The Annals of Probability
1975, Vol. 3, No. 2, 365-370

DEUX INEGALITES CONCERNANT LES OPERATEURS DE BURKHOLDER SUR LES MARTINGALES

PAR MAURIZIO PRATELLI

Scuola Normale Superiore, Pisa

In this paper the following two theorems are shown: *if U, V are Burkholder type operators on martingales and if the inequality* $E[U(X)] \leqq c \cdot E[V(X)]$ *holds for every martingale X, then the inequality* $E[F \circ U(X)] \leqq C \cdot E[F \circ V(X)]$ *holds, for F concave if V is "predictable," for F convex if U is "predictable."*

Le but de cet article est de montrer que, si U, V sont deux opérateurs sur les martingales, du genre étudiée par Burkholder et Gundy dans [1], vérifiant une inégalité de la forme

$$E[U(X)] \leqq c \cdot E[V(X)]$$

(où c est une constante réelle indépendant de la martingale X), alors, pour toute fonction F, convexe ou concave, satisfaisant à des conditions convenables, on a une inégalité de la forme

$$E[F \circ U(X)] \leqq C \cdot E[F \circ V(X)]\,.$$

Le résultat concernant une fonction F concave (Théorème 1) est pratiquement déjà démontré dans [2] (même s'il n'y figure pas de façon explicite). Par contre, le cas d'une fonction F convexe (Théorème 2) est démontré ici pour la première fois. On se sert, à cet effet, d'un lemme de Neveu, que l'on démontre sous une forme légerment modifiée (Lemme 2).

0. Notations et terminologie. Conformément aux conventions établies dans [5], on se donne, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, une suite croissante $(\mathscr{F}_n)_{n \geqq 0}$ de sous tribus de $\mathscr{F}$, et on ne considère que des martingales de la forme $X = (X_n)_{n \geqq 1}$ adaptées à la suite $(\mathscr{F}_n)_{n \geqq 1}$.

Pour tout temps d'arrêt T, relatif à la suite $(\mathscr{F}_n)_{n \geqq 0}$, on note X^T la martingale obtenue en arrêtand X à l'instant T. On pose en outre

$$\sigma(X) = (E[X_1^2|\mathscr{F}_0] + E[(X_2 - X_1)^2|\mathscr{F}_1] + \cdots)^{\frac{1}{2}}\,.$$

On considère des opérateurs U qui transforment toute martingale X en une v.a. positive $U(X)$, et qui possèdent les proprietés suivantes:

(a) Pour toute martingale X, on a $U(-X) = U(X)$.
(b) Il existe une constante réelle $a \geqq 1$, telle que l'on ait

$$U(X + Y) \leqq a[U(X) + U(Y)]$$

pour tout couple X, Y de martingales.

Received June 6, 1974.
AMS 1970 *subject classifications.* Primary 60G45; Secondary 47H99.
Key words and phrases. Martingales, Burkholder operators, inequalities, convex functions, stopping times.

(c) Pour toute martingale X, la v.a. $U(X)$ est p.s. nulle sur l'ensemble $\{\sigma(X) = 0\}$.

(d) Pour toute martingale X, et pour tout entier $n \geqq 0$, la v.a. $U(X^n)$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathscr{F}_n$.

Si U est un opérateur possédant ces proprietés, il en est de même, pour tout temps d'arrêt T, des opérateurs U_T, U^* définis par:

$$U_T(X) = \sum_{n \in \overline{\mathrm{N}}} I_{\{T=n\}} U(X^n)$$
$$U^*(X) = \sup_{n \in \mathrm{N}} U(X^n) = \sup_{n \in N} U_n(X) .$$

On a les relations suivantes (cf. [5], Lemmes 1 et 2):

$$U(X - X^T) = 0 \quad \text{p.s. sur} \quad \{T = \infty\} \qquad U(X^T) \leqq aU_T(X) .$$

On dit que l'opérateur U est *prévisible* si, pour toute martingale X et pour tout entier $n \geqq 1$, la v.a. $U(X^n)$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathscr{F}_{n-1}$.

On ne considère, dans la suite, que des opérateurs U tels que $U^* = U$. Cela revient à ajouter aux conditions (a), (b), (c), (d) ci-dessus la condition suivante:

(e) Pour toute martingale X, on a $U(X) = \sup_n U(X^n)$.

REMARQUE. Si U est un opérateur possédant les proprietés (a)—(e), il en est de même, pour tout nombre réel $p > 0$, de l'opérateur U^p défini par:

$$U^p(X) = [U(X)]^p .$$

Grâce à l'inégalité

$$(x + y)^p \leqq (2^{p-1} \vee 1)(x^p + y^p)$$

valable pour tout couple x, y de nombres positifs, l'opérateur U^p vérifie la condition (b) avec la constante $a^p(2^{p-1} \vee 1)$.

CONVENTION. Chaque fois que l'on considère, dans la suite, un couple U, V d'opérateurs jouissant des proprietés (a)—(e), on désigne par a une constante réelle telle que l'on ait $a \geqq 1$ et

$$U(X + Y) \leqq a[U(X) + U(Y)]$$
$$V(X + Y) \leqq a[V(X) + V(Y)]$$

pour tout couple X, Y de martingales.

1. Cas d'une fonction concave. Soit F une application croissante et continue de $[0, +\infty]$ dans $[0, +\infty]$, telle que l'on ait $F(0) = 0$ et que la restriction de F à $[0, +\infty]$ soit finie et *concave*.

Pour tout nombre réel t strictement positif, on désigne par $f(t)$ la dérivée gauche de F au point t. On pose en outre

$$f(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} f(t) .$$

On sait que la relation

$$F(u) = \int_0^u f(t)\, dt$$

est vraie pour tout élément u de $[0, +\infty]$. Il n'est pas difficile d'en déduire le lemme suivant (qui est contenu dans la démonstration du Théorème 20.1 de [2] pages 38–39).

LEMME 1. *Pour toute* v.a. *positive Z, on a*

$$E[F \circ Z] = f(+\infty)E[Z] + \int E[Z \wedge t]\, d\mu(t)$$

où μ est la mesure positive sur $]0, +\infty[$ *déterminée par la condition*:

$$\mu([a, b[) = f(a) - f(b) \qquad \text{pour } \ 0 < a < b \leqq +\infty .$$

A partir de ce lemme il est très facile de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soient U, V deux opérateurs jouissant des propriétés* (a)—(e). *On suppose qu'il existe une constante réelle c telle que l'on ait*

$$E[U(X)] \leqq c \cdot E[V(X)]$$

pour toute martingale X. On suppose en outre V prévisible.

Dans ces conditions, il existe une constante réelle C (dépendant seulement de a et de c) telle que l'on ait

$$E[F \circ U(X)] \leqq C \cdot E[F \circ V(X)]$$

pour toute martingale X et pour toute fonction F possédant les propriétés énoncées ci-dessus.

DÉMONSTRATION. En vertu du lemme précédent, il suffit de prouver qu'il existe une constante réelle c' telle que l'on ait

(1) $$E[U(X) \wedge t] \leqq c' \cdot E[V(X) \wedge t]$$

pour tout nombre réel $t > 0$ et pour toute martingale X.

Introduisons, à cet effet, le temps d'arrêt

$$T = \inf\{n : n \in \mathbb{N},\ V_{n+1}(X) > t\} .$$

La relation

$$U(X) \leqq aU(X^T) + aU(X - X^T)$$

entraîne alors

$$U(X) \leqq aU(X^T) \qquad \text{sur } \{T = \infty\} ,$$

et par suite

$$U(X) \wedge t \leqq aU(X^T) + t \cdot I_{\{T<\infty\}} .$$

On a d'autre part:

$$E[U(X^T)] \leqq cE[V(X^T)] \leqq caE[V_T(X)] \leqq caE[V(X) \wedge t] ,$$

$$E[t \cdot I_{\{T<\infty\}}] = t \cdot \mathbb{P}\{V(X) > t\} \leqq E[V(X) \wedge t] .$$

Il en résulte

$$E[U(X) \wedge t] \leqq (ca^2 + 1) \cdot E[V(X) \wedge t] ,$$

c'est-à-dire la relation (1) avec $c' = ca^2 + 1$.

2. Cas d'une fonction convexe. Soit maintenant F une application croissante et continue de $[0, +\infty]$ dans $[0, +\infty]$, telle que l'on ait $F(0) = 0$ et que la restriction de F à $[0, +\infty[$ soit finie et *convexe*.

Pour tout nombre réel t strictement positif, on désigne par $f(t)$ la dérivée gauche de F au point t. On pose en outre

$$f(0) = 0\,, \qquad f(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} f(t)\,.$$

On sait que la relation

$$F(u) = \int_0^u f(t)\,dt$$

est vraie pour tout élément u de $[0, +\infty]$. Si on désigne par μ la mesure positive sur $[0, +\infty[$ déterminée par la condition

$$\mu([a, b[) = f(b) - f(a) \qquad \text{pour } 0 \leqq a < b \leqq +\infty\,,$$

la relation précedente peut s'écrire sous la forme équivalente:

$$F(u) = \int_{[0,u[} (u - t)\,d\mu(t)\,. \tag{2}$$

On suppose qu'il existe une constante réelle $A \geqq 1$ telle que l'on ait

$$F(2t) \leqq A \cdot F(t) \qquad \text{pour tout } t\,. \tag{3}$$

Neveu a montré ([4] pages 194–195) qu'il est possible, dans ces conditions, d'associer à tout $\varepsilon > 0$ une constante réelle C_ε (dépendant seulement de ε et de A), de sorte que l'on ait

$$f(u)v \leqq \varepsilon F(u) + C_\varepsilon F(v) \tag{4}$$

pour tout couple u, v d'éléments de $[0, +\infty]$.

Nous aurons besoin aussi du résultat suivant, qui constitue une légère extension d'un lemme de Neveu (cf. [3] Theorem 52, page 55):

LEMME 2. *Soient b, c deux nombres réels, tels que $b \geqq 1$, $c \geqq 0$, et soient Y, Z deux variables aléatoires positives, vérifiant l'inégalité*

$$\int_{\{Y>t\}} (Y - t)\,d\mathbb{P} \leqq c \int_{\{bY>t\}} Z\,d\mathbb{P} \qquad \text{pour tout } t \geqq 0\,. \tag{5}$$

Il existe alors une constante réelle C (dépendant seulement de b, c et de la constante A qui figure dans (3)), *telle que l'on ait*:

$$E[F \circ Y] \leqq C \cdot E[F \circ Z]\,.$$

DÉMONSTRATION. Par un argument de troncature on peut se ramener au cas où la v.a. Y est bornée.

En applicant la relation (2), le théorème de Fubini et l'hypothèse (5), on trouve:

$$\begin{aligned} E[F \circ Y] &= \int d\mathbb{P} \int_{[0,Y[} (Y - t)\,d\mu(t) \\ &= \int d\mu(t) \int_{\{Y>t\}} (Y - t)\,d\mathbb{P} \leqq c \int d\mu(t) \int_{\{bY>t\}} Z\,d\mathbb{P} \\ &= c \int d\mathbb{P}\, Z \int_{[0,bY[} d\mu = cE[f(bY)Z]\,. \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, la relation (4) entraîne alors

$$E[F \circ Y] \leqq c \cdot E[\varepsilon F \circ (bY) + C_\varepsilon F \circ Z]\,.$$

On a d'autre part

$$F \circ (bY) \leqq A^n F \circ Y$$

dès que l'entier n vérifie la condition $b \leqq 2^n$. Un tel n étant fixé, choisissons un $\varepsilon > 0$ assez petit pour que l'inégalité $1 - cA^n\varepsilon > 0$ soit vérifiée. On a alors

$$E[F \circ Y] \leqq cC_\varepsilon(1 - cA^n\varepsilon)^{-1}E[F \circ Z],$$

ce qui établit le lemme.

Pour une fonction F possédant les propriétés énoncées ci-dessus, nous allons maintenant démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soient U, V deux opérateurs jouissant des propriétés* (a)—(e). *On suppose qu'il existe une constante réelle c, telle que l'on ait*

$$E[U(X)] \leqq c \cdot E[V(X)]$$

pour toute martingale X. On suppose en outre U prévisible.

Dans ces conditions, il existe une constante réelle C (dépendant seulement de a, de c et de la constante A qui figure dans (3)), *telle que l'on ait*

$$E[F \circ U(X)] \leqq C \cdot E[F \circ V(X)]$$

pour toute martingale X.

DÉMONSTRATION. En vertu du Lemme 2, il suffit de trouver deux constantes réelles $b \geqq 1$, $c' \geqq 0$, telles que l'on ait

$$\int_{\{U(X)>t\}} (U(X) - t)\, d\mathbb{P} \leqq c' \int_{\{bU(X)>t\}} V(X)\, d\mathbb{P} \tag{6}$$

pour tout nombre réel $t \geqq 0$ et pour toute martingale X.

Introduisons, à cet effet, le temps d'arrêt

$$T = \inf\{n : n \in \mathbb{N},\ U_{n+1}(X) > t\}.$$

La relation

$$U(X) \leqq a^2U_T(X) + aU(X - X^T) \leqq a^2t + aU(X - X^T)$$

entraîne alors les deux relations suivantes:

$$\int_{\{U(X)>t\}} (U(X) - a^2t)\, d\mathbb{P} \leqq aE[U(X - X^T)], \tag{7}$$

$$t \cdot \mathbb{P}\{U(X) > 2a^2t\} \leqq t \cdot \mathbb{P}\{U(X - X^T) > at\} \leqq a^{-1}E[U(X - X^T)]. \tag{8}$$

On a d'autre part

$$E[U(X - X^T)] \leqq cE[V(X - X^T)] = c \int_{\{U(X)>t\}} V(X - X^T)\, d\mathbb{P},$$

où la dernière égalité est due au fait que la v.a. $V(X - X^T)$ est p.s. nulle sur le complémentaire de l'ensemble $\{U(X) > t\}$, c'est-à-dire sur l'ensemble $\{T = +\infty\}$. Puisque la v.a. $V(X - X^T)$ est, en même temps, majorée par $a(a + 1)V(X)$, on peut aussi écrire

$$E[U(X - X^T)] \leqq ca(a + 1) \int_{\{U(X)>t\}} V(X)\, d\mathbb{P}.$$

En introduisant cette majoration dans (7) et (8), on trouve, respectivement:

$$\int_{\{U(X)>t\}} (U(X) - a^2t)\, d\mathbb{P} \leqq ca^2(a + 1) \int_{\{U(X)>t\}} V(X)\, d\mathbb{P}, \tag{9}$$

$$t\mathbb{P}\{U(X) > 2a^2t\} \leqq c(a + 1) \int_{\{U(X)>t\}} V(X)\, d\mathbb{P}.$$

Si l'on écrive la dernière relation sous la forme équivalente

$$2a^2t\mathbb{P}\{U(X) > 2a^2t\} \leqq 2ca^2(a+1) \int_{\{2a^2U(X)>2a^2t\}} V(X)\, d\mathbb{P} ,$$

et si l'on remplace $2a^2t$ par t, on trouve

$$t\mathbb{P}\{U(X) > t\} \leqq 2ca^2(a+1) \int_{\{2a^2U(X)>t\}} V(X)\, d\mathbb{P} . \tag{10}$$

En utilisant les relations (9) et (10), on obtient finalement:

$$\begin{aligned} &\int_{\{U(X)>t\}} (U(X) - t)\, d\mathbb{P} \\ &\quad = \int_{\{U(X)>t\}} (U(X) - a^2t)\, d\mathbb{P} + (a^2-1)t\mathbb{P}\{U(X) > t\} \\ &\quad \leqq ca^2(a+1) \int_{\{U(X)>t\}} V(X)\, d\mathbb{P} + 2ca^2(a+1)(a^2-1) \int_{\{2a^2U(X)>t\}} V(X)\, d\mathbb{P} . \end{aligned}$$

La relation (6) est donc vraie pour $b = 2a^2$ et $c' = ca^2(a+1)(2a^2-1)$. (On remarquera que l'ensemble $\{U(X) > t\}$ est contenu dans $\{2a^2U(X) > t\}$ car $2a^2 > 1$.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] BURKHOLDER, D. L. and GUNDY, R. F. (1970). Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales. *Acta Math.* **124** 249–304.

[2] BURKHOLDER, D. L. (1973). Distribution function inequalities for martingales. *Ann. Probability* **1** 19–42.

[3] MEYER, P. A. (1972). Martingales and stochastic integrals. *Lecture Notes on Mathematics* 284. Springer, Berlin.

[4] NEVEU, J. (1972). *Martingales à temps discret*. Masson et C^{ie}.

[5] PRATELLI, M. (1974). Deux théorèmes d'extrapolation pour des opérateurs sur les martingales. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **29** 235–240.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE
56100 PISA (ITALIE)