Re}(f))(\theta) d\theta < +\infty.$$

Puisque $f \in H^1$, elle admet en presque tout point $\theta \in \partial U$ une limite radiale, que nous noterons encore $f(\theta)$. Puisque f est bijective et harmonique on a, pour tout $x \in U$ et presque tout $\theta \in \partial U$, $\mathcal{G}^U(0, x) = \mathcal{G}^D(f(0), f(x)) = \mathcal{G}^D(z, f(x))$, et $P(x, \theta) = K(f(x), f(\theta))$; par conséquent, pour presque tout $\theta \in \partial U$,

$$d(\operatorname{Re}(f))(\theta) = d(f(\theta)).$$

Enfin, comme la mesure image par (la limite radiale de) f de la mesure de Lebesgue normalisée sur ∂U n'est autre que la mesure μ , on voit que (13) équivaut à (L), et la démonstration est achevée.

Il est probable que l'assertion (b) du théorème précédent est vraie sans les restrictions que nous avons imposées à la dimension et au domaine D .

Néanmoins, les méthodes que nous avons employées dans [4] pour prouver la partie du théorème 2 que nous avons utilisée ici sont basées sur des propriétés géométriques du demi-espace, qui font défaut dans un domaine quelconque.

M. Essén pose dans [8] la question de l'existence d'un domaine D dans lequel la fonction r admet un majorant harmonique et la fonction $r_1 \log^+ r_1$ n'en admet pas; nous nous proposons de construire un tel domaine. Ce domaine D est construit dans \mathbf{R}^2 , mais si l'on considère l'ouvert $D^\nu = D \times \mathbf{R}^{\nu-2}$, il répond à nos exigences dans \mathbf{R}^ν : en effet, r_2 admet un majorant harmonique dans D^ν donc, d'après notre théorème 5 (§4), r en admet un aussi; d'autre part il est clair, grâce à nos arguments probabilistes, que $r_1 \log^+ r_1$ ne peut pas admettre de majorant harmonique dans D^ν sans en admettre un dans D . Passons donc à la construction de D . Soit $a > 0$, et soit P_a l'ensemble des points $z = x + iy \in \mathbf{C}$ tels que $y > a$; nous posons, pour tout $z \in P_a$,

$$f(z) = \frac{z}{(\log(-iz))^2},$$

où la détermination du logarithme est choisie de façon à ce que $\log z$ soit réel pour tout réel $z > 0$. Nous allons montrer que le domaine $D = f(P_a)$ répond à la question, au moins si a est assez grand.

La première étape de la démonstration consiste à observer que, au moins si a est assez grand, la fonction f est univalente dans P_a . En effet, soient z_1 et z_2 deux points de P_a ; comme f est holomorphe,

$$f(z_1) - f(z_2) = (z_1 - z_2) \int_0^1 f'(tz_2 + (1-t)z_1) dt.$$

En calculant $f'(z)$, on constate aisément que $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ dès que $|z|$ est assez grand, d'où notre assertion.

En transposant au demi-espace P_a le théorème 4.1 de [1] (ce qui est immédiat), on voit que, pour montrer que la fonction r admet un majorant harmonique dans $D = f(P_a)$ (ce qui équivaut, par exemple, à la finitude de $E^{(0, a+1)}(\tau^{1/2})$), il est équivalent de montrer que la fonction f appartient à la classe de Hardy H^1 correspondant au demi-espace P_a , dont on munit la frontière de la mesure harmonique du point $(0, a+1)$ (par exemple); puisque f est holomorphe, il revient donc au même de prouver que

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1 + \theta^2} \left| \frac{\theta + ia}{(\log(a - i\theta))^2} \right| d\theta < +\infty,$$

ce qui est clair.

Il reste à voir que la fonction $r_1 \log^+ r_1$ (i.e., avec les notations présentes, l'application $z \rightarrow |\operatorname{Re}(z)| \log^+ |\operatorname{Re}(z)|$) n'admet pas de majorant harmonique dans D . Mais on sait que l'application $z \rightarrow |\operatorname{Im}(z)| \log^+ |\operatorname{Im}(z)|$ en admet un, puisque r en admet un et que $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ pour tout $z \in D$ (conséquence de l'un quelconque des théorèmes 2, 3 ou 4). Par conséquent, il est équivalent de prouver que l'application $z \rightarrow |z| \log^+ |z|$ n'admet pas de majorant harmonique dans D . En utilisant le théorème 4.2 de [1], on se ramène à montrer que la fonction f n'appartient pas à la classe $L \log L$ associée au demi-espace P_a , muni de la même mesure que précédemment, ou encore que

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1 + \theta^2} \left| \frac{\theta + ia}{(\log(a - i\theta))^2} \right| \log^+ \left| \frac{\theta + ia}{(\log(a - i\theta))^2} \right| d\theta = +\infty,$$

ce qui ne fait aucun doute.

A propos de l'assertion (b) du théorème 2, M. Essén demande dans [8] si la condition de croissance imposée au majorant harmonique ψ de r_1 est la "bonne" condition; nous faisons à ce sujet les remarques suivantes:

Remarque 1. Cette condition n'est pas optimale, au sens qu'il existe un domaine D de \mathbf{R}^2 dans lequel la fonction $r_1 \log^+ r_1$ admet un majorant harmonique, sans que la condition de croissance $\psi(z) = O(|z|)$ soit satisfaite.

Remarque 2. Le démonstration du fait que le théorème 3 implique le théorème 2 nous conduit à penser que la condition de croissance $\psi(z) = O(|z|)$ est optimale, *parmi toutes les conditions de croissance possibles*. Nous notons que, pour tout $\alpha > 1$, la condition plus faible $\psi(z) = O(|z|(\log|z|)^\alpha)$ est insuffisante. Pour démontrer les assertions précédentes, nous considérons de nouveau le domaine $D = f(P_a)$, où $f(z) = z/(\log(-iz))^\alpha$, avec $\alpha > 1$. Cette fonction est holomorphe et univalente dans P_a si a est choisi assez grand (l'argument donné précédemment dans le cas où $\alpha = 2$ est encore valable). Nous allons établir l'assertion suivante.

- (14) Pour tout $\alpha > 1$, le plus petit majorant harmonique ψ de r_1 dans D vérifie les conditions suivantes:
 - (14 i) $\psi(z) = O(|z|(\log|z|)^\alpha)$ quand z tend vers l'infini dans D ;
 - (14 ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que $\psi(z) \geq C|z| \log|z|$ quand z tend vers l'infini sur l'axe imaginaire.

Il est facile de déduire de (14) les assertions contenues dans les remarques précédentes:

— Prenons $\alpha = 3$; la fonction f est alors de classe $L \log L$ (au même sens que précédemment); on en déduit facilement, en utilisant le lemme 1,

l'harmonicité et la bijectivité de f , que la fonction $r \log^+ r$ (et, à fortiori, la fonction $r_1 \log^+ r_1$) admet un majorant harmonique dans D . Néanmoins, (14 ii) montre que la condition de croissance $\psi(z) = O(|z|)$ n'est pas satisfaite; ceci justifie la remarque 1.

—Dans le cas où $1 < \alpha \leq 2$, la même étude que celle effectuée précédemment montre que la fonction $r_1 \log^+ r_1$ n'admet pas de majorant harmonique dans D ; pourtant, on a (14 i). Cette dernière condition de croissance est donc insuffisante si $\alpha > 1$, comme annoncé dans la remarque 2.

Il reste donc à prouver l'assertion (14). Tout d'abord on observe que, comme $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ pour tout $z \in D$, on peut remplacer dans cette assertion la fonction ψ par le plus petit majorant harmonique φ de r . Pour étudier le comportement à l'infini de cette fonction φ , nous commencerons par étudier celui du plus petit majorant harmonique ρ de $|f|$ dans P_a . Il a pour expression

$$\rho(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{y - a}{(x - \theta)^2 + (y - a)^2} \frac{|\theta + ia|}{|\log(a - i\theta)|^\alpha} d\theta$$

pour tout $z = x + iy \in P_a$. En utilisant des estimations élémentaires, on voit aisément que $\rho(z)$ a même comportement à l'infini que

$$\int_{|\theta| > 2} \frac{y - a}{(x - \theta)^2 + (y - a)^2} \frac{|\theta|}{(\log|\theta|)^\alpha} d\theta.$$

Nous nous bornerons à étudier l'intégrale

$$\sigma(z) = \int_2^{+\infty} \frac{y - a}{(x - \theta)^2 + (y - a)^2} \frac{\theta}{(\log \theta)^\alpha} d\theta,$$

l'autre partie se traitant de manière analogue. Posons $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, où

$$\sigma_1(z) = \int_{2 \leq \theta \leq 2|x|} \frac{y - a}{(x - \theta)^2 + (y - a)^2} \frac{\theta}{(\log \theta)^\alpha} d\theta.$$

Il est clair que, pour tout $z \in P_a$,

$$(15) \quad \sigma_1(z) \leq \frac{2|x|}{(\log 2)^\alpha} \int_{2 \leq \theta \leq 2|x|} \frac{y - a}{(x - \theta)^2 + (y - a)^2} d\theta \leq \frac{\pi|x|}{(\log 2)^\alpha},$$

et

$$(16) \quad \begin{aligned} \sigma_2(z) &\leq (y - a) \int_{\theta \geq \max(2, 2|x|)} \left(\frac{\theta}{x - \theta} \right)^2 \frac{d\theta}{\theta(\log \theta)^\alpha} \\ &\leq 4(y - a) \int_2^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta(\log \theta)^\alpha}. \end{aligned}$$

De (15) et (16) résulte évidemment l'estimation annoncée. Par conséquent, il existe un nombre $C > 0$ tel que, pour tout $z \in P_a$ de module assez grand, $\rho(z) \leq C|z|$. En effectuant le changement de variable défini par f , on en déduit facilement l'assertion (14 i) avec φ à la place de ψ , donc l'assertion (14 i) elle-même. Enfin, pour obtenir (14 ii), on commence par minorer, pour $|z|$ grand, $\rho(z)$ par $c\sigma(z)$, où c est une constante convenable; après quoi on observe que, pour tout $y \geq \max(2, 2a)$, on a

$$\begin{aligned} \sigma(0, y) &\geq \frac{y}{2} \int_y^{+\infty} \frac{\theta^2}{\theta^2 + y^2} \frac{d\theta}{\theta(\log \theta)^\alpha} \\ &\geq \frac{y}{4} \int_y^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta(\log \theta)^\alpha} = \frac{y}{4(\alpha - 1)(\log y)^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, il suffit alors d'effectuer le changement de variable défini par f pour obtenir (14 ii).

4. Majoration harmonique de r^p dans le cas où $0 < p \leq 1$

Les idées utilisées pour démontrer le théorème 1 vont nous permettre d'établir un résultat nouveau, qui complète les résultats précédents:

THEOREME 5. *Soient ν un entier ≥ 2 , D un domaine de \mathbf{R}^ν et p un réel > 0 . La fonction r^p admet un majorant harmonique dans D si et seulement si la fonction $(r_2)^p$ en admet un.*

Démonstration. Nous définissons les suites (D_n) et (τ_n) comme dans le §1. Supposons que la fonction $(r_2)^p$ admette un majorant harmonique dans D ; comme $p > 0$, la fonction $(r_2)^p$ est sous-harmonique, donc le lemme 1 s'applique; par conséquent, il existe $x \in D$ tel que

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} E^x \left((r_2(B_{\tau_n}))^p \right) < +\infty.$$

Appliquons alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le lemme 2 avec $k = 2$ et $\sigma = \tau_n$; on

obtient

$$E^x\left((B_\tau^{1*})^p\right) \leq E^x\left(\left(\left(r_2(B_\tau)\right)^*\right)^p\right) = \sup_{n \in \mathbf{N}} E^x\left(\left(\left(r_2(B_{\tau_n})\right)^*\right)^p\right) < +\infty.$$

En appliquant ensuite les inégalités de Burkholder-Gundy, on en déduit, comme dans la démonstration du théorème 1, que $E^x(\tau^{p/2}) < +\infty$, puis que r^p admet un majorant harmonique dans D .

BIBLIOGRAPHIE

1. D.L. BURKHOLDER *Exit times of brownian motion, harmonic majorization, and Hardy spaces*, Adv. in Math., vol. 26 (1977), pp. 182–205.
2. D.L. BURKHOLDER and R.F. GUNDY, *Extrapolation and interpolation of quasi linear operators on martingales*, Acta Math., vol. 124 (1970), pp. 249–304.
3. J. BROSSARD et L. CHEVALIER, *Classe $L \log L$ et temps local*, C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 305, sér. I (1987), pp. 135–137.
4. _____, *Classe $L \log L$ et densité de l'intégrale d'aire dans \mathbf{R}_+^{n+1}* , Ann. of Math., vol. 128 (1988), pp. 603–618.
5. J.L. DOOB, *Stochastic processes*, Wiley, New York, 1953.
6. _____, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 262, Springer Verlag, New York, 1984.
7. R. DURRETT, *Brownian motion and martingales in analysis*, Wadsworth, 1984.
8. M. ESSEN, *A generalization of the M. Riesz theorem on conjugate functions and the Zygmund $L \log L$ -theorem to \mathbf{R}^d , $d \geq 2$* , Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, vol. 15 (1990), pp. 83–105.
9. R.F. GUNDY, *On the class $L \log L$, martingales, and singular integrals*, Studia Math., vol. 33 (1969), pp. 109–118.

INSTITUT FOURIER

UNIVERSITÉ GRENOBLE 1

B.P. 74

38402 SAINT MARTIN D'HÈRES, CEDEX, FRANCE