DIE A-NORM EINER GRUPPE

VON
WOLFGANG KAPPE

1. Einleitung

Die Norm $N(G)$ (vgl. [1], [12]) einer Gruppe G ist der Durchschnitt der Normalisatoren aller Untergruppen U von G

$$(1) \qquad N(G) = \bigcap_U N(U \subseteq G).$$

Beschränkt man sich etwa auf endliche Gruppen G, so läßt sich $N(G)$—wie leicht zu sehen ist—auch als Durchschnitt der Normalisatoren aller maximalen zyklischen Untergruppen charakterisieren. Entsprechend läßt sich zu jeder untergruppenerblichen gruppentheoretischen Eigenschaft E unter geeigneten Voraussetzungen über die betrachteten Gruppen und die Eigenschaft E eine E-Norm $N_E(G)$ definieren. Versteht man unter einer E-Sylowgruppe von G eine E-Untergruppe von G, die in keiner umfassenderen E-Untergruppe von G enthalten ist, so ist die E-Norm $N_E(G)$ definiert als der Durchschnitt der Normalisatoren aller E-Sylowgruppen U von G

$$(2) \qquad N_E(G) = \bigcap_U N(U \subseteq G).$$

Alle E-Normen $N_E(G)$ enthalten die gewöhnliche Norm $N(G)$ als Untergruppe. Die Untersuchung der E-Normen gliedert sich, genau wie bei der gewöhnlichen Norm $N(G)$, in natürlicher Weise in die beiden Teile: (a) die Struktur der Gruppen $N_E(G)$, (b) die Einbettung von $N_E(G)$ in G.

Für die Eigenschaft $E = A =$ Kommutativität existieren A-Sylowgruppen in jeder Gruppe G und daher definiert (2) in jeder Gruppe G eine charakteristische Untergruppe $N_A(G)$, die A-Norm von G. Das Ziel dieser Arbeit ist es, das Struktur- und das Einbettungsproblem für die A-Norm zu lösen.

Das Strukturproblem für die A-Norm führt auf Gruppen, in denen jedes Element mit seinen Konjugierten vertauschbar ist. Diese Gruppen (die L-Gruppen) sind u.a. von Burnside [4], Hopkins [7] und Levi [8] untersucht worden und ihre Struktur ist wohlbekannt (vgl. Levi [8], Bruck [3]). Unsere Betrachtungen zeigen, daß genau die L-Gruppen als A-Normen möglich sind und überdies ergeben sich die bekannten Strukturaussagen über L-Gruppen hierbei besonders einfach (Satz II).

Zum Einbettungsproblem beweisen wir u.a. die folgenden beiden Sätze:

SATZ I. *Die folgenden drei Aussagen für einen Normalteiler N der Gruppe G sind äquivalent*:

(a) $N \subseteq N_A(G)$;

Received February 12, 1960.

(b) *für jede abelsche Untergruppe U von G ist das Produkt $N \cdot U$ eine L-Gruppe;*
(c) *jedes Element $x \in N$ genügt der Bedingung: für jedes Paar g, h von Elementen aus G folgt aus $[g, h] = 1$ auch $[[x, g], h] = 1$.*

SATZ III. 1. *Die von G in $N_A(G)$ induzierte Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ ist nilpotent von der Klasse $c(\mathfrak{A}) \leqq 2$.*

2. *Ein in $N_A(G)$ liegender Normalteiler N von G ohne Elemente der Ordnung 2 liegt genau dann im zweiten Zentrum $Z_2(G)$, wenn die von G in N induzierte Automorphismengruppe abelsch ist.*

3. *Für ein Element x der Gruppe G, dessen Ordnung*[1] *durch 2 nicht teilbar ist, sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*
(a) $x \in N_A(G)$;
(b) *x ist rechts-Engelsch von der Länge 2 in G;*
(c) *ist $\langle x \rangle$ der von x in G erzeugte Normalteiler, und $\mathfrak{A}$ die von G in $\langle x \rangle$ induzierte Automorphismengruppe, so liegt x in der A-Norm des Produktes $\langle x \rangle \cdot \mathfrak{A}$ (das Produkt im Holomorph von $\langle x \rangle$ verstanden);*
(d) *x genügt der (in g und h identischen) Kommutatorrelation*

$$[x, [g, h]] = [[x, g], h]^2;$$

(e) *x genügt der (in g und h identischen) Kommutatorrelation*

$$[[x, g], h] = [[x, h], g]^{-1}.$$

4. *Die Elemente mit durch 2 nicht teilbarer Ordnung*[1] *aus $N_A(G)$ liegen im dritten Zentrum $Z_3(G)$.*

Die Teile 1, 2 und 4 entsprechen den Sätzen von Wos [12] über die gewöhnliche Norm $N(G)$ und wegen $N(G) \subseteq N_A(G)$ sind die Sätze von Wos Spezialfälle von Satz III. Während jedoch kürzlich Schenkman [10] die Sätze von Wos wesentlich verbessern konnte ($N(G) \subseteq Z_2(G)$), werden weiter unten Gegenbeispiele gegen eine Ausdehnung des Schenkmanschen Resultats auf die A-Norm gegeben. Weitere Beispiele zeigen, daß die Voraussetzungen über die Ordnung der Elemente in Satz III wesentlich sind.

Ein wesentliches Hilfsmittel für diese Untersuchungen stellen die rechts-Engelschen Elemente der Länge 2 dar. Wir leiten daher zunächst einige Eigenschaften dieser Engelschen Elemente her. Insbesondere werden wir zeigen, daß die rechts-Engelschen Elemente der Länge 2 stets eine charakteristische Untergruppe $L(G)$ in G bilden.

2. Engelsche Elemente[2]

Die Engelschen Elemente einer Gruppe sind in jüngster Zeit wiederholt der Gegenstand ausführlicher Untersuchungen gewesen (vgl. [2], [5], [6], [9]).

[1] Elemente ohne endliche Ordnung haben definitionsgemäß die Ordnung Null.

[2] Einer freundlichen Mitteilung von Herrn Prof. R. H. Bruck entnehme ich, daß er ähnliche Ergebnisse über $L(G)$ gefunden hat.

Da wir uns nur für die Engelschen Elemente der Länge 2 zu interessieren haben, werden wir der Einfachheit halber die rechts-Engelschen Elemente der Länge 2 als Engelsche Elemente bezeichnen. Ist $[x, g]$ der Kommutator $x^{-1}g^{-1}xg$, so heißt ein Element x der Gruppe G (rechts-) Engelsch (von der Länge 2) in G, wenn für alle $g \in G$ gilt

$$(3) \qquad [[x, g], g] = 1.$$

LEMMA 2.1. *Jedes Engelsche Element ist mit seinen Konjugierten in G vertauschbar.*

Beweis. Aus der Engelbedingung (3) für das Element x folgt (vgl. [11], S. 77) mit $g = x \cdot h$, wenn $x^h = h^{-1}xh$ gesetzt wird

$$1 = [[x, xh], xh] = [[x, h]\cdot[x, x]^h, xh] = [[x, h], h]\,[[x, h], x]^h,$$

also $[[x, h], x] = 1$ und damit $[x, x^h] = 1$.

FOLGERUNG 2.1. *Der von einem Engelschen Element x und seinen Konjugierten erzeugte Normalteiler $\langle x\rangle$ ist abelsch. Bei allen weiteren Betrachtungen interessiert nur dieser abelsche Normalteiler $\langle x\rangle$ und wir können daher die Gruppenelemente $g \in G$ als Elemente des Endomorphismenringes von $\langle x\rangle$ auffassen.*

In dieser Schreibweise nimmt die Engelbedingung (3) die Form an

$$(4) \qquad (g - 1)^2 = 0.$$

Aus (4) folgen insbesondere

$$(5a) \quad g^{-1} = 2 - g \qquad \text{und} \qquad (5b) \quad g(g - 1) = (g - 1)g = g - 1.$$

Setzt man die Engelbedingung (4) für das Gruppenelement gh an, so ist

$$\begin{aligned} 0 &= (gh - 1)^2h^{-1}g^{-1} = gh - 2 + h^{-1}g^{-1} = gh - 2 + (2 - h)g^{-1} \\ &= gh - 2 + 2g^{-1} - hg^{-1} = gh - 2 + 2(2 - g) - hg^{-1}, \end{aligned}$$

wie sich unter Berücksichtigung von (5a) ergibt. Addiert man dazu den entsprechenden Ausdruck für $(hg - 1)^2g^{-1}h^{-1}$, so erhält man wegen $hg^{-1} = (gh^{-1})^{-1} = 2 - gh^{-1}$

$$0 = gh + 2 - 2g - (2 - gh^{-1}) + hg + 2 - 2h - gh^{-1}.$$

Dies ergibt die wichtigen Beziehungen

$$(6) \qquad hg = -gh + 2(g + h - 1),$$

$$(6a) \qquad (g - 1)(h - 1) + (h - 1)(g - 1) = 0,$$

$$(6b) \qquad [[x, g], h] = [[x, h], g]^{-1}.$$

Man sieht sehr leicht, daß mit x auch x^h und $[x, h]$ in der Menge $L(G)$

der Engelschen Elemente von G liegen. Denn es ist wegen $(g-1)^2 = 0$

$$(h-1)(g-1)^2 = h(g-1)^2 - (g-1)^2 = h(g-1)^2$$

und nach (3) ergibt sich daraus die Behauptung vermöge

$$1 = [[x, g^{h^{-1}}], g^{h^{-1}}]^h = [[x^h, g], g].$$

LEMMA 2.2. *Für die Engelschen Elemente x gelten die Relationen*

$$[x, [g, h]] = [[x, g], h]^2, \tag{7}$$

$$[[x, g], [h, g]] = 1. \tag{8}$$

Beweis. Es ist $[g, h] - 1 = 2(g-1)(h-1)$ zu zeigen. Nach (6) und (5a) ist

$$\begin{aligned} [g, h] - 1 &= g^{-1}(h^{-1}g)h - 1 = g^{-1}\{-gh^{-1} + 2(g + h^{-1} - 1)\}h - 1 \\ &= -2 + 2h + 2g^{-1} - 2g^{-1}h = 2(g-1)(h-1). \end{aligned}$$

Zum Beweis von (8) bemerken wir, daß nach (7) und (6a)

$$(g-1)([h, g] - 1) = 2(g-1)(h-1)(g-1) = -2(h-1)(g-1)^2 = 0.$$

FOLGERUNG 2.2. *Die rechts-Engelschen Elemente der Länge 2 in einer Gruppe G bilden eine charakteristische Untergruppe $L(G)$.*

Beweis. Es ist klar, daß die Menge $L(G)$ charakteristisch ist und mit x auch x^{-1} enthält. Sind x und y zwei Elemente aus $L(G)$, so ist (vgl. [11], S. 77)

$$\begin{aligned} [[yx, g], g] &= [[y, g]^x[x, g], g] = [[y, g]^x, g]^{[x,g]}[[x, g], g] \\ &= [[y, g], g^{x^{-1}}]^{x[x,g]} = [[y, g], [x^{-1}, g^{-1}]g]^{x[x,g]} \\ &= [[y, g], [x, g]]^{gx[x,g]}, \end{aligned}$$

und nach (8) folgt damit die Behauptung $[[yx, g], g] = 1$.

3. Struktur der A-Norm

Wir beginnen mit einer Bemerkung über die allgemeine E-Norm.

LEMMA 3.1. *Ist H eine Untergruppe von G, so ist*

$$H \cap N_E(G) \subseteq N_E(H).$$

Insbesondere ist stets $N_E(N_E(G)) = N_E(G)$, und daher sind die E-Sylowgruppen von $N_E(G)$ normal in $N_E(G)$.

Beweis. Jede E-Sylowgruppe U_H von H ist darstellbar als Durchschnitt einer geeigneten E-Sylowgruppe U_G von G mit H, $U_H = H \cap U_G$. Der Normalisator von U_H in H umfaßt daher mindestens $H \cap N_E(G)$.

Wir kommen nun zum Beweis von Satz I und zeigen zunächst, daß (a) und (c) äquivalent sind.

Ist $x \in N_A(G)$ und sind g und h zwei beliebige vertauschbare Elemente aus G, so liegen g und h in einer A-Sylowgruppe U von G, das Element x normalisiert U, $U^x = U$, also ist insbesondere $[g^x, h] = 1$, woraus wegen $[g, h] = 1$ die Behauptung $[[x, g], h] = 1$ folgt.

Ist umgekehrt die Bedingung (c) für $x \in N$ erfüllt und U eine beliebige A-Sylowgruppe von G, g ein festes Element aus U und h ein weiteres Element von U, so ist $[g, h] = 1$ und daher nach Voraussetzung $[[x, g], h] = 1$, also $[g^x, h] = 1$. Da dies für jedes $h \in U$ gilt, gehört g^x zum Zentralisator $Z(U \subseteq G)$ von U in G, also ist $\{U, g^x\} \supseteq U$ abelsch und da U eine A-Sylowgruppe ist, folgt $\{U, g^x\} = U$, d.h. $g^x \in U$. Dies gilt für alle $g \in U$, mithin ist $U^x \subseteq U$ und wegen $x^{-1} \in N$ sogar $U^x = U$, x gehört zum Normalisator von U in G und da U eine beliebige A-Sylowgruppe war, folgt schließlich $x \in N_A(G)$.

Zum Beweis der Äquivalenz von (b) und (c) benötigen wir einige Ergebnisse (Satz II) über L-Gruppen, die wir jetzt herleiten wollen.

Bemerkung. Über das in Satz I formulierte Ergebnis hinaus gilt: jedes Element x von G, das der in (c) auftretenden Bedingung genügt, liegt in $N_A(G)$. Beim Beweis der Äquivalenz von (a) und (c) wurde nämlich nur verwendet, das mit x auch x^{-1} der fraglichen Bedingung genügt. Aus (c) folgt aber mit $g = h$ sofort $[[x, g], g] = 1$, damit ist jedes derartige x Engelsch und daher

$$[[x^{-1}, g], h] = x^{-(g-1)(h-1)} = [[x, g], h]^{-1}.$$

FOLGERUNG 3.1. *$Z_2(G) \subseteq N_A(G) \subseteq L(G)$ und $L(G)/N_A(G)$ ist elementarabelsch vom Exponenten 2.*

Beweis. Jedes Element $y \in L(G)$ genügt der Gleichung (7), also ist für $[g, h] = 1$

$$1 = [y, [g, h]] = y^{2(g-1)(h-1)} = [[y^2, g], h],$$

d.h. y^2 liegt in $N_A(G)$.

SATZ II. *Die folgenden äquivalenten Forderungen charakterisieren die L-Gruppen:*

(a) *$N_A(G) = G$ "die A-Sylowgruppen sind normal in G";*

(b) *$L(G) = G$ "jedes Element ist mit seinen Konjugierten vertauschbar";*

(c) *für jedes Tripel f, g, h von Elementen aus G gilt*

$$[f, [g, h]] = [[f, g], h]^2.$$

Beweis. Offenbar folgt aus (a) die Bedingung (b) und aus (b) wegen (7) wieder (c). Aus (c) ergibt sich zunächst, daß jedes Element von G mit seinen Konjugierten vertauschbar ist und dann ist

$$[[f, g], h] = [h, [g, f]] = [[h, g], f]^2 = [f, [g, h]]^2 = [[f, g], h]^4,$$

also ist stets $[[f, g], h]^3 = 1$.

Ist nun insbesondere $[g, h] = 1$, so ist nach (c)

$$1 = [f, [g, h]] = [[f, g], h]^2$$

und damit $[[f, g], h] = 1$, d.h. $f \in N_A(G)$ und da f ein beliebiges Element aus G war, ist $N_A(G) = G$ und aus (c) folgt (a).

Wir können nun auch den noch ausstehenden Beweis der Äquivalenz von (b) und (c) in Satz I führen.

Sind g und h zwei beliebige vertauschbare Elemente von G, so ist ihr Erzeugnis $U = \{g, h\}$ abelsch, also nach Voraussetzung ((b) in Satz I) $N \cdot U$ eine L-Gruppe. Nach Satz II (a) folgt wegen der schon bewiesenen Äquivalenz von (a) und (c) in Satz I insbesondere $[[x, g], h] = 1$ für alle $x \in N$ damit auch (c) in Satz I.

Ist umgekehrt U eine beliebige abelsche Untergruppe von G und genügen die Elemente des Normalteilers N der Bedingung (c), so liegt N offenbar in $L(G)$. Sind dann x, y aus N und a, b aus U, so ist zunächst (vgl. [11], S. 77)

$$[[xa, b], b] = [[x, b]^a[a, b], b] = [[x, b], b]^a = 1.$$

Weiter ist nach (6b) und (7) für beliebige $x, y \in L(G)$

$$[[x, y], b] = [[x, b], y]^{-1} = [y, [x, b]] = [[y, x], b]^2 = [[x, y], b]^{-2},$$

also

$$(*) \qquad [[x, y], b]^3 = 1.$$

Berücksichtigt man, daß nach Folgerung 2.1 jedes Element aus $L(G)$ mit seinen Konjugierten vertauschbar ist, so folgt nach (6b) und (3)

$$\begin{aligned}
[[xa, yb], yb] &= [[xa, yb], b]\,[[xa, yb], y]^b \\
&= [[xa, b], b]^{[xa,y]^b}[[xa, y]^b, b]\,\,[[xa, b], y]^{[xa,y]^b \cdot b}[[xa, y]^b, y]^b \\
&= [[xa, y]^b, b] \cdot [[xa, b], y],
\end{aligned}$$

und nach (7), (*) und (c) ist das schließlich gleich

$$[[y, xa], b]^{-1} \cdot [y, [xa, b]]^{-1} = [[y, xa], b]^{-3} = [[y, x], b]^{-3} \cdot [[y, a], b]^{-3} = 1.$$

Damit gilt für alle Elemente von $N \cdot U$ die Engelbedingung und die Äquivalenz von (c) und (b) ist bewiesen.

Bemerkung 1. Zusammen mit dem im nächsten Abschnitt bewiesenen Satz III erhalten wir das Ergebnis von Levi [8] über die Struktur der L-Gruppen:

Die Klasse $c(G)$ einer L-Gruppe G ist höchstens 3.

Gibt es in G keine Elemente der Ordnung 3, so ist $c(G) \leqq 2$.

Der erste Teil folgt unmittelbar aus Satz III, Teil 1: die von G in $N_A(G) = G$ induzierte Automorphismengruppe ist $G/Z_1(G)$. Also ist $c(G) \leqq 3$. Im Beweis von Satz II haben wir gesehen, daß in einer L-Gruppe G für alle

Elementetripel f, g, $h \in G$ gilt $[[f, g], h]^3 = 1$, woraus der zweite Teil der Bemerkung folgt.

Bemerkung 2. Aus Satz I(a) und Satz II folgt insbesondere, daß $G/N_A(G)$ niemals zyklisch ist. Man sieht leicht, daß auch $G/L(G)$ nie zyklisch sein kann.

4. Die Einbettung von $N_A(G)$ in G

Wir beweisen nun den in der Einleitung angeführten Satz III.

Zum Beweis von *Teil* 1 bemerken wir, daß nach (7) und (6a)

$$\begin{aligned}([f, g] - 1)(h - 1) &= 2(f - 1)(g - 1)(h - 1)\\ &= (h - 1)2(f - 1)(g - 1) = (h - 1)([f, g] - 1),\end{aligned}$$

also ist $[f, g]h = h[f, g]$, woraus die Behauptung $x^{[[f,g],h]} = x$ für alle $x \in L(G)$ folgt.

Teil 2. Wenn die in N induzierte Automorphismengruppe abelsch ist, so gilt für alle $x \in N$ und alle $g, h \in G$

$$x^{[g,h]} = x \quad \text{oder} \quad [x, [g, h]] = 1.$$

Nach (7) ist dann aber

$$1 = [x, [g, h]] = [[x, g], h]^2,$$

woraus $[[x, g], h] = 1$, d.h. $x \in Z_2(G)$, folgt. Die Umkehrung ist trivial.

Teil 3. Nach Abschnitt 2 ist es klar, daß aus (a) auch (b) und aus (b) die Relationen (d) und (e) folgen. Eine unmittelbare Verifikation zeigt, daß (d) und (e) äquivalent sind. Sieht man einmal von (c) ab, so ist nur noch zu zeigen, daß aus (d) auch (a) folgt.

Zunächst folgt aus (d) mit $g = x$, daß x mit seinen Konjugierten vertauschbar ist. Ist nun $[g, h] = 1$, so ist nach (d) $[[x, g], h]^2 = 1$ und da der von x erzeugte abelsche Normalteiler $\langle x\rangle$ unter den angegebenen Voraussetzungen über x kein Element der Ordnung 2 enthält, ist $[[x, g], h] = 1$ und damit $x \in N_A(G)$.

Die Aussage (c) besagt, daß für Elemente mit durch 2 nicht teilbarer Ordnung die Einbettung von x in G bereits durch das Verhalten gegenüber der induzierten Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ bestimmt ist. Aus (c) folgt offenbar stets (a). Ist umgekehrt (a) vorgegeben und sind α und β zwei vertauschbare Automorphismen aus $\mathfrak{A}$, die etwa durch Elemente a und b aus G erzeugt werden, dann ist

$$[[x, \alpha], \beta]^2 = [[x, a], b]^2 = [x, [a, b]] = [x, [\alpha, \beta]] = 1$$

und daher $[[x, \alpha], \beta] = 1$ oder $x \in N_A(\langle x\rangle \cdot \mathfrak{A})$.

Teil 4. Zu zeigen ist $(f - 1)(g - 1)(h - 1) = 0$. Nach Satz III, Teil 1 ist $[[f, g], h] = 1$ und vermöge (7) folgt dann

$$0 = [[f, g], h] - 1 = 2([f, g] - 1)(h - 1) = 4(f - 1)(g - 1)(h - 1)$$

und unter den angegebenen Voraussetzungen ergibt das

$$(f - 1)(g - 1)(h - 1) = 0.$$

Damit ist Satz III vollständig bewiesen.

5. Beispiele

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß die in Satz III auftretenden Voraussetzungen auch notwendig sind.

Ist X ein abelscher Normalteiler in G vom Exponenten 2, dessen Elemente die Bedingung (7) erfüllen, so ist wegen

$$[g, h] - 1 = 2(g - 1)(h - 1) = 0$$

die von G in X induzierte Automorphismengruppe $G/Z(X \subseteq G)$ abelsch. Liegt X außerdem in $L(G)$, so muß nach (4)

$$(g^2 - 1) = (g - 1)(g + 1) = (g - 1)^2 = 0$$

sein, also ist die Induzierte Automorphismengruppe vom Exponenten 2.

(a) Die Gruppe X sei elementarabelsch vom Exponenten 2 und dem Rang 4, x_1, x_2, x_3, x_4 eine Basis für X und H die durch die folgenden Permutationen der Basiselemente gegebene Untergruppe der Automorphismengruppe von X: (12)(34), (13)(24), (14)(23). Im Holomorph von X sei G das Produkt von X und H. Dann liegt offenbar X in $L(G)$ und da H abelsch ist, muß $N_A(G) = Z_2(G)$ sein; die Elemente x_i liegen nicht in $Z_2(G)$. Das Beispiel zeigt, daß $L(G)$ und $N_A(G)$ nicht übereinstimmen müssen, auch $L(G)$ nicht notwendig im zweiten Zentrum liegt, wenn die von G in $L(G)$ induzierte Automorphismengruppe abelsch ist.

(b) X sei wieder elementarabelsch vom Exponenten 2 und dem Rang 3, x_1, x_2, x_3 eine Basis für X und $x_4 = x_1 x_2 x_3$. Der Zyklus (1234) erzeugt eine zyklische Untergruppe H der Automorphismengruppe von X und X liegt nicht in $L(X \cdot H)$, aber jedes Element von X genügt der Bedingung (7).

(c) Es sei G_k die durch die Erzeugenden $g_1, \cdots, g_k$ und die definierenden Relationen

$$g_i^4 = 1, \qquad [g_i, g_j]^2 = 1, \qquad [[g_i, g_j], g_k] = 1$$

gegebene nilpotente Gruppe von der Klasse 2 und der Ordnung $2^{k(k+3)/2}$. Jedes Element von G_k läßt sich durch ein Zahlenschema $(a_i ; b_{jn})$ mit $1 \leqq i \leqq k$, $1 \leqq j < n \leqq k$, und $a_i \bmod 4$, $b_{jn} \bmod 2$ beschreiben. Das Produkt errechnet sich gemäß

$$(a_i ; b_{jn})(a_i^* ; b_{jn}^*) = (a_i + a_i^* ; b_{jn} + b_{jn}^* + a_j^* a_n).$$

Die Elemente $(a_i ; b_{jn})$ und $(a_i^* ; b_{jn}^*)$ sind genau dann vertauschbar, wenn $a_j^* a_n \equiv a_j a_n^* \bmod 2$ ist.

Wir betrachten nun die Menge A der Folgen α ohne Wiederholung der

Elemente $1, \cdots, k$ einschließlich der leeren Folge o. Dann sei X eine elementarabelsche Gruppe vom Exponenten 2 und dem Rang 2^k, in der eine Basis ausgezeichnet und mit den Elementen von A indiziert ist. Man überlegt sich leicht, daß sich durch die folgende Festsetzung die Elemente von G_k zu Automorphismen von X machen lassen:

$$x_\alpha^{g_i^{-1}} = x_\alpha^{g_i} = x_\beta ,$$

wobei β durch Weglassen von i aus α, wenn i in α vorkommt, anderenfalls durch Einschieben von i in α entsteht. Die von G_k in X induzierte Automorphismengruppe ist dann abelsch und vom Exponenten 2. Um nun zu zeigen, daß $X \subseteq N_A(X \cdot G_k)$, muß für zwei vertauschbare Elemente $g = (a_i ; b_{jn})$ und $h = (\overset{*}{a}_i ; \overset{*}{b}_{jn})$ und $x \in N$ nachgewiesen werden, daß

$$x^{(h-1)(g-1)} = 1,$$

d.h.

$$x^{hg} = x^h x^g x.$$

Es genügt dies für die Basiselemente x_α zu zeigen und da x_α^{hg}, x_α^h, x_α^g, x_α Basiselemente sind, müßte stets einer der drei Fälle auftreten:

$$x_\alpha^{hg} = x_\alpha \quad \text{und} \quad x_\alpha^h = x_\alpha^g \quad (\text{d.h. } a_i + \overset{*}{a}_i \equiv 0 \bmod 2 \text{ für alle } i),$$

$$x_\alpha^h = x_\alpha \quad \text{und} \quad x_\alpha^{hg} = x_\alpha^g \quad (\text{d.h. } \overset{*}{a}_i \equiv 0 \bmod 2 \text{ für alle } i),$$

$$x_\alpha^g = x_\alpha \quad \text{und} \quad x_\alpha^{hg} = x_\alpha^h \quad (\text{d.h. } a_i \equiv 0 \bmod 2 \text{ für alle } i).$$

In der Tat ist wegen der Vertauschbarkeit von g und h, $\overset{*}{a}_j a_n \equiv a_j \overset{*}{a}_n \bmod 2$, also wenn nicht für alle i gilt $a_i + \overset{*}{a}_i \equiv 0 \bmod 2$, so ist etwa $a_j \equiv 0$ und dann ist wegen $a_i \equiv \overset{*}{a}_j a_i \equiv a_j \overset{*}{a}_i \equiv 0$ für alle i und damit ist $X \in N_A(X \cdot G_k)$ bewiesen.

Die Gruppe X liegt zwar in $N_A(X \cdot G_k)$, jedoch nicht im k-ten Zentrum $Z_k(X \cdot G_k)$, weil sonst aus

$$x_0^{(g_1-1)(g_2-1)\cdots(g_k-1)} = 1$$

folgen würde, daß $x_{12\cdots k}$ nicht von den übrigen Basiselementen x_α unabhängig wäre.

Die Beispiele (a) bis (c) zeigen, daß sich Satz III auch in modifizierter Fassung nicht auf Elemente mit durch 2 teilbarer Ordnung übertragen läßt. Durch eine geringfügige Änderung der Konstruktionen sieht man das auch für Elemente ohne endliche Ordnung.

(d) Das folgende Beispiel zeigt, daß für jede Primzahl $p \neq 2$ eine Gruppe existiert, in deren A-Norm eine nilpotente Gruppe von genau der Klasse 2 induziert wird. Dazu sei H eine Gruppe der Ordnung p^3 mit den Erzeugenden a, b, $[a, b]$ und dem Exponenten p. Jedes Element von H läßt dann eindeutig in der Form $g = a^i b^j [a, b]^k$ $(0 \leqq i < p,\ 0 \leqq j < p,\ 0 \leqq k < p)$ schreiben. Ist dann X eine elementarabelsche Gruppe vom Exponenten p und dem

Range 4, so sei

$$x_\nu^g = x_1^{\alpha_{\nu 1}(g)} x_2^{\alpha_{\nu 2}(g)} x_3^{\alpha_{\nu 3}(g)} x_4^{\alpha_{\nu 4}(g)}$$

gesetzt mit $\alpha_{11}(g) = -\frac{1}{2}ij - i - j - k + 1$, $\alpha_{12}(g) = i$, $\alpha_{13}(g) = j$, $\alpha_{14}(g) = k + \frac{1}{2}ij$, $\alpha_{2\rho}(g) = \alpha_{1\rho}(ag)$, $\alpha_{3\rho}(g) = \alpha_{1\rho}(bg)$, $\alpha_{4\rho}(g) = \alpha_{1\rho}([a, b]\cdot g)$. Unmittelbare Verifikation zeigt, daß H eine Automorphismengruppe von X ist und $X \subseteq L(X\cdot H) = N_A(X\cdot H)$.

6. Bemerkungen

Die wichtige Rolle, die die Relationen (6b) und (7) bei der Untersuchung spielten, legt es nahe, sich allgemeiner für solche Relationen zu interessieren. Wir geben nur noch die Ergebnisse an, da die Beweise keine neuen Gesichtspunkte bringen. Die Relation

$$(9) \qquad [x, [g, h]] = [[x, g], h]^m \qquad \text{mit } m \neq 0$$

definiert als identische Relation in g und h wieder gewisse Elemente x der Gruppe G. Setzt man in (9) $g = x$, so sieht man, daß zunächst wieder $[x, [x, h]] = 1$ gilt und dann folgt leicht, daß $x^m \in L(G)$. Bezeichnet X_m den von den der Relation (9) genügenden Elementen x erzeugten Normalteiler von G, so gilt wie in Satz III, Teil 1, daß die von G in X_m induzierte Automorphismengruppe nilpotent und ihre Klasse höchstens gleich 2 ist. Wegen $[x, [x, h]] = 1$ ist X_m eine L-Gruppe. Aus der Tatsache, daß x^m Engelsch ist folgt dann nach (7)

$$(10) \qquad [x^m, [g, h]] = [[x^m, g], h]^2$$

und der Vergleich zwischen den Relationen (9) und (10) liefert für $m \neq 2$ neue Relationen. Z.B. ist stets

$$(m - 2)\,([g, h] - 1) = 0$$

und

$$m(m - 2)\,(h - 1)\,(g - 1) = 0.$$

Für ungerades m und $x \in X_m$ ist $x^m \in Z_3(G)$. Die Elemente des zweiten Zentrums werden gerade durch die Relation (9) mit $m = 1$ charakterisiert. Schließlich bemerken wir noch, daß die Relation

$$(11) \qquad [[x, g], h] = [[x, h], g]^{1-m}$$

zur Relation (9) äquivalent ist.

Literatur

1. R. Baer, *Der Kern, eine charakteristische Untergruppe*, Compositio Math., Bd. 1 (1934), S. 254–283.
2. ———, *Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen*, Math. Ann., Bd. 133 (1957), S. 256–270.
3. R. H. Bruck, *A survey of binary systems*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (n.F.), Heft 20, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.

4. W. Burnside, *On groups in which every two conjugate operations are permutable*, Proc. Lond. Math. Soc., vol. 35 (1902), S. 28–37.
5. K. W. Gruenberg, *Two theorems on Engel groups*, Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 49 (1953), S. 377–380.
6. ———, *The Engel elements of a soluble group*, Illinois J. Math., vol. 3 (1959), S. 151–168.
7. C. Hopkins, *Finite groups in which conjugate operations are commutative*, Amer. J. Math., vol. 51 (1929), S. 35–41.
8. F. W. Levi, *Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions*, J. Indian Math. Soc. (N.S.), vol. 6 (1942), S. 87–97.
9. E. Schenkman, *A generalization of the central elements of a group*, Pacific J. Math., vol. 3 (1953), S. 501–504.
10. ———, *On the norm of a group*, Illinois J. Math., vol. 4 (1960), S. 150–152.
11. W. Specht, *Gruppentheorie*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956.
12. L. T. Wos, *On commutative prime power subgroups of the norm*, Illinois J. Math., vol. 2 (1958), S. 271–284.

Universität Frankfurt
Frankfurt am Main, Deutschland
Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach, Deutschland