SUR LA CROISSANCE RADIALE D'UNE FONCTION MÉROMORPHE

PAR PAUL MALLIAVIN

Etant donné une fonction holomorphe $f(z)$ dans le demiplan $x > 0$, de type exponentiel, cette fonction est déterminée par ses valeurs sur une suite Λ "assez dense" de points situés sur $x > 0$. Dans quelle mesure le développement asymptotique de $f(z)$ est-il comparable au développement asymptotique de $f(z)$ sur la suite Λ? Ce problème a fait l'objet de nombreux travaux, en particulier de V. Bernstein, R. P. Boas, Miss Cartwright, Levinson, W. H. J. Fuchs, dont on trouvera un exposé dans le récent livre de R. P. Boas [1] auquel nous renvoyons pour la bibliographie à laquelle il faut ajouter [2] et [3] publiés depuis.

Dans le travail ci-dessous, on s'est efforcé de séparer deux groupes d'hypothèses de nature différente. En premier lieu des hypothèses d'unicité ou "d'adhérence", c'est à dire des hypothèses qui assurent que la fonction $f(z)$ considérée est déterminée par ses valeurs sur la suite Λ. En second lieu des hypothèses abéliennes sur la régularité de la répartition de la suite Λ. Celles-ci jouent un rôle d'autant moins important que la croissance de $f(z)$ "sur l'axe imaginaire" est lente.

Ce travail donne notamment des conditions abéliennes nécessaires et suffisantes pour les classes de fonction à croissance exponentielle sur l'axe imaginaire, résolvant ainsi complètement le problème posé par Boas dans [1] et [2].

Les procédés utilisés consisteront d'une part dans la théorie de balayage qui permettra d'écrire $\log |f(x)|$ comme le potentiel d'une mesure portée par $x > 0$, et d'autre part dans les méthodes taubériennes de [8]. Le premier procédé amène naturellement à considérer des classes plus générales de fonctions que les fonctions à croissance bornée sur l'axe imaginaire.

Nous allons exposer rapidement les notations associées à ces procédés avant d'en indiquer les résultats.

1. Notations et résultats

1.1. Nous considérerons le groupe des homothéties positives.

Etant donné deux mesures **dn** et **dm** portées par l'axe réel positif nous considérerons leur produit qui sera la mesure notée **dn** $*$ **dm** et définie par

1.1.1. $$\int h(\mathbf{dn} * \mathbf{dm}) = \iint h(tt')\mathbf{dm}(t)\mathbf{dn}(t').$$

Si $l(t)$ est une fonction localement sommable, nous lui associons la mesure

1.1.2. $$\mathbf{l} = l(t)\,\frac{dt}{t}.$$

Received July 23, 1956. Received in revised form January 25, 1957.

Si **dn** est une mesure on peut définir la mesure

$$\mathbf{l} * \mathbf{dn}.$$

Cette mesure est absolument continue, il existe une fonction k telle que

$$\mathbf{l} * \mathbf{dn} = \mathbf{k}.$$

On peut considérer deux façons de définir le produit de composition d'une mesure et d'une fonction, soit comme étant la fonction k, soit la mesure **k**. Nous conviendrons de noter dans le premier produit par $l * \mathbf{dn}$, le second par $\mathbf{l} * \mathbf{dn}$.

Les remarques ci-dessus s'appliquent en particulier lorsque **dn** est absolument continu c'est à dire de la forme $\mathbf{dn} = \mathbf{h}$.

Nous conviendrons dans ce cas denoter le premier produit par $l * h$, le second par $\mathbf{l} * \mathbf{h}$. On a évidemment

$$(l * h)\frac{dt}{t} = \mathbf{l} * \mathbf{h}.$$

Nous serons amenés à considérer des fonctions qui ne sont pas sommables au voisinage de $t = 1$. Dans ce cas l'intégrale permettant de calculer le produit de composition devra être interprétée au sens d'une valeur principale de Cauchy.

1.1.3. $$l * dn = \text{V.P.} \int l\left(\frac{x}{t}\right) dn(t).$$

D'autre part ε désignant un nombre positif, $\varepsilon(t)$ désignera la fonction égale à $1/2\varepsilon$ dans l'intervalle $(e^{-\varepsilon}, e^{+\varepsilon})$ et à zéro ailleurs. On a $\int \varepsilon(dt/t) = 1$. On notera

1.1.4. $$l_\varepsilon = l * \varepsilon.$$

1.2. *Balayage*

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le demi plan $x > 0$ d'ordre inférieur à 2, bornée sur toute partie bornée, 2 fois dérivable en zéro $f(0) \neq 0$. Posons

1.2.1. $$M(t) = \frac{\log|f(t)| - \log|f(0)|}{t}.$$

Alors il existe une fonction $m(t)$, à variation bornée sur tout intervalle fini telle que

1.2.2. $$M = l * m$$

où

1.2.3. $$l(t) = \frac{1}{t}\left[\log\frac{1+t}{1-t} + \frac{2t}{t^2-1}\right].$$

On appellera **dm** la *mesure caractéristique* associée à la fonction $f(z)$. Une expression de **dm** est donnée

$$t\mathbf{dm} = \mathbf{c} * \mathbf{B} + \sum_{\theta} \mathbf{A}_\theta * \mathbf{dn}_\theta$$

où

1.2.4. $$2tc(t) = \log | f(it)f(-it) |$$

$n_\theta(t) =$ nombre de zéros et de pôles sur le segment $\arg z = \theta, 0 < |z| < t$,

1.2.5. $$B = \frac{-4}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{t^2}{(t^2+1)^2}$$

1.2.6. $$A_\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2t^2 |\sin 2\theta|}{t^4 - 2t^2 \cos 2\theta + 1} \qquad |\theta| < \frac{\pi}{2}$$

et où $\mathbf{A}_\theta$ est défini en 1.1.2.

Enfin $m(0)$ sera déterminé plus loin par la formule 2.1.9.

La correspondance M, m établie par 1.2.2. sera étudiée d'un point de vue taubérien, lorsque t tend vers l'infini dans le paragraphe 2.4.

1.3. *Définition des classes de fonctions*

Rappelons que l'on dit qu'une mesure $\mathbf{dm} \geqq 0$ si l'intégrale $\int h\mathbf{dm} \geqq 0$ pour toute fonction h positive, et que $\mathbf{dm} \geqq \mathbf{dm}'$ si $\mathbf{dm} - \mathbf{dm}' \geqq 0$.

Si nous nous donnons une majoration de $\log | f(iy) |$ soit

1.3.1. $$\log | f(iy)f(-iy) | < | y | c_0(y) \qquad c_0 \geqq 0$$

alors du fait que $B < 0$, $A_\theta > 0$ il résulte que 1.3.1. entraine si $f(z)$ est holomorphe dans $x > 0$, et si $t\mathbf{dm}_0 = \mathbf{B} * \mathbf{c}_0$

1.3.2. $$\mathbf{dm} \geqq \mathbf{dm}_0 .$$

Plus généralement au lieu de considérer une fonction $f(z)$, holomorphe dans $x > 0$ on considérera une fonction $f(z)$ méromorphe dans $x > 0$, dont on aura majoré le nombre des pôles, minoré le nombre de zéros et satisfaisant de plus à 1.3.1. La mesure caractéristique d'une telle fonction satisfera à une inégalité de la forme 1.3.2.

Etant donné une mesure $\mathbf{dm}_0$, nous considérerons la classe $H(\mathbf{dm}_0)$ des fonctions $f(z)$ verifiant

$$M = l * m$$

où $\mathbf{dm} \geqq \mathbf{dm}_0$.

Nous considérerons dans la suite des mesures $\mathbf{dm}_0$ satisfaisant à la relation suivante analogue de 1.4.1.

1.3.4. $$m_0(x) - m_0(x-a) = O_a(1/x).$$

Pour pouvoir écrire les conditions d'adhérence, nous devons préciser la croissance de $M(t)$. Nous nous placerons dans un cas plus général que le cas étudié habituellement $M(t) = O(1)$, en introduisant une fonction $\beta(t)$, convexe, croissante, et la classe $H(\mathbf{dm}_0, \beta)$ qui sera l'ensemble des fonctions $M(t)$ satisfaisant à 1.3.4. et à

1.3.5. $$x \int l\left(\frac{z}{t}\right) m(t) \frac{dt}{t} < \beta(x), \qquad z = x + iy.$$

1.4. *Problèmes abéliens*

Nous considérerons une suite Λ de nombres réels positifs.

Nous supposerons que

1.4.1. $$\inf |\lambda - \lambda'| = h > 0 \qquad \lambda, \lambda' \in \Lambda, \quad \lambda \neq \lambda'.$$

Posons

1.4.2. $$\lambda(r) = 2\sum 1/\lambda, \quad \lambda \in \Lambda, \quad \lambda \leqq r; \qquad \Omega_\Lambda = \bigcap_\Lambda \{z; |z - \lambda| > \tfrac{1}{4}h\}.$$

Pour que d'hypothèses sur $M(\lambda)$, on puisse obtenir des renseignements sur $M(x)$, nous supposerons que Λ est un ensemble d'unicité pour la classe $H(\mathbf{dm}_0, \beta)$.

Dans les hypothèses où nous nous placerons, une condition nécessaire et suffisante d'unicité ([6] p. 184) est que

1.4.3. $$\int \beta'(k(r) - a) \frac{dr}{r^2} = +\infty \qquad \text{pour tout } a > 0$$

où l'on a

1.4.4. $$k(r) = \lambda(r) + m_0(r)$$

$$\beta'(r) = \sup (r\sigma - \beta(\sigma)) \qquad \sigma > 0.$$

Nous supposerons dans la suite que 1.4.3. est satisfait. Dans le cas de la croissance exponentielle $\beta(t) = O(1)$, on sait que ([6] p. 205) 1.4.3. s'écrit alors

1.4.5. $$\limsup k(r) = +\infty.$$

Un problème abélien particulier

Cherchons les conditions abéliennes à fixer sur Λ pour que M soit déterminé respectivement à $O(1)$ et $o(1)$ par $M(\lambda)$. Nous supposerons dans tout ce paragraphe que Λ et m_0 satisfont à 1.4.1. et 1.3.4. Soit

1.4.6. $$k_.(r) = \inf k(r') \qquad r' \geqq r$$

1.4.7. $$\delta(r) = k(r) - k_.(r).$$

On a alors les énoncés où Λ'' notera l'ensemble des pôles associés à la mesure $\mathbf{dm}_0$.

1.4.8. Théorème. *$M \in H(\mathbf{dm}_0, \beta)$, 1.4.3. vérifié entraine que*

$$\limsup M(t) = \limsup M(\lambda) \qquad t \in \Omega_{\Lambda''}$$

si et seulement si

$$\lim \delta(r) = 0.$$

1.4.9. THÉORÈME. $M \in H(\mathbf{dm}_0, \beta)$, 1.4.3. *vérifié*

$$\limsup M(\lambda) < +\infty \text{ entraine } \limsup M(t) < +\infty \qquad t \in \Omega_{\Lambda''}$$

si et seulement si

$$\limsup \delta(r) < +\infty.$$

Il existe alors une constante B ne dépendant que de dm_0 et de Λ telle que

$$\limsup M(t) < B + \limsup M(\lambda) \qquad t \in \Omega_{\Lambda''}.$$

Un cas particulier de 1.4.8. a été démontré par W. H. J. Fuchs dans [3].

1.5. *Forme générale du problème abélien*

Les énoncés 1.4.8. et 1.4.9. donnent les cas aussi généraux que possible où le développement asymptotique de $f(x)$ est connu à $o(x)$ et à $O(x)$ près.

Il est naturel de chercher des développements asymptotiques à un ordre plus précis, par exemple à $o(x^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. On pourrait introduire au lieu de la fonction $\lambda(x)$ définie en 1.4.2., la fonction $\lambda_\alpha(r) = \sum 1/\lambda^\alpha$, $0 < \lambda < r$, et obtenir une factorisation analogue à 1.2.3. le noyau l étant remplacé par un noyau l_α.

Nous ne développerons pas ici ce procédé; nous désirerons obtenir des développements asymptotiques à $O(q(x)/x)$, où $q(x)$ désignera une fonction positive, croissante, concave. Nous obtiendrons un résultat simple, caractérisant complètement dans quelles conditions ce développement peut être obtenu lorsque $m_0(t) \sim \log t$. Avant d'énoncer ce résultat en 1.5.5. nous allons donner un énoncé plus général, mais plus compliqué.

1.5.1. THÉORÈME. *Soit $M \in H(\mathbf{dm}_0, \beta)$, une suite Λ vérifiant* 1.4.1. et 1.4.3. *Supposons que l'on puisse extraire de la suite Λ une suite Λ' telle que si l'on pose*

$$k'(x) = \lambda'(x) + m_0(x)$$

on ait

1.5.1.0. $$k'(x) = O\left(\frac{q(x)}{x}\right)$$

1.5.1.1. $$\int_{1+q(x)/x}^{2} \left(k'(ux) - k'\left(\frac{x}{u}\right)\right)\frac{du}{1-u} = O\left(\frac{q(x)}{x}\right).$$

Supposons que

$$\limsup_{\Lambda} M(\lambda) \leqq 0.$$

Supposons enfin que

1.5.1.2. $$\log\log x = O(q(x)).$$

Alors il existe une constante B, ne dépendant que de $\mathbf{dm}_0$, Λ, *telle que*

1.5.1.3. $$\limsup \frac{xM(x)}{q(x)} < B + \limsup_{\Lambda'} \frac{\lambda' M(\lambda')}{q(\lambda')} \qquad x \in \Omega_{\Lambda''}.$$

1.5.2. *Remarque.* On obtient des énoncés à $o(q(x))$ près en appliquant 1.5.1. à n'importe quelle fonction $q_1(x)$ vérifiant $q_1(x) = o(q(x))$.
1.5.3. *Remarque.* Si $\mathbf{dm}_0 > 0$, l'énoncé 1.5.1. peut être simplifié considérablement, les hypothèses abéliennes 1.5.1.1. disparaissant, l'adhérence entrainant la régularité abélienne. Cette situation sera étudiée en détail dans un cas particulier en 3.1.

On peut se demander si la condition 1.5.1.0. serait suffisante pour conclure. Il n'en est rien comme le montre l'énoncé

1.5.4. *Soit* $M \in H(\mathbf{dm}_0, \beta)$, *soit* Λ *une suite vérifiant* 1.4.1. *et* 1.4.3. *Supposons que l'on puisse extraire de la suite* Λ *une suite* Λ' *telle que* 1.5.1.0. *soit satisfait, alors on a*

$$1 + \limsup \frac{\lambda M(\lambda)}{q_1(\lambda)} \geqq \limsup \frac{xM(x)}{q_1(x)} \qquad \text{où } x \in \Omega_{\Lambda''},$$

$$q_1(x) = q(x) \log \frac{x}{q(x)}.$$

Inversement étant donné une fonction concave $q(x)$, *vérifiant* $q(x) = o(x)$, *on peut construire une fonction méromorphe* $f(z)$ *de type exponentiel telle que les hypothèses de* 1.5.4. *soient satisfaites et que*

$$\limsup \frac{\log |f(\lambda)|}{q_1(\lambda)} = 0$$

$$\limsup \frac{\log |f(x)|}{q_1(x)} = 1 \qquad x \in \Omega_{\Lambda''}.$$

On a le théorème suivant qui donne une solution complète du problème de Duffin-Schaeffer tel qu'il était posé par R. P. Boas dans [1] et [2]. Pour cette raison, nous allons énoncer ce théorème en utilisant les notations classiques

1.5.5. THÉORÈME. *Soit* $f(z)$ *une fonction holomorphe dans* $x > 0$, *vérifiant*

1.5.5.1. $$\limsup \frac{\log |f(iy)|}{|y|} < \pi c \qquad c > 0.$$

Soit Λ *une suite de nombres réels,* $q(t)$ *une fonction concave croissante positive. Posons*

1.5.5.2. $$L(a) = \liminf_{t=\infty} \frac{1}{2} \frac{\lambda(t + aq(t)) - \lambda(t)}{\log (t + aq(t)) - \log t} \qquad a > 0$$

1.5.5.3. $$D_q(\Lambda) = \lim_{a=0} L(a), \qquad D_q^*(\Lambda) = \lim_{a=\infty} L(a).$$

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que l'hypothèse 1.5.5.1. *entraine que*

1.5.5.4. $$\limsup \frac{\log |f(\lambda)|}{q(\lambda)} = \limsup_{\Omega_{\Lambda''}} \frac{\log |f(x)|}{q(x)}$$

est que

1.5.5.5. $$D_q(\Lambda) \geqq c.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que

1.5.5.6. $$\limsup \frac{\log |f(\lambda)|}{q(\lambda)} < +\infty \quad \textit{entraine} \quad \limsup_{\Omega_{\Lambda''}} \frac{\log f(x)}{q(x)} < +\infty$$

est que

1.5.5.7. $$D_q^*(\Lambda) \geqq c.$$

Alors il existe une constante $B = B(c, \Lambda, q)$ telle que

$$\limsup \frac{\log |f(x)|}{q(x)} < \limsup \frac{\log |f(\lambda)|}{q(\lambda)} + B \qquad x \in \Omega_{\Lambda''}.$$

Remarque. Si l'on prend $q(t) = 1$ le théorème obtenu est pour sa partie directe le théorème de Duffin-Schaeffer dont 1.5.5. permet d'établir la réciproque. Pour $q(t) = t$, on vérifie aisément que $D_t(\Lambda)$ n'est rien d'autre que la densité minimum de Polya de la suite Λ. On obtient alors le théorème V. Bernstein et sa réciproque. Signalons enfin que pour $q(t) = t$, Rubel a considéré [7] la densité duale de $D_t^*(\Lambda)$ à propos d'un théorème d'unicité sur les fonctions entières de type exponentiel.

1.6. *Application*

On sait bien que des énoncés du type de Duffin-Schaeffer donnent des théorèmes sur les séries de Taylor lacunaires. Ce qui est peut-être plus intéressant de noter c'est que l'on peut réaliser cette correspondance en sens inverse et transcrire ainsi des conditions nécessaires et suffisantes en conditions nécessaires et suffisantes. Par exemple une condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse trouver

1.6.1. $$f(z) = \textstyle\sum_\Lambda a_\lambda z^\lambda$$

ayant sur le cercle de convergence ses singularités contenues dans

1.6.2. $$|\arg z| < a\pi$$

est que la densité maximum de $\Lambda \geqq 1 - a$ (Théorème de Pólya et sa réciproque).

Si en particulier $a = 1$ on obtient le théorème de Fabry et sa réciproque.

Il est peut-être moins trivial d'obtenir des inégalités fermées (au lieu des inégalités ouvertes de 1.6.2.). En particulier remarquons qu'il est indispensable d'obtenir de telles inégalités si on désire étudier les séries 1.6.1. n'ayant qu'une seule singularité sur leur cercle de convergence. Dans cet ordre d'idées on a l'énoncé

1.6.3. *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse trouver une série de Taylor* 1.6.1. *prolongeable à l'infini à l'extérieur de la coupure* $(1, +\infty)$, *est que*

$$D^{\bullet}(\Lambda) = 1.$$

1.6.3.1. (On rappelle que l'on note, cf. [6], par $D^{\bullet}(\Lambda)$ la densité supérieure de la suite Λ, c'est à dire $D^{\bullet}(\Lambda) = \limsup \rho_{\Lambda}(x)$ où $\rho_{\Lambda}(x) = n_{\Lambda}(x)/x$, $n_{\Lambda}(x) =$ nombre d'éléments de $\Lambda < x$.)

Comme on peut trouver deux suites d'entiers complémentaires Λ et Λ' telles que $D^{\bullet}(\Lambda) = D^{\bullet}(\Lambda') = 1$, on peut construire deux séries de Taylor ayant des suites d'exposants complémentaires et n'ayant qu'une seule singularité sur leur cercle de convergence, ce qui répond à une question posée par S. Mandelbrojt.

2. Représentation d'une fonction méromorphe d'ordre < 2

Notons pas $g(x, z)$ la fonction de Green du demi-plan modifiée par un facteur de convergence

$$g(x, z) = \log \left| 1 - \frac{x}{z} \right| - \log \left| 1 + \frac{x}{\bar{z}} \right| + \frac{x}{z} + \frac{x}{\bar{z}}.$$

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans $x > 0$, d'ordre < 2, Λ_1 et Λ_2 les zéros et les pôles de $f(z)$ on a

2.1.1.
$$\log |f(x)| = \sum g(x, \lambda_1) - \sum g(x, \lambda_2) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial n} (x, iy) \log |f(iy)| \, dy + Cx.$$

La formule 2.1.1. est classique lorsque g est la fonction de Green non modifiée par un facteur de convergence et que f est d'ordre < 1. Pour l'étendre au cas de l'ordre < 2, remarquons que les deux séries du second membre sont absolument convergentes.

L'intégrale s'écrit

$$\frac{x}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{y^2} \right) \log |f(iy)f(-iy)| \, dy$$

la convergence au voisinage de zéro est assurée si $f(0) = 1$ et si $f(iy)$ est deux fois dérivable pour $y = 0$. Alors

$$\log |f(x)| - \sum\nolimits_{\Lambda_1} + \sum\nolimits_{\Lambda_2} + \frac{1}{2\pi} \int = h(x)$$

est une fonction harmonique dans le demi-plan $x > 0$, nulle sur $x = 0$ et d'ordre < 2. $h(x)$ est donc de la forme $h(x) = Cx$ d'où 2.1.1.

La formule 2.1.1. permet d'écrire $\log |f(x)|$ comme le potentiel par rapport au noyau de Green d'une simple couche portée par ses pôles et ses zéros et d'une double couche portée par la frontière. Si on effectue le balayage de ces masses sur l'axe réel positif, on obtient une mesure $t\mathbf{dm}(t)$ telle que

$$\log |f(x)| = \int_{0}^{+\infty} g(x, t) t\mathbf{dm}(t) + Cx \qquad x > 0.$$

Nous allons déterminer explicitement **dm**. Posons

2.1.2.
$$g(x, te^{i\theta}) = g_\theta\left(\frac{x}{t}\right)$$
$$G_\theta(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} g_\theta(t) t^{u-1}\, dt \qquad -3 < u < -1.$$

On a

2.1.3.
$$\begin{aligned} G_\theta(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \left(\log \frac{t - e^{i\theta}}{t + e^{-i\theta}} + 2t \cos \theta\right) t^{u-1}\, dt \\ &= \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t + e^{-i\theta}} - \frac{1}{t - e^{i\theta}} - 2 \cos \theta\right) t^u\, dt. \end{aligned}$$

Cette intégrale se calcule par résidus et donne

$$G_\theta(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{1}{u \cos \frac{1}{2}\pi u} \sin u\left(\theta - \tfrac{1}{2}\pi\right) \qquad 0 < \theta < \tfrac{1}{2}\pi.$$

Considérons $G_0(u)$ correspondant à $\theta = 0$. On a

2.1.4.
$$G_\theta(u) = \frac{\sin u(\frac{1}{2}\pi - \theta)}{\sin \frac{1}{2}\pi u} G_0(u) \qquad 0 < \theta < \tfrac{1}{2}\pi.$$

Cette égalité entraine en remarquant que, si l'on pose

$$A_\theta(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\theta}}{t - e^{i\theta}} - \frac{e^{i\theta}}{t + e^{i\theta}}\right) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{t^2 \sin 2\theta}{t^4 - 2t^2 \cos 2\theta + 1}$$

on a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} A_\theta(t) t^{u-1}\, dt = \frac{\sin u(\frac{1}{2}\pi - \theta)}{\sin \frac{1}{2}\pi u}$$

d'où 2.1.4. s'écrit

2.1.5.
$$g_\theta = A_\theta * g_0 \qquad 0 < \theta \leqq \tfrac{1}{2}\pi.$$

On a d'autre part

2.1.6.
$$\begin{aligned} -\frac{\partial g}{\partial n}(x, iy) &= \frac{1}{y}\left[\frac{\partial}{\partial \theta} g_\theta\left(\frac{x}{y}\right)\right]_{\theta=\pi/2} = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial}{\partial \theta} A_{\pi/2} * g_0\left(\frac{x}{y}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{y}(B * g_0)\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

où B est donné par 1.2.5.

Ecrivons 2.1.1. en tenant compte des notations 1.2.4.

$$\log |f(x)| = \sum_\theta g_\theta * \mathbf{dn}_\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial n} g(x, iy) y c(y) + Cx$$

ou en tenant compte de 2.1.5. et de 2.1.6.

$$\log |f(x)| = \sum_\theta g_0 * A_\theta * \mathbf{dn}_\theta + B * g_0 * c + Cx$$

ce qui s'écrira

2.1.7. $$\log |f(x)| = g_0 * (t\mathbf{dm}) + Cx$$

où l'on a posé formellement

$$\sum_\theta \mathbf{A}_\theta * \mathbf{dn}_\theta + \mathbf{B} * \mathbf{c} = t\,\mathbf{dm}.$$

Montrons que cette série converge fortement en norme sur tout intervalle $(0, a)$. On a

2.1.8.
$$\int_0^a \frac{1}{x} | \mathbf{A}_\theta * \mathbf{dn}_\theta | \leqq \int_0^a \int \mathbf{A}\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dx}{x^2} | \mathbf{dn}_\theta(t) | < \int \frac{|\mathbf{dn}_\theta|}{t} \int_0^{a/t} | \mathbf{A}_\theta(u) | \frac{du}{u}$$
$$< O\left(\tfrac{1}{2}\pi - |\theta|\right) \int \frac{a}{(a+t)t} \mathbf{dn}_\theta(t).$$

$f(0) \neq 0$, $f(0) \neq \infty$, f est dérivable en zéro, il existe donc un demi-cercle $|z| = r$, tel que $f(z)$ ne possède ni pôles ni zéros dans $|z| \leqq r$, $x \geqq 0$.

Appliquons la formule de Carleman à la couronne $r < |z| < R$. On obtient

$$\sum_{<R} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{R^2}\right) = O(R^h), \qquad h < 1$$

ce qui s'écrit

$$\sum_\theta \left(\tfrac{1}{2}\pi - |\theta|\right) \int^R \frac{1}{t} \mathbf{dn}_\theta(t) = 0(R^h)$$

ce qui, en intégrant par parties 2.1.8., entraine la convergence de

$$\sum_\theta \int_0^a \frac{1}{x} | \mathbf{A}_\theta * \mathbf{dn}_\theta |$$

et par suite

$$\int_0^a | \mathbf{dm}(t) | < \infty.$$

Intégrons par parties 2.1.7. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{\log |f(x)|}{x} &= \int \frac{t}{x} g_0\left(\frac{x}{t}\right) \mathbf{dm}(t) + C \\ &= \int \left(\frac{t}{x} \log \left|\frac{t-x}{t+x}\right| + 2\right) dm(t) + C \\ &= C - 2m(0) + \text{V.P.} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{x} \log \left|\frac{t+x}{t-x}\right| + \frac{2t^2}{x^2 - t^2}\right) m(t) \frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Prenons

2.1.9. $$m(0) = \frac{C}{2}.$$

La formule est ainsi établie dans le cas où $f(0) = 1$, la formule générale s'obtient en considérant $f_1(x) = \dfrac{f(x)}{f(0)}$.

Nous allons étudier la correspondance m, M d'un point de vue taubérien.

2.2. FORMULE D'INVERSION. *Si*

2.2.1. $$M = l * m \qquad (l \text{ donné en 1.2.3.})$$

alors

2.2.2. $$m = \tilde{l} * M \qquad \text{où} \qquad \tilde{l}(u) = \frac{2}{\pi u}\, l\left(\frac{1}{u}\right).$$

Preuve. Calculons $0 < u < 2$

$$\sqrt{2\pi}\, L(u) = \int_0^{+\infty} l(t) t^{u-1}\, dt = \text{V.P.} \int_0^{+\infty} \left(\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{2t}{t^2-1}\right) t^{u-2}\, dt.$$

Intégrons par parties le second terme, on obtient

$$\sqrt{2\pi}\, L(u) = \int_0^{+\infty} \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| t^{u-2}\, dt + (u-1) \int_0^{+\infty} \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| t^{u-2}\, dt$$

$$\frac{L(u+1)}{u+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| t^{u-1}\, du.$$

Cette fonction est égale d'après 2.1.3. au prolongement analytique de $-G_0(u)$ à la bande $-1 < u < 1$ d'où

$$L(u) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}\, \frac{u}{1-u} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\pi\, u.$$

On a

$$\frac{1}{L(u)} = \frac{2}{\pi} L(1-u)$$

ce qui établit formellement 2.2.

Pour achever la démonstration il suffit de vérifier 2.2. pour les fonctions m deux fois continûment dérivables et à support compact, en faisant une intégration par parties. On prolongera par continuité la formule au cas général où l'intégrale figurant dans 2.2. est sommable au voisinage de zéro et de l'infini, et a une valeur principale définie en $t = x$.

La formule d'inversion 2.2. pourrait être utilisée pour montrer que les évaluations que nous allons obtenir pour M en fonction de m sont les meilleures possibles. Par exemple, on pourrait établir que 2.3.1. vaut encore lorsque l'on échange m et M. Ces réciproques ne seraient pas toutefois d'un grand secours pour montrer que les conditions abéliennes proposées sont des conditions nécessaires et suffisantes ce qui exigera de déduire d'un comportement de $m(t)$ un comportement de $M(t)$ non pas sur la demi-droite complète, mais sur une partie de la demi-droite.

2.3. *Si $m(x) = aO(q(x)/x)$ où $q(x)$ est une fonction positive croissante telle que $q(x)/x$ soit une fonction décroissante,*

2.3.1. $$M(x) = \text{V.P.} \int_{1/2}^{2} \frac{2}{1-u}\, m(ux)\, du + aO\left(\frac{q(x)}{x}\right).$$

Preuve.

$$M(x) = \int_0^{+\infty} l\left(\frac{x}{u}\right) m(u) \frac{du}{u} = \int_0^{x/2} + \int_{x/2}^{2x} + \int_{2x}^{+\infty}.$$

On a

$$l(u) = O(u^{-2}), \quad u > 2, \quad l(u) = O(u^2), \qquad 0 < u < \tfrac{1}{2}.$$

2.3.2. $$\int_0^{x/2} = aO\left(\int_0^{x/2} u^2 x^{-2} \frac{q(u)}{u} \frac{du}{u}\right) = aO\left(\frac{q(x)}{x}\right)$$

2.3.3. $$\int_{2x}^{+\infty} = aO\left(\int_{2x}^{+\infty} u^{-4} x^2 q(u)\, du\right) = aO\left(\int_2^{+\infty} \frac{q(vx)}{vx} v^{-3}\, dv\right) = aO\left(\frac{q(x)}{x}\right)$$

$$\int_{x/2}^{2x} = aO\left(\frac{q(x)}{x}\right) \int_{1/2}^{2} \left[l\left(\frac{1}{u}\right) - \frac{2}{1-u}\right] \frac{du}{u} + \text{V.P.} \int_{1/2}^{2} \frac{2}{1-u}\, m(xu)\, du$$

c.q.f.d.

Remarque. On démontrera en 3.3.1. et en 3.4.1. des formules qui sous des hypothèses supplémentaires préciseront 2.3.

Nous allons montrer à titre d'application de 2.1. le résultat suivant.

2.4. *Fonction à croissance régulière*

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans $x > 0$, vérifiant

2.4.1. $$\log |f(iy)| < \pi c\, |y| \qquad |y| > 1$$

où c designe une constante.

Supposons que

2.4.2. $$\lim_{x=\infty} \int \log \left| f\left(\frac{x}{t}\right)\right| \varepsilon(t) \frac{dt}{t} = 0 \quad \textit{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ (cf. 1.1.4.).}$$

Alors la mesure caractéristique $m(x)$ de f vérifie

2.4.3. $$\lim_{x=\infty} m(x) = 0$$

et réciproquement.

Preuve. On a $dm - dm_0 \geqq 0$ où

2.4.4. $$dm_0 = \frac{dt}{t}\left(-\frac{4}{\pi}\frac{2}{\pi} c\pi \int_{1/x}^{+\infty} \frac{u\, du}{(u^2+1)^2} = \left(\frac{-2}{\pi} c + \frac{h(t)}{t^2+1}\right)\pi \frac{dt}{t} \text{ où } h(t) = O(1).\right.$$

On a en vertu de 2.2.

$$m_{\varepsilon * \varepsilon'} = \tilde{l}_\varepsilon * M_{\varepsilon'}$$

d'où $\tilde{l}_\varepsilon$ étant sommable, 2.4.2. entraine

$$\lim_{x=\infty} m_{\varepsilon*\varepsilon'}(x) = 0.$$

Si

$$\lim\sup m(x) = b > 0$$

alors en vertu de 2.4.4. on aurait $m(x) > b/3$ dans une suite d'intervalles de longueur logarithmique $> b/2c$. En prenant $\varepsilon + \varepsilon' < b/2c$, on aurait

$$\limsup m_{\varepsilon * \varepsilon'} > b/3$$

d'où $\limsup m(x) \leqq 0$. De même on montre que $\liminf m(x) \geqq 0$ d'où $\lim m = 0$. La réciproque résulte de 2.3.

2.4.5. COROLLAIRE. *Soit $f(z)$ une fonction à croissance régulière satisfaisant à 2.4.1., Λ une suite de zéros réels de $f(z)$. Alors on a*

$$D_t(\Lambda) \leqq c.$$

Preuve. Il existe une mesure positive $d\lambda'$ telle que

$$\lambda + \lambda' + m_0 = m$$

vérifie $\lim_{x=\infty} m(x) = 0$. $-\lambda(x) + 2c \log x$ est ainsi une fonction asymptotiquement croissante d'où 2.4.5.

Inversement si $D_t(\Lambda) = c$ il existe une fonction $f(z)$ à croissance régulière vérifiant 2.4.1. et $f^{-1}(0) = \Lambda$.

3. Une condition abélienne suffisante

Nous allons démontrer dans ce paragraphe les énoncés 1.5.1. et 1.5.2. De ces énoncés résulteront les autres conditions abéliennes proposées dans ce travail dont il nous restera ensuite à vérifier la nécessité. L'énoncé 1.5.1. va d'abord être démontré sous la forme particulière faisant l'objet de la remarque 1.5.3.

3.1. LEMME. *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans $x > 0$, vérifiant $|f(iy)| \leqq 1$, soit $M(t)$ la fonction définie par* 1.2.1., *soit Λ une suite telle que* 1.4.3. *est satisfait et que*

$$\limsup M(\lambda) = 0.$$

Alors

$$|f(z)| \leqq 1.$$

Preuve. Nous montrerons d'abord que $f(z)$ est de type exponentiel. En vertu de 1.4.1. il existe dans tout intervalle $nh, (n + 1)h$ au plus un point de la suite. Notons par Λ' la suite constituée des milieux des intervalles $(nh, n + 1)h$ ne contenant aucun point de la suite Λ on a

$$\lambda''(r) = \lambda(r) + \lambda'(r) = \frac{2}{h}\log r + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Soit

$$H(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{h}z + \frac{1}{2}\right)} G(z)$$

où

$$\log |G(x)| = \int_0^{+\infty} tg_0\left(\frac{x}{t}\right) d\lambda''(t) \qquad g_0 \text{ etant donne par 2.1.1.}$$

Si **dm** désigne la mesure caractéristique de $H(x)$ on a $m(t) = O(1/t)$, l'application de 2.3.1. donne $\log |H(x)| = o(x)$, $x \in \Omega_\Lambda$ (Ω_Λ désignant l'ensemble des points situés à une distance $\frac{1}{4}h$ de Λ). Posons

$$g(u) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{f(z)e^{-zu}}{H(z)} \frac{dz}{(z+1)^2}, \qquad u = v + iw,$$

en appliquant la formule de Cauchy

$$\text{3.1.1.} \qquad \left| g(u) - \sum_{\Lambda' < n} \frac{f(\lambda)}{H'(\lambda)} \frac{e^{-\lambda u}}{(\lambda+1)^2} - \sum_{\Lambda < n} \right| < M_n e^{-nv} \qquad |w| < \frac{\pi}{2}$$

soit

$$k(u) = \sum_{\Lambda} \frac{f(\lambda)}{H'(\lambda)} \frac{e^{-\lambda u}}{(\lambda+1)^2}.$$

$k(u)$ est une fonction holomorphe dans $v > 0$

$$k(u) - \sum_{\Lambda < n} \frac{f(\lambda)}{H'(\lambda)} \frac{e^{-\lambda u}}{(\lambda+1)^2} = O(e^{-n(v-1)}).$$

3.1.1. s'écrit en posant $g_1(u) = g(u) - k(u)$

$$g_1(u) - \sum_{\Lambda' < n} = O(M_n e^{-n(v-1)}).$$

Les conditions d'adhérence

$$\int M\left(\frac{2}{h}\log r - \lambda'(r) - a\right)\frac{dr}{r^2} = +\infty$$

étant satisfaites en vertu de 1.2.2.

On peut alors appliquer [5] 10.2 page 231 (l'hypothèse $\liminf \{\lambda(r)/\log r\} > 0$ figurant dans [5] pouvant être omise). On a alors

$$\limsup_{\Lambda'} \left| \frac{f(\lambda')}{H'(\lambda')} \right|^{1/\lambda'} < +\infty$$

$$g_1(u) = \sum_{\Lambda'} \frac{f(\lambda)}{H'(\lambda)} \frac{e^{-u\lambda}}{(\lambda+1)^2}, \qquad v > v_0.$$

Ceci permet de calculer l'intégrale

$$2\pi \frac{f(z)}{H(z)(z+1)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{zu}\, du = \int_{-\infty}^{v_1} + \int_{v_1}^{+i\infty}, \qquad v_1 > v_0$$

ce qui montre que $f(z)$ est une fonction de type exponentiel dans le demi-plan $x > 0$.

Ceci étant on a

$$\log |f(z)| = \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |f(it)|}{x^2 + (y-t)^2}\, dt + \sum \log \left|\frac{\mu - z}{\bar{\mu} + z}\right| + Ax$$

la condition 1.4.3. implique en particulier que $\lambda(r) \to \infty$. On sait alors que ([1] page 200)

$$A = \limsup_{\Lambda} \frac{\log |f(\lambda)|}{\lambda}$$

ce qui entraine 3.1. c.q.f.d.

3.2. Lemme. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans $x > 0$ appartenant à la classe H (dm_0, β). Soit Λ une suite vérifiant* 1.4.1. *et* 1.4.3. *Soit Λ' une suite extraite de Λ. Notons par $h_{\Lambda'}(z)$ la fonction de la classe H nulle sur Λ' et ayant la plus petite mesure caractéristique. Supposons que*

$$\limsup_{\Lambda} \frac{1}{\lambda} \log \left|\frac{f(\lambda)}{h(\lambda)}\right| \leqq 0.$$

Alors on a

3.2.1. $$|f(z)| < K(z)\, |h(z)|\, e^{c(x)}, \qquad z = x + iy,$$

où $c(x)$ = plus petite fonction concave, positive, vérifiant

3.2.2. $$c(\lambda) \geqq \log \left|\frac{f(\lambda')}{h'(\lambda')}\right| \qquad \lambda' \in \Lambda'$$

3.2.3. $$K(z) = \frac{1}{|k(z)|}\left[1 + \sum_{\Lambda'} k(\lambda')\left(\frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{|z - \lambda'|}\right)\right]$$

où $k(z)$ est une fonction holomorphe dans $x > 0$ et inférieure à 1 *quelconque, telle que $K(z) < \infty$.*

Preuve. $h(z)$ peut être calculé par la formule

$$\log |h(x)| = \int g_0\left(\frac{x}{t}\right) t\, d\lambda'(t) + \int g_0\left(\frac{x}{t}\right) t\, \mathbf{dm}_0(t)$$

la première intégrale est la restriction de l'axe réel du logarithme du module d'une fonction holomorphe dans $x > 0$ (produit de Blaschke), la seconde intégrale celle d'une fonction méromorphe dans $x > 0$, en vertu de la construction de $\mathbf{dm}_0$. Soit

3.2.4. $$R_b(z) = \frac{f(z)}{h(z)}\, k(z) - e^{bz} \sum_{\Lambda'} \frac{f(\lambda')}{h'(\lambda')}\, k(\lambda')\, e^{-b\lambda'} \frac{1}{z - \lambda'}.$$

$R_b(z)$ est une fonction holomorphe dans $x > 0$ bornée sur $x = 0$ par

$$1 + \sum \left|\frac{f(\lambda')}{h'(\lambda')}\right| e^{-b\lambda'} \frac{|k(\lambda')|}{\lambda'}.$$

Posons

$$M_b = 1 + \sup \left| \frac{f(\lambda')}{h'(\lambda')} \right| e^{-b\lambda'} .$$

$K(x) < \infty$, 3.2.4. converge si $M_b < \infty$, ce qu'on supposera pour écrire ce qui précède. Appliquons à R_b 3.1., on obtient

3.2.5. $$| R_b(z) | < \left(1 + \sum \frac{| k(\lambda) |}{\lambda}\right) M_b e^{bx}.$$

En portant dans 3.2.4.

$$| f(z) | < | h(z) | M_b e^{bx} K(z)$$

ceci est vrai quel que soit b or on a

$$\inf_b M_b e^{bx} = e^{c(x)} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Nous appliquerons le lemme 3.2. en choisissant convenablement la fonction k, choix qui dépendra en particulier du point z. Donnons dès maintenant un exemple d'un tel choix.

Considérons la fonction

$$k(\zeta) = \frac{\zeta r}{(\zeta + r)^2 + r^2} \qquad \text{où} \qquad r = | z |.$$

$k(\zeta)$ satisfait à $| k(\zeta) | < 1$ si $\operatorname{Re} \zeta > 0$. Appliquons 3.2. avec $k(\zeta)$ on obtient si la distance de 2 points de Λ est η (condition 1.4.1.)

$$K(z) < 4\left(1 + \frac{1}{\eta} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{| z - \tau |}\right) \frac{r\tau}{(\tau + r)^2 + r^2}\, d\tau\right].$$

Si $\arg z = \theta > 0$, $\tau / | z - \tau | \leqq 2/\sin \theta$ d'où

3.2.6. $$| f(z) | < 4\left[1 + \frac{\pi}{\eta}\left(1 + \frac{2}{\sin \theta}\right)\right] | h(z) | e^{c(x)}$$

majoration entièrement déterminée par la donnée de Λ', de dm_0, et de $\log | f(\lambda) |$. Cette majoration parait la "meilleure possible". Si on prend en effet $f(\lambda) = 0$ on trouve $c(x) = 0$, d'autre part la fonction h peut être prise dans ce cas comme fonction f particulière, et on obtient

$$| h(z) | \leqq \sup f(z) \leqq \left(4 + \frac{B}{\sin \theta}\right) | h(z) |$$

le supremum étant pris sur la classe des fonctions $f \in H(dm_0, \beta)$ telles que $f(\Lambda) = 0$.

La majoration 3.2.6. ne donne pas toutefois des résultats très précis sur l'axe réel. On obtiendrait en faisant tendre θ vers zéro,

$$| f(x) | < O(x) h(x) e^{c(x)}.$$

Evaluons au contraire directement $K(x)$ en remarquant que

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\tau}{(\tau + x)^2 + x^2} \frac{d\tau}{|x - \tau|} = O(\log x), \quad x > 2 \quad x \in \Omega_{\Lambda'}$$

d'où

3.2.7. $$|f(x)| < B_1 (\log x)\, h(x) e^{c(x)} \qquad x \in \Omega_{\Lambda'}, \quad x > 2.$$

Remarque. On peut se demander si 3.2.7. resterait valable si on supprimait le terme en $\log x$.

Preuve de 1.5.1.3. Soit Λ' la suite extraite de Λ, $h(z) = h_{\Lambda'}(z)$ la fonction associée par 3.2 à Λ'.

Appliquons 2.3. On a

$$\log |h(x)| = x \text{ V.P.} \int_{1/2}^{2} \frac{2}{1-u} k'(ux)\, du + O(q(x))$$

$$= x \int_{1+q(t)/t}^{2} \frac{2}{1-u} \left[k'(ux) - k'\left(\frac{x}{u}\right) \right] du + \text{V.P.} \int_1^{1+q(t)/t} + O(q(x)).$$

D'autre part on a en vertu de 1.3.4. et 1.4.1.

$$k'(ux) - k'(x) = O(u - 1) \qquad x \in \Omega_{\Lambda'} \cap \Omega_{\Lambda''} \quad (\Lambda'' \text{ désigne les pôles de } h)$$

d'où en vertu de 1.5.1.1.

$$\log |h(x)| = O(q(x)).$$

Appliquons 3.2.7.

$$\log |f(x)| < \log_2 x + O(q(x)) + c(x) + O(1).$$

Remarquons que, d'après 1.5.1.2. $\log_2 (x) = O(q(x))$ et si γ désigne une courbe entourant le point λ' tracée dans $\Omega_{\Lambda'} \cap \Omega_{\Lambda''}$ on a

$$\left| h'(\lambda') \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{h(z)}{(\lambda' - z)^2} dz \right| = e^{O(q(x))}$$

d'où si

$$\log |f(\lambda)| < bq(\lambda)$$

$$c(x) < bq(x) + O(q(x))$$

où O est indépendant de b, ce qui entraine 1.5.1.3. c.q.f.d.

3.3. Nous allons montrer dans ce paragraphe les énoncés directs de tous les résultats abéliens proposés de 1.4. à 1.6. comme conséquence de 3.2. et de 1.5.1.

Soit $h(z)$ une fonction méromorphe, dk sa mesure caractéristique sur $0x$, *supposons que dk vérifie* 1.3.4., *et que*

$$k(x) = O(q(x)/x);$$

alors

3.3.1. $$\log |h(x)| = O\left(q(x) \log \frac{x}{q(x)}\right) \qquad x \in \Omega_{\Lambda_2} \cap \Omega_{\Lambda_3}$$

(Λ_2 *et* Λ_3 *désignant l'ensemble des zéros et des pôles de* $h(z)$).

Preuve.

3.3.2.
$$\log |h(x)| = x \int_{1+q(x)/x}^{2} \frac{1}{1-u}\left[k(ux) - k\left(\frac{x}{u}\right)\right] du + O(q(x))$$
$$= O(q(x)) \int_{1+q(x)/x}^{2} \frac{du}{1-u} + O(q(x))$$

d'où 3.3.1. Ceci étant, montrons que la condition abélienne de 1.4.8. est suffisante. Soit

$$k(x) = \lambda(x) + m_0(x)$$
$$k.(x) = \inf k(x') \qquad x' \geqq x.$$

Alors l'hypothèse $\lim \delta(x) = 0$ entraine ([5] page 200) que l'on peut extraire une suite Λ' de Λ telle que

$$k'(x) = \lambda'(x) + m_0(x) = o(1) = \varepsilon(x).$$

Soit $q(x) =$ borne concave $x\varepsilon(x)$. Appliquons à $q(x)$ 3.2.6. et 3.3.1. en remarquant que $q(x) \log \{x/q(x)\} = o(x)$, on obtient 1.4.8.

De même si $\lim\sup \delta(x) < \infty$ alors on obtient 1.4.9.

De même on obtient la partie directe de 1.5.4. en combinant 3.2.7. et 3.3.1.

Il nous reste à montrer dans le paragraphe qui suit que les conditions proposées pour le problème de Duffin-Schaeffer sont suffisantes.

3.4.1. LEMME. *Soit $h(z)$ une fonction méromorphe dont la mesure caractéristique satisfait à* 1.3.4. *et à*

$$\sigma_x(t) = \int_{1/2}^{t} m(ux)\, du = a^2 O\left(\frac{q^2(x)}{x^2}\right) \qquad \tfrac{1}{2} < t < 2$$

(*où a désigne une constante et O est indépendant de a*)*; alors*

$$\log |h(x)| = aO(q(x)) \qquad x \in \Omega_{\Lambda_2} \cap \Omega_{\Lambda_3}$$

(*où O est indépendant de a*).

Preuve. Montrons que ces hypothèses entrainent $m(x) = O(q(x)/x)$. Sinon si $m(x) > A(q(x)/x)$, alors $m(x) > \frac{1}{2}Aq(x)/x$ sur un intervalle de longueur $> q(x)/2h$ d'où

$$\sigma_{2x}(t) > \frac{A}{2h}\left(\frac{q(x)}{x}\right)^2 \quad \text{avec} \quad t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2h}\frac{q(x)}{x}$$

ce qui entraine que A est borné.

En utilisant 3.3.2. il suffit d'évaluer

$$\int_{1/2}^{1-aq(x)/x} \frac{m(ux)}{1-u}\, du = \left.\frac{\sigma_x(t)}{1-t}\right]_{1/2}^{1-aq(x)/x} + \int_{1/2}^{1-aq(x)/x} \frac{\sigma_x(t)}{(1-t)^2}\, dt$$
$$= aO\left(\frac{q(x)}{x}\right) + a^2 O\left(\frac{q^2(x)}{x^2}\right) \int_{1/2}^{1-aq(x)/x} \frac{dt}{(1-t)^2} = aO\left(\frac{q(x)}{x}\right)$$

c.q.f.d.

3.4.2. LEMME. *Supposons*

3.4.2.1. $$L_q(a) > \alpha \qquad (L_q \text{ défini en } 1.5.5.2.)$$

3.4.2.2. $$q(x) = o(x).$$

Alors on peut trouver un entier N, indépendant de a si $\lim_{a=0} L_q(a) > \alpha$, *et un nombre t_0 tel que pour tout $t > t_0$, χ vérifiant $\chi^2 = 1$, on puisse construire t'*

$$t + aNq(t) < t' < t + a(N+1)q(t)$$

et une suite Λ_1 extraite sur l'intervalle (t, t') de la suite Λ telle que

3.4.2.3. $$\lambda_1(t') - \lambda_1(t) = 2\alpha \log \frac{t}{t'}$$

3.4.2.4. $$\frac{3Nq(t)}{t} > \chi \int_t^{t'} \left(\lambda_1(\xi) - 2\alpha \log \frac{\xi}{t}\right) d\xi > \frac{N}{2} \frac{q(t)}{t}.$$

Preuve. Soient β et β' vérifiant

3.4.2.5. $$\alpha < \beta < \beta' < Lq(a), \qquad \beta < 2\alpha$$

et soit N un entier

$$N > \frac{2\alpha\beta}{(\beta-\alpha)^2}.$$

Posons

$$t_1 = t + aq(t)$$

$$t_N = t + aNq(t).$$

3.4.2.2. entraine que

$$q(t_N) = q(t + o(t)) = (1 + o(1))q(t)$$

d'où en tenant compte de 3.4.2.5.

3.4.2.6. $$\lambda(t_p) - \lambda(t_{p-1}) > 2\beta' \log \frac{t_p}{t_{p-1}} \qquad 0 < p < N$$

pour t assez grand.

Extrayons de la suite Λ une suite Λ_2 telle que

$$\lambda_2(t_p) - \lambda_2(t_{p-1}) = 2\beta \log \frac{t_p}{t_{p-1}} + O\left(\frac{1}{t_p}\right) \qquad 1 \leqq p \leqq r$$

$$\lambda_2(t_N) - \lambda_2(t) = \lambda_2(t_{r+1}) - \lambda_2(t) = 2\alpha \log \frac{t_N}{t} + \frac{\varepsilon}{t} \qquad 2 < \varepsilon < 3$$

où r désigne un entier choisi tel que ces 2 relations aient lieu.

Montrons que

$$I_2 = \int_t^{t_N} \left(\lambda_2(\xi) - 2\alpha \log \frac{\xi}{t}\right) d\xi > 0.$$

En effet

$$\lambda_2(\xi) - 2\alpha \log \frac{\xi}{t} > 0 \qquad \text{si } \xi > t_s$$

où t_s satisfait

$$\beta \log \frac{t_s}{t} > \alpha \log \frac{t_{s+1}}{t}$$

ce qui en tenant compte de 3.4.2.2. est vérifié pour t assez grand si

$$\beta s > \alpha(s+1) \quad \text{ou} \quad s = \left[\frac{\alpha}{\beta - \alpha}\right] + 1.$$

On a alors

$$I_2 > -\int_t^{t_s} 2\alpha \log \frac{\xi}{t}\, d\xi + \int_{t_{r+1}}^{t_N} 2\alpha \log \frac{t_N}{\xi}\, d\xi.$$

On a $N - s > r + 1$, en effet

$$\beta \log \frac{t_{N-s}}{t} > \alpha \log \frac{t_N}{t}$$

en vertu de 3.4.2.2. pour t assez grand si

$$\beta(N - s) > \alpha N$$

ce qui est satisfait d'après 3.4.2.5. On a alors

$$I_2 > -\alpha t \int_{1-sq(t)/t}^{1+sq(t)/t} \log u\, du > 0.$$

En introduisant de même la suite Λ_3 extraite de Λ par les conditions

$$\lambda_3(t_p) - \lambda_3(t_{p-1}) = 2\beta \log \frac{t_p}{t_{p-1}} \qquad p = N, N-1, \cdots r'$$

$$\lambda_3(t_N) - \lambda_3(t) = \lambda_3(t_N) - \lambda_3(t_{r'-1}) = 2\alpha \log \frac{t_N}{t} + \frac{\varepsilon}{t}, \qquad 2 < \varepsilon < 3$$

on vérifie que

$$I_3 = \int_t^{t_N} (\lambda_3(\xi) - 2\alpha \log(\xi/t))\, d\xi < 0.$$

Soient η' et η'', $\eta' > 0$, $\eta'' > 0$ tels que

3.4.2.7. $$\eta' I_2 + \eta'' I_3 = 0 \qquad \eta' + \eta'' = 1;$$

posons

$$n_1(\xi) = \left[\int_t^{\xi} u\, d(\eta'\lambda_2(u) + \eta''\lambda_3(u))\right] + \psi_\chi(\xi)$$

où $[I]$ désigne la partie entière de I et où $\psi_\chi(\xi)$ désigne une fonction à valeurs entières, vérifiant $\psi_\chi(t) = 0$, localement constante dans le complémentaire de Λ et ayant sur Λ des sauts de 1.

Si $\chi > 0$, nous prendrons deux sauts de ψ_χ aux deux premiers points de la suite Λ qui n'ont pas été utilisés pour construire Λ_2 et Λ_3 que l'on rencontre à partir de t. Ces deux sauts sont situés d'après 3.4.2.6. dans l'intervalle (t, t_1), donc $\psi_\chi(t_1) = 2$.

Soit Λ_1 la suite extraite de Λ ayant pour fonction de répartition $n_1(\xi)$ on aura

$$\lambda_1(\xi) = \eta'\lambda_2(\xi) + \eta''\lambda_3(\xi) + \int_t^\xi \frac{d\theta(u)}{u}$$

où

$$-1 \leqq \theta(u) \leqq 2 \qquad t < u < t_1\,, \quad \theta(t) = 0$$

$$1 \leqq \theta(u) \leqq 2 \qquad t_1 < u < t_N$$

$$I(\xi) = \int_t^\xi \frac{d\theta(u)}{u} = \frac{\theta(\xi)}{\xi} + \int_t^\xi \frac{\theta(u)}{u^2}\, du.$$

En tenant compte de 3.4.2.2., on a $\xi < t(1 + o(1))$ et

$$I(\xi) = \frac{\theta(\xi)}{\xi} + o\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

et en tenant compte de 3.4.2.7.

$$J = \int_t^{t_N} \left(\lambda_1(\xi) - 2\alpha \log\frac{\xi}{t}\right) d\xi = \int_t^{t_N} \frac{\theta(\xi)}{\xi}\,(1 + o(1))\, d\xi > (N - 3)\,\frac{q(t)}{t}$$

et de même

$$J < 2N\,\frac{q(t)}{t}.$$

Il reste à choisir t' pour que 3.4.2.4. soit satisfait. On a

$$\lambda_1(t_N) = \frac{h'}{t_N} + 2\alpha \log\frac{t_N}{t} \qquad \text{où} \quad 1 \leqq h' < 7;$$

soit t' tel que

$$2\alpha \log\frac{t'}{t_N} = \frac{h'}{t_N} \qquad\qquad 0 < t' - t_N < \frac{4}{\alpha}.$$

Nous ne prendrons dans l'intervalle t_n, t' aucun point de la suite Λ_1, 3.4.2.3. sera alors satisfait.

On aura enfin

$$\int_t^{t'} \left(\lambda_1(\xi) - 2\alpha \log\frac{\xi}{t}\right) d\xi = \int_t^{t_N} + \int_{t_N}^{t'} \left(\lambda_1(t_N) - 2\alpha \log\frac{\xi}{t}\right) d\xi.$$

On remarque que la dernière intégrale est en valeur absolue inférieure à

$$\int_{t_N}^{t'} \frac{h'}{t_N}\, dt < \frac{28}{\alpha}\,\frac{1}{t_N}$$

et que d'autre part $q(t) > 1$, ce qui permet d'écrire 3.4.2.4. si on a eu soin de prendre $N > 56/\alpha$.

Examinons le cas où $\chi = -1$. Nous prendrons $\psi\chi(t) = -1$ si $t > \rho$ où ρ est la borne supérieure des ξ tels que

$$\int_t^\xi u\,d(\eta'\lambda_2(u) + \eta''\lambda_3(u)) < 1.$$

Montrons que $\rho < \frac{1}{2}t_N$ sinon

$$\lambda_1(t_N) = \lambda_1(\rho) > 2\alpha \log \frac{t_N}{t}$$

$$\beta \log \left(1 + \frac{N}{2} \frac{q(t)}{t}\right) > \alpha \log \left(1 + N \frac{q(t)}{t}\right)$$

d'où $\frac{1}{2}\beta > \alpha$ ce qui contredit 3.4.2.5. On a alors

$$-2 < \theta(\xi) < 0 \qquad 0 < \xi < t_{N/2}$$

$$-2 < \theta(\xi) < -1 \qquad t_{N/2} < \xi < t_N$$

ce qui permet d'évaluer $I(\xi)$ et de conclure comme dans le cas $\chi > 0$ ce qui achève la preuve de 3.4.2.

3.4.3. *Preuve que* 1.5.5.7. *est une condition suffisante.* Soit b_0 tel que 3.4.2.1. soit vérifié par $t > b_0$.

Soit $b_1 = b_0'$ le point b' associé par 3.4.2. à b_0 en prenant $\chi_0 = +1$. Supposons déterminé b_p ; en déterminant $\chi_p = \pm 1$, comme nous allons l'indiquer ci-dessous, on construit $\Lambda_{1,p}$ et $b_{p+1} = b_p'$ où b_p' désigne le point associé par 3.4.2. à b_p. Posons

$$k(t) = \lambda_1(t) - 2\alpha \log \frac{t}{b_0}.$$

Alors

$$k(b_i) = 0 \qquad i \leqq p$$

$$\int_{b_0}^{b_p} k(\xi)\, d\xi = \sum_{r \leqq p} J_r \qquad J_r = \int_{b_{r-1}}^{b_r} k(t)\, dt.$$

Nous déterminerons $\chi_p = \pm 1$ en posant $\chi_p = -1$ si $\sum_{r \leqq p} J_r > 0$ sinon $\chi_p = +1$; l'inégalité 3.4.2.4. entraine que χ_p peut garder le même signe pour au plus 7 valeurs consécutives de p ce qui entraine

$$\int_{b_0}^{b_p} k(t)\, dt = O\left(\frac{q(b_p)}{b_p}\right)$$

comme $b_p < \xi < b_{p+1}$ entraine

$$\int_{b_p}^{\xi} k(t)\, dt < Nq(\xi) \frac{q(\xi)}{\xi}$$

3.4.3.1. $$\int_{b_0}^{\xi} k(t)\, dt = O\left(\frac{q^2(\xi)}{\xi}\right).$$

Ceci étant, considérons soit $f(z)$ une fonction satisfaisant les hypothèses de 1.5., $D_q^*(\Lambda) > c$.

Soit α vérifiant $D_q^*(\Lambda) > \alpha > c$ et $\eta = (\alpha - c)/4$ et soit

3.4.3.2. $$k_{x_0}(z) = \frac{\sin^2 \eta(x - x_0)}{(x - x_0)^2}.$$

Alors

3.4.3.3. $$\log |f(iy)| + \log |k_{x_0}(z)| < \alpha |y| + o(1).$$

Remarquons que les mesures caractéristiques m des fonctions satisfaisant 3.4.3.3. vérifient $\mathbf{dm} > \mathbf{dm}_0$ où d'après 2.1.6.

$$\mathbf{dm}_0(t) = \frac{dt}{t} \frac{-2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2s\,ds}{(s+1)^2} \qquad t > 1$$

$$m_0(t) = \frac{-2\alpha}{\pi} \log t + O\left(\frac{1}{t}\right) \qquad t > 1.$$

Supposons d'abord $q(t) = o(t)$. Alors 3.4.3.1. implique que les hypothèses 3.4.1. sont satisfaites.

Nous appliquons alors 3.2. avec pour fonction k la fonction donnée en 3.4.3.2. Cette application est légitime bien que $k_{x_0}(z)$ ne soit plus inférieure à 1, les conditions d'adhérence sur la suite Λ pour le produit $f(z)k_{x_0}(z)$ restant vérifiées en vertu de 3.4.3.3.

On a alors $K_{x_0}(z) = O(1)$ ce qui établit 1.5.5.6.

Si maintenant on suppose $D_q(\Lambda) > c$ alors on a en appliquant 1.5.5.6. avec $q_1(t) = aq(t)$

$$\limsup \frac{\log |f(x)|}{q(x)} \leqq \limsup \frac{\log |f(\lambda)|}{q(\lambda)} + aB$$

où la constante B est indépendante de a. Faisons tendre a vers zéro on obtient 1.5.5.4.

Remarquons enfin que si $q(t) \neq o(t)$ alors $q(t) = t$ et le théorème 1.5.5. est alors un cas particulier de 1.4.8. et 1.4.9.

Le fait que toutes les conditions abéliennes proposées sont suffisantes est ainsi établi.

4. Enoncés réciproques

Nous allons chercher dans ce paragraphe à montrer que certaines conditions sont "les meilleures possibles". Nous allons d'abord établir la réciproque de 1.4.9.

4.1. *Soit* m_0 *et* Λ *satisfaisant à* 1.4.1., *alors si*

$$\limsup \delta(x) = +\infty$$

il existe une fonction G, $G \in H(\mathbf{dm}_0)$, *telle que*

$$\limsup \frac{\log |G(\lambda)|}{\lambda} < \infty \qquad \limsup \frac{\log |G(x)|}{x} = +\infty.$$

Preuve. Il existe une suite d'intervalles I_n telle que

$$\lim_{\substack{x \in I_n \\ x \to \infty}} \delta(x) = +\infty$$

et l'on a d'après 1.4.1. et 1.3.4.

$$| I_n | = \int_{I_n} \frac{dt}{t} \to \infty .$$

Soit

$$dm = dm_0 + d\lambda'$$

où la suite Λ' est une suite vérifiant 1.4.1., choisie telle que

4.1.2. $$m(x) = O(1) \qquad x \notin \bigcup I_n$$

4.1.3. $$dm > d\lambda + dm_0 \qquad \text{si } x \in \bigcup I_n$$

4.1.4. $$\limsup m(x) = +\infty .$$

Soit $G(z)$ la fonction $\in H(dm_0)$ ayant pour mesure caractéristique m. Alors si $x \notin \bigcup I_n$, $x \in \Omega_{\Lambda'} \cap \Omega_{\Lambda''}$, Λ'' désignant les pôles de G, en remarquant qu'alors $m(ux) = O(1) + O(\log u)$

$$\frac{\log | G(x) |}{x} = \text{V.P.} \int l(t) m\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t}$$

$$= O\left(\int_2^{+\infty} | l(t) | \log t \frac{dt}{t}\right) + O\left(\int_0^{1/2} | l(t) | \log \frac{1}{t} \frac{dt}{t}\right)$$

$$+ \text{V.P.} \int_{1/2}^{2} l(t) m\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} .$$

Les deux premières intégrales sont $O(1)$, la troisième également si $x \in \Omega_{\Lambda'} \cap \Omega_{\Lambda''}$, en vertu de 3.3.2., d'où, en remarquant que 4.1.3. implique que $G(\lambda) = 0$ si $\lambda \in \bigcup I_n$, on obtient

$$\limsup \frac{\log | G(\lambda) |}{\lambda} < +\infty .$$

Si on avait d'autre part

$$\limsup M(x) < +\infty \qquad x \in \Omega_{\Lambda''}$$

où

$$xM(x) = \log | G(x) |$$

on aurait d'après 2.2.

$$m = \tilde{l} * M .$$

Régularisons (formule 1.1.4.)

$$m_{\varepsilon * \varepsilon'} = \tilde{l}_\varepsilon * M_{\varepsilon'}$$

$M_{\varepsilon'} = O(1)$, $\tilde{l}_\varepsilon$ est sommable, donc $m_{\varepsilon * \varepsilon'} = O(1)$. Or ceci contredit 4.1.4. puisque les hypothèses 1.3.4. et 1.4.1. sont satisfaites. Donc

$$\limsup M(x) = +\infty \qquad x \in \Omega_{\Lambda''} .$$

On a ainsi mis en évidence une fonction $G \in H(\mathbf{dm}_0)$ telle que

$$\limsup_{x \in \Omega_{\Lambda''}} \frac{\log | G(x) |}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \limsup \frac{\log | G(\lambda) |}{\lambda} < +\infty .$$

Remarquons enfin que l'on peut réaliser cette construction de telle sorte que $m(x) = o(\sigma(x))$ où σ est une fonction croissant vers l'infini arbitrairement lentement, ce qui entraine que l'on peut ainsi construire $G \in H(dm_0, \beta)$ pour tout β tel que $\lim \beta(t)/t = +\infty$ c.q.f.d.

4.2. Etablissons maintenant la réciproque de 1.4.8. Etant donné une suite Λ et une mesure dm_0 satisfaisant respectivement à 1.4.1. et à 1.3.4. et telle que 1.4.8. ne soit pas vérifié, nous allons construire une fonction $f \in H(dm_0, 1)$ (c'est à dire une fonction de type exponentiel) telle que

$$\limsup \frac{\log |f(\lambda)|}{\lambda} < \limsup \frac{\log |f(x)|}{x} \qquad x \in \Omega_{\Lambda''}.$$

Soit

$$k(x) = \lambda(x) + m_0(x)$$

l'hypothèse de 1.4.8. n'étant pas satisfaite on peut trouver une suite d'intervalles (α_n, β_n) telle que

$$\alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1}, \qquad \alpha_n \to \infty, \qquad \lim (k(\alpha_n) - k(\beta_n)) = \gamma > 0.$$

Nous allons raisonner d'abord dans le cas où l'on a

4.2.1. $\liminf_{x=\infty} (k(Rx) - k(x)) \geqq 0$ pour tout R fixé, $R > 1$.

Soit Λ_1 une suite de nombres réels telle que si l'on pose

4.2.2. $dm = dk + d\lambda_1$ sur $E = \bigcup_n [\alpha_n, \beta_n]$

4.2.3. $dm = dm_0 + d\lambda_1$ sur le complémentaire de E

on ait les propriétés suivantes

4.2.4. $m(x) = o(1) \qquad x \notin E, \quad x \to \infty$

4.2.5. $\lim (m(Rx) - m(x)) = 0 \qquad R$ fixé.

4.2.6. Il existe une suite $x_n \in E$ telle que

$$m(x_n) = \frac{\gamma}{3} + o(1), \qquad x_n \to \infty.$$

Il existera une fonction $f \in H(\mathbf{dm}_0)$ ayant m pour mesure caractéristique. On aura, si $x \notin E$, en vertu de 4.2.4. et 4.2.5.

$$\frac{\log |f(x)|}{x} = m * l = \int_2^{+\infty} l\left(\frac{x}{t}\right) m(t) \frac{dt}{t} + \int_0^{1/2} l\left(\frac{x}{t}\right) m(t)\, dt + \text{V.P.} \int_{1/2}^{2}$$

$$= o\left(\int_2^{+\infty} |l| \frac{dt}{t} + \int_0^{1/2} |l| \frac{dt}{t}\right) + \text{V.P.} \int_{1/2}^{2} l\left(\frac{x}{t}\right) m(t) \frac{dt}{t}.$$

La valeur principale est $o(1)$ si $x \in \Omega_{\Lambda''}$, ceci se démontre comme 3.3.1. d'où

$$\log |f(x)| < o(x) \qquad x \notin E, \quad x \in \Omega_{\Lambda''}$$

$$m(x) - m(x_n) = o(1) \qquad n \to \infty \qquad x \in \left[\frac{x_n}{R}, Rx_n\right]$$

d'où en raisonnant comme ci-dessus

$$\frac{\log |f(x_n)|}{x_n} = o(1) + m(x_n) \text{ V.P.} \int l\left(\frac{x_n}{t}\right)\frac{dt}{t} \qquad x \in \Omega_{\Lambda''} \cap \Omega_{\Lambda_1}$$

d'où

$$\limsup \frac{\log |f(x)|}{x} > 2 \limsup m(x_n) = \frac{2}{3}\gamma.$$

On a d'autre part

$$\limsup \frac{\log |f(\lambda)|}{\lambda} \leqq 0$$

puisque sur $E \cap \Lambda$, f est nul. Indiquons comment Λ_1 est construite. Soit

$$x_n = \sup \{x \in (\alpha_n, \beta_n); -k(x) + k(\alpha_n) < \tfrac{1}{2}\gamma\};$$

alors

$$k(x_n) = \tfrac{1}{2}\gamma + o(1)$$

et d'après 4.2.5. on a $\lim (\alpha_n/x_n) = 0$. On construira la suite Λ_1 sur E de telle sorte que

$$\lim \big(\lambda_1(Rx) - \lambda_1(x)\big) = 0 \qquad x \to \infty \qquad x, Rx \in E$$

$$\lambda_1(x_n) - \lambda_1(\alpha_n) = \gamma + o(1)$$

$$\lambda_1(\beta_n) - \lambda_1(x_n) = 0.$$

On aura alors m étant défini par 4.2.2.

4.2.7. $$\int_{\alpha n}^{\beta n} dm = o(1).$$

Sur le complémentaire de E nous construisons Λ_1 de telle sorte que **dm** donné par 4.2.3. vérifie

$$\int_{\beta_n}^{t} dm = o(1) \qquad \beta_n < t < \alpha_{n+1}$$

ce qui achève la détermination de Λ_1. Il nous faut envisager le cas où 4.2.1. n'est pas satisfait. Le contraire de 4.2.1., à savoir 4.3.1. ci-dessous sera alors satisfait.

4.3. Supposons qu'il existe R et une suite α_n telle que

4.3.1. $$\lim \big(k(R\alpha_n) - k(\alpha_n)\big) = r < 0 \qquad \alpha_n \to \infty \qquad R > 1.$$

Nous allons d'abord montrer le lemme suivant

4.3.2. Lemme. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans $x > 0$ satisfaisant aux hypothèses de* 1.2. *vérifiant* $\log |f(iy)| < O(y)$ *dont les pôles Λ_1 et les zéros Λ_2 satisfont à* 1.4.1. *Alors si m désigne la mesure caractéristique de $f(x)$ sur ox on a* (*M étant défini en* 1.2.1.)

$$M(x) = \underset{\varepsilon=0}{\text{limite uniforme}}\, (l_\varepsilon * m)(x) \qquad x \in \Omega_{\Lambda_1} \cap \Omega_{\Lambda_2}$$

(*l_ε étant défini en* 1.1.4.).

Preuve. Soit $\eta > 0$ qui soit inférieur au rayon des cercles constituant le complémentaire de Ω_{Λ_1} ou de Ω_{Λ_2}. On a alors si $x \in \Omega_{\Lambda_1} \cap \Omega_{\Lambda_2}$, $| x - x' | < \eta$, si c est défini par 1.2.4.,

$$| m(x) - m(x') | < \left| \frac{1}{x} c * B(x) - \frac{1}{x'} c * B(x') \right| = O\left(\frac{x}{x'} - 1\right).$$

Si $| x - x' | > \eta$ cette variation peut être majorée de p termes $O(1/x)$ où $p = O((x - x')/\eta)$ d'où $m(xu) - m(x) = O(u - 1)$, $\frac{1}{2} < u < 1$, ceci valant *uniformément* en $x \in \Omega_{\Lambda_1} \cap \Omega_{\Lambda_2}$. Ecrivons 1.2.3. sous la forme

$$M(x) = \int_0^{+\infty} D_x(t) l(t) \frac{dt}{t} + 2m(x)$$

où $D_x(t) = m(x/t) - m(x)$. On a $\gamma > 1$

$$M_\varepsilon(x) = \int_0^{\gamma^{-1}x} D_x(t) l_\varepsilon(t) \frac{dt}{t} + \int_{\gamma x}^{e^{-2\varepsilon}x} + \int_{e^{-2\varepsilon}x}^{e^{2\varepsilon}x} + \int_{e^{2\varepsilon}x}^{x\gamma} + \int_{x\gamma}^{+\infty}$$

γ fixé, la première et la dernière intégrale sont uniformément convergentes. La seconde intégrale I_2, en remarquant que $D_x(t) = O(t - 1)$ uniformément $x \in \Omega_{\Lambda_1} \cap \Omega_{\Lambda_2}$ vérifie

$$I_2 = O\left(\int_{\gamma x}^{e^{-2\varepsilon}x} (t - 1)^{-1}(t - 1) \frac{dt}{t}\right) = O(\gamma - 1)$$

de même pour I_4. Enfin

$$I_3 = O\left(\int_{e^{-2\varepsilon}}^{e^{2\varepsilon}} \varepsilon \, | l_\varepsilon(t) | \frac{dt}{t}\right) = O(\varepsilon \log \varepsilon) = o(1) \qquad \epsilon \to o$$

ce qui achève la preuve du lemme.

Remarque. Il serait intéressant de pouvoir pour une fonction de type exponentiel quelconque donner des propriétés d'un ensemble Ω (densité, épaisseur, etc.) tel que sur Ω, M_ε converge uniformément vers M.

Nous allons maintenant démontrer la réciproque de 1.4.8., 4.3.1. étant vérifié. Considérons la suite de fonctions

$$\varphi_n(t) = k(\alpha_n t) - k(\alpha_n)$$

définies sur l'intervalle $(1, R)$. Ces fonctions sont à variation uniformément bornées d'après 1.4.1. On peut extraire de cette suite une suite convergeant uniformément vers une fonction $\varphi(t)$ a variation bornée, fonction $\varphi(t)$ qui sera de plus absolument continue en vertu de 1.4.1. On aura d'après 4.3.1. $\varphi(R) = r < 0$. D'après le théorème de Lebesgue on peut trouver b, $1 < b < R$, tel que $\varphi'(b) = c < 0$. Soit η tel que

4.3.3. $$\frac{3c}{2} t < \varphi(b + t) - \varphi(b) < \frac{c}{2} t \quad \text{si} \quad | t | < \eta.$$

Construisons la fonction ψ telle que

$$\psi(t) = \int_b^t d\varphi \qquad t \in [b - \eta, b + \eta]$$

$$d\psi(t) = \frac{2}{h}\frac{dt}{t} + d\varphi \qquad \text{si } t \in [b - \eta', b - \eta] \text{ ou } t \in [b + \eta, b + \eta'']$$

$\eta', \eta'' > \eta$ étant déterminé par la condition que $\psi(\eta') = \psi(\eta'') = 0$ et qu'ils sont les plus petits possible tels que cette condition soit satisfaite. Nous prendrons enfin $\psi(t) = 0$ si $t \notin [b - \eta', b + \eta'']$. Remarquons que

4.3.4. $$\psi(t) \leqq 0 \text{ si } t > b, \qquad \psi(t) \geqq 0 \text{ si } t < b.$$

Nous allons construire la fonction $f \in H(\mathbf{dm}_0)$, qui nous donnera le contre exemple de 1.4.8. cherché, en déterminant sa mesure caractéristique. Supposons que l'on ait déjà extrait une suite des α_n considérés en 4.3.1. telle que

$$1° \text{ les } \varphi_n \text{ convergent vers } \varphi \qquad 2° \lim \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = 0.$$

Soit

$$E = \cup_n[\alpha_n(b - \eta'), \alpha_n(b + \eta'')].$$

Soit Λ_1 une suite vérifiant 1.4.1. et telle que si l'on pose

$$dm(x) = d\lambda_1(x) + dm_0(x) \qquad x \notin E$$

$$dm(x) = d\lambda_1(x) + dk(x) \qquad x \in E$$

on ait

4.3.5. $$\lim_n m(\alpha_n t) = \psi(t)$$

4.3.6. $$m(x) = o(1) \qquad x \notin E$$

la fonction f associée à cette mesure caractéristique sera nulle sur $\Lambda \cap E$ et $f \in H(\mathbf{dm}_0)$.

Montrons, ce qui achèvera la démonstration

4.3.7. $$\limsup \frac{\log |f(x)|}{x} > \limsup_{x \notin E} \frac{\log |f(x)|}{x} \qquad x \in \Omega_{\Lambda''}$$

(Λ' et Λ'' désignant respectivement les zéros et les pôles de f).

Etudions la fonction

$$g(x) = \text{V.P.} \int l\left(\frac{x}{t}\right) \psi(t) \frac{dt}{t}$$

alors ψ étant absolument continue, et ψ' étant bornée, on obtient, en intégrant par parties, que $g(x)$ est une fonction continue.

Il est d'autre part facile en se reportant à 1.2.3. de montrer que $l(t)$ est une fonction décroissante et que $l(t) < 0$ si $0 < t < 1$, $l(t) > 0$ si $t > 1$. On a ainsi si $x_1 \leqq b - \eta'$, $x_2 > b + \eta''$

$$g(b) = \int l\left(\frac{b}{t}\right)\psi(t)\,\frac{dt}{t} > \int_b^{+\infty} l\left(\frac{x_1}{t}\right)\psi(t)\,\frac{dt}{t} + \int_0^b l\left(\frac{x_2}{t}\right)\psi(t)\,\frac{dt}{t}.$$

$$g(b) > g^+(x_1) + g^+(x_2) \qquad (g^+(x) = \sup\,(g(x), 0)).$$

On obtient une borne inférieure de $g(b) - g^+(x_1) - g^+(x_2)$ en appliquant le raisonnement ci-dessus à $x_1 = b - \eta'$ et $x_2 = b - \eta''$. g étant continu g_ε converge uniformément vers g on a donc si ε est assez petit

4.3.8. $$g_\varepsilon(v) > \max g_\varepsilon(u)$$

où $u \leqq b - \eta'$ ou bien $u \geqq b + \eta''$ et où $|\, b - v\,| < \varepsilon$.

Notons par m_n la mesure $m(\alpha_n t)$ sur l'intervalle $1 < t < R$, égale a zéro ailleurs. 4.3.5. entraine que

$$g_\varepsilon = \psi * l_\varepsilon = \text{limite uniforme } l * m_n\,.$$

Soit N tel que l' on ait en vertu de 4.3.8.

$$(l_\varepsilon * m_n)(v) - \max\,(l * m_n)(u) > \delta > 0 \qquad \text{si } n > N$$

où v et u satisfont les mêmes inégalités qu'en 4.3.8. Nous prendrons v_n de telle sorte que $v_n\alpha_n \in \Omega_{\Lambda_1} \cap \Omega_{\Lambda_2}$. On peut alors d'après 4.3.1. déterminer $\varepsilon > 0$ de telle sorte que $|\, l_\varepsilon * m - l * m\,| < \frac{1}{4}\delta$ sur $\Omega_{\Lambda_1} \cap \Omega_{\Lambda_2}$, on aura

$$l * m_n(v_n) > \tfrac{1}{4}\delta + l * m_n(x) \qquad\qquad x \notin E \quad x \in \Omega_{\Lambda_1}.$$

Pour conclure il suffit de remarquer que 4.3.6. entraine que

$$l * m_n(x) = l * m(x) + o(1), \qquad x \in \Omega_{\Lambda_1} \cap \Omega_{\Lambda_2}$$

ce qui achève la démonstration.

4.4. Nous allons maintenant démontrer les résultats réciproques des théorémes du type de Duffin-Schaeffer énoncés en 1.5.5. Remarquons d'abord que la réciproque si $q(t) = t$ résulte du paragraphe précédent et qu'il est loisible par suite de supposer $q(t) = o(t)$.

Nous démontrerons d'abord la réciproque de 1.5.5.4. sous la forme suivante:

4.4.1. *Soit une suite Λ pour laquelle $D_q(\Lambda) < c$, alors on peut trouver une fonction $f(z)$ satisfaisant* 1.5.5.1. *telle que* 1.5.5.4. *ne soit pas satisfait.*

Preuve. On peut trouver une suite d'intervalles $[t_n, t_n + aq(t_n)]$ tels que

4.4.2. $$\lambda(t_n + aq(t_n)) - \lambda(t_n) < \gamma a\,\frac{q(t_n)}{t_n} \qquad\qquad \gamma < c$$

et il est évidemment possible, en extrayant une suite de ces intervalles de se ramener au cas où

4.4.3. $$t_{n+1}/t_n \to \infty\,.$$

Nous allons démontrer le lemme

Etant donné une suite d'intervalles $[t_n, t_n + q(t_n)]$ *vérifiant* 4.4.3., *un nombre* $\beta' > 0$ *il existe une fonction* $K(z)$, *holomorphe dans* $x > 0$ *satisfaisant à*

4.4.4. $$\limsup_{x \notin E} \frac{\log |K(x)|}{q(x)} + \frac{\beta'}{15} < \limsup \frac{\log |K(x)|}{q(x)}$$

où

$$E = \cup_n [t_n, t_n + q(t_n)]$$

4.4.5. $$\limsup \frac{\log |K(iy)|}{|y|} = \beta'.$$

Preuve. Soient les intervalles

$$T_1 = \{x; t_n + \tfrac{1}{4}q(t_n) < x < t_n + \rho_n q(t_n)\}$$

$$T_2 = \{x; t_n + \rho_n q(t_n) < x < t_n + \tfrac{3}{4}q(t_n)\}$$

où ρ_n va être déterminé ci-dessous. Soit

$$\Lambda = \{\pi\beta' n\}, \qquad \Lambda_1 = \Lambda \cap T_1, \qquad \Lambda_2' = \Lambda \cap T_2 .$$

Nous déterminerons ρ_n de telle sorte que

$$\lambda_1(t_n + \tfrac{3}{4}q(t)) - \lambda_2'(t_n + \tfrac{3}{4}q(t_n)) = O\left(\frac{1}{t_n}\right)$$

et nous désignerons par Λ_2 la suite obtenue en déplaçant le dernier point de Λ_2' situé sur l'intervalle $[t_n + \rho_n q(t_n), t_n + \frac{3}{4}q(t_n)]$ de telle sorte que $k(t) = \lambda_1(t) - \lambda_2(t)$ vérifie $k(t) = 0$ si $t \notin E'$, $E' = \cup_n I_n$ où

$$I_n = [t_n + \tfrac{1}{4}q(t_n), t_n + \tfrac{3}{4}q(t_n)].$$

Soit $G(z)$ la fonction méromorphe dans $x > 0$ ayant pour mesure caractéristique dk. Notons par $I_{n(x)}$ l'intervalle situé à la distance la plus petite de x. On a alors $k(ux) = 0$, $ux \notin I_{n(x)}$ si $1/\alpha_x < u < \alpha_x$ où α_x tend vers zéro en vertu de 4.4.3. Effectuons la même évaluation qu'en 2.3.2. et 2.3.3. on obtient

$$\log |G(x)| = x \text{ V.P.} \int_{I_{n(x)}} L(u)k(ux)\, du + o(q(x)).$$

Evaluons cette intégrale. On peut trouver une fonction $\beta(x)$ telle que $\beta(x) \to +\infty$ et que

$$\lim \frac{q(x\beta(x))}{q(x)} = 1.$$

$L(u)$ s'écrit

$$L(u) = \left(\log \left|\frac{1+u}{1-u}\right| - \frac{1}{1+u}\right) + \frac{1}{1-u}$$

Si

$$\left|\log \frac{x}{t_{n(x)}}\right| < \log \beta(x)$$

on a

$$\frac{x}{\pi}\,\mathrm{V.P.}\int L(u)k(ux)\,du = \frac{x}{\pi}\,\mathrm{V.P.}\int_{I_{n(x)}} \frac{k(ux)}{1-u}\,du + o(q(x)).$$

Si au contraire

$$\left|\log \frac{x}{t_{n(x)}}\right| > \log \beta(x),$$

alors on a en appliquant 2.3.2. et 2.3.3.

$$\log |G(x)| = o(q(x)).$$

On a si $x < t_{n(x)}$

$$4.4.6. \qquad 0 < \frac{x}{\pi}\,\mathrm{V.P.}\int_{I_{n(x)}} \frac{k(ux)}{1-u}\,du < \tfrac{2}{3}\,x\,\mathrm{V.P.}\int_{I_{n(x)}} \frac{1}{1-u}\,k(ut_n + \tfrac{1}{4}uq(t_n))\,du$$

et on a de même si $x > t_{n(x)} + q(t_{n(x)})$

$$4.4.7. \qquad 0 > \frac{x}{\pi}\,\mathrm{V.P.}\int \frac{k(ux)}{1-u}\,du > \frac{2}{3}\,x\,\mathrm{V.P.}\int_{I_{n(x)}} \frac{1}{1-u}\,k(ut_n + \tfrac{3}{4}q(t_n)u)\,du.$$

La fonction

$$K(t) = \frac{\sin \beta' z}{G(z)}$$

est holomorphe dans $x > 0$, elle satisfait en vertu de 4.4.7. à

$$\limsup_{x \notin E} \frac{\log |K(x)|}{q(x)} < \limsup_{x>0} \frac{\log K(x)}{q(x)} + \tfrac{1}{3}x\,\mathrm{V.P.}\int \frac{1}{u-1}\,k(ut_n + \tfrac{3}{4}uq(t_n))du$$

ce qui en remarquant que

$$\mathrm{V.P.}\int \frac{1}{u-1}\,k(ut_n + \tfrac{3}{4}q(t_n)u)\,du > \frac{q(t_n)}{t_n}\,\frac{\beta'}{5}$$

établit 4.4.4.

Preuve de 4.4.1. On multipliera la fonction $K(z)$ de 4.4.4. par une fonction $H(z)$ ayant suffisamment de zéros sur l'ensemble exceptionnel E tout en ayant une croissance régulière.

Posons $D_q(\Lambda) = h < c$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $a(\varepsilon)$ et une suite d'intervalles $I_{n,\varepsilon} = (t_n\,,\,t_n + aq(t_n))$ vérifiant 4.4.3. telle que

$$4.4.8. \qquad \lim_n \frac{\lambda(t_n + aq(t_n)) - \lambda(t_n)}{2aq(t_n)}\,t_n = D_q(\Lambda) + \varepsilon.$$

Posons $\delta = \frac{1}{3}(c - h)$, désignons par E la réunion des intervalles $I_{n,\varepsilon}$ et partageons ces intervalles $I_{n,\varepsilon}$ en p parties égales $J^r_{n,\varepsilon}$, $0 < r \leqq p$. Remarquons que si l'on pose

$$\beta^\bullet = \lim_r \sup_n \frac{\lambda(J^r_{n,\varepsilon})}{2\log(J^r_{n,\varepsilon})} \qquad \text{où } \lambda(I) = \int_I d\lambda$$

on aura d'après 4.4.8.

$$\frac{\beta^{\bullet}}{p} + \frac{p-1}{p} D_q(\Lambda) < D_q(\Lambda) + \varepsilon$$

ou

4.4.9. $$\beta^{\bullet} < h + p\varepsilon.$$

Choisissons p de telle sorte $\delta/\varepsilon > p > \delta/\varepsilon - 1$, on peut construire en vertu de 4.4.9. une fonction $H(z)$ holomorphe dans $x > 0$, nulle sur la suite $\Lambda \cap E$ telle que

$$\log | H(x) | = \frac{a}{p} O(q(x)); \qquad \limsup \frac{\log | H(iy) |}{| y |} < c.$$

Soit d'autre part $K(z)$ la fonction holomorphe dans $x > 0$ construite en 4.4.4. avec $\beta' = \delta$, soit $G(z) = H(z)K(z)$, on a alors

4.4.10 $$\log | G(x) | = \frac{a}{p} O(q(x)) + a\theta(x) \frac{q(x)}{15}$$

où

$$\limsup | \theta(x) \geqq 1, \qquad \liminf \theta(x) = 0$$

ou encore

$$= \frac{a}{p} \beta(x)q(x) + a\delta \frac{q(x)}{15} \theta(x).$$

Soit $B = \sup | \beta(x) |$, B est indépendant de a et de p. Prenons ε assez petit de telle sorte que $B/p < \delta/30$ ce qui sera réalisé si $B/(\delta/\varepsilon - 1) < \delta/30$ ou si $\varepsilon < \delta^2/(30B + \delta)$. On aura alors

$$\limsup \frac{\log | G(x) |}{q(x)} > \limsup \frac{\log G(\lambda)}{q(\lambda)} + \frac{a}{30}$$

ce qui achève la démonstration de 4.4.1.

4.4.11. *La réciproque de* 1.5.5.7. Soit Λ une suite telle que 1.5.5.7. ne soit pas vérifié. On peut alors trouver une suite d'intervalles

$$I_n = [t_n , t_n + a_n q(t_n)] \qquad (a_n \to \infty)$$

tels que

$$\lim t_n \frac{\lambda(t_n + a_n q(t_n)) - \lambda(t_n)}{2a_n q(t_n)} = D_q^*(\Lambda) < c.$$

Soit $q^*(t) =$ borne concave $a_n^{\frac{1}{2}} q(t_n)$. Alors on a

$$D_{q^*}(\Lambda) < c.$$

On peut d'après 4.4.1. construire une fonction $H(z)$ vérifiant

4.4.12. $$\limsup \frac{\log | H(\lambda) |}{q^*(\lambda)} < \limsup \frac{\log | H(x) |}{q^*(x)}.$$

Pour conclure, démontrons le lemme

4.4.13. *Soit $q^*(t)$ une fonction concave, positive, vérifiant $q(t) = o(t)$, alors on peut construire une fonction $G(z)$ holomorphe dans $x > 0$, vérifiant*

$$\lim \frac{\log | G(x) |}{q^*(x)} = 1 \qquad x \in \Omega_{\Lambda''}, \quad \Lambda'' = G^{-1}(0).$$

Preuve. Soit $n(t)$ une fonction croissante à valeurs entières telles que

$$\int_R^{+\infty} \frac{dn(t)}{t} = \tfrac{1}{2}\frac{q^*(R)}{R} + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Cette relation peut être satisfaite puisque $q^*(R)/R$ est une fonction décroissante. Posons $\log | G(z) | = \int g_0(z/t)\, dn(t)$ (g_0 défini en 2.1.2.). On aura alors

$$\lim \frac{\log | G(x) |}{q^*(x)} = 1 \qquad x \in \Omega_{\Lambda''}$$

en vertu de 2.3.1. c.q.f.d.

4.4.14. Soit γ vérifiant d'après 4.4.12.

$$\limsup \frac{\log | H(\lambda) |}{q^*(\lambda)} < \gamma < \limsup \frac{\log | H(x) |}{q^*(x)}$$

et soit $G(z)$ construit par le lemme 5.4.3. avec

$$\lim \frac{\log | G(x) |}{q^*(x)} = -\gamma \qquad x \in \Omega_{\Lambda''}.$$

Alors $H(x)G(x) = K(x)$ vérifie

$$\limsup \log K(\lambda) < 0 \qquad \limsup \frac{\log K(x)}{q^*(x)} > 0$$

ou encore

$$\limsup \frac{\log K(x)}{q(x)} = +\infty$$

ce qui achève la démonstration.

4.5. Il reste à établir la réciproque de 1.5.4.

Le contre-exemple $f(z)$ sera déterminé par sa mesure caractéristique dm que nous prendrons nous la forme particulière $dm = dn(t)/t$ où $n(t)$ désigne la fonction et répartition des zéros et des pôles de $g(z)$ sur ox. Nous prendrons

4.5.1.
$$m(x) = \frac{q(x)}{x}(4 + \theta_0(x)), \qquad 4^{2n} + q(4^{2n}) < x < 4^{2n+1} - q(4^{2n+1})$$
$$m(x) = -\frac{q(x)}{x}(4 + \theta_1(x)), \qquad 4^{2n+1} + q(4^{2n+1}) < x < 4^{2n+2} - q(4^{2n+1})$$

où

$$0 < \theta_i(x) < 2, \qquad i = 0, 1.$$

Définissons dans les intervalles

$$[4^n - q(4^n), 4^n + q(4^n)] = I_n$$

des mesures

$$dm_n^*(x) = \gamma_n \frac{dx}{x}$$

où γ_n est une constante déterminée de telle sorte que

$$\int_{I_n} dm_n = m(4^n + q(4^n)) - m(4^n - q(4^n)).$$

Nous déterminerons $m(x)$ sur I_n de telle sorte que $| m(x) - m_n^*(x) | \leqq 2/x$. Soit $f(z)$ la fonction méromorphe ayant pour mesure **dm** on a en appliquant la même méthode d'évaluation donnée en 3.3.1.

$$\log | f(x) | = O(q(x)) + \int_{1+q(x)/x}^{2} \frac{1}{1-u} \left[m(ux) - m\left(\frac{x}{u}\right) \right] du.$$

Soit $r(x)$ cette intégrale. On a

$$r(x) = q(x) \left[\log \frac{x}{q(x)} + O(1) \right], \qquad x \in [4^n - q(4^n), 4^n + q(4^n)]$$

$$r(x) = O(q(x)) \qquad x \in [2.4^n, 3.4^n].$$

Soit Λ_1 la suite des zéros de f. Soit Λ_3 la suite composée de tous les entiers compris dans les intervalles $(2.4^n, 3.4^n)$ et soit $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_3$. Alors la fonction f est de type exponentiel, elle satisfait sur Λ aux hypothèses de 1.5.4. et l'on a

$$\limsup \frac{\log | f(\lambda) |}{q(\lambda)} < +\infty, \qquad \limsup \frac{\log | f(x) |}{q(x) \log (x/q(x))} = 1$$

ce qui achève la démonstration.

5. Prolongement des séries de Taylor

5.1. *S'il existe une fonction* $f(z) = \sum a_\lambda z^\lambda$ *prolongeable jusqu'à l'infini à l'exception de la demi-droite* $(1, +\infty)$ *alors quel que soit* $a > 0$ *si l'on pose*

$$k(r) = \lambda'(r) - a \log r$$

(Λ' *désigne la suite d'entiers complémentaire de* Λ)

$$\delta_a(r) = k(r) - k.(r)$$

on a

5.1.1. $$\limsup \delta_a(r) = +\infty.$$

Preuve. Supposons que 5.1.1. ne soit pas vérifié pour une valeur de a, soit $a = b > 0$. Il résulterait alors de 1.4.9. que l'on peut trouver une constante $B > 0$ telle que si une fonction $F(z)$ holomorphe dans $x > 0$, satisfait à

5.1.2. $$\log | F(iy) | < b | y | + O(1)$$

alors on a

5.1.3. $$\limsup \frac{\log |F(x)|}{x} < \limsup \frac{\log |F(\lambda')|}{\lambda'} + B.$$

Considérons d'autre part

$$\Gamma_a = \{z; |z| = e^{2B}, |\arg z| > b\}$$

et notons par γ_a une courbe joignant les deux extrémités de Γ_a, contenue dans la région $|\arg z| < b$, $\frac{1}{2} < |z| < e^{2B}$ et ne coupant pas la demi-droite $(1, +\infty)$. Soit

$$h(z) = \int_{\Gamma_a} f(\zeta)\zeta^{-z-1}\, d\zeta$$

$$F_0(z) = -\int_{\gamma_a} f(\zeta)\zeta^{-z-1}\, d\zeta.$$

Alors $F_0(z)$ satisfait 5.1.2. D'autre part on a $F_0(\lambda') = h(\lambda')$ d'où

$$\frac{\log F_0(\lambda')}{\lambda'} \leqq -2B + o(1)$$

tandis que l'égalité $F_0(\lambda) = h(\lambda) - a_\lambda$ entraine que

$$\limsup \frac{\log F_0(x)}{x} > 0$$

ce qui contredit 5.1.3. c.q.f.d.

5.2. *La condition* 5.1.1. *entraine*

5.2.1. $$D^*(\Lambda) = 1 \qquad (D^*(\Lambda) \text{ défini en } 1.6.3.1.).$$

Preuve. Si $D^*(\Lambda) < 1$ alors on aurait

$$n_{\Lambda'}(t) > \varepsilon t \qquad \varepsilon > 0 \text{ fixé, pour } t > t_0\,.$$

Quels que soient $\beta_n > \alpha_n$ on a, en intégrant par parties

5.2.2. $$\lambda'(\beta_n) - \lambda'(\alpha_n) = 2\int \frac{dn_{\Lambda'}(t)}{t} > -2 + 2\varepsilon \log \frac{\beta_n}{\alpha_n}.$$

Ecrivons 5.1.1. en prenant $a < 2\varepsilon$. On pourrait trouver une suite d'intervalles $\alpha_n\beta_n$ tels que

$$\lambda'(\beta_n) - \lambda'(\alpha_n) < a \log \frac{\beta_n}{\alpha_n} \qquad \frac{\beta_n}{\alpha_n} \to \infty$$

ce qui contredirait l'inégalité précédente.

5.3. *Soit* Λ *une suite d'entiers telle que* $D^*(\Lambda) = 1$, *alors on peut construire des intervalles*

$$[N_p, N'_p], \qquad N_p < N'_p < N_{p+1}$$

et une suite Λ'' *telle que* $D^\bullet(\Lambda'') = 0$, *que* $\Lambda \cup \Lambda''$ *contienne les entiers consécutifs compris entre* N'_p *et* N_p *et que* $\lim\,(N'_p/N_p) = +\infty$.

Preuve. Désignons par Λ' la suite d'entiers complementaires de la suite Λ. Soit $\rho_{\Lambda'}(x)$ défini en 1.6.3.1. Donnons nous deux suites $\varepsilon_n \downarrow 0$, $B_n \uparrow +\infty$. Supposons que l'intervalle $N_p N'_p$ ait été construit. Puisque $\lim\inf \rho_{\Lambda'}(x) = 0$ on peut trouver N'_{p+1} tel que $\rho_{\Lambda'}(N'_{p+1}) < \varepsilon_{p+1}/B_{p+1}$, $N'_{p+1} > B^2_{p+1} N'_p$, soit $N_{p+1} = N'_{p+1}/B_{p+1}$. On aura alors

$$\rho(y) < \varepsilon_{p+1} \qquad N_{p+1} < y < N'_{p+1}.$$

Désignons par $\Lambda''_p = \Lambda' \cap [N_{p+1}, N'_{p+1}]$ et soit

5.3.1. $$\Lambda'' = \cup_p \Lambda''_p$$

on aura a fortiori Λ''_p était une sous suite de Λ'

$$\rho_{\Lambda''}(y) < \varepsilon_p \quad \text{si} \quad N_p < y < N'_p$$

Λ'' ne contenant plus de points à l'extérieur de cet intervalle jusqu'en N_{p+1}, la suite $\varepsilon_p \downarrow$, on a $\rho_{\Lambda''}(y) < \varepsilon_p$ si $y > N_p$. On obtient ainsi que

5.3.2. $$D^\bullet(\Lambda'') = 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

5.4. *Etant donné une suite* $N_p\, N'_p$ *telle que*

$$\lim \frac{N'_p}{N_p} = +\infty, \qquad N'_p < N_{p+1}$$

il existe une fonction $F(z)$ *holomorphe dans le demi-plan vérifiant*

5.4.1 $$\lim \frac{\log|F(iy)|}{y} = 0$$

5.4.2. $$\lim\sup \frac{\log|F(x)|}{x} = 0$$

5.4.3. $$\lim \frac{\log|F(x)|}{x} = -\infty \qquad x \in E = \cup_p [N_p N'_p].$$

Preuve. On peut en extrayant au besoin une suite de la suite N_p et en diminuant la longueur des intervalles ramener au cas où

$$N'_p = e^p N_p \qquad \lim \frac{N'_p}{N_{p+1}} = 0.$$

Soit enfin $c(y)$ une fonction décroissante tendant vers zéro telle que

$$\lim pc(N'_p) = +\infty.$$

Soit $dm_0 = c * B$, B étant le noyau défini en 1.2.5. Alors $dm_0 < 0$ et l'on a

$$\lim_p \int_{N_p}^{N'_p} dm_0 = -\infty \quad \text{et} \quad \int_t^{Rt} \mathbf{dm}_0 = o(1) \qquad t \to \infty.$$

Nous construirons une suite Λ_1, constituée par tous les entiers consécutifs compris entre N_p et b_p, où $b_p > N_p$ est choisi tel que l'on ait pour $p > p_0$, p_0 assez grand,

$$m_0(b_p) + \lambda_1(b_p) = o(1).$$

Il résulte de 5.4.2. que pour p_0 choisi assez grand $b_p < N'_p$, et plus précisément que $\lim (b_p/N'_p) = 0$ et d'après 5.4.1. $\lim (N_p/b_p) = 0$. La fonction

$$k(t) = m_0(t) + \lambda_1(t)$$

vérifiera ainsi

$$\lim k(t) = -\infty \qquad t \notin E = \bigcup [N_p, N'_p]$$

$$\limsup k(t) = 0.$$

Il suffit de considérer la fonction $g(z)$ ayant $k(t)$ pour mesure caractéristique et de lui appliquer les évaluations données en 2.3. et 3.3.1. pour obtenir que

$$\limsup \frac{\log |g(x)|}{x} = d > -\infty, \qquad \lim \frac{\log g(x)}{x} = -\infty \qquad x \notin E.$$

La fonction $F(z) = g(z)e^{-dz}$ répond aux conditions imposées.

5.5. *Si* $D^{\bullet}(\Lambda) = 1$ *on peut trouver une fonction* $f(z)$ *holomorphe dans le plan privé de la demi-droite* $(1, +\infty)$ *et telle que*

$$f(z) = \sum a_\lambda z^\lambda \qquad si\ |z| < 1.$$

Preuve. Soit N_p N'_p la suite d'entiers construite en 5.3. et $F(u)$ la fonction associée par 5.4. à cette suite, et Λ'' désignant la suite introduite en 5.3.1., posons

$$G(u) = \prod_{\Lambda''} \left(1 - \frac{u^2}{\lambda''^2}\right)$$

il résulte de 5.3.2. que $G(u)$ est une fonction entière de type exponentiel d'ordre zéro. Soit $K(u) = F(u)G(u)$.

5.5.1. $$\limsup \frac{\log |K(u)|}{u} = 0.$$

D'autre part 5.4.3. entraine que

5.5.2. $$\lim \frac{\log |K(\lambda')|}{\lambda'} = -\infty.$$

Posons

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty i}^{+i\infty} \frac{K(u)}{\sin \pi u} (-z)^u \, du = f_1(z).$$

Cette intégrale étant prise sur $v = \frac{1}{2}(u = v + iw)$, l'argument de $-z$ ayant été uniformisé par coupure $(0, +\infty)$ l'argument valant $+\pi$ sur le bord supérieur de cette coupure. $f_1(z)$ est ainsi une fonction holomorphe dans le plan privé de $(0, +\infty)$.

Si on applique d'autre part la formule de Cauchy on obtient en vertu de 5.5.1. si $|z| < 1$

5.5.3. $$f_1(z) = \sum_1^{+\infty} K(n)(-z)^n$$

série convergente si $|z| < 1$. (En passant on peut remarquer que l'application de la formule de Cauchy à des bandes dont l'extrémité est dans une région où 5.5.2. vaut, mettrait en évidence des phénomènes d'ultra convergence.) Posons

$$f(z) = \sum K(\lambda)(-z)^\lambda \qquad f_2(z) = \sum K(\lambda')(-z)^{\lambda'}.$$

Alors $f_2(z)$ est une fonction entière et 5.5.3. s'écrit

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z)$$

ce qui achève la démonstration de 1.6.3. On peut remarquer de plus le diagramme d'implications logiques que l'on vient d'établir

(Hypothèses 5.1.) $\Rightarrow$ $(\lim \delta_a(x) = +\infty)$ $\Rightarrow$ $(D^\bullet(\Lambda) = 1)$ $\Rightarrow$ (Hypothèses 5.1)

entraine la réciproque de 5.2., réciproque qui se vérifie d'ailleurs directement sans difficultés.

Bibliographie

1. R. P. Boas, Jr., *Entire functions*, New York, 1954, Chapter 10.
2. ———, *Growth of analytic functions along a line*, Journal d'Analyse mathématique (Jerusalem), vol. 4 (1955), pp. 1–25.
3. W. H. J. Fuchs, *On the growth of functions of mean type*, Proc. Edinburgh Math. Soc., vol. 9 (1954), pp. 53–70.
4. N. Levinson, *On the growth of analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 43 (1938), pp. 240–257.
5. P. Malliavin, *Sur quelques procédés d'extrapolation*, Acta Math., vol. 93 (1955), pp. 179–255.
6. S. Mandelbrojt, *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications*, Paris, 1952.
7. L. A. Rubel, *Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., vol. 41 (1955), pp. 601–603.
8. R. E. A. C. Paley and N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 19 (1934).

The Institute for Advanced Study
Princeton, New Jersey
Université de Caen
Caen, France