ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 44, Number 2, Summer 2000

UNTERSUCHUNGEN ZUM VERHALTEN DES HARDY-LITTLEWOOD-MAXIMALOPERATORS

HOLGER BOCHE

ABSTRACT. In this paper we investigate the behavior of the Hardy-Littlewood Maximal Operator. It is well known that for absolutely integrable functions the Hardy-Littlewood Maximal Operator is finite almost everywhere. In this paper it is shown that for each set $E \subset [-\pi, \pi)$ with Lebesgue measure zero there exists a function of vanishing mean oscillation (VMO) such that the Hardy-Littlewood Maximal Operator of this function is infinite for all points of the set E. So for VMO-functions the Hardy-Littlewood Maximal Operator has divergence behavior similar to that of absolutely integrable functions. Some applications of these results for the behavior of the Poisson-Integral of VMO-functions are also given.

1. Einleitung und Ergebnisse

In dieser Arbeit wollen wir uns mit dem Verhalten des Hardy-Littlewood-Maximaloperators

$$(Mf)(t) = \sup_{\mu(I)\leq 2\pi} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f(t)|\, dt \tag{1}$$

und des Poissonschen Integrals

$$u(r,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\tau)+r^2}\, d\tau \tag{2}$$

beschäftigen [6], [8]. Das Supremum in (1) wird über alle offenen Intervalle I mit $t \in I$ gebildet. Im weiteren bezeichnen wir mit $\mu(E)$ das Lebesguesche Maß der Lebesgue meßbaren Menge E. Für den Hardy-Littlewood-Maximaloperator gilt für alle Funktionen $f \in L^1[-\pi,\pi]$ [1], [2], [7] die Abschätzung

$$\mu\left(\{t \in [-\pi,\pi) \mid (Mf)(t) > \lambda\}\right) \leq \frac{C_1}{\lambda} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt. \tag{3}$$

Hierbei ist $\lambda > 0$ beliebig und C_1 eine von f und λ unabhängige Konstante. Insbesondere haben wir

$$(Mf)(t) < \infty$$

Received November 5, 1997.
1991 Mathematics Subject Classification. Primary 30D50, 31A20.

für fast alle $t \in [-\pi, \pi)$. Für das Poissonsche Integral (2) gilt

$$\lim_{r \to 1} u(r, t) = f(t)$$

fast überall in $[-\pi, \pi)$ [1]. Damit erhält man ebenfalls

$$\limsup_{r \to 1} |u(r, t)| < \infty$$

fast überall in $[-\pi, \pi)$.

Es sei $f \in L^1[-\pi, \pi)$ und I ein festes Intervall. Wir führen die Zahl

$$a_I(f) = \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(t)\, dt \tag{4}$$

ein. Wir betrachten nun die Menge aller $f \in L^1[-\pi, \pi)$, für welche die Beziehung

$$\sup_{\mu(I) \le 2\pi} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f(t) - a_I(f)|\, dt < \infty \tag{5}$$

gilt. Hierbei wird das Supremum in (5) über alle Intervalle $I \subset [-\pi, \pi)$ gebildet. Die Menge dieser Funktionen f bezeichnen wir mit BMO (bounded mean oscillation). Für diese Menge führen wir die Norm

$$\|f\|_* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt + \sup_{\mu(I) \le 2\pi} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f(t) - a_I(f)|\, dt \tag{6}$$

ein. Der Raum BMO ist mit dieser Norm ein nicht separabler Banachraum [1]. Für $\delta > 0$ betrachten wir weiterhin die Menge aller Funktionen $f \in BMO$, für die mit

$$M_\delta f = \sup_{\mu(I) \le \delta} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f(t) - a_I(f)|\, dt \tag{7}$$

die Beziehung

$$\lim_{\delta \to 0} M_\delta f = 0 \tag{8}$$

gilt. Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir nach [1] mit VMO (vanishing mean oscillation) [5]. Der Raum VMO ist ein abgeschlossener separabler Unterraum von BMO. Er ist der Abschluß der Menge $C[-\pi, \pi]$ der stetigen 2π-periodischen Funktionen in der BMO-Norm. Die Räume BMO und VMO haben eine ganze Reihe von interessanten Eigenschaften [1] [3]. Für $1 \le p < \infty$ existiert eine Konstante A_p mit

$$\sup_{\mu(I) \le 2\pi} \left(\frac{1}{\mu(I)} \int_I |f(t) - a_I(f)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \le A_p \cdot \|f\|_*. \tag{9}$$

Die Funktion $f \in BMO$ gehört damit zu jedem Raum $L^p[-\pi,\pi)$. Weiterhin gilt für alle $f \in BMO$ und alle Intervalle I die John-Nirenberg Ungleichung [1]

$$\mu\left(\{t \in I : |f(t) - a_I(f)| > \lambda\}\right) \leq \mu(I) \cdot \exp\left(-C_2 \frac{\lambda}{\|f\|_*}\right). \tag{10}$$

Hierbei ist C_2 eine von f und λ unabhängige Konstante. Weiterhin lassen sich die Räume BMO und VMO durch das Poissonsche Integral klassifizieren. Es existiert eine Konstante C_3, so daß für alle $f \in BMO$ die Beziehung

$$\left(\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau) - u(r,t)|^2 \frac{1-r^2}{1 - 2r\cos(t-\tau) + r^2}\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_3 \cdot \|f\|_* \tag{11}$$

gilt [1]. Ist umgekehrt die linke Seite von (11) endlich, so gehört die Funktion f zum Raum BMO. Eine Funktion f gehört genau dann zum Raum VMO, wenn

$$\lim_{r \to 1} \|f(\cdot) - u(r,\cdot)\|_* = 0 \tag{12}$$

ist [1]. Damit spiegelt sich das Randverhalten des Poissonschen Integrals in den Eigenschaften der BMO-Funktionen wider. Wir wollen nun zeigen, daß sich die VMO-Funktionen bezüglich des punktweisen Verhaltens nicht wesentlich von $L^1[-\pi,\pi)$-Funktionen unterscheiden. Genauer wollen wir das folgende Resultat beweisen.

SATZ 1. *Es sei $E \subset [-\pi,\pi)$ eine beliebige Menge mit $\mu(E) = 0$. Es kann eine Funktion $f_1 \in VMO$ konstruiert werden, für die*

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\tau) \frac{1-r^2}{1 - 2r\cos(t-\tau) + r^2}\, d\tau = \infty \tag{13}$$

und

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f_1(\tau)\, d\tau = \infty \tag{14}$$

für alle $t \in E$ gilt.

Damit unterscheiden sich die VMO-Funktionen bezüglich der zulässigen Divergenzmengen nicht von $L^1[-\pi,\pi]$-Funktionen. Natürlich müssen die Zahlen (6) und (11) endlich bleiben. Dieses Resultat zeigt also, daß zwar die entsprechenden Folgen für alle Punkte $t \in E$ gegen unendlich divergieren können, aber gewisse Einschränkungen über das Divergenzverhalten bestehen.

Über die Divergenzmenge E können zusätzliche Aussagen getroffen werden. Eine Menge D, für die eine Folge stetiger Funktionen unbeschränkt divergiert, unterliegt stets topologischen Bedingungen. Da für die Menge E nur gefordert wird, daß sie das Lebesguesche Maß Null hat, haben wir damit im allgemeinen die unbeschränkte Divergenz für eine größere Menge. Diese Menge hat natürlich das Lebesguesche Maß Null. Diese Beobachtung stammt von Professor Ch. Pommerenke [4]. Wir können ebenfalls das Intervall $[-\pi, \pi)$ in zwei disjunkte Mengen E_1 und E_2 zerlegen, so daß $\mu(E_1) = 2\pi$ und E_2 eine Residualmenge ist [3]. Dabei heißt eine Menge eine Residualmenge, wenn ihre Komplementärmenge als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen dargestellt werden kann. Wir haben also ebenfalls die Divergenz für bestimmte Residualmengen.

Der Verfasser dankt Herrn Professor Ch. Pommerenke für seine Hinweise zu dieser Arbeit. Den Gutachtern sei für die zahlreichen Hinweise und Verbesserungen gedankt.

2. Beweis des Satzes

Es sei $E \subset (-\pi, \pi)$ eine beliebige Menge vom Maß Null.

Wir konstruieren nun die gesuchte Funktion f_1.

Mit $\Re z$ bzw. $\Im z$ bezeichnen wir den Realteil bzw. den Imaginärteil der komplexen Zahl z. Für $\delta > 0$ und $\omega_0 \in [-\pi, \pi)$ betrachten wir die Funktion

$$H_\delta(z, \omega_0) := \frac{1}{1 + \delta - ze^{-i\omega_0}}. \tag{15}$$

Diese Funktion ist in der gesamten komplexen Ebene bis auf den einfachen Pol an der Stelle $(1 + \delta)e^{i\omega_0}$ analytisch. Auf dem Rand des Einheitskreises gilt

$$\begin{aligned} \left|H_\delta(e^{i\omega}, \omega_0)\right| &= \frac{1}{|1 + \delta - ze^{-i\omega_0}|} \\ &\geq \left|\Re H_\delta(e^{i\omega}, \omega_0)\right| = \Re H_\delta(e^{i\omega}, \omega_0) \\ &= \frac{1 + \delta - \cos(\omega - \omega_0)}{(1 + \delta - \cos(\omega - \omega_0))^2 + \sin^2(\omega - \omega_0)}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun das Intervall $|\omega - \omega_0| \leq \delta$ des Kreisrandes. Dann gilt mit $1 - \frac{\delta^2}{2} \leq \cos(\omega - \omega_0) \leq 1$ und $\sin^2(\omega - \omega_0) \leq \delta^2$,

$$\begin{aligned} \left|\Re H_\delta(e^{i\omega}, \omega_0)\right| &\geq \frac{1 + \delta - 1}{(1 + \delta - \cos(\omega - \omega_0))^2 + \delta^2} \\ &\geq \frac{\delta}{(\delta + \frac{\delta^2}{2})^2 + \delta^2} = \frac{1}{\delta(1 + (1 + \frac{\delta}{2})^2)}. \end{aligned}$$

Im weiteren sei $\delta < 2$, also ist

$$\Re H_\delta(e^{i\omega}, \omega_0) \geq \frac{1}{5\delta}. \tag{16}$$

Es sei nun $K \subset (-\pi, \pi)$, $\mu(K) < 1$, eine beliebige Vereinigung von endlich vielen disjunkten Intervallen. Wir konstruieren weiterhin für $\delta_1 < \frac{1}{2}$ eine Überdeckung der Menge K mit Intervallen $I_1, \ldots, I_L$ der Länge $2\delta_1$ derart, daß $L\delta_1 < \mu(K)$ ist. Es sei ω_l der Mittelpunkt des Intervalles I_l, $l = 1, \ldots, L$, und wir betrachten die Funktion

$$H(z) := \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} H_{\delta_1}(z, \omega_l) \quad |z| < 1 + \delta_1. \tag{17}$$

Es ist $\Re H(z) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} \Re H_{\delta_1}(z, \omega_l) > 0$ für $|z| < 1 + \delta_1$. Es gilt ebenfalls für $\omega \in \bigcup_{l=1}^{L} I_l$, z.B. $\omega \in I_k$,

$$\begin{aligned} |H(e^{i\omega})| &\geq |\Re H(e^{i\omega})| = \Re H(e^{i\omega}) \\ &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} \Re H_{\delta_1}(e^{i\omega}, \omega_l) > \frac{1}{L} \Re H_{\delta_1}(e^{i\omega}, \omega_k) > \frac{1}{5L\delta_1} > \frac{1}{5\mu(K)}. \end{aligned}$$

Damit gilt für die Funktion $H_1(z) = 1 + H(z)$ für $|z| \leq 1$ die Beziehung $\Re H_1(z) = 1 + \Re H(z) > 1$ und $|H_1(e^{i\omega})| > \frac{1}{5\mu(K)}$ für $\omega \in \bigcup_{l=1}^{L} I_l$. Wir betrachten weiterhin die Funktion $F = \ln H_1$. Für den Realteil $\Re F(e^{i\omega}) = \ln |H_1(e^{i\omega})|$, $\omega \in [-\pi, \pi)$, ergibt sich $\Re F(e^{i\omega}) > 0$ und $\Re F(e^{i\omega}) > \ln \frac{1}{5\mu(K)}$ für $\omega \in \bigcup_{l=1}^{L} I_l$. Wir setzen im weiteren $a(\omega) = \Re F(e^{i\omega})$ und $b(\omega) = \Im F(e^{i\omega})$. Man hat damit $H_1(e^{i\omega}) = a(\omega) \exp(ib(\omega))$. Da aber für $|z| \leq 1$ $\Re H_1(z) > 1$ ist, liegen die komplexen Zahlen $a(\omega) \exp(ib(\omega))$, $\omega \in [-\pi, \pi)$, in der komplexen Ebene rechts von der Geraden $\Re z = 1$. Damit erhalten wir für die Funktion b die Beziehung $|b(\omega)| < \frac{\pi}{2}$, $\omega \in [-\pi, \pi)$. Da die Funktion H_1 im Kreis $|z| \leq 1$ betragsmäßig größer als 1 ist, ist die Funktion b ebenfalls stetig.

Als nächstes soll das Verhalten der Funktion für $z = 0$ untersucht werden. Es ist

$$H(0) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} H_{\delta_1}(0, \omega_l) = \frac{1}{1 + \delta_1} < 1.$$

Damit gilt $H_1(0) = \frac{2+\delta_1}{1+\delta_1}$, womit sich

$$0 < F(0) = \ln \frac{2 + \delta_1}{1 + \delta_1} < \ln 2$$

ergibt.

Wir konstruieren nun eine geeignete Überdeckung der Menge E.

Da die Menge E eine Nullmenge ist, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $\{I_k^n\}_{k \in \mathbb{N}}$ disjunkter Intervalle, deren Vereinigung die Menge E überdeckt und die Summe der Intervallängen kleiner als $5e^{-n^4}$ ist, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k^n) < 5e^{-n^4}$. Es gilt weiterhin $\lim_{l \to \infty} \sum_{k=l}^{\infty} \mu(I_k^n) = 0$. Damit existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $\{l_{r,n}\}_{r \in \mathbb{N}}$, so daß $l_{1,n} = 1$ und $\sum_{k=l_{r,n}}^{\infty} \mu(I_k^n) < 5e^{-(r+n)^4}$ ist. Wir betrachten nun die Mengen

$Q_{r,n} = \cup_{k=l_{r,n}}^{k=l_{r+1,n}} I_k^n$. Sie sind offensichtlich die Vereinigung endlich vieler Intervalle, und für das Maß dieser Menge ergibt sich

$$\mu(Q_{r,n}) \leq \sum_{k=l_{r,n}}^{k=l_{r+1,n}} \mu(I_k^n) < \sum_{k=l_{r,n}}^{\infty} \mu(I_k^n) < 5e^{-(r+n)^4}.$$

Wir betrachten nun die Mengen $Q_m = \cup_{r+n=m} Q_{r,n}$. Diese stellen wieder eine Vereinigung endlich vieler Intervalle dar. Für das Maß der Menge Q_m erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu(Q_m) &\leq \sum_{r+n=m} \mu(Q_{r,n}) \leq \sum_{r+n=m} 5e^{-(r+n)^4} \\ &= 5e^{-m^4} \sum_{r+n=m} 1 = 5e^{-m^4} m < 5e^{-m^3}. \end{aligned}$$

Für die Mengen Q_m betrachten wir die Funktionen F_m. Es gilt nach dem bereits gezeigten $F_m(e^{i\omega}) = a_m(\omega) + i b_m(\omega)$. Die Funktion F_m ist in einem Kreis mit dem Radius $r_m > 1$ analytisch. Es gilt also mit $F_m(re^{i\omega}) = a_m(r, \omega) + i b_m(r, \omega)$ $\lim_{r\to 1} a_m(r, \omega) = a_m(\omega)$ und $\lim_{r\to 1} b_m(r, \omega) = b_m(\omega)$ gleichmäßig. Wir haben weiterhin

$$a_m(\omega) > \ln \frac{1}{5\mu(Q_m)} > \ln \frac{5e^{m^3}}{5} = m^3 \tag{18}$$

für $\omega \in Q_m$. Die Funktion F_m ist für $|z| < r_m$ analytisch. Damit ist die Taylorreihe

$$F_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n(m) + i d_n(m)) \cdot r^n (\cos n\omega + i \sin n\omega)$$

mit $z = re^{i\omega}$ für $r < r_m$ konvergent. Man erhält

$$a_m(r, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (c_n(m) \cos n\omega - d_n(m) \sin n\omega)$$

und

$$b_m(r, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (c_n(m) \sin n\omega + d_n(m) \cos n\omega).$$

Für $r = 1$ erhält man damit

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |a_m(\omega)|^2 \, d\omega - |c_0(m)|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |b_m(\omega)|^2 \, d\omega - |d_0(m)|^2.$$

Da für die Funktion b_m für $\omega \in [-\pi, \pi)$ stets $|b_m(\omega)| < \frac{\pi}{2}$ gilt, erhält man

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |a_m(\omega)|^2 \, d\omega < \frac{\pi^2}{4} + |c_0(m)|^2 + |d_0(m)|^2.$$

Da $|F_m(0)|^2 = |c_0(m)|^2 + |d_0(m)|^2$ ist, gilt mit dem bereits gezeigten $|c_0(m)|^2 + |d_0(m)|^2 < (\ln 2)^2$. Dies ergibt

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |a_m(\omega)|^2\, d\omega < \frac{\pi^2}{4} + (\ln 2)^2,$$

womit die $L^2[-\pi, \pi)$-Normen der Funktionen a_m unabhängig von m beschränkt sind.

Wir betrachten nun die Funktion

$$g(z) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_m(z)}{m^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m(r,\omega)}{m^2} + i\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m(r,\omega)}{m^2} \qquad |z| < 1. \tag{19}$$

Da die Reihe im Inneren des Einheitskreises gleichmäßig konvergiert, ist die Funktion g im Einheitskreis analytisch. Der Imaginärteil $b = \Im g$ der Funktion g ist auf dem Rand des Kreises stetig, denn die Reihe des Imaginärteils konvergiert gleichmäßig auf dem Kreisrand.

Wir setzen

$$f_1(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m(\omega)}{m^2}. \tag{20}$$

Die Reihe ist im $L^2[-\pi, \pi]$ konvergent. Da $a_m(\omega) \geq 0$ für $\omega \in [-\pi, \pi]$ gilt, konvergiert die Reihe in (20) ebenfalls fast überall. Es ist $f_1(\omega) \geq 0$ fast überall. Die Funktion g ist für $|z| < 1$ analytisch. Damit sind die Randwerte des Realteils und des Imaginärteils der Funktion g auf dem Kreis $|z| = 1$ bis auf eine additive Konstante durch die Hilbert-Transformation miteinander verknüpft [2], [8], d.h. es gilt

$$\begin{aligned} f_1(\omega) &= V.P.\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{b(\tau)}{\tan\frac{\omega-\tau}{2}}\, d\tau + C_* \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon<|\omega-\tau|\leq\pi} \frac{b(\tau)}{\tan\frac{\omega-\tau}{2}}\, d\tau + C_*, \end{aligned}$$

wobei der Grenzwert fast überall existiert [6], [7]. Die Funktion f_1 ist folglich die Hilbert-Transformierte der stetigen und 2π-periodischen Funktion b. Nach dem Satz von Spanne und Stein gehört die Funktion f_1 damit zum Raum VMO [6].

Als nächstes wird das Verhalten der Funktion f_1 untersucht.

Es sei $t \in E$ beliebig. Wir haben für alle $M > 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} f_1(\omega)\, d\omega &\geq \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} \sum_{m=1}^{M} \frac{a_m(\omega)}{m^2}\, d\omega \\ &= \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m^2}\frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} a_m(\omega)\, d\omega. \end{aligned}$$

Nun ist die Funktion a_m, $1 \le m \le M$, stetig. Wir haben also

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} a_m(\omega)\, d\omega = a_m(t),$$

d.h. aber

$$\liminf_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f_1(\omega)\, d\omega \ge \sum_{m=1}^{M} \frac{a_m(t)}{m^2} \ge \sum_{m=1}^{M} \frac{m^3}{m^2} = \frac{M(M+1)}{2} \tag{21}$$

für alle $M > 1$. Damit ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f_1(\omega)\, d\omega = \infty \tag{22}$$

für alle $t \in E$.

Nun ist ebenfalls für $-h \le \omega \le h$, $r = 1 - h$,

$$\frac{1-(1-h)^2}{1-2(1-h)\cos\omega + (1-r)^2} \ge \frac{1-(1-h)^2}{1+2(1-h)+(1-r)^2} = \frac{2-h}{h} \ge \frac{1}{h}.$$

Dies ergibt mit $f_1(\omega) \ge 0$ für fast alle $\omega \in [-\pi, \pi)$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\omega) \frac{1-(1-h)^2}{1-2(1-h)\cos(t-\omega)+r^2}\, d\omega \\
&\quad \ge \frac{1}{2\pi} \int_{t-h}^{t+h} f_1(\omega) \frac{1-(1-h)^2}{1-2(1-h)\cos(t-\omega)+r^2}\, d\omega \\
&\quad \ge \frac{1}{2h\pi} \int_{t-h}^{t+h} f_1(\omega)\, d\omega.
\end{aligned}$$

Folglich haben wir

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\omega) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\omega)+r^2}\, d\omega = \infty \tag{23}$$

für alle $t \in E$, womit der Satz bewiesen ist.

Literatur

1. J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., Bd. 96, Academic Press, New York, 1981.
2. J. Garcia-Cuerva und J. Rubio De Francia, *Weighted norm Inequalities and related topics*, North-Holland Mathematics Studies, New York, 1986.
3. Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 299, Springer-Verlag, New York, 1992.
4. Ch. Pommerenke, *Persönliche Mitteilung*, Technische Universität Berlin, Berlin, 1997.
5. D. Sarason, *Functions of vanishing mean oscillation*, Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1975), 391–405.
6. E. M. Stein, *Harmonic analysis; real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, no. 43, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.
7. A. Torchinsky, *Real-variable methods in harmonic analysis*, Pure Appl. Math., Bd. 123, Academic Press, New York, 1986.
8. A. Zygmund, *Trigonometric series I,II*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Heinrich-Hertz-Institut für Nachrichtentechnik Berlin GmbH, Broadband Mobile Communication Networks, Einsteinufer 37, D-10587 Berlin, Germany

Swiss Federal Institut of Technology (ETH Zurich), Communication Technology Laboratory, ETH-Zentrum, Sternwartstrasse 7, CH-8092 Zurich, Switzerland
boche@hhi.de