The Annals of Probability
1973, Vol. 1, No. 2, 207–222

UNE THEORIE DE LA DUALITE A ENSEMBLE POLAIRE PRÈS I

PAR M. A. GARCIA ALVAREZ[1] ET P. A. MEYER

Université de Strasbourg

Mokobodzki has shown that any kernel which satisfies the complete maximum principle and the absolute continuity hypothesis has the same excessive functions as a compact kernel. We start with a nice semigroup which satisfies the absolute continuity hypothesis, build for it a coresolvent with the same property, and apply Mokobodzki's result to the coresolvent in order to get a Martin compactification for the original process. Since the coresolvent may not separate points on the state space, we are obliged to throw away a polar Borel set before the Martin procedure applies. We prove a representation theorem for excessive functions, which implies in particular that any measure on the original state space, which does not charge semipolar sets, is equivalent to (i.e. has the same null sets as) a continuous additive functional. This implies the "fine support theorem": any finely perfect set is the fine support of a continuous additive functional, a theorem which has been proved by Mokobodzki and Azema using other methods.

Le point de départ de ce travail a été la recherche d'une démonstration du "théorème du support fin", problème qui est resté ouvert pendant plusieurs années: est il vrai que tout ensemble finement parfait soit le support fin d'une fonctionnelle additive continue? Sous les hypothèses de dualité classiques, la question a été résolue affirmativement par Dellacherie [6], de la manière suivante: d'abord, par une construction probabiliste très générale, Dellacherie montre que tout ensemble aléatoire fermé à droite sans points isolés porte un processus croissant adapté continu. Prenant un processus de Markov X, un ensemble finement parfait F, et comme ensemble aléatoire celui des rencontres de F par X, Dellacherie en déduit l'existence d'une *mesure* μ, ne chargeant pas les ensembles semi-polaires, et dont le support fin est F, sous l'hypothèse de continuité absolue. Si l'on dispose de bons noyaux de Green, on peut remplacer μ par une mesure équivalente dont le potentiel u est borné et régulier, et la fonctionnelle additive engendrant u admet F comme support fin.

Il restait à se débarrasser des hypothèses de dualité classiques. Mokobodzki a démontré, dans un article qui est l'un des progrès majeurs de ces dernières années, que tout noyau de théorie du potentiel possédant une mesure de base admet les mêmes fonctions excessives qu'un noyau compact. Mokobodzki utilise ce résultat pour établir l'existence d'une représentation intégrale des fonctions

---

Received May 31, 1972.

[1] Le sèjour à Strasbourg de M. A. Garcia Alvarez est subventionné par le Cousejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Mexico.

AMS 1970 *subject classification.* 60J45.

Key words and phrases. Markov processes, compactification, duality, resolvent, Martin boundary.

excessives sous la seule hypothèse de continuité absolue. La démonstration de Mokobodzki a été mise sous une forme un peu plus probabiliste par le second auteur de cet article, qui a suggéré que la dualité utilisée dans cette méthode, si on l'étudiait avec précision, permettrait sans doute d'établir le théorème du support fin sous la même hypothèse. Cela a été accompli par le premier auteur, qui en a déduit un résultat plus fort que l'on peut (à des détails près) énoncer ainsi: une mesure qui ne charge pas les ensembles semi-polaires est équivalente à une fonctionnelle additive continue. Il suffit pour cela de traiter une théorie de la dualité "à ensemble semi-polaire près". Mais nous nous sommes aperçus ensuite qu'une remarque de J. Walsh permettait d'aller beaucoup plus loin, et d'avoir une véritable dualité "à ensemble polaire près". Nous étudierons cette dualité plus à fond dans la seconde partie de cet article, car elle nous semble à présent plus intéressante que le but initial de ce travail. Entre temps, en effet, le théorème du support fin a été démontré de deux manières, toutes deux plus directes que celle qu'on trouvera ici. Azéma l'établit (voir [1]) sans passer par les mesures en projetant le processus croissant de Dellacherie sur une tribu d'ensembles "coprévisibles", ce qui en fait une fonctionnelle additive. La seconde démonstration, due à Mokobodzki, n'utilise pas les noyaux compacts: il s'agit d'une étude des relations entre mesures ne chargeant pas les ensembles semi-polaires et potentiels réguliers, qui n'exige même pas l'hypothèse de continuité absolue. Compte tenu du résultat de Dellacherie sur les measures ne chargeant pas les semi-polaires, on retrouve aisément le théorème du support fin et sa forme plus forte ci-dessus. Il est d'ailleurs possible que la théorie de Mokobodzki et le présent article ne soient, au fond, que deux manières de dire la même chose, sous forme analytique ou sous forme probabiliste.

1. Notations, definitions, rappels. Nous considérons un espace d'états E, homéomorphe à un sous-espace borélien d'un espace métrique compact (autrement dit, lusinien métrisable). Nous noterons $\mathscr{E}$ sa tribu borélienne, $\mathscr{E}^*$ sa tribu universellement mesurable, $\mathscr{B}(E)$, $\mathscr{B}^*(E)$ les espaces de fonctions boréliennes (resp. universellement mesurables) bornées sur E, munis de la norme de la convergence uniforme. Un noyau N sur E (c.à.d. sur $(E, \mathscr{E}^*)$[2]) est dit *de base* μ si pour tout $x \in E$ la mesure $N(x, dy)$ est absolument continue par rapport à la mesure μ.

Nous nous donnons un semi-groupe sousmarkovien $(\bar{P}_t)$ de noyaux sur E, qui satisfait aux *hypothèses droites* de la théorie des processus de Markov: il admet une réalisation continue à droite à valeurs dans $E \cup \{\partial\}$, telle que les fonctions p-excessives ($p \geqq 0$) soient presque boréliennes, p.s. continues à droite sur les trajectoires. Rappelons que cela entraîne la propriété de Markov forte, et que l'on peut travailler sur la réalisation continue à droite canonique de ce semi-groupe. Nous désignerons celle-ci par les notations de [8]: Ω, X_t, θ_t (translation), ζ (durée de vie), $\mathscr{F}^0$, $\mathscr{F}_t^0$ (tribus non complétées), $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_t$ (tribus complétées). Nous désignerons par $(\bar{U}_p)$, $\bar{U}$ la résolvante et le potentiel de $(\bar{P}_t)$, et nous sup-

[2] Dans cet article, le mot *fonction* signifie *fonction universellement mesurable.*

poserons $\bar{U}$ *propre*. Enfin, nous supposerons que $(\bar{P}_t)$ satisfait à *l'hypothèse de continuité absolue*.

Dans presque tout cet article—à l'exception de l'extrême fin, où nous reviendrons à la situation initiale—nous travaillerons, non pas sur $(\bar{P}_t)$ lui même, mais sur de meilleurs semi-groupes, construits par l'application de plusieurs transformations du type suivant

(a) enlever à l'espace d'états E un ensemble borélien polaire, ou

(b) effectuer le changement de temps associé à une fonctionnelle additive de la forme $A_t = \int_0^t a \circ X_s\, ds$, a étant une fonction partout > 0 telle que le noyau U_A soit propre. Pour introduire un langage abrégé, nous dirons que $(\bar{P}_t)$, et un second semi-groupe (P_t) satisfaisant aux hypothèses ci dessus, sont *apparentés* s'il existe une fonction a partout > 0 telle que $Uf = \bar{U}(af)$ pour toute f positive. Les deux semi-groupes ont alors les mêmes fonctions excessives, et on passe aisément de l'un à l'autre.

En particulier, dès le début, nous choisirons a partout > 0, bornée et telle que $\bar{U}a$ soit bornée (ce qui est possible du fait que $\bar{U}$ est propre, et satisfait au principe complet du maximum). Le noyau U est alors *borné*. Soit λ une loi de probabilité, qui est aussi une mesure de référence[3]; le noyau U est alors de base m, où $m = \lambda U$ est bornée.

Nous rappelons maintenant les résultats essentiels dont nous aurons besoin. Nous dirons qu'un noyau N sur E est *compact* s'il transforme la boule unité de $\mathscr{B}^*(E)$ en un ensemble compact pour la convergence uniforme. Le résultat fondamental de Mokobodzki affirme:

THEOREME 1. *Pour tout noyau propre $\bar{V}$ de base μ, satisfaisant au principe complet du maximum, il existe une fonction c partout > 0 telle que le noyau $V: f \to \bar{V}(cf)$ soit compact.*

Noter que toute fonction $c' \leqq c$ possède la même propriété, et que V satisfait au principe complet du maximum: d'après un théorème bien connu de Hunt, il existe une résolvante sousmarkovienne V_p telle que $V_0 = V$. Les noyaux V_p sont de base μ, et la relation $V_p = (I - pV_p)V$ montre qu'ils sont compacts.

Le second résultat fondamental est le théorème sur le retournement du temps, dû à Chung et Walsh (avec de petites améliorations données dans [10]). Nous munissons Ω de la mesure P^λ (semi-groupe (P_t), loi initiale λ), nous désignons par $\mathscr{F}^\lambda$ la tribu complétée de $\mathscr{F}^0$, et par $\hat{\mathscr{F}}_t$ la tribu

$$\{A \in \mathscr{F}^\lambda\colon \text{ pour tout } \; u \geqq 0 \;\; A \cap \{\zeta > t + u\} = \theta_u^{-1}(A) \cap \{\zeta > t + u\}\}$$

à laquelle on adjoint les ensembles P^λ-négligeables. Cette famille de tribus est croissante et continue à droite. On définit le processus retourné $(\hat{X}_t)_{t>0}$, continu à gauche, adapté à la famille $(\hat{\mathscr{F}}_t)$

$$\hat{X}_t = X_{\zeta - t} \quad \text{si} \quad 0 < t < \zeta < \infty\,, \qquad \hat{X}_t = \partial \quad \text{sinon.}$$

[3] i.e. une fonction excessive nulle λ-p.p. est nulle partout.

THEOREME 2. *Il existe un semi-groupe sousmarkovien $(\hat{P}_t)_{t>0}$ sur E, transformant les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes, possédant les propriétés suivantes*

(a) *Le processus $(\hat{X}_t)_{t>0}$ est modérément markovien par rapport à la famille $(\hat{\mathscr{F}}_t)$, avec $(\hat{P}_t)$ comme semi-groupe de transition.*

(b) *Pour tout $x \in E$, il existe un processus de Markov continu à gauche et modérément markovien, admettant $(\hat{P}_t)$ comme semi-groupe de transition et $(\varepsilon_x \hat{P}_t)_{t>0}$ comme loi d'entrée.*

(c) *La résolvante $(\hat{U}_p)$ de $(\hat{P}_t)$ est en dualité avec (U_p) relativement* à $m = \lambda U$:

$$\langle f, U_p g\rangle_m = \langle \hat{U}_p f, g\rangle_m \qquad (f, g \geqq 0)\,.$$

(d) *Pour toute f positive bornée, tout $p > 0$, $\hat{U}_p f$ est finement continue hors d'un ensemble polaire,*[4] *et* $\lim_n nU_n \hat{U}_p f$ *existe donc* q.p.

Rappelons ce que signifie "modérément markovien", par exemple avec les notations de (a): cela veut dire que si S est un temps d'arrêt *prévisible* de la famille $(\hat{\mathscr{F}}_t)$, on a pour tout t et toute $f \geqq 0$

$$E[f \circ \hat{X}_{T+t} I_{\{T<\infty\}} \mid \hat{\mathscr{F}}_{T-}] = \hat{P}_t(\hat{X}_T, f) I_{\{T<\infty\}}\ P^\lambda\text{-p.s.}$$

Le semi-groupe $(\hat{P}_t)$ n'est pas uniquement déterminé, mais si $(\hat{Q}_t)$ est un second semi-groupe possédant les mêmes propriétés, on peut montrer que l'ensemble des x tels que $\hat{P}.(x, \cdot) \neq \hat{Q}.(x, \cdot)$ est *polaire.*

Comme on le fait pour les semi-groupes fortement markoviens, on peut "réaliser canoniquement" $(\hat{P}_t)$ sur l'espace $\hat{\Omega}$ des applications continues à gauche de $]0, \infty[$ dans $E \cup \{\partial\}$, avec des lois $\hat{P}^x$, des opérateurs de translation $\hat{\theta}_t$, etc. Nous ne nous appesantirons pas là dessus. Nous ferons seulement remarquer que le théorème 2 est un résultat probabiliste très puissant, fatigant à établir, et que le fait de nous en servir suffit à rendre cet article plus technique que ceux d'Azéma ou de Mokobodzki.

2. Construction et amelioration de la coresolvante. Nous allons consacrer ce paragraphe à la démonstration du théorème suivant, dont nous tirerons quelques conséquences ensuite.

THEOREME 3. *Pour un choix convenable de la fonction a telle que $Uf = \bar{U}(af)$, on peut choisir $(\hat{P}_t)$ de telle sorte que*

(a) *les noyaux U et $\hat{U}$ (donc aussi U_p, $\hat{U}_p$) soient compacts de base m,*

(b) *il existe un ensemble polaire borélien B tel que toutes les fonctions $\hat{U}_p f$ (f positive bornée, $p \geqq 0$) soient finement continues hors de B.*

Pour établir ce résultat, nous construirons une seconde résolvante en dualité avec (U_p), que nous comparerons à la résolvante $(\hat{U}_p)$. Pour chaque p rationnel $\geqq 0$ choisissons un noyau fonction $u_p(x, y)$, mesurable sur $E \times E$, tel que $U_p(x, dy) =$

---

[4] En fait cet ensemble n'est pas chargé par la mesure de référence λ. Nous noterons, à propos de chacun des ensembles polaires auxiliaires que nous rencontrerons dans la suite, s'il est chargé par λ ou non. Mais le lecteur n'a pas besoin d'y prêter attention.

$u_p(x, y)m(dy)$, et posons $V_p^0(y, dx) = m(dx)u_p(x, y)$. On a $\langle f, U_p g\rangle_m = \langle V_p^0 f, g\rangle_m$, et on en déduit les propriétés suivantes

(1) $pV_p^0(y, 1) \leqq 1$ m-p.p.

(2) $(q - p)V_p^0 V_q^0(y, dx) = V_p^0(y, dx) - V_q^0(y, dx)$ pour presque tout y (les deux membres étant des noyaux en dualité avec $U_p - U_q$).

(3) Le noyau U et la mesure $m = \lambda U$ étant bornés, on a $\langle V^0 1, 1\rangle_m = \langle 1, U1\rangle_m < \infty$, donc $V_0^0 1$ est finie m-p.p.

Soit A l'ensemble des y tels que $pV_p^0(y, 1) \leqq 1$ pour p rationnel, que $V_0^0(y, 1) < \infty$, et que (2) ait lieu pour tout les p, q rationnels > 0. Posons pour $p > 0$ rationnel $V_p(y, dx) = I_A(y)V_p^0(y, dx)$: toutes les propriétés d'une résolvante sousmarkovienne sont satisfaites pour p rationnel, et le prolongement aux p réels $\geqq 0$ est immédiat. Noter que la résolvante (V_p) est de base m, que V_0 (qu'on notera V) est la limite des V_p lorsque $p \to 0$, que $V1$ est partout finie. Comme V est un noyau de théorie du potentiel, on en déduit aussitôt que V est propre, et on peut lui appliquer le théorème 1.

Choisissons une fonction c_1 partout > 0, bornée, telle que le noyau $f \to V(c_1 f)$ soit compact, de même une fonction c_2 telle que $f \to U(c_2 f)$ soit compact, prenons $c = c_1 \wedge c_2$; alors il est immédiat que les noyaux $U' : f \to U(cf)$ et $V' : f \to V(cf)$ sont compacts. Soit m' la mesure $\lambda U' = cm$. Les noyaux U' et V' sont en dualité par rapport à m' et les deux résolvantes correspondantes (U_p') et (V_p') le sont également (cela se voit aisément sur la construction de ces résolvantes par prolongement analytique, donnée par Hunt). Nous changerons de notation en écrivant U, m, V au lieu de U', m', V': cela revient simplement à choisir autrement la fonction a telle que $Uf = \bar{U}(af)$.

Comparons maintenant à (V_p) la résolvante $(\hat{U}_p)$ qui nous est fournie par le théorème 2. Comme elles sont toutes deux en dualité avec les mêmes noyaux U_p, on a $\hat{U}_p(y, \cdot) = V_p(y, \cdot)$ m-p.p., donc $nU_n \hat{U}_p = nU_n V_p$ identiquement. Fixons f bornée, $p > 0$; d'après le théorème 2 $\hat{U}_p f$ est finement continue hors d'un ensemble polaire $A(p, f)$, donc la limite $\lim_n nU_n \hat{U}_p f = \lim_n nU_n V_p f$ existe et vaut $\hat{U}_p f$ hors de $A(p, f)$. Comme $V = V_p(I + pV)$, et V est borné, ce résultat vaut aussi pour $p = 0$. Mais d'autre part V est compact: appliquant ce résultat à une suite de fonctions Vf_n, uniformément dense dans l'image par V de la boule unité de $\mathscr{B}^*(E)$, on voit qu'il existe un même ensemble polaire A[5] tel que pour toute f bornée la limite $\lim_n nU_n Vf = \lim_n nU_n \hat{U}f$ existe hors de A (de plus, cette limite vaut $\hat{U}f$ q.p., mais l'ensemble polaire exceptionnel dépend a priori de f). Comme $V_p f = V(I - pV_p)f$, la limite

$$W_p(x, f) = \lim_n nU_n V_p f(x)$$

existe pour f bornée, $p \geqq 0$, $x \notin A$. Si $x \in A$, nous poserons $W_p f(x) = 0$. Il résulte du théorème de Vitali-Hahn-Saks que W_p est un noyau, évidemment de

[5] Non chargé par λ.

base m. L'application $p \to W_p(x, \cdot)$ est continue pour la norme des mesures, et W_0 est borné.

Pour f fixée, p rationnel $\geqq 0$, on a $W_p(x, f) = \hat{U}_p(x, f)$ quasi-partout. Prenant f dans un ensemble dénombrable suffisamment riche, on voit que $\hat{U}_p(x, \cdot) = W_p(x, \cdot)$ q.p., et l'ensemble polaire exceptionnel peut être rendu indépendant de p. Grâce à l'hypothèse de continuité absolue, on peut l'enfermer dans un ensemble borélien polaire D, contenant aussi l'ensemble polaire A envisagé plus haut. Si nous remplaçons le semi-groupe $(\hat{P}_t)$ par le semi-groupe $I_{D^c}(x)\hat{P}_t(x, dy)$, $(\hat{U}_p)$ par la résolvante correspondante, nous avons ajouté aux conclusions du théorème 2 le fait que les noyaux $\hat{U}$, $\hat{U}_p$ sont de base m, et que $\hat{U}$ est borné.

Nous faisons maintenant à nouveau le raisonnement de la première partie de la démonstration: une modification de la fonction a nous permet de supposer que $\hat{U}$ et les $\hat{U}_p$ sont compacts. Chaque fonction $\hat{U}f$ étant finement continue quasi-partout, la compacité nous permet de choisir un ensemble borélien polaire B[6] tel que toutes ces fonctions $\hat{U}f$ (aussi $\hat{U}_p f$) soient finement continues hors de B. Le théorème 3 est établi.

Nous allons maintenant utiliser la compacité de U et $\hat{U}$ pour mettre en évidence d'autres ensembles polaires (boréliens), que nous grouperons en un seul ensemble borélien polaire N. Les résultats que nous obtiendrons au paragraphe suivant vaudront hors de N

(1) Si f est universellement mesurable bornée, la fonction $\hat{U}f$ est différence de deux fonctions excessives, donc presque-borélienne. Il existe donc deux fonctions boréliennes g', g'' telles que $g' \leqq Uf \leqq g''$, et que l'ensemble $D_f = \{g' < g''\}$ soit λ-polaire (donc polaire, puisque λ est une mesure de référence). Grâce à la compacité de $\hat{U}$, on voit qu'il existe un ensemble borélien polaire D, telles que toutes les fonctions Uf (donc toutes les fonctions excessives ou p-excessives) coincident sur D^c avec des fonctions boréliennes. Si l'on retire D de E, on voit que sur l'espace restant la résolvante (U_p) est borélienne.

(2) Au cours de la démonstration précédente, nous avons introduit certains points x où s'annulent les mesures $\varepsilon_x \hat{P}_t$—ou, ce qui revient au même d'après la continuité à gauche des $\hat{P}_t$, où $\varepsilon_x \hat{U} = 0$. Soit C l'ensemble de ces points, qui est borélien. Il est intéressant de savoir que C est polaire.

Munissons en effet Ω de la loi P^λ, notons f la fonction bornée $\hat{U}1$ (prolongée par 0 au point ∂). Soit (Z_t) la surmartingale $(f \circ \hat{X}_t)_{t>0}$, qui est continue à gauche du fait que f est finement continue hors de l'ensemble polaire B. Soit Z_t^+ la surmartingale continue à droite Z_{t+}; on sait que Z_t^+ est identiquement nulle à partir du premier instant où sa valeur, ou bien sa limite à gauche, s'annulent. Mais cette limite à gauche est égale à Z_t. En retournant le temps, on voit que pour P^λ-presque tout ω l'ensemble $\{t : X_t(\omega) \in C\} = \{t : f \circ X_t(\omega) = 0\}$ est, ou vide, ou un intervalle $[0, a)$ (qui peut être fermé ou ouvert en a). D'autre part, on a $\hat{U}I_C = 0$, donc $\langle \lambda, \hat{U}I_C \rangle = m(C) = 0$, donc pour presque tout ω l'ensemble

[6] Non chargé par λ.

$\{t\colon X_t(\omega) \in C\}$ est de mesure nulle, et $a = 0$ P^λ-p.s. Autrement dit, C est λ-polaire,[7] donc polaire.

Pour l'instant, notre ensemble polaire exceptionnel se compose de B, C et D. Nous allons l'agrandir encore.

(3) Notons $\mathscr{H}$ le plus petit espace vectoriel $\wedge$ stable contenant les constantes et les fonctions Uf (f bornée), fermé pour la convergence uniforme. En vertu de la compacité de U, $\mathscr{H}$ est séparable pour la convergence uniforme.

LEMME 1. (a) *Il existe un ensemble borélien polaire J tel que, pour tout $x \notin J$ et toute $f \in \mathscr{H}$ $\lim_n n\hat{U}_n f(x)$ existe.*

(b) *Il existe un ensemble borélien semi-polaire S tel que, pour tout $x \notin S$ et toute $f \in \mathscr{H}$, on ait $\lim_n n\hat{U}_n f(x) = f(x)$.*

(c) *Le noyau $\hat{U}$ sépare $E\backslash S$.*

DEMONSTRATION. Au lieu de nous placer sur E, nous nous placerons sur $G = E\backslash(B \cup C \cup D)$: cela simplifie certains détails, car les fonctions excessives sont boréliennes sur G.

Les fonctions de $\mathscr{H}$ de la forme $u - v$ (u, v excessives bornées) forment un ensemble dense dans $\mathscr{H}$. Soit g une fonction excessive bornée. Montrons que $\lim_n n\hat{U}_n g$ existe q.p., et est égale à g sauf sur un ensemble semi-polaire.

Le processus $(g \circ X_t)$ est continu à droite et pourvu de limites à gauche, de sorte que le processus $(g \circ \hat{X}_t)$ est continu à gauche et pourvu de limites à droite. Nous avons pour tout temps d'arrêt prévisible borné T de la famille $(\hat{\mathscr{F}}_t)$

$$(g \circ \hat{X}_T)_+ = \lim_n \textstyle\int_0^\infty ne^{-nt} g \circ \hat{X}_{T+t}\, dt\ .$$

Prenons des espérances par rapport à $\hat{\mathscr{F}}_{T-}$, en appliquant la propriété de Markov modérée. Il vient d'après un lemme bien connu dû à Hunt,[8] lorsque $n \to \infty$

$$E[(g \circ \hat{X}_T)_+ \mid \hat{\mathscr{F}}_{T-}] = \lim_n n\hat{U}_n g \circ \hat{X}_T \qquad P^\lambda\text{-p.s.} \tag{1.1}$$

Comme nous nous sommes restreints à G, la fonction g est borélienne, et il en est de même des fonctions $n\hat{U}_n g$. L'ensemble

$$J(g) = \{\liminf_n n\hat{U}_n g < \limsup_n n\hat{U}_n g\}$$

est donc borélien. L'existence p.s. de la limite, au membre droit de (1.1), signifie que $P^\lambda\{\hat{X}_T \in J(g)\} = 0$ pour tout temps d'arrêt prévisible borné T de$(\hat{\mathscr{F}}_t)$; d'après le théorème de section prévisible et la continuité à gauche du processus $(\hat{X}_t)$, l'ensemble $\{(t, \omega)\colon \hat{X}_t(\omega) \in J(g)\}$ est évanescent. Par retournement du temps, $J(g)$ est λ-polaire,[9] donc polaire.

Soit maintenant $S(g)$ l'ensemble des points de $G\backslash J(g)$ où $\lim_n n\hat{U}_n g \neq g$. Posons $\bar{g} = \lim_n n\hat{U}_n g$. La formule (1.1) exprime que le processus $(\bar{g} \circ \hat{X}_t)$ est la projection prévisible du processus bien-mesurable $((g \circ \hat{X}_t)_+)$: ces deux processus ne

[7] Mais C peut être chargé par λ.

[8] G. A. Hunt, *Martingales et Processus de Markov*, page 47.

[9] Non chargé par λ.

different donc que sur la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt. D'autre part, les processus $((g \circ \hat{X}_t)_+)$ et $(g \circ \hat{X}_t)$ ne diffèrent que sur une telle réunion. Il résulte de tout cela que l'ensemble $\{t: X_t(\omega) \in S(g)\}$ est P^λ-p.s. dénombrable. D'après un théorème de Dellacherie ([5], Théorème 5 page 112) cela entraîne que $S(g)$ est semi-polaire. L'existence des ensembles J et S de l'énoncé résulte aussitôt du fait que $\mathscr{H}$ est séparable.

Soient x et y deux points de $E \backslash S$ tels que $\varepsilon_x \hat{U} = \varepsilon_y \hat{U}$; alors $\varepsilon_x \hat{U}_n = \varepsilon_y \hat{U}_n$ pour tout n. Multiplions par n, appliquons à $f \in \mathscr{H}$, et faisons tendre n vers $+\infty$: par définition de S il vient que $f(x) = f(y)$, donc $x = y$. Le lemme est établi.

(4) Nous allons maintenant établir, en adaptant une méthode de Walsh [16], le lemme suivant.

LEMME 2. *Il existe un ensemble borélien polaire L, et une suite de fonctions positives bornées, surmédianes par rapport au semi-groupe $(\hat{P}_t)$, boréliennes et finement continues sur $E \backslash L$, séparant $E \backslash L$.*

DEMONSTRATION. Comme nous travaillons à un ensemble polaire près, nous pouvons dès le début enlever de E tous les ensembles polaires précédemment obtenus. Nous ferons cela sans changer de notations. Le principal avantage technique tient au fait que les fonctions excessive sont alors boréliennes sur E.

Nous avons déjà remarqué que $\mathscr{H}$ est un espace séparable, dans lequel les fonctions de la forme $u - v$ (u, v excessives bornées) forment un ensemble dense. Nous pouvons donc réduire Ω à l'ensemble des ω tels que, pour toute $h \in \mathscr{H}$, l'application $h \circ X_.(\omega)$ soit continue à droite et pourvue de limites à gauche.

Soit $\hat{\Omega}$ l'ensemble des applications $\hat{\omega}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $E \cup \{\partial\}$, à durée de vie, continues à gauche sur $]0, \infty[$; notons $\hat{X}_t$ les coordonnées (la notation $\hat{X}_t$ est déjà utilisée pour le processus retourné, mais ce n'est pas grave). Pour chaque $x \in E$, nous savons construire, d'après le théorème 2, une loi $\hat{P}^x$ pour laquelle $\hat{X}_0 = x$, le processus $(\hat{X}_t)$ étant modérément markovien et admettant $(\hat{P}_t)$ comme semi-groupe de transition. Soit $\hat{\Omega}_0$ le sous-ensemble de $\hat{\Omega}$ formé des $\hat{\omega}$ telles que, pour toute $h \in \mathscr{H}$, l'application $h \circ \hat{X}_.(\hat{\omega})$ soit continue à gauche sur $]0, \infty[$, pourvue de limites à droite sur $[0, \infty[$; $\mathscr{H}$ étant séparable, et les fonctions de $\mathscr{H}$ boréliennes sur E, il n'est pas difficile de voir que $\hat{\Omega}_0$ est borélien dans $\hat{\Omega}$ (cf. raisonnement analogue dans [5][10]). L'ensemble F des x tels que $\hat{P}^x\{\hat{\Omega}_0 < 1\}$ est alors borélien. On vérifie alors sur Ω que pour tout temps d'arrêt prévisible T de la famille $(\hat{\mathscr{F}}_t)$ on a $P^\lambda\{\hat{X}_T \in F\} = 0$, de sorte que F est λ-polaire,[11] et enfin polaire. Nous nous simplifierons encore la vie en remplaçant E par $E \backslash F$, sans changer de notation: on se ramène ainsi au cas où F est vide.

Choisissons une suite (h_n) de fonctions de $\mathscr{H}$, dense dans la boule unité de $\mathscr{H}$, posons

$$d(x, y) = \textstyle\sum_n 2^{-n}|h_n(x) - h_n(y)|$$

[10] [5], page 100. Le résultat annoncé pour un espace lusinien métrisable ne vaut que pour un espace polonais (nous devons cette remarque à J. Taylor).

[11] Non chargé par λ.

et complétons E pour la métrique d. Il est très facile de voir que le complété E' de E est un espace métrique compact, et que $\mathscr{H}$ est exactement l'espace des restrictions à E des fonctions de $\mathscr{C}(E')$ (théorème de Stone-Weierstrass). Dans tout le reste de la démonstration, les mots fermé, ouvert... se référeront à la topologie de E'. Noter que les éléments de $\hat{\Omega}_0$ sont des trajectoires continues à gauche, pourvues de limites à droite dans E'.

Pour tout ensemble A ouvert dans E', considérons la fonction sur E

$$\varphi_A = \hat{E}^{\cdot}[e^{-D_A}]$$

avec comme d'habitude $D_A(\hat{\omega}) = \inf\{t \geqq 0 : \hat{X}_t(\hat{\omega}) \in A\}$. On a en particulier $\varphi_A = 1$ sur A. A étant ouvert, il est très facile de vérifier que φ_A est borélienne. D'autre part, la propriété de Markov modérée entraîne que la surmartingale prévisible $(e^{-t}\varphi_A \circ \hat{X}_t)_{t\geqq 0}$ satisfait au théorème d'arrêt de Doob pour les temps d'arrêt prévisibles.

Pour tout fermé K de E', posons ensuite

$$\varphi_K = \inf \varphi_A \quad (A \text{ ouvert contenant } K)\,.$$

En fait, cet inf peut se calculer au moyen d'une suite d'ouverts A_m contenant K, décroissante et telle que $K = \bigcap_m \bar{A}_m$. C'est une fonction borélienne, satisfaisant à la même propriété de surmartingale que φ_A pour A ouvert. Montrons d'après Walsh que le processus $(\varphi_K \circ \hat{X}_t)$ est P^λ-p.s. continu à gauche sur Ω,[12] ce qui entraînera, par un raisonnement familier, l'existence d'un ensemble polaire[13] C_K hors duquel φ_K est finement continue.

Le processus $(\varphi_K \circ \hat{X}_t)$ étant prévisible, il suffit de montrer que pour tout temps d'arrêt prévisible borné T de la famille $(\hat{\mathscr{F}}_t)$, et toute suite (T_n) de temps d'arrêt prévisibles annonçant T, on a $\lim_n \varphi_K \circ \hat{X}_{T_n} = \varphi_K \circ \hat{X}_T$ P^λ-p.s. ([10], page 232). La propriété de surmartingale entraîne aussitôt l'existence de cette limite, et le fait qu'elle majore P^λ-p.s. $\varphi_K \circ \hat{X}_T$. Il suffit donc d'établir l'inégalité inverse. Il n'y a rien à démontrer sur l'ensemble $\{\hat{X}_T \in K\}$, où $\varphi_K \circ \hat{X}_T$ vaut 1.

Soit $S_n{}^m$ la première rencontre de A_m par le processus $(\hat{X}_t)$ sur l'intervalle $[T_n, \infty[$; $S_n{}^m$ croît avec n, et tend vers une limite S^m, qui sur l'ensemble $\{\hat{X}_T \notin \bar{A}_m\}$ est égale à $S_\infty{}^m$, la première rencontre de A_m sur $[T, \infty[$. Nous écrivons maintenant la propriété de Markov modérée

$$e^{-T_n}\varphi_K \circ \hat{X}_{T_n} \leqq e^{-T_n}\varphi_{A_m} \circ \hat{X}_{T_n} = E[e^{-S_n{}^m} \,|\, \hat{\mathscr{F}}_{T_n-}]$$

d'où en faisant tendre n vers l'infini, pour tout m

$$\limsup_n e^{-T_n}\varphi_K \circ \hat{X}_{T_n} \leqq E[e^{-S^m} \,|\, \hat{\mathscr{F}}_{T-}] \qquad \text{(lemme de Hunt).}$$

Sur $\{\hat{X}_T \notin \bar{A}_m\} \in \hat{\mathscr{F}}_{T-}$ on peut remplacer S^m par $S_\infty{}^m$, et $E[e^{-S_\infty{}^m} \,|\, \hat{\mathscr{F}}_{T-}]$ vaut $e^{-T}\varphi_{A_n} \circ \hat{X}_T$. Il ne reste plus qu'à faire tendre m vers $+\infty$.

Considérons maintenant une base dénombrable de fermés K_n, et posons $\varphi_n =$

[12] Nous préférons travailler sur Ω plutôt que sur $\hat{\Omega}$, mais on a aussi ce résultat sur $\hat{\Omega}$, et pour toute loi $\hat{P}^x$.

[13] Non chargé par λ.

φ_{K_n}. Montrons que si deux points x et y de E (rappelons que E a été amputé de quelques morceaux polaires!) ne sont pas séparés par les fonctions $\hat{U}f$ (f bornée), alors ils sont séparés par les φ_n. La variable aléatoire $\hat{X}_{0+}$ sur $\hat{\Omega}_0$, à valeurs dans E, a pour loi la limite vague de $\varepsilon_x n\hat{U}_n$ dans E' si $\hat{\Omega}_0$ est muni de $\hat{P}^{\dot{x}}$, et on a un résultat analogue pour y. Comme x et y ne sont pas séparés par $\hat{U}$, ces deux lois sont les mêmes: notons μ leur valeur commune. Comme $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y$, l'un au moins des deux points, mettons x, est tel que $\varepsilon_x \neq \mu$. Choisissons un fermé K de la base, contenant x, ne contenant pas y et tel que $\mu(K) < 1$. Si l'on avait $\hat{P}^y\{D_A = 0\} = 1$ pour tout voisinage ouvert de K, la loi de $\hat{X}_{0+}$ pour $\hat{P}^y$ serait portée par K: cette loi étant égale à μ, c'est absurde. Donc $\varphi_K(y) < 1$, tandis que $\varphi_K(x) = 1$.

La fonction φ_K n'est que 1-cosurmédiane: la fonction $\psi_K = \varphi_K + \hat{U}\varphi_K$, elle, est cosurmédiane, finement continue hors d'un ensemble polaire, et comme x et y ne sont pas séparés par $\hat{U}$, ψ_K les sépare aussi bien que φ_K. Le reste de l'énoncé est évident.

(5) Soit N la réunion de tous les ensembles polaires A, B, C, D, J considérés jusqu'à maintenant, éventuellement agrandie un peu pour en faire un borélien. Posons $F = E\backslash N$, et fixons une suite (k_n) de fonctions cosurmédianes sur E, uniformément bornées, telles que (1) les k_n séparent F, (2) l'adhérence de la suite k_n pour la convergence uniforme contienne toutes les fonctions $\hat{U}f$, $0 \leqq f \leqq 1$, (3) les fonctions k_n soient finement continues sur F et boréliennes sur F, (4) le noyau $\hat{U}$ soit strictement positif sur F. Du fait que nous avons inclus C dans N, λ peut charger N, mais cela n'a guère d'importance.

Nous réalisons maintenant le semi-groupe (P_t) sur F, en restreignant Ω à l'ensemble des trajectoires à valeurs dans F, telles que les applications $k_n \circ X_.(\omega)$ soient continues à droite. Soit Ω_0 l'ensemble des ω tels que les applications $k_n \circ X_.(\omega)$ admettent des limites à gauche sur $]0, \infty[$; un raisonnement connu (cf. [5] page 100) permet de voir que Ω_0 est $\mathscr{F}^0$-mesurable dans Ω, de sorte que, le semi-groupe (P_t) étant borélien sur F, l'ensemble $A = \{x \in F\colon P^x(\Omega_0) < 1\}$ est borélien dans F. Mais, pour la mesure P^λ, le processus $(k_n \circ \hat{X}_t)$ est une surmartingale continue à gauche, qui admet donc des limites à droite. En retournant le temps, on voit que le processus $(k_n \circ X_t)$ admet des limites à gauche, et la propriété de Markov forte entraîne que $P^\lambda\{X_T \in A\} = 0$ pour tout temps d'arrêt T. A est donc λ-polaire (donc polaire), non chargé par λ, et nous l'ajouterons à notre ensemble exceptionnel F.

Récapitulation. (1) Toute fonction excessive sur E est borélienne sur $F = E\backslash N$.

(2) Si f est bornée, $\hat{U}f$ est finement continue sur F.

(3) Si $h \in \mathscr{H}$, en particulier si $h = U_p f$ (f bornée, $p \geqq 0$), $\lim_n n\hat{U}_n h$ existe sur F (et y est égale à h hors d'un ensemble semi-polaire borélien S indépendant de h).

(4) Munissons F de la métrique

$$\sum_n 2^{-n} |k_n(x) - k_n(y)| = \hat{d}(x, y)$$

alors le semi-groupe (P_t) sur F est réalisable sur l'espace des trajectoires à valeurs dans F, continues à droite et pourvues de limites à gauche à valeurs dans F, pour cette métrique.

3. Compactification de Martin. Nous complétons maintenant F pour cette métrique, et cela nous donne un espace métrique compact $\bar{F}$: l'espace de Martin. La topologie sur $\bar{F}$ sera appelée "topologie de Martin", ou "cotopologie". L'application canonique de F (muni de sa topologie initiale) dans $\bar{F}$ étant borélienne et injective, il n'y a pas lieu, en vertu d'un théorème célèbre de Lusin ([3], Section 6, n° 7, théorème 3) de distinguer les fonctions "boréliennes" et "coboréliennes".

Nous développons maintenant l'arsenal de la compactification de Martin—sans démonstration lorsqu'il s'agit de résultats tout à fait familiers dans cette théorie.

(1) Toute fonction de la forme $\hat{U}f$ (f bornée sur F) se prolonge à $\bar{F}$ par continuité. Notons encore $\hat{U}f(y)$ ce prolongement au point y de $\bar{F}$. D'après le théorème de Vitali-Hahn-Saks, $f \to \hat{U}f(y)$ est une mesure sur F de base m (nous la considérerons, de même que m, comme une mesure sur $\bar{F}$ portée par F). On peut considérer $\hat{U}$ comme noyau sur $\bar{F}$.

(2) Comme $\hat{U}_p f = \hat{U}(I - p\hat{U}_p)f$, on a le même résultat pour $\hat{U}_p f$. Les noyaux $\hat{U}$, $\hat{U}_p$ satisfont à l'équation résolvante sur $\bar{F}$, par continuité, et on a ainsi sur $\bar{F}$ une résolvante de Ray, de base m, dont le noyau potentiel est borné et dont les fonctions (co)surmédianes séparent $\bar{F}$.

(3) Il existe pour tout p une fonction $g_p(x, y)$ sur $F \times \bar{F}$, telle que

$$U_p(x, dy) = g_p(x, y)m(dy) \qquad (x \in F)$$

$$\hat{U}_p(y, dx) = m(dx)g_p(x, y) \qquad (y \in \bar{F})$$

et que pour tout x, $g_p(x, \cdot)$ soit p-coexcessive sur $\bar{F}$, et pour tout y, $g_p(\cdot, y)$ p-excessive sur F.

L'ensemble N étant polaire, toute fonction p-excessive sur F se prolonge uniquement en une fonction p-excessive sur E. Le noyau g_p peut donc être prolongé à $E \times \bar{F}$, par la formule

$$g_p(x, y) = \lim_n nU_{n+p}(x, g_p(\cdot, y))$$

comme il s'agit en fait d'une limite croissante, la fonction $g_p(x, \cdot)$ est p-coexcessive sur $\bar{F}$ pour tout $x \in E$. Ainsi, les noyaux de Martin g_p sont bien définis sur $E \times \bar{F}$.

Nous allons nous intéresser tout particulièrement aux potentiels de Martin:

$$G\mu(x) = \int_{\bar{F}} g(x, y)\mu(dy) \qquad (x \in E)$$

où μ est une "comesure", i.e. une mesure positive bornée sur $\bar{F}$. Nous allons généraliser à la présente situation le théorème de représentation "élémentaire", i.e. celui qui ne fait pas intervenir la notion de points minimaux. Il nous suffira pour établir le théorème du support fin, et nous laisserons le "vrai" théorème de représentation pour la seconde partie de notre travail.

(4) Nous remarquons d'abord que la fonction $\lambda G = \int_E \lambda(dx)g(x, \cdot)$ sur $\bar{F}$ est coexcessive. Comme $\lambda U = m$, elle est égale à 1 m-p.p. sur F: c'est donc la régularisée coexcessive de la fonction cosurmédiane 1 sur $\bar{F}$, et elle est $\leqq 1$ partout. Nous la noterons $\hat{1}$. Si $u = G\mu$, on a $\langle \lambda, u \rangle = \langle \lambda G, \mu \rangle = \langle \hat{1}, \mu \rangle \leqq \mu(1)$, et on a $\langle \lambda, u \rangle = \mu(1)$ si et seulement si μ est portée par l'ensemble $\bar{F}_1 = \{1 = \hat{1}\}$.

(5) Nous appelons *co-compacts* les sous ensembles de F, compacts pour la topologie de $\bar{F}$. Comme F est borélien dans $\bar{F}$, toute mesure sur F est portée par une réunion dénombrable de co-compacts, et deux mesures sur F égales sur les co-compacts sont égales. Ainsi, il y a "beaucoup" de co-compacts, d'où l'intérêt du résultat suivant, dû à Mokobodzki

LEMME 3. *Si u est excessive sur E, finie* p.p., *u est m-intégrable sur tout co-compact K.*

DEMONSTRATION. u étant finie p.p., choisissons a bornée, partout > 0 et telle que $\int au\,dm < \infty$. On a alors pour un $p > 0$ $\langle u, p\hat{U}_p a\rangle_m = \langle pU_p u, a\rangle_m \leqq \langle u, a\rangle_m < \infty$, mais d'autre part le noyau $\hat{U}_p$ est strictement positif sur F, la fonction $\hat{U}_p a$ est co-continue, donc bornée inférieurement sur K, et le théorème s'en déduit aussitôt.

Nous adaptons maintenant le lemme fondamental de représentation de Kunita–Watanabe.

LEMME 4. *Soit (u_n) une suite de fonctions excessives sur E, majorées par une fonction excessive v finie m-p.p., convergeant m-p.p. vers une fonction excessive u. On suppose que pour tout n u_n est un potentiel $G\mu_n$, et que $\sup_n \mu_n(1) < \infty$. Soit μ une valeur d'adhérence vague de la suite (μ_n) sur $\bar{F}$; on a alors $u = G\mu$.*

La condition $\sup_n \mu_n(1) < \infty$ est satisfaite en particulier si l'on a $\mu_n(1) = \langle \lambda, u_n\rangle$, et $\langle \lambda, v\rangle < \infty$.

DEMONSTRATION. Quitte à changer de notation, nous pouvons supposer que la suite (μ_n) converge vers μ. Pour montrer que $u = G\mu$, il nous suffit de montrer que $\langle f, u\rangle_m = \langle f, G\mu\rangle_m$ pour toute fonction $f \geqq 0$, bornée, nulle hors d'un ensemble co-compact K de F. Mais d'après le lemme 3 vf est m-intégrable, et on a convergence dominée:

$$\langle f, u_n\rangle_m \to \langle f, u\rangle_m$$

ou

$$\langle f, G\mu_n\rangle_m \to \langle f, u\rangle_m$$

ou enfin $\langle \hat{U}f, \mu_n\rangle \to \langle f, u\rangle_m$. Mais $\hat{U}f$ est continue sur $\bar{F}$, donc $\langle \hat{U}f, \mu_n\rangle$ converge aussi vers $\langle \hat{U}f, \mu\rangle = \langle f, G\mu\rangle_m$, et le lemme est établi.

Noter que le théorème suivant concerne la réduite ordinaire, et non la réduite extérieure, plus usuelle en théorie de Martin.

THEOREME 4. *Soit w une fonction excessive finie m-p.p., telle que $\langle \lambda, w\rangle < \infty$, et soit B un borélien de F. Alors $P_B w$ est potentiel $G\mu$ d'une mesure μ portée par l'adhérence $\bar{B}$ de B dans $\bar{F}$, telle que $\mu(1) \leqq \langle \lambda, w\rangle$.*

DEMONSTRATION. Elle est très classique, et nous nous bornerons à une esquisse.

1[e] *étape*: *B finement ouvert*. On sait ([9], chapitre 1, théorème 2) que $P_B w = u$ est limite d'une suite croissante (u_n) de potentiels de fonctions Uf_n, où les f_n sont positives et nulles hors de B. On a alors $u_n = G\mu_n$, avec $\mu_n = f_n \cdot m$; μ_n ne chargeant pas l'ensemble $\{\hat{1} < 1\}$, on a $\mu_n(1) = \langle \lambda, u_n \rangle \leqq \langle \lambda, P_B w \rangle$. On applique alors le lemme 4. Comme la suite (u_n) est croissante, on a $\langle \lambda, \mu \rangle = \lim_n \langle \lambda, u_n \rangle$, et $\mu(1) = \langle \lambda, P_B u \rangle$.

2[e] *étape*: $w = Ug$, *potentiel de fonction bornée*; *B co-compact*. Choisissons une suite décroissante (C_n) d'ouverts de $\bar{F}$ contenant B, telle que $B = \bigcap_n \bar{C}_n$. Du fait que les fonctions co-continues sont finement continues sur F, on déduit aisément que les ensembles $C_n \cap F$ sont finement ouverts dans F. D'autre part (théorème de Shih: voir par exemple [12], [15]) choisissons une suite décroissante (D_n) d'ouverts fins de F contenant B, telle que $T_{D_n} \uparrow T_B$ P^m-p.s. (donc P^x-p.s. pour m-presque tout x). Posons $B_n = C_n \cap D_n$, $u_n = P_{B_n} w$. La suite (u_n) décroît vers $u = P_B w$ m-p.p., du fait que u est un potentiel de fonction. D'après la 1[e] étape, on peut écrire $u_n = G\mu_n$, avec $\mu_n(1) = \langle \lambda, u_n \rangle \leqq \langle \lambda, w \rangle$, et μ_n étant portée par $\bar{B}_n$, donc par $\bar{C}_n$. On applique alors le lemme 4.

Noter que si l'on peut affirmer que $\langle \lambda, u_n \rangle \to \langle \lambda, u \rangle$, on peut aussi affirmer que $\mu(1) = \langle \lambda, P_B w \rangle$. C'est le cas si λ ne charge pas l'ensemble des points de B irréguliers pour B, en particulier si λ ne charge pas les semi-polaires.

3[e] *étape*: *w excessive*, $\langle \lambda, w \rangle < \infty$, *B co-compact*. On représente w comme limite d'une suite croissante (w_n) de potentiels de fonctions bornées, on écrit $P_B w_n = G\mu_n$ (3[e] étape), μ_n étant portée par $\bar{B}$ et de masse au plus $\langle \lambda, w_n \rangle$ (égale à $\langle \lambda, P_B w_n \rangle$ si λ ne charge pas les semi-polaires) et on applique le lemme 4.

4[e] *étape*: *cas général*. On choisit une suite croissante (B_n) de co-compacts contenus dans B, telle que $T_{B_n} \downarrow T_B$ P^m-p.s. (donc P^x-p.s. pour tout x). L'existence d'une telle suite résulte aisément du théorème de capacitabilité ([12], page 274). On applique alors la 3[e] étape aux fonctions $u_n = P_{B_n} w$, et on applique le lemme 4.

REMARQUE. On a vu au cours de la démonstration que l'on peut remplacer la condition $\mu(1) \leqq \langle \lambda, w \rangle$ par la condition plus forte $\mu(1) = \langle \lambda, P_B w \rangle$ si λ ne charge pas les semi-polaires. On a le même résultat si tout point de B est régulier pour B, car alors on a $P_B w = P_B P_B w$, d'où l'existence d'une mesure μ représentant $P_B w$ telle que $\mu(1) \leqq \langle \lambda, P_B w \rangle$, et l'égalité. Cela s'applique en particulier, bien sûr, à $B = F$, mais dans ce cas aucun détour n'est nécessaire: c'est la 1[e] étape de la démonstration.

THEOREME 5. *Soit B un ensemble borélien contenu dans F. Notons g_y la fonction excessive $g(\cdot, y)$. Alors l'ensemble H des $y \in B$ tels que $P_B g_y \neq g_y$ est borélien et semi-polaire.*

DEMONSTRATION. La fonction $\hat{U}1 = \int m(dx) g(x, \cdot)$ est bornée. L'ensemble $Z = \{y \in F\colon P_B g_y < g_y\}$ est donc égal à $\{y \in F\colon \langle m, P_B g_y \rangle < \langle m, g_y \rangle\}$. Or les deux fonctions $(mP_B)G$ et mG sont co-excessives, donc boréliennes, et Z est borélien. Donc $H = Z \cap F$ est borélien.

Pour montrer que H est semi-polaire, il nous suffit, d'après un résultat de Dellacherie ([5], théorème 4, page 131) de montrer que H est négligeable pour toute mesure μ sur F qui ne charge pas les semi-polaires. Il suffit donc de prouver que tout co-compact contenu dans H est μ-négligeable, ou encore que tout co-compact K contenu dans H est semi-polaire, ou enfin que K ne contient aucun ensemble finement parfait $C \neq \varnothing$. Supposons le contraire. D'après le théorème 4 la fonction $P_C 1$ est potentiel $G\theta$ d'une mesure θ (non nulle) portée par K. La relation $P_C P_C 1 = P_C 1$ entraîne $P_B P_C 1 = P_C 1$, donc $\langle m, P_B G\theta\rangle = \langle m, G\theta\rangle$, ce qui contredit le fait que θ est portée par $K \subset \{y : \langle m, P_B g_y\rangle \neq \langle m, g_y\rangle\}$. Le théorème est établi.

COROLLAIRE 1. *Soit μ une mesure sur F qui ne charge pas les ensembles semi-polaires, et soit B un ensemble borélien portant μ. Alors $P_B G\mu = G\mu$.*

En effet, μ est portée par l'ensemble des points $y \in B$ tels que $P_B g_y = g_y$. Noter qu'une mesure sur E qui ne charge pas les semi-polaires est portée par F.

COROLLAIRE 2. *Sous les mêmes hypothèses, μ est équivalente à une mesure θ telle que $G\theta$ soit borné.*

DEMONSTRATION. μ étant bornée, ainsi que la fonction $\hat{U}1 = mG$, on a $\langle m, G\mu\rangle < \infty$, et l'ensemble $\{G\mu = +\infty\}$ est de potentiel nul, donc polaire, et μ ne le charge pas. Soit $A_n = \{y \in F : n \leqq G\mu < n + 1\}$, et soit $\mu_n = I_{A_n} \cdot \mu$; on a $\mu = \sum_n \mu_n$. D'autre part $G\mu_n$ est borné par $n + 1$ sur A_n, donc sur l'adhérence fine de A_n, et $P_{A_n} G\mu_n$ est borné par $n + 1$ sur E tout entier. Mais $P_{A_n} G\mu_n = G\mu_n$ d'après le corollaire 1, et il ne reste plus qu'à poser $\theta = \sum 2^{-n}\mu_n$.

Nous en arrivons enfin au résultat qui entraîne (comme on l'a dit dans l'introduction) le théorème du support fin. Nous l'énonçons sous une forme qui s'applique aussitôt, par changement de temps, au semi-groupe initial $(\hat{P}_t)$.

THEOREME 6. *Soit μ une mesure sur E qui ne charge pas les ensembles semi-polaires. Il existe alors une fonctionnelle additive continue (A_t) dont le potentiel est borné, et qui est "équivalente" à μ: les ensembles μ-négligeables sont exactement ceux dont le potentiel par rapport à A est nul.*

DEMONSTRATION. Grâce au corollaire 2, et quitte à changer de notation, nous pouvons supposer que $G\mu$ est borné. Nous établissons alors le résultat auxiliaire suivant, qui n'est pas sans intérêt.

LEMME 5. *Si μ ne charge pas les semi-polaires, et $G\mu$ est partout fini, $G\mu$ est un potentiel de la classe (D) régulier.*

DEMONSTRATION. Nous remarquons d'abord que $P_n U1 \to 0$ $(n \to \infty)$, donc pour presque tout y on a $\lim_n P_n g_y = 0$ p.p. D'après le théorème de Fubini, pour m-presque tout x, on a $\lim_n P_n g(x, \cdot) = 0$ p.p. Mais les fonctions $P_n g(x, \cdot)$ sont coexcessives: en appliquant le théorème de convergence de Doob au semi-groupe associé à la résolvante de Ray $(\hat{U}_p)$ sur $\bar{F}$, on voit que l'ensemble $K_x = \{y\colon \lim_n P_n g(x, y) \neq 0\}$ est co-semi-polaire. En retournant le temps, on voit que pour P^λ-presque tout ω l'ensemble $\{t\colon X_t(\omega) \in K_x\}$ est dénombrable, de sorte que K_x est semi-polaire, et que μ ne charge pas K_x. Il en résulte que $P_n G\mu(x) \to 0$, et que $G\mu$ est purement excessive. Cela permet de conclure si $G\mu$ est bornée.

Pour traiter le cas où $G\mu$ est seulement finie, décomposer μ en une somme μ_n de mesures dont le potentiel est borné (cf. corollaire 2 du théorème 5) et utiliser le fait qu'une somme de potentiels de la classe (D) appartient encore à la classe (D) si elle est finie partout.

Passons à la régularité. Posons $u = G\mu$; comme $P_t u \uparrow u$ $(t \to 0)$ le théorème d'Egorov entraîne l'existence d'une partition (A_n) de F en un ensemble μ-négligeable A_0, et des ensembles A_n $(n \geqq 1)$ tels que $P_t u$ converge *uniformément* vers u sur chacun des A_n. Posons $\mu_n = \mu \cdot I_{A_n}$, et $u_n = G\mu_n$. Montrons que u_n est *uniformément excessive*, pour tout $n \geqq 1$. Cela entraînera ([2], chapitre IV, théorème 3.16, page 169) que u_n est potentiel d'une fonctionnelle additive continue, et le même résultat pour u (ainsi que la régularité de u_n et de u).

Choisissons $\varepsilon > 0$, puis t assez petit pour que $u - P_t u \leqq \varepsilon$ sur A_n; comme u_n est une minorante forte de u, on a à plus forte raison $u_n - P_t u_n \leqq \varepsilon$ sur A_n, donc sur l'adhérence fine de A_n. Par conséquent, on a $P_{A_n}(u_n - P_t u_n) \leqq \varepsilon$ sur E tout entier, et $P_{A_n} u_n - P_t u_n$ est encore plus petit. Ainsi, $u_n - P_t u_n \leqq \varepsilon$ sur E pour t assez petit.

Le lemme étant établi, et $G\mu = u$ étant un potentiel régulier de la classe (D), il existe une fonctionnelle additive continue qui engendre A. Si nous pouvons montrer que $G(f\mu) = U_A f$ pour toute fonction positive f, le théorème sera établi. En effet, la relation $G(f\mu) = 0$ équivaut à $f = 0$ μ-p.p., car elle entraîne $0 = \langle 1, G(f\mu)\rangle_m = \langle \hat{U}1, f\mu\rangle$, et nous avons vu (Section 2) que $\hat{U}1$ est strictement positive hors de l'ensemble polaire C, que μ ne charge pas. Ainsi, $\langle \hat{U}1, f\mu\rangle = 0$ entraîne bien $f\mu = 0$.

Pour montrer que $G(f\mu) = U_A f$, la méthode la plus directe consiste à invoquer le théorème de Revuz ([14], page 517): μ étant la mesure associée à la fonctionnelle A, $f\mu$ est associée à $f \cdot A$, et donc $G(f\mu) = U_A f$. Mais on peut aussi imiter la démonstration de la propriété analogue chez Blumenthal et Getoor ([2], page 279).

BIBLIOGRAPHIE[14,15]

[1] AZEMA, J. (1972). Une remarque sur les temps de retour. Trois applications. Séminaire de Strasbourg VI, *Lecture Notes in Mathematics* **258** 35–50. Springer-Verlag, Berlin.

[14] La référence [13] est insuffisante: le travail de Mokobodzki est présenté de manière détaillée dans un exposé au séminaire Brelot-Cho-Quet-Deny, Université de Paris 1970, qu'il est malheureusement difficile de se procurer.

[15] La plus grande partie des résultats de Dellacherie figurent, sous une forme très "polie", dans son livre *Capacités et Processus Stochastiques* à paraître en 1972 dans la collection des *Ergebnisse der Mathematics*, Springer-Verlag.

[2] BLUMENTHAL, R. M. et GETOOR, R. K. (1968). *Markov Processes and Potential Theory.* Academic Press, New York.

[3] BOURBAKI, N. (1958). *Topologie Générale*, 2e ed. Chap. IX. Hermann, Paris.

[4] CHUNG, K. L. et WALSH, J. B. (1970). To reverse a Markov process. *Acta Math.* **123** 225-251.

[5] DELLACHERIE, C. (1969). Ensembles aléatoires I, II. Séminaire de Strasbourg III, *Lecture Notes in Mathematics* **88** 97-136. Springer-Verlag, Berlin.

[6] DELLACHERIE, C. (1968). Ensembles épais, application aux processus de Markov. *C. R. Acad. Sci. Paris* **266** 1258-1261.

[7] KUNITA, H. et WATANABE, T. (1965). Markov processes and Martin boundaries I. *Illinois J. Math.* **9** 485-526.

[8] MEYER, P. A. (1967). Processus de Markov. *Lecture Notes in Mathematics* **26**. Springer-Verlag, Berlin.

[9] MEYER, P. A. (1968). Processus de Markov: la frontière de Martin. *Lecture Notes in Mathematics* **77**. Springer-Verlag, Berlin.

[10] MEYER, P. A. (1970a). Le retournement du temps d'après Chung et Walsh. Séminaire de Strasbourg V, *Lecture Notes in Mathematics* **191** 213-235. Springer-Verlag, Berlin.

[11] MEYER, P. A. (1970b). Représentation intégrale des fonctions excessives, résultats de Mokobodzki. Même réf. 196-208.

[12] MEYER, P. A. (1970c). Balayage pour les processus de Markov continus à droite, d'après Shih. Même ref. 270-274.

[13] MOKOBODZKI, G. (1970). Noyaux absolument mesurables et opérateurs nucléaires. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A* **270**.

[14] REVYZ, D. (1970). Mesures associées aux fonctionnelles additives de Markov I. *Trans. Amer. Math. Soc.* **148** 501-531.

[15] SHIH, C. T. (1970). On extending potential theory to all strong Markov processes. *Ann. Inst. Fourier* **20** 303-316.

[16] WALSH, J. B. (1972). Transition functions of Markov processes. Séminaire de Strasbourg VI, *Lecture Notes in Mathematics* **258** 233-242. Springer-Verlag, Berlin.

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG
INSTITUT DE MATHÉMATIQUE
(LABORATOIRE ASSOCIÉ AU CNRS)
7 RUE DESCARTES,
F-67084 STRASBOURG CEDEX