DIE EULERSCHE FUNKTION ENDLICHER AUFLÖSBARER GRUPPEN

G. A. Miller zum Gedächtnis

VON

WOLFGANG GASCHÜTZ

1. Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe und $G^{(s)} = (G_1, \cdots, G_s)$ ein geordnetes System von s (nicht notwendig verschiedenen) Elementen $G_i \in \mathfrak{G}$, kurz ein s-*System* von $\mathfrak{G}$. Mit $\langle G_1, \cdots, G_s\rangle$ bezeichnen wir das Erzeugnis der Elemente $G_1, \cdots, G_s$, d.h. die kleinste Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die diese Elemente enthält. Ist $\langle G_1, \cdots, G_s\rangle = \mathfrak{G}$, so heisse $G^{(s)}$ ein s-*Erzeugendensystem* von $\mathfrak{G}$. Für eine endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ werde mit $\varphi_{\mathfrak{G}}(s)$ die Anzahl der verschiedenen s-Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ bezeichnet. $\varphi_{\mathfrak{G}}$ ist also eine auf der Menge der natürlichen Zahlen s definierte Funktion, die wir nach P. HALL[1] die *Eulersche Funktion von* $\mathfrak{G}$ nennen. Für eine zyklische Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ der Ordnung n ist $\varphi_{\mathfrak{Z}_n}(1)$ gleich der Eulerschen Funktion $\varphi(n)$ der elementaren Zahlentheorie[2].

Bezeichnen wir mit $|\mathfrak{G}|$ die Ordnung[3] von $\mathfrak{G}$, so gilt offenbar für die Anzahl aller s-Systeme von $\mathfrak{G}$:

$$|\mathfrak{G}|^s = \sum\nolimits_{\mathfrak{A}} \varphi_{\mathfrak{A}}(s), \qquad \mathfrak{A} \text{ Untergruppe von } \mathfrak{G}.$$

Mit $\varphi_1(s) = 1$ für die Einsgruppe 1 erhält man hieraus die Rekursionsformel

$$(1.1) \qquad \varphi_{\mathfrak{G}}(s) = |\mathfrak{G}|^s - \sum\nolimits_{\mathfrak{A}} \varphi_{\mathfrak{A}}(s), \qquad \mathfrak{A} \text{ echte Untergruppe von } \mathfrak{G}.$$

Die Bedeutung der Eulerschen Funktion liegt in folgendem: Es ist $\varphi_{\mathfrak{G}}(s) \neq 0$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{G}$ von s Elementen erzeugt wird. Genauer gilt: *Die Anzahl der verschiedenen mit* $\mathfrak{G}$ *isomorphen Faktorgruppen der von s freien Elementen* $X_1, \cdots, X_s$ *erzeugten Gruppe* $\mathfrak{F}^{(s)}$ *ist*

$$\varphi_{\mathfrak{G}}(s)/A_{\mathfrak{G}}, \qquad A_{\mathfrak{G}} \textit{ Ordnung der Automorphismengruppe von } \mathfrak{G}.$$

Zwei durch $X_i \to G_i$ bzw. $X_i \to H_i$, $i = 1, \cdots, s$, induzierte Homomorphismen von $\mathfrak{F}^{(s)}$ auf $\mathfrak{G}$ haben nämlich genau dann den gleichen Kern, wenn $G_i = H_i^{\sigma}$ mit einem Automorphismus σ von $\mathfrak{G}$ für $i = 1, \cdots, s$ besteht[4].

Wir stellen uns die Aufgabe, für endliche auflösbare Gruppen der Eulerschen Funktion eine Form zu geben, die sich weitgehend auf den natürlichen Aufbau dieser Gruppen stützt.

Received May 18, 1959. The editors regret that this paper was received too late to be included in the G. A. Miller Memorial Issue.

[1] Siehe [3] am Schluss der Arbeit.

[2] Für die hier betrachtete Verallgemeinerung der Eulerschen Funktion erweist sich die vorgenommene Änderung der funktionalen Schreibweise als zweckmässig.

[3] Mit $|\mathfrak{X}|$ bezeichnen wir im folgenden allgemein die Anzahl der Elemente der Menge $\mathfrak{X}$.

[4] Siehe [3].

2. Zunächst sei noch in einer beliebigen endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ ein Normalteiler $\mathfrak{N}$ gegeben und $(\mathfrak{N}\hat{G}_1, \cdots, \mathfrak{N}\hat{G}_s)$ ein s-Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Wie in einer früheren Note[5] gezeigt wurde, ist die Anzahl der s-Erzeugendensysteme $(G_1, \cdots, G_s)$ von $\mathfrak{G}$ mit $G_i \in \mathfrak{N}\hat{G}_i$, $i = 1, \cdots, s$, gleich

$$\varphi_{\mathfrak{G},\mathfrak{N}}(s) = |\mathfrak{N}|^s + \sum_{\nu=1}^{m} (-1)^\nu \sum_{i_1 < \cdots < i_\nu} \varepsilon_{\mathfrak{M}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{M}_{i_\nu}} \cdot |\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{M}_{i_\nu}|^s,$$

wobei die Summation auf der rechten Seite über die verschiedenen maximalen Untergruppen $\mathfrak{M}_i$ von $\mathfrak{G}$ erstreckt wird, deren Anzahl m sei. Es ist hierin ferner

$$\varepsilon_{\mathfrak{A}} = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathfrak{N}\mathfrak{A} \neq \mathfrak{G}, \\ 1 & \text{für } \mathfrak{N}\mathfrak{A} = \mathfrak{G}. \end{cases}$$

Da jedes s-Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ in einem eindeutig bestimmten s-Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ liegt, so ergibt sich, wenn alle s-Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ durchlaufen werden

Satz 1. *Ist $\mathfrak{N}$ Normalteiler der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist*

$$\varphi_{\mathfrak{G}}(s) = \varphi_{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}}(s) \cdot \varphi_{\mathfrak{G},\mathfrak{N}}(s).$$

Die Aussage dieses Satzes wird besonders einfach, wenn $\mathfrak{N}$ minimaler auflösbarer Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, da in diesem Falle

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{M}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{M}_{i_\nu}) = \mathfrak{G}, \qquad i_1 < \cdots < i_\nu,$$

dann und nur dann besteht, wenn $\nu = 1$ und $\mathfrak{M}_{i_1} \cap \mathfrak{N} = 1$ ist; d.h., es gilt

Satz 2. *Ist $\mathfrak{N}$ minimaler auflösbarer Normalteiler der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist*

$$\varphi_{\mathfrak{G}}(s) = \varphi_{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}}(s) \cdot (|\mathfrak{N}|^s - a),$$

a Anzahl der Komplemente[6] *von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$.*

Vor der Bestimmung der Anzahl a für auflösbare Gruppen $\mathfrak{G}$ muss eine kurze Zwischenbetrachtung eingeschaltet werden.

3. Es sei $\mathfrak{H}$ eine (nicht notwendig kommutative) Gruppe, für die eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit den Eigenschaften (1), (2), (3), (4) als Operatorenbereich erklärt ist:

(1): $(H_1 H_2)^G = H_1^G H_2^G$
(2): $H^{G_1 G_2} = (H^{G_1})^{G_2}$
(3): $H^1 = H$

für alle $H, H_1, H_2 \in \mathfrak{H}$, $G, G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$. Hierdurch wird also $\mathfrak{G}$ homomorph

[5] [2].

[6] Als Komplement eines Normalteilers $\mathfrak{N}$ in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir allgemein eine Untergruppe $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ mit den Eigenschaften: $\mathfrak{N}\mathfrak{K} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K} = 1$.

auf eine Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathfrak{H}$ abgebildet. Der Kern dieser Abbildung heisse der *Zentralisator von* $\mathfrak{H}$.

(4): *Das Bild dieser Abbildung umfasst die inneren Automorphismen von* $\mathfrak{H}$.

$\mathfrak{H}$ werde dann $\mathfrak{G}$-*Gruppe* genannt. In sinngemässer Verallgemeinerung lassen sich die bekannten Begriffe $\mathfrak{G}$-Homomorphismus, $\mathfrak{G}$-Isomorphismus, $\mathfrak{G}$-Endomorphismus, $\mathfrak{G}$-Untergruppe, $\mathfrak{G}$-Kompositionsreihe aus der Theorie der kommutativen Operatorgruppen auf $\mathfrak{G}$-Gruppen übertragen. Die Bedingung (4) gewährleistet dabei die Gültigkeit der im folgenden benutzten Sätze der elementaren Gruppentheorie auch für $\mathfrak{G}$-Gruppen[7].

Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ auf Grund der Festsetzung

$$(\mathfrak{A}B)^G = G^{-1}\mathfrak{A}BG, \qquad B \in \mathfrak{B}, \quad G \in \mathfrak{G},$$

eine $\mathfrak{G}$-Gruppe. Wenn im folgenden von solchen Faktorgruppen als $\mathfrak{G}$-Gruppen die Rede ist, so soll $\mathfrak{G}$ stets in dieser Weise als Operatorenbereich verstanden werden. Der oben definierte Begriff des Zentralisators ist dann eine Verallgemeinerung der in der Gruppentheorie üblichen Bezeichnung.

4. Wir wenden uns nun der Bestimmung der Zahl a aus Satz 2 zu. Dazu sei $\mathfrak{G}$ auflösbar und

$$H\colon \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{N}_0 \supset \mathfrak{N}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{N}_{r-1} \supset \mathfrak{N}_r \supset 1, \quad \mathfrak{N}_r = \mathfrak{N},$$

eine durch $\mathfrak{N}$ gehende Hauptreihe von $\mathfrak{G}$. Als Gruppen sind die Hauptfaktoren $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ abelsch und als $\mathfrak{G}$-Gruppen einfach, d.h. ohne eigentliche $\mathfrak{G}$-Untergruppen. Ihr $\mathfrak{G}$-Endomorphismenbereich bildet daher nach einem bekannten Satz von I. Schur einen Körper. Unter den Hauptfaktoren $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ von H betrachten wir diejenigen, die in $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_{i+1}$ ein Komplement besitzen, und die ausserdem $\mathfrak{G}$-isomorph mit $\mathfrak{N}$ sind. Ihre Anzahl sei α und E sei der $\mathfrak{G}$-Endomorphismenkörper von $\mathfrak{N}$. Es werde ferner

$$\zeta = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathfrak{N} \text{ unter } \mathfrak{G} \text{ elementweise fest} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt. Dann gilt:

Satz 3. *Die Anzahl a der Komplemente des minimalen Normalteilers $\mathfrak{N}$ der endlichen auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ ist, falls $a \neq 0$ ist,*

$$a = |\,\mathfrak{N}\,|^{\zeta}|\,\mathrm{E}\,|^{\alpha-1}.$$

Der Beweis wird in einige Hilfssätze gegliedert.

Hilfssatz 1. *Ist $\mathfrak{N}$ minimaler Normalteiler der endlichen auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$, Z sein Zentralisator in $\mathfrak{G}$, und ist $\mathfrak{L}$ ein unter $\mathfrak{G}$ normales Komplement von $\mathfrak{N}$ in Z, so gibt es ein Komplement $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$, für das $\mathfrak{K} \cap \mathrm{Z} = \mathfrak{L}$*

[7] Für die Beweise siehe [4].

ist. Ist umgekehrt $\mathfrak{K}$ *ein Komplement von* $\mathfrak{N}$ *in* $\mathfrak{G}$*, so ist* $\mathfrak{K} \cap Z$ *ein unter* $\mathfrak{G}$ *normales Komplement von* $\mathfrak{N}$ *in* Z.

Beweis. Die letzte Behauptung des Satzes ist trivial, da $\mathfrak{K} \cap Z$ normal unter $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}\mathfrak{N}$ ist.

Für $\mathfrak{N} = Z$ ist die erste Behauptung ein bekannter Satz[8]. Sei $\mathfrak{N} \subset Z$. Dann ist $Z/\mathfrak{L}$ minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ und in $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ sein eigener Zentralisator. Also besitzt $Z/\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ ein Komplement $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$. $\mathfrak{K}$ ist Komplement von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{K} \cap Z = \mathfrak{L}$.

HILFSSATZ 2. *Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes* 1 *gilt für die Anzahl der Komplemente von* $\mathfrak{N}$ *in* $\mathfrak{G}$:

$$a = |\mathfrak{N}|^{\mathfrak{r}} \cdot a_0,$$

a_0 *Anzahl der unter* $\mathfrak{G}$ *normalen Komplemente von* $\mathfrak{N}$ *in* Z.

Beweis. Ist $\mathfrak{N} = Z$, also $a_0 = 1$, so sind nach einem bekannten Satz[9] alle Komplemente von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert. Diese Anzahl ist daher gleich dem Index $|\mathfrak{N}|^{\mathfrak{r}}$ des Normalisators eines solchen Komplementes.

Der Fall $\mathfrak{N} \subset Z$ lässt sich wie beim Beweis des Hilfssatzes 1 hierauf zurückführen: Dann sind alle Komplemente von $Z/\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ unter $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ konjugiert. Ihre Anzahl ist daher gleich $|\mathfrak{N}|^{\mathfrak{r}}$. Durchläuft $\mathfrak{L}$ die a_0 unter $\mathfrak{G}$ normalen Komplementen von $\mathfrak{N}$ in Z, so erhält man nach Hilfssatz 1 die behauptete Anzahlformel; w.z.b.w.

In der Sprache der $\mathfrak{G}$-Gruppentheorie sind die unter $\mathfrak{G}$ invarianten Komplemente von $\mathfrak{N}$ in Z genau die $\mathfrak{G}$-Komplemente[10] von $\mathfrak{N}$ in Z, $\mathfrak{N}$ und Z als $\mathfrak{G}$-Gruppen betrachtet. Wie eine leichte Rechnung zeigt, erhält man diese aus einem festen $\mathfrak{G}$-Komplement $\mathfrak{L}_0$ dadurch, dass man einen $\mathfrak{G}$-Homomorphismus c von $\mathfrak{L}_0$ in $\mathfrak{N}$ wählt und die Menge $\mathfrak{L} = (L_0 L_0^c \mid L_0 \in \mathfrak{L}_0)$ bildet. Das ergibt

HILFSSATZ 3.

$$a_0 = |\,\mathfrak{G}\text{-Hom}\,(\mathfrak{L}_0, \mathfrak{N})\,|.$$

Bezeichnen wir allgemein mit $\alpha_{\mathfrak{N}}(K)$ die Anzahl der in einer $\mathfrak{G}$-Kompositionsreihe K einer $\mathfrak{G}$-Gruppe $\mathfrak{H}$ auftretenden $\mathfrak{G}$-Kompositionsfaktoren, die $\mathfrak{G}$-isomorph mit $\mathfrak{N}$ sind und die ausserdem in $\mathfrak{H}$ ein $\mathfrak{G}$-Komplement besitzen, so gilt

HILFSSATZ 4. *Es existiert eine* $\mathfrak{G}$*-Kompositionsreihe* K *für* $\mathfrak{L}_0$ *mit* $\alpha_{\mathfrak{N}}(K) = \alpha - 1$.

Beweis. $\mathfrak{L}_0$ und $Z/\mathfrak{N}$ sind $\mathfrak{G}$-isomorph. Wir konstruieren daher eine

---

[8] Siehe [1], Seite 651, Proposition 2.

[9] Siehe [1], Seite 651, Proposition 2.

[10] Als $\mathfrak{G}$-Komplement einer $\mathfrak{G}$-Untergruppe $\mathfrak{M}$ in einer $\mathfrak{G}$-Gruppe $\mathfrak{H}$ bezeichnen wir allgemein eine $\mathfrak{G}$-Untergruppe $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ mit den Eigenschaften: $\mathfrak{H} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{K}$.

$\mathfrak{G}$-Kompositionsreihe für $\mathrm{Z}/\mathfrak{N}$ mit der behaupteten Eigenschaft. Dazu werde die zur Formulierung des Satzes 3 benutzte Hauptreihe H von $\mathfrak{G}$ bis $\mathfrak{N}_r$ betrachtet und dieser Teil in Z projiziert:

$$\mathfrak{N}_0 \cap \mathrm{Z} \supseteq \mathfrak{N}_1 \cap \mathrm{Z} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{N}_r \cap \mathrm{Z}.$$

Dadurch wird eine $\mathfrak{G}$-Kompositionsreihe K für $\mathrm{Z}/\mathfrak{N}$ induziert (eventuell mit Wiederholungen). Da $\mathfrak{G}$-isomorphe Gruppen den gleichen Zentralisator haben, muss jeder Hauptfaktor $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ von H, der $\mathfrak{G}$-isomorph mit $\mathfrak{N}$ ist, in Z liegen; er wird bei dieser Projektion also nicht auf die Einsgruppe abgebildet. Ist $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ ausserdem in $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_{i+1}$ komplementierbar, so hat $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ nach Hilfssatz 1 in $\mathrm{Z}/\mathfrak{N}_{i+1}$ ein $\mathfrak{G}$-Komplement und umgekehrt. Ist $\mathfrak{N}$ komplementierbar in $\mathfrak{G}$, so ist also die Anzahl der komplementierbaren $\mathfrak{G}$-Kompositionsfaktoren von K, die $\mathfrak{G}$-isomorph mit $\mathfrak{N}$ sind gleich $\alpha - 1$; w.z.b.w.

Satz 3 ist nun vollständig bewiesen, wenn wir zeigen

HILFSSATZ 5. *Ist $\mathfrak{H}$ eine endliche $\mathfrak{G}$-Gruppe mit einer $\mathfrak{G}$-Kompositionsreihe*

$$K\colon\quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \supset \mathfrak{H}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{H}_t = 1,$$

so ist

$$|\ \mathfrak{G}\text{-Hom}\ (\mathfrak{H}, \mathfrak{N})\ | = |\ \mathrm{E}\ |^{\alpha_{\mathfrak{N}}(K)}.$$

Beweis. Ist c ein nichttrivialer $\mathfrak{G}$-Homomorphismus von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{C}$ sein Kern $\mathfrak{H}_i \not\subseteq \mathfrak{C}$, $\mathfrak{H}_{i+1} \subseteq \mathfrak{C}$, so bestehen, da $\mathfrak{N}$ als $\mathfrak{G}$-Gruppe einfach ist, die folgenden $\mathfrak{G}$-Isomorphismen

$$\mathfrak{H}_i/\mathfrak{H}_{i+1} \cong \mathfrak{H}/\mathfrak{C} \cong \mathfrak{N}.$$

Es ist ausserdem

$$\mathfrak{H}_i\mathfrak{C} = \mathfrak{H}, \qquad (\mathfrak{H}_i/\mathfrak{H}_{i+1})(\mathfrak{C}/\mathfrak{H}_{i+1}) = \mathfrak{H}/\mathfrak{H}_{i+1}\,.$$

Für $\alpha_{\mathfrak{N}}(K) = 0$ ist daher Hilfssatz 5 richtig. Ist $\mathfrak{H}_{t-1}$ nicht $\mathfrak{G}$-isomorph mit $\mathfrak{N}$ oder in $\mathfrak{H}$ als $\mathfrak{G}$-Gruppe nicht komplementierbar, so liegt $\mathfrak{H}_{t-1}$ im Kern jedes $\mathfrak{G}$-Homomorphismus von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{N}$. Ist $\mathfrak{H}_{t-1} \cong \mathfrak{N}$ (bezüglich $\mathfrak{G}$) und also

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{t-1} \times \bar{\mathfrak{H}}, \qquad \bar{\mathfrak{H}}\ \ \mathfrak{G}\text{-Untergruppe von } \mathfrak{H},$$

$$\bar{\mathfrak{H}} \cong \mathfrak{H}/\mathfrak{H}_{t-1} \qquad (\text{bezüglich } \mathfrak{G}),$$

so ist

$$|\ \mathfrak{G}\text{-Hom}\ (\mathfrak{H}, \mathfrak{N})\ | = |\ \mathrm{E}\ | \cdot |\ \mathfrak{G}\text{-Hom}\ (\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_{t-1}\,, \mathfrak{N})\ |.$$

In beiden Fällen ergibt sich nun der Hilfssatz durch vollständige Induktion aus seiner Gültigkeit für $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_{t-1}$.

5. Zur expliziten Ausgestaltung der Rekursionsformel des Satzes 2 seien nun $\mathfrak{E}_1, \cdots, \mathfrak{E}_h$ die bezüglich $\mathfrak{G}$-Isomorphie verschiedenen Typen einfacher $\mathfrak{G}$-Gruppen, die unter den Hauptfaktoren von H auftreten. Es mögen dabei genau α_i vom Typ $\mathfrak{E}_i$ ein Komplement besitzen, genau β_i vom Typ $\mathfrak{E}_i$ nicht komplementierbar sein. E_i sei der $\mathfrak{G}$-Endomorphismenkörper von $\mathfrak{F}_i$. Ferner sei

$$\zeta_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathfrak{F}_i \text{ unter } \mathfrak{G} \text{ elementweise fest} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt:

Satz 4.

$$\varphi_{\mathfrak{G}}(s) = \prod_{i=1}^{h} |\,\mathfrak{F}_i\,|^{\beta_i s} \prod_{k=1}^{h} (|\,\mathfrak{F}_k\,|^{s} - |\,\mathfrak{F}_k\,|^{\zeta_k})(|\,\mathfrak{F}_k\,|^{s} - |\,\mathfrak{F}_k\,|^{\zeta_k}\,|\,\mathrm{E}_k\,|)$$

$$\cdots(|\,\mathfrak{F}_k\,|^{s} - |\,\mathfrak{F}_k\,|^{\zeta_k}\,|\,\mathrm{E}_k\,|^{\alpha_k - 1}).$$

Beweis. Die für die Kompositionsreihe H von $\mathfrak{G}$ vorgenommene Klassifizierung der Hauptfaktoren überträgt sich auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ und die hierin durch H induzierte Hauptreihe. Dabei behalten ζ_i und $|\,\mathrm{E}_i\,|$ ihre Werte. Der Satz ergibt sich nun aus Satz 2 und Satz 3 durch vollständige Induktion nach der Ordnung von $\mathfrak{G}$; w.z.b.w.

Ist $|\,\mathfrak{F}_i\,| = p_i^{\lambda_i}$, p_i Primzahl, κ_i der Grad des Endomorphismenkörpers E_i über seinem Primkörper der Charakteristik p_i, so lässt sich Satz 4 auch in der folgenden Gestalt schreiben:

Satz 4a.

$$\varphi_{\mathfrak{G}}(s) = \prod_{i=1}^{h} p_1^{\lambda_i \beta_i s} \prod_{k=1}^{h} (p_k^{\lambda_k s} - p_k^{\lambda_k \zeta_k}) \cdots (p_k^{\lambda_k s} - p_k^{\lambda_k \zeta_k + (\alpha_k - 1)\kappa_k}).$$

6. Es soll nun geklärt werden, wann zwei endliche auflösbare Gruppen die gleiche Eulersche Funktion liefern.

Satz 5. *Sind $\mathfrak{G}$ und Γ endliche Gruppen, und ist für alle natürlichen Zahlen s*

$$\varphi_{\mathfrak{G}}(s) = t^s(p_1^{c_1 s} - d_1) \cdots (p_m^{c_m s} - d_m)$$

$$= \tau^s(\pi_1^{\gamma_1 s} - \delta_1) \cdots (\pi_\mu^{\gamma_\mu s} - \delta_\mu) = \varphi_\Gamma(s)$$

mit natürlichen Zahlen t, τ, c_i, d_i, γ_k, δ_k und Primzahlen p_i, π_k, so ist $t = \tau$, $m = \mu$ und bei geeigneter Numerierung $p_i = \pi_i$, $c_i = \gamma_i$, $d_i \neq \delta_i$, $i = 1, \cdots, m$.

Beweis. Es sei C der komplexe Zahlkörper. Wir betrachten die formalen Summen

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^s, \qquad a_n \in C$$

mit nur endlich vielen von 0 verschiedenen a_n, die wir *Dirichlet-Polynome über C* nennen wollen. Bei komponentenweiser Addition

$$\sum a_n n^s + \sum b_n n^s = \sum (a_n + b_n) n^s$$

und der Multiplikation

$$\sum a_n n^s \cdot \sum b_n n^s = \sum c_n n^s, \qquad c_n = \textstyle\sum_{kl=n} a_k b_l,$$

bildet die Menge $\mathfrak{D}(C)$ der Dirichlet-Polynome über C einen Ring, der sich mittels der durch

$$n^s \to x_{q_1}^{\sigma_1} \cdots x_{q_r}^{\sigma_r}, \qquad n = q_1^{\sigma_1} \cdots q_r^{\sigma_r} \text{ in kanonischer Primfaktorzerlegung,}$$

induzierten Abbildung als isomorph mit dem Polynomring $C[x_2, x_3, x_5, \cdots]$ in den unendlich vielen, den rationalen Primzahlen zugeordneten Unbestimmten $x_2, x_3, x_5, \cdots$ als isomorph erweist.

Aus der Rekursionsformel (1.1) folgt, dass die Eulersche Funktion $\varphi_{\mathfrak{G}}(s)$ die Form eines Dirichlet-Polynoms hat. Auf Grund des Vandermondeschen Determinantensatzes ist dieses durch seine Werte auf der Menge der natürlichen Zahlen eindeutig bestimmt. Aus $\varphi_{\mathfrak{G}} = \varphi_{\Gamma}$ folgt daher für die zugeordneten Polynome aus $C[x_2, x_3, x_5, \cdots]$:

$$\begin{aligned} x_{t_1}^{e_1} \cdots x_{t_l}^{e_l}(x_{p_1}^{c_1} - d_1) \cdots (x_{p_m}^{c_m} - d_m) \qquad & \\ = x_{\tau_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{\tau_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}(x_{\pi_1}^{\gamma_1} - \delta_1) \cdots (x_{\pi_\mu}^{\gamma_\mu} - \delta_\mu) & \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$t = t_1^{e_1} \cdots t_l^{e_l}, \quad \tau = \tau_1^{\varepsilon_1} \cdots \tau_\lambda^{\varepsilon_\lambda}, \text{ in kanonischer Primfaktorzerlegung.}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in dem Polynomring $C[x_2, x_3, x_5, \cdots]$ ist zunächst

$$x_{t_1}^{e_1} \cdots x_{t_l}^{e_l} = x_{\tau_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{\tau_\lambda}^{\varepsilon_\lambda},$$

also $t = \tau$, und ferner für jede Primzahl q:

$$(x_q^{c_{j_1}} - d_{j_1}) \cdots (x_q^{c_{j_a}} - d_{j_a}) = (x_q^{\gamma_{\iota_1}} - \delta_{\iota_1}) \cdots (x_q^{\gamma_{\iota_\alpha}} - \delta_{\iota_\alpha})$$

wobei auf beiden Seiten von (5.1) alle Faktoren $x_{p_i}^{c_i} - d_i$ *bzw.* $x_{\pi_k}^{c_k} - d_k$ zusammengefasst worden sind, für die $p_i = \pi_k = q$ ist. Satz 5 ergibt sich nun aus dem folgenden

Hilfssatz 6. *Ist in dem Polynomring* $C[x]$

$$(x^{f_1} - b_1) \cdots (x^{f_a} - b_a) = (x^{\varphi_1} - \beta_1) \cdots (x^{\varphi_\alpha} - \beta_\alpha) \tag{5.2}$$

mit reellen und positiven b_i, $i = 1, \cdots, a$ *und* β_j, $j = 1, \cdots, \alpha$, *so ist* $a = \alpha$ *und bei geeigneter Numerierung* $f_i = \varphi_i$, $b_i = \beta_i$, $i = 1, \cdots, a$.

Beweis. Die Wurzeln der beiden Seiten von (5.2), jede mit der Vielfachheit ihres Auftretens gezählt, müssen übereinstimmen. Alle Wurzeln eines Polynoms $x^b - b$, b reell und positiv, liegen in der komplexen Zahlenebene auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt 0. Es kann daher angenommen werden, dass alle Wurzeln von (5.2) auf einem solchen Kreis K mit dem Radius $k \neq 0$ liegen. Die Menge der Wurzeln, jede mit der Vielfachheit ihres Auftretens gezählt, sei W. Durchläuft ξ die Wurzeln eines Faktors von (5.2), so werden diese durch die Abbildung $\xi \to \xi/k$ umkehrbar auf eine zyklische Untergruppe der Multiplikativen Gruppe C_1 der komplexen Zahlen vom Betrage 1 projeziert. Die beiden Zerlegungen (5.2) liefern daher zwei Einteilungen von W/k in zyklische Untergruppen U_i, V_j von C_1:

$$W/k = U_1 + \cdots + U_a = V_1 + \cdots + V_\alpha.$$

Wir zeigen, dass hierbei $a = \alpha$ und bei geeigneter Numerierung $U_i = V_i$ für $i = 1, \cdots, a$ ist: Sei etwa U_1 eine Untergruppe, für die

$$(5.3) \qquad \begin{matrix} |U_1| \geqq |U_i| \\ |U_1| \geqq |V_j| \end{matrix} \qquad \text{für } i = 1, \cdots, a; \quad j = 1, \cdots, \alpha$$

gilt und $U_1 = \langle u_1 \rangle$. Sei ferner etwa $u_1 \in V_1$, also nach (5.3), da alle Untergruppen zyklisch sind,

$$U_1 = \langle u_1 \rangle = V_1 .$$

Dann werden durch

$$W/k - U_1 = U_2 + \cdots + U_a = V_2 + \cdots + V_\alpha$$

zwei Einteilungen der restlichen Menge gegeben, in der weniger Untergruppen auftreten. Durch vollständige Induktion ergibt sich hieraus $a = \alpha$ und bei geeigneter Numerierung

$$U_2 = V_2 , \quad \cdots , \quad U_a = V_a .$$

Sind etwa

$$\begin{aligned} &U_i k \quad \text{die Wurzeln von} \quad x^{f_i} - b_i , \\ &V_i k \quad \text{die Wurzeln von} \quad x^{\varphi_i} - \beta_i , \end{aligned}$$

so muss also

$$x^{f_i} - b_i = x^{\varphi_i} - \beta_i , \qquad i = 1, \cdots, a$$

sein; w.z.b.w.

Um nun zu entscheiden, ob zwei endliche auflösbare Gruppen die gleiche Eulersche Funktion besitzen, genügt es, diese mittels ihrer Hauptreihen in der Form des Satzes 4a darzustellen und die Faktoren beider Darstellungen im Sinne von Satz 5 zu vergleichen. Dass hierbei sehr verschiedene Gruppen die gleiche Eulersche Funktion ergeben können, soll des folgende Beispiel zeigen: Es sei $\mathfrak{G}_1$ das direkte Produkt von zwei zyklischen Gruppen der Ordnung 3 und einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2, $\mathfrak{G}_2$ das direkte Produkt der nichtkommutativen Gruppe der Ordnung 6 mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 3. Dann ist

$$\varphi_{\mathfrak{G}_1}(s) = \varphi_{\mathfrak{G}_2}(s) = (2^s - 1)(3^s - 1)(3^s - 3).$$

Immerhin gilt aber, wie der Leser mit Hilfe von Satz 2 und vollständiger Induktion bestätigen möge:

Sind $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ endliche auflösbare Gruppen und ist $\varphi_{\mathfrak{G}_1} = \varphi_{\mathfrak{G}_2}$, so haben $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ gleiche Ordnungen und es stimmt die Anzahl der maximalen Untergruppen in $\mathfrak{G}_1$ mit der in $\mathfrak{G}_2$ überein.

LITERATUR

1. R. BAER, *Nilpotent characteristic subgroups of finite groups*, Amer. J. Math., vol. 75 (1953), pp. 633–664.
2. W. GASCHÜTZ, *Zu einem von B. H. und H. Neumann gestellten Problem*, Math. Nachr., Bd. 14 (1955), S. 249–252.
3. P. HALL, *The eulerian functions of a group*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), vol. 7 (1936), pp. 134–151.
4. N. JACOBSON, *Lectures in abstract algebra*, Vol. 1, Chapter V, New York, Van Nostrand, 1951.

KIEL, DEUTSCHLAND