The Annals of Probability
1979, Vol. 7, No. 6, 933–964

TEMPS D'ARRÊT OPTIMAL, QUASI-TEMPS D'ARRÊT ET RETOURNEMENT DU TEMPS

PAR JEAN-MICHEL BISMUT

Université de Paris-Sud

A generalized problem of optimal stopping is defined, which has a solution in the class of quasi-stopping times, which generalize the classical stopping times. The optimal quasi-stopping times are fully characterized. By time reversal, on a Markov process, various results of Meyer, Mokobodzki and Rost are interpreted as results of existence of optimal quasi-stopping times for the reversed process. Finally, a game on quasi-stopping times is solved.

0. L'objet de cet article est multiple. On considère tout d'abord un processus X_t optionnel borné, continu à droite sur $[0, +\infty[$ et à limites à gauche sur $]0, +\infty]$. Il est bien connu que le problème d'arrêt optimal max $E(X_T)$ peut ne pas avoir de solutions.

Dans la première partie, on définit un problème d'arrêt optimal généralisé. Plus précisément, on maximise l'expression

$$(T^-, T^+) \to E(1_{T^- \leqslant +\infty} X^-_{T^-} + 1_{T^+ \leqslant +\infty} X_{T^+}) \tag{0.1}$$

où (T^-, T^+) sont des temps d'arrêt de graphe disjoints, et où T^- est un temps prévisible > 0. Le couple (T^-, T^+) sera appelé quasi-temps d'arrêt (q.t.a.). On vérifie tout d'abord que le maximum en (T^-, T^+) de l'expression (0.1) est égal à $\sup_{T \in \mathcal{C}} E(X_T)$ où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[0, +\infty]$. En suivant une idée de Meyer [15], on démontre au Théorème 1.1 la compacité de l'ensemble des quasi-temps d'arrêt "randomisés" pour une topologie rendant continues l'application définie en (0.1). On en déduit à la Proposition 2.1 l'existence de quasi-temps d'arrêt "randomisés" optimaux, qui sont complètement caractérisés au Théorème 2.3. Les quasi-temps d'arrêt optimaux sont eux-mêmes complètement caractérisés au Théorème 2.4. On effectue ensuite le lien entre des résultats obtenus ici et des résultats de Bismut-Skalli [7] sur l'existence de temps d'arrêt optimaux quand la projection prévisible ${}^3X$ de X est $\geqslant X^-$. On étend les résultats précédents quand X est de la classe (D), et on les applique aux processus de Markov.

Dans la Section 3, on interprète des résultats de Meyer, Mokobodzki et Rost [13] relatifs au schéma de remplissage en temps continu pour des processus droits, comme des résultats d'existence de temps d'arrêt optimaux ou de q.t.a. optimaux pour le processus retourné. Par retournement du temps, en vérifie que les q.t.a. généralisent les temps d'arrêt comme les fonctions fortement surmédianes généralisent les fonctions excessives. Lorsque le processus retourné et régularisé à droite

Received July 25, 1977; revised September 8, 1978.
AMS 1970 *subject classifications.* 60G40, 60J25, 60J45, 93E05.
Key words and phrases. Stopping times, Markov processes, probabilistic potential theory, stochastic games.

est comarkovien fort (CMF)—suivant la terminologie d'Azéma [1] que nous utiliserons constamment ici—les résultats d'expriment de manière très simple.

Enfin, dans la Section 4, on généralise les résultats que nous avions obtenus dans [3] sur des jeux sur des temps d'arrêt relatifs aux diffusions à des jeux sur q.t.a. relatifs à des processus plus généraux.

Les résultats des Sections 1, 2, et 3 ont été annoncés dans les notes [4] et [5]. Signalons également un travail de M. A. Maingueneau [10] dont les résultats recoupent les résultats des Sections 1 et 2.

1. A la recherche du temps perdu. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité complet, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ est une suite croissante et continue à droite de sous-tribus complètes de $\mathcal{F}$.

X_t est un processus optionnel borné $\geqslant 0$ défini pour $t \in [0, +\infty]$, continu à droite sur $[0, +\infty[$ et à limites à gauche sur $]0, +\infty]$ (en abrégé cadlag).

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des temps d'arrêt (t.a.) à valeurs dans $[0, +\infty]$.

On ajoutera à $[0, +\infty]$ un deuxième infini noté ∞^+, où X est nul, et où les t.a. peuvent s'évanouir. Ainsi, si $T \in \mathcal{C}$, et si $A \in \mathcal{F}_T$, T_A est défini par:

$$\begin{aligned} T_A &= T \qquad \text{si} \quad \omega \in A \\ &= \infty^+ \qquad \text{si} \quad \omega \notin A. \end{aligned}$$

Remarquons qu'alors T_A n'est plus nécessairement dans $\mathcal{C}$.

Z désigne l'enveloppe de Snell de X au sens de Mertens [11], i.e., la plus petite surmartingale optionnelle forte $\geqslant X$ (sur $[0, +\infty]$).

On a immédiatement:

Proposition 1.1. *Z est continue à droite sur* $[0, +\infty[$ *et à limites à gauche sur* $]0, +\infty]$ *et est bornée.*

Preuve. Comme X est continu à droite sur $[0, +\infty[$, si Z^+ est la surmartingale égale au processus des limites à droite de Z sur $[0, +\infty[$ et à Z_∞ en $+\infty$, comme par le Théorème 2 de [11], Z est à trajectoires s.c.s. à droite, on a: $Z \geqslant Z^+ \geqslant X$. Donc $Z = Z^+$. Comme il existe $M \in R$ tel que $X \leqslant M$, Z est $\leqslant M$ et est donc bornée. □

1.1. *Un problème d'arrêt optimal généralisé.* On va maintenant poser un problème d'arrêt optimal généralisé. En effet le problème de maximisation de $T \to E(X_T)$ sur $\mathcal{C}$ n'a en général pas de solution. On va donc agrandir l'espace $\mathcal{C}$ de manière à ce que ce problème ait une solution dans l'espace agrandi $\mathcal{C}'$.

On va en fait permettre de prendre en compte les limites à gauche de X en des temps prévisibles.

Definition 1.1. On appelle quasi-temps d'arrêt (q.t.a.) un couple de temps d'arrêt $\tau = (T^-, T^+)$ à valeurs dans $[0, +\infty] \cup \{\infty^+\}$ tels que:

(a) $T^- \wedge T^+ \in \mathcal{C}$

(b) $T^- \vee T^+ = \infty^+$

(c) T^- est un temps prévisible > 0.

$\mathcal{C}'$ est l'ensemble des q.t.a.

On plonge $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ par l'application qui à $T \in \mathcal{C}$, associe (∞^+, T).

Si $\tau \in \mathcal{C}'$, on pose, par *convention*:

$$X_\tau = 1_{T^- \leqslant +\infty} X_{T^-}^- + 1_{T^+ \leqslant +\infty} X_{T^+}. \tag{1.1}$$

On pose alors la définition du problème d'arrêt optimal généralisé.

Definition 1.2. On appelle problème (P) la recherche d'un q.t.a. (T^-, T^+) maximisant

$$\tau' \to E(X_{\tau'}) \tag{1.2}$$

pour $\tau' \in \mathcal{C}'$. ▯

On va tout de suite montrer que le problème (P) généralise le problème d'arrêt optimal.

Proposition 1.2.

$$\sup_{\tau \in \mathcal{C}'} E(X_\tau) = \sup_{T \in \mathcal{C}} E(X_T). \tag{1.3}$$

Preuve. Soit $Z = M - C$ la décomposition de Meyer de l'enveloppe de Snell Z de X. Soit $\tau = (T^-, T^+)$ un q.t.a. On a:

$$E(1_{T^- \leqslant +\infty} Z_{T^-}^-) = E(1_{T^- \leqslant +\infty}(M_{T^-}^- - C_{T^-}^-)). \tag{1.4}$$

Comme T^- est prévisible > 0, on a aussi:

$$E(1_{T^- \leqslant +\infty} M_{T^-}^-) = E(1_{T^- \leqslant +\infty} M_{+\infty}). \tag{1.5}$$

Donc

$$E(1_{T^- \leqslant +\infty} Z_{T^-}^-) \leqslant E(1_{T^- \leqslant +\infty} M_{+\infty}). \tag{1.6}$$

De même:

$$E(1_{T^+ \leqslant +\infty} Z_{T^+}) \leqslant E(1_{T^+ \leqslant +\infty} M_{+\infty}). \tag{1.7}$$

Comme $T^- \wedge T^+ \leqslant +\infty$ et comme $T^- \vee T^+ = \infty^+$, il vient:

$$E(Z_\tau) \leqslant E(M_{+\infty}) = E(Z_0). \tag{1.8}$$

De plus, comme $Z \geqslant X$, on a aussi:

$$E(Z_\tau) \geqslant E(X_\tau). \tag{1.9}$$

De (1.8) et (1.9), on tire:

$$E(Z_0) \geqslant E(X_\tau). \tag{1.10}$$

Or, par [11], Théorème 4, on sait que:

$$E(Z_0) = \sup_{T \in \mathcal{C}} E(X_T). \tag{1.11}$$

De (1.10), (1.11) et de l'inclusion $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$, on tire bien (1.3). ▯

On va, dans la partie suivante, démontrer l'existence de q.t.a. optimaux, alors qu'en général il n'existe pas de t.a. optimaux. Pour cela, on va introduire des q.t.a. "randomisés," qui sont de vrais q.t.a. sur un espace de probabilité élargi. On n'explicitera pas en quoi ce sont des q.t.a. "randomisés," puisqu'on revient en fait à de vrais q.t.a. Ces q.t.a. randomisés seront introduits par des méthodes d'analyse fonctionnelle.

1.2. *Analyse fonctionnelle.* V désigne l'espace des processus optionnels Y_t définis pour $t \in [0, +\infty]$, cad sur $[0, +\infty[$, lag sur $]0, +\infty]$ et tels que

$$E(\sup_{0 \leqslant t \leqslant +\infty} |Y_t|) < +\infty. \tag{1.12}$$

On munit V de la norme définie par (1.12). V est alors un espace de Banach.

V' désigne le dual de V. On va alors caractériser les éléments de V'.

PROPOSITION 1.3. *Soit $\mu' \in V'$. Il existe des processus adaptés continus à droite à variation intégrable A' et B', tels que:*

A' est non nécessairement nul en 0.

A' et B' peuvent charger $+\infty$.

B' est nul en 0, *prévisible, et ne charge qu'une famille dénombrable de temps prévisibles.*

Pour Y borné $\in V$, on a:

$$\langle \mu', Y \rangle = E\left(\int_0^{+\infty} Y_t^- \, dB_t' + \int_0^{+\infty} Y_t \, dA_t'\right). \tag{1.13}$$

La représentation de μ' par (1.13) *est unique. Pour que μ' soit $\geqslant 0$, il faut et il suffit que A' et B' soient croissants.* □

PREUVE. On se ramène par homéomorphisme de $[0, +\infty]$ à $[0, 1]$. Si $\tilde{V}$ désigne l'ensemble des processus cad lag vérifiant (1.12), V est fermé dans $\tilde{V}$. Par le théorème de Hahn-Banach, et par le Théorème 27 (page 380) de [15], il existe $\tilde{B}$ et $\tilde{A}$ à variation essentiellement bornée tels que pour tout Y de V:

$$\langle \mu', Y \rangle = E\int_0^{+\infty}(Y_t^- d\tilde{B} + \int_0^{+\infty} Y_t \, d\tilde{A}).$$

Si A' et B' sont les compensatrices optionnelles et prévisibles de $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$, on a bien (1.13).

En faisant passer la partie continue de B' dans A', on a une représentation de μ' vérifiant les hypothèses du théorème. De plus si T est un temps d'arrêt à valeurs dans $[0, +\infty] \cup \{\infty^+\}$, on a: $\langle \mu, 1_{t \geqslant T} \rangle = E[1_{T \leqslant +\infty} A'_{+\infty} - A_T'^- + B'_{+\infty} - B_T']$. La semi-martingale ${}^1(A'_\infty - A_t'^- + B'_\infty - B_t')$ est donc déterminée de manière unique par μ' et (A', B') sont les éléments canoniques de sa décomposition de Mertens ([15], page 388). Il y a bien unicité. □

DEFINITION 1.3. K' est l'ensemble des $\mu \geqslant 0$ de V', tels que, si μ' a la représentation (1.13)—où A' et B' sont croissants—on a $(A' + B')_{+\infty} = 1$. K est l'ensemble des éléments de K' tels que $B' = 0$. □

Les éléments de K' seront appelés des quasi-temps d'arrêt randomisés (q.t.a.r.), les éléments de K des temps d'arrêt randomisés (t.a.r.).

On peut alors plonger canoniquement $\mathcal{C}$ dans K et $\mathcal{C}'$ dans K'. En effet, si $T \in \mathcal{C}$, on définit A' et B' par

$$A_t' = 1_{t \geqslant T}, \qquad B_t' = 0. \tag{1.14}$$

On a alors pour Y borné $\in V$, on a:

$$E(Y_T) = E\int_0^{+\infty} Y_t \, dA_t. \tag{1.15}$$

De même, si $\tau = (T^-, T^+) \in \mathcal{C}'$, on définit A' et B' par

$$A'_t = 1_{t \geqslant T^+}, \qquad B'_t = 1_{t \geqslant T^-} \tag{1.16}$$

et on a pour $Y \in V$ borné:

$$E(Y_\tau) = E\left(\int_0^{+\infty} Y_t^- \, dB'_t + \int_0^{+\infty} Y_t \, dA'_t\right). \tag{1.17}$$

On va tout d'abord donner une caractérisation très simple des éléments de K'.

PROPOSITION 1.4. *K' est formé des $\mu \in V' \geqslant 0$ tels que $\langle \mu', 1 \rangle = 1$ et que pour toute surmartingale bornée cad Z (définie pour $t \in [0, +\infty]$), on ait*:

$$\langle \mu', Z \rangle \leqslant E(Z_0). \tag{1.18}$$

PREUVE. Remarquons tout d'abord que, si Z vérifie les hypothèses du théorème, Z est bien dans V. Soit $Z = M - C$ la décomposition de Meyer de Z. Alors, si $\mu' \in V'$ a la représentation (1.13), en utilisant la prévisibilité de B', on a:

$$\langle \mu', Z \rangle = E\left(\int_0^{+\infty} (M_{+\infty} - C_t^-) \, dB'_t + \int_0^{+\infty} (M_{+\infty} - C_t) \, dA'_t\right) \tag{1.19}$$

ou encore:

$$\langle \mu', Z \rangle = E(M_{+\infty} - C_{+\infty})(A'_{+\infty} + B'_{+\infty}) + E\int_0^{+\infty} (A'^-_t + B'_t) \, dC_t. \tag{1.20}$$

Si $\mu \in K'$, on a:

$$\langle \mu', Z \rangle \leqslant E(M_{+\infty} - C_{+\infty}) + E(C_{+\infty}) = E(Z_0) \tag{1.21}$$

et de plus

$$\langle \mu', 1 \rangle = 1. \tag{1.22}$$

Inversement, supposons vérifiées les hypothèses du théorème.

Soit Z_t la martingale $E^{\mathcal{F}_t} M_{+\infty}$, où $M_{+\infty}$ est une variable aléatoire $\geqslant 0$ bornée. Si $\mu \geqslant 0$ vérifie les conditions du théorème, on a:

$$E(M_{+\infty}(A'_{+\infty} + B'_{+\infty})) \leqslant E(M_{+\infty}) \tag{1.23}$$

ce qui implique:

$$A'_{+\infty} + B'_{+\infty} \leqslant 1. \tag{1.24}$$

De plus, comme $\langle \mu, 1 \rangle = 1$, on a nécessairement

$$A'_{+\infty} + B'_{+\infty} = 1 \quad \text{p.s.} \tag{1.25}$$

□

On va alors démontrer le résultat essentiel de compacité faible de K'.

THEOREME 1.1. *K' est un ensemble convexe et $\sigma(V', V)$ compact. K est dense dans K'.*

PREUVE. K' est trivialement convexe et borné. Il est $\sigma(V', V)$ fermé, puisque par la Proposition 1.4, c'est une intersection de parties $\sigma(V', V)$ fermée. V étant un espace de Banach, K' est donc $\sigma(V', V)$ compact.

Montrons enfin que le convexe K est faiblement dense dans K'. Dans le cas contraire, il existe $\mu' \in K'$ tel que $\mu' \notin \bar{K}$, où $\bar{K}$ est l'adhérence faible de K. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $Y \in V$ tel que:

$$\langle \mu', Y \rangle > \sup_{\mu \in K} \langle \mu, Y \rangle. \tag{1.26}$$

L'ensemble des processus bornés appartenant à V étant dense dans V, on peut supposer que Y est borné. Enfin, comme si $\mu'' \in K'$, $\langle \mu'', 1 \rangle = 1$ en remplaçant éventuellement Y par $Y + a$, on peut supposer $Y \geqslant 0$.

Soit Z l'enveloppe de Snell de Y. Z est cad sur $[0, +\infty[$. Comme $\mu' \in K'$, on a:

$$\langle \mu', Y \rangle \leqslant \langle \mu', Z \rangle \leqslant E(Z_0). \tag{1.27}$$

De même, si $\mu \in K$, on a:

$$\langle \mu, Y \rangle \leqslant E(Z_0). \tag{1.28}$$

Or, par [11], Théorème 4, on a:

$$E(Z_0) = \sup_{T \in \mathcal{C}} E(Y_T) \tag{1.29}$$

et comme $\mathcal{C} \subset K$, il vient:

$$E(Z_0) = \sup_{\mu \in K} \langle \mu, Y \rangle. \tag{1.30}$$

En comparant (1.26), (1.27) et (1.30), on vérifie bien qu'il y a contradiction. □

REMARQUE 1.1. Ce résultat de densité précise la Proposition 1.2.

2. Le temps retrouvé.

2.1. *Le cas borné.* On définit maintenant un nouveau problème d'optimisation (P'). La résolution du problème (P') nous permettra de résoudre complètement le problème (P).

DEFINITION 2.1. On appelle problème (P') la recherche de $\mu' \in K'$ maximisant $\tilde{\mu}' \to \langle \tilde{\mu}', X \rangle$ pour $\tilde{\mu}' \in K'$. □

On va démontrer que le problème (P') a une solution qu'on pourra en fait prendre dans $\mathcal{C}'$. On caractérisera ensuite les q.t.a.r. et les q.t.a. optimaux.

Z désigne l'enveloppe de Snell de X. On sait déjà que Z est cad sur $[0, +\infty]$.

On a immédiatement:

PROPOSITION 2.1. *L'ensemble E des solutions du problème (P') est non vide, convexe et $\sigma(V', V)$ compact. Pour que $\mu' \in E$, il faut et il suffit que $E(Z_0) = \langle \mu', X \rangle$ et alors $E(Z_0) = \langle \mu', Z \rangle$.*

PREUVE. Par le Théorème 1.1, K' est $\sigma(V', V)$ compact. Or $\tilde{\mu}' \to \langle \tilde{\mu}' X \rangle$ est $\sigma(V', V)$ continue sur K'. E est donc non vide. Il est trivialement convexe et faiblement compact.

La démonstration du théorème 1.1 prouve que:

$$E(Z_0) = \sup_{\tilde{\mu}' \in K'} \langle \tilde{\mu}', X \rangle. \tag{2.1}$$

De plus,

(2.2) $$E(Z_0) \geqslant \langle \mu', Z \rangle \geqslant \langle \mu', X \rangle.$$

La proposition en résulte. □

On va maintenant caractériser complètement les q.t.a.r. et les q.t.a. optimaux. Pour cela on va introduire différents ensembles aléatoires dont les débuts vont permettre de définir les q.t.a. optimaux.

On pose les définitions suivantes:

DEFINITION 2.2. Les ensembles A^-, A^+, A sont définis par

(2.3) $$A^- = \{t \in]0, +\infty]; X_t^- = Z_t^-\},$$
$$A^+ = \{t \in [0, +\infty]; X_t = Z_t\},$$
$$A = A^- \cup A^+.$$

D est le début de A. D^- et D^+ sont les t.a. à valeurs dans $[0, +\infty] \cup \{\infty^-\}$

(2.4) $$D^- = D_{(D>0)\cap(X_D^- = Z_D^-)}$$
$$D^+ = D_{(D=0)\cup(D>0;\, X_D^- \neq Z_D^-)}.$$

Remarquons que A^+ contient $\{+\infty\} X \Omega$. Le t.a. D est donc dans $\mathcal{C}$. De plus, sur $(D^+ \leqslant +\infty)$, $X_{D^+} = Z_{D^+}$.

1(a). *Propriétés de A^-, A^+, A.* Nous allons maintenant établir différentes propriétés des ensembles aléatoires A^- et A^+.

PROPOSITION 2.2. *D^- est un temps prévisible > 0.*

PREUVE. Par [9] (corrections) si $\tilde{D}$ est le début de A^-, le temps $\tilde{D}' = \tilde{D}_{(\tilde{D}>0)\cap(X_{\tilde{D}}^- = Z_{\tilde{D}}^-)}$ est prévisible.

Par [9] (IV (56.3)), $(D \geqslant \tilde{D}')$ est $\mathcal{F}_{\tilde{D}'}$-mesurable. Alors, par [9] (IV, Théorème 73), le temps $\tilde{D}'' = \tilde{D}'_{(D \geqslant \tilde{D}')}$ est prévisible. On vérifie trivialement que $D^- = \tilde{D}''$. □

Comme $D^- V D^+ = \infty^+$, $D^* = (D^-, D^+)$ est un q.t.a. On pose:

(2.5) $$A_t^1 = 1_{t \geqslant D^+}$$
$$B_t^1 = 1_{t \geqslant D^-}.$$

Soit μ^1 le q.t.a.r. associé à (A^1, B^1) par (1.13). On va montrer que μ^1 est "antérieur" à tout élément de E pour une relation d'ordre élémentaire.

DEFINITION 2.3. Si μ et μ' sont deux éléments $\geqslant 0$ de V', on dit que μ est antérieur à V', et on note $\mu < \mu'$ si pour tout surmartingale $\geqslant 0$ bornée Z' cad sur $[0, +\infty[$, on a:

(2.6) $$\langle \mu', Z \rangle \leqslant \langle \mu, Z \rangle.$$

On a alors:

PROPOSITION 2.3. *Si $\mu' \in E$ on a: $\mu^1 < \mu'$.*

PREUVE. Soient (A', B') les processus associés à μ' par (1.13). Par la Proposition 2.1, on a

$$\langle \mu', Z \rangle = \langle \mu', X \rangle \tag{2.7}$$

ou encore

$$E\left(\int_0^{+\infty} Z_t^- \, dB'_t + \int_0^{+\infty} Z_t \, dA'_t\right) = E\left(\int_0^{+\infty} X_t^- \, dB'_t + \int_0^{+\infty} X_t \, dA'_t\right). \tag{2.8}$$

Comme $Z \geqslant X$, dA' est porté par A^+ et dB' est porté par A^-.

Par la formule (1.20), il suffit de montrer:

$$A_t'^- + B'_t \leqslant A_t^{1-} + B_t^1 \qquad t \in \left]0, +\infty\right]. \tag{2.9}$$

Or:

(a) Pour $t < D$, A' et B' sont nuls et (2.9) est vérifié.

(b) Si $D = D^-$, $B_t^1 = 1$ pour $t \geqslant D$. Comme $A_t'^- + B'_t \leqslant 1$, on a encore (2.9).

(c) Si $D = D_+$, B' ne peut charger D puisque $X_D^- \neq Z_D^-$.

Donc $A_{D^-}'^- + B_D = 0$. De plus, pour $t > D$, $A_t^{1-} + B_t^1 = 1$ ce qui implique encore (2.9).

La proposition est bien démontrée. □

On a alors le résultat essentiel:

PROPOSITION 2.4. *μ^1 est dans E.*

PREUVE. Soit μ' dans E.

Par les Propositions 2.1 et 2.3, on a:

$$E(Z_0) = \langle \mu', Z \rangle \leqslant \langle \mu^1, Z \rangle. \tag{2.10}$$

Comme on a $E(Z_0) \geqslant \langle \mu^1, Z \rangle$ on déduit de (2.10) que

$$E(Z_0) = \langle \mu^1, Z \rangle. \tag{2.11}$$

De plus, on a trivialement:

$$\langle \mu^1, Z \rangle = \langle \mu^1, X \rangle. \tag{2.12}$$

Donc μ^1 est optimal grâce à (2.11) et (2.12) et à la Proposition 2.1. □

Pour $s \in [0, +\infty]$, on pose:

$$\begin{aligned} D_s &= \inf\{t \geqslant s; X_s = Z_s\} \wedge \inf\{t > s; X_s^- = Z_s^-\} \\ D_s^- &= D_{s(D_s > s) \cap (X^-{}_{D_s} = Z^-{}_{D_s})} \\ D_s^+ &= D_{s(D_s = s) \cup (X^-{}_{D_s} \neq Z^-{}_{D_s})}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

D_s^* est le q.t.a. (D_s^-, D_s^+).

Soit $Z = M - C$ la décomposition de Meyer de Z. On a alors:

THÉORÈME 2.1. *Z est la projection optionnelle de $Z_{D_t^*} = Y_t$.*

PREUVE. Soit $T \in \mathcal{C}$. Comme $Z_{+\infty} = Y_{+\infty}$, il suffit de démontrer que si $T \in \mathcal{C}$,

$$E(Y_T) = E(Z_T). \tag{2.14}$$

Or, en se ramenant à $T = 0$, ce résultat n'est autre que la Proposition 2.1 appliqué à la Proposition 2.4. $\square$

Soit $Z = M - C$, la décomposition de Meyer de Z, où C est nul en 0, croissant, cad et prévisible.

2.1(b). *Propriétés de C.* C^1 désigne la partie continue de C, C^2 sa partie totalement discontinue.

On pose, pour $s \in [0, +\infty]$

$$\tilde{D}_s = \inf\{t > s;\ C_t^1 > C_s^1\} \wedge \{+\infty\}. \tag{2.15}$$

B^+ est l'ensemble progressif fermé à droite ([9], IV, Théorème 32)

$$B^+ = \{t \in [0, +\infty];\ \tilde{D}_t = t\}. \tag{2.16}$$

B^+ contient alors $\{+\infty\} \times \Omega$. B^- est le prévisible mince

$$B^- = (\Delta C_t > 0). \tag{2.17}$$

THEOREME 2.2. *$B^+ \subset A^+$ et $B^- \subset A^-$.*

PREUVE. Soit T un t.a. à valeurs dans $[0, +\infty] \cup \{\infty^+\}$, qui est section de B^+ (i.e., sur $(T \leqslant +\infty)$, on a $T \in B^+$).

Par le Théorème 2.1, on sait que:

$$E(1_{T \leqslant +\infty} Z_T) = E(1_{T \leqslant +\infty} Z_{D_T^*}). \tag{2.18}$$

Or $(T \leqslant +\infty) = (D_T^- \leqslant +\infty) \cup (D_T^+ \leqslant +\infty)$.

D_T^- étant prévisible, on sait que

$$E(1_{T \leqslant +\infty}(M_T - C_T)) = E(1_{T \leqslant +\infty}(M_{+\infty} - C_{D_T^*})). \tag{2.19}$$

Or, sur $(T \leqslant +\infty)$, $D_T^- > T$ et donc $C_{D_T^-} > C_T$. De même sur $(T \leqslant +\infty)$, $C_{D_T^-} \geqslant C_-$ avec inégalité stricte si $D_T^+ > T$. On en déduit que, sur $(T \leqslant +\infty)$, $D_T^- = \infty^+$ et $D_T^+ = T$, ce qui implique $T \in A^+$.

Or B^+ est l'adhérence à droite des graphes des t.a. $\tilde{D}_t$ ($t \in Q \cup (+\infty)$) A^+ étant fermé à droite, B^+ est bien inclus dans A^+.

Montrons maintenant que $B^- \subset A^-$.

Supposons que la relation indiquée ne soit pas vraie. Par le théorème de section prévisible, il existerait un t.a. prévisible $T > 0$ à valeurs dans $[0, +\infty] \cup \{\infty^+\}$ tel que $P(T \leqslant +\infty) > 0$, qui soit section de B^-/A^-.

Soit T_n une suite croissante de t.a. convergeant vers T, telle que sur $(T \leqslant +\infty)$, on ait: $T_n < T$.

Par le théorème 2.1, on a:

$$E(1_{T_n \leqslant +\infty} Z_{T_n}) = E(1_{T_n \leqslant +\infty} Z_{D_{T_n}^*}). \tag{2.20}$$

Or, sur $(T \leqslant +\infty)$, $\Delta C_T > 0$.

De la relation (2.20), on déduit que, sur $(T \leqslant +\infty)$:

$$\begin{aligned} &\text{si } D_{T_n}^+ \leqslant +\infty, \quad D_{T_n}^+ < T \\ &\text{si } D_{T_n}^- \leqslant +\infty, \quad D_{T_n}^- \leqslant T. \end{aligned} \tag{2.21}$$

On déduit des relations précédentes que, sur $(T \leqslant +\infty)$, on a:

$$\text{soit } X_{D_{T_n}^-} = Z_{D_{T_n}^-} \quad \text{avec} \quad D_{T_n}^- \leqslant T,$$

$$\text{soit } X_{D_{T_n}^+} = Z_{D_{T_n}^+} \quad \text{avec} \quad D_{T_n}^+ < T.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve que, sur $(T \leqslant +\infty)$, $X_T^- = Z_T^-$. Il y a bien contradiction. Le théorème est ainsi démontré. ▯

On en déduit le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *Les processus C_t et $C_{D_t^*}$ sont indistinguables.*

PREUVE. C'est une conséquence immédiate du Théorème 2.2. ▯

On pose alors, pour $s \in [0, +\infty]$

$$\begin{aligned} D_s' &= \inf\{t \geqslant s;\ C_t > C_s\} \wedge \{+\infty\} \\ D_s'^- &= D'_{s\,(D_s'>s)\cap(\Delta C_{D_s'}>0)} \\ D_s'^+ &= D'_{s\,(D_s'=s)\cup(D_s'>s;\ \Delta C_{D_s'}=0)} \\ D' &= D_0' \\ D'^- &= D_0'^- \\ D'^+ &= D_0'^+. \end{aligned} \tag{2.22}$$

On a alors:

PROPOSITION 2.5. *Pout tout* t.a. S *à valeurs dans* $[0, +\infty] \cup \{\infty^+\}$, $D_S'^-$ *est un* t.a. *prévisible.*

PREUVE. Par définition, on a:

$$[D_S'^-] = ((\Delta C > 0) \cap]S, +\infty])/_{]D_S', +\infty]}. \tag{2.23}$$

Le graphe de $D_S'^-$ est donc prévisible. ▯

Remarquons enfin que $D'^* = (D'^-, D'^+)$ est un q.t.a. On pose

$$A_t^2 = 1_{t \geqslant D'^+} \tag{2.24}$$

$$B_t^2 = 1_{t \geqslant D'^-}.$$

Soit μ^2 l'élément de K' associé à (A^2, B^2) par (1.13). On a alors

PROPOSITION 2.6. *μ^2 appartient à E.*

PREUVE. Si $D'^+ = \tilde{D}_0$, par le Théorème 2.2, D'^+ passe par A. Sur $(D'^+ \leqslant +\infty)$, si $D'^+ \neq \tilde{D}_0$, alors $D'^+ < +\infty$ et D'^+ est point d'accumulation à droite de points de $(\Delta C > 0)$. Par le Théorème 2.2, D'^+ passe encore par A. De plus, D'^- est > 0, prévisible, et est section de A^- par le Théorème 2.2.

On a donc $\langle \mu_2, Z \rangle = \langle \mu_2, X \rangle$. De plus, par construction, on aura $E(Z_0) = \langle \mu_2, Z \rangle$. Par la Proposition 2.1, la proposition est bien démontrée. ▯

On a enfin le résultat suivant:

PROPOSITION 2.7. *Soit $\mu' \in K'$ tel que $E(Z_0) = \langle \mu', Z \rangle$. Alors, on a: $\mu' < \mu^2$.*

Si μ a la représentation (1.13), cette relation est équivalente à

$$A_t^{2-} + B_t^2 \leqslant A_t'^- + B_t' \qquad \text{pour} \quad t \in]0, +\infty]. \tag{2.25}$$

PREUVE. Par (1.20), on doit avoir:

$$E\int_0^{+\infty}(A_t'^- + B_t')\, dC_t = E\int_0^{+\infty} dC_t. \tag{2.26}$$

Montrons alors (2.25).

Si $D' = 0$, alors $\Delta C_0 = 0$ et comme B' ne charge pas 0, il faut et il suffit que $A_t'^- = 1$ pour $t > 0$ ou encore que $A_t' = 1$ pour $t > 0$.

Si $D' > 0$ et si $\Delta C_{D'} > 0$, it faut et il suffit que $A_{D'}^- + B_{D'} = 1$.

Si $D' > 0$ et si $\Delta C_{D'} = 0$, il faut et il suffit que $A_{D'} + B_{D'} = 1$.

Or:

Si $D' = 0$, $A_t^2 = 1$ pour $t \in [0, +\infty]$ et $B_t^2 = 0$.

Si $D' > 0$ et si $\Delta C_{D'} > 0$, $A_t^2 = 0$, et $B_t^2 = 0$ pour $t < D'$, $B_t^2 = 1$ pour $t \geqslant D'$.

Si $D' > 0$ et si $\Delta C_{D'} = 0$, alors $A_t^2 = 0$ pour $t < D'$, $A_t^2 = 1$ pour $t \geqslant D'$ et $B_t^2 = 0$.

On a donc bien (2.25) et donc $\mu < \mu^2$, grâce à (1.20). Inversement, si $\mu < \mu^2$, soit T un t.a. à valeurs dans $[0, +\infty] \cup \{\infty^+\}$ et Z_t la surmartingale cad $1_{t<T}$. On a:

$$E\big(1_{T \leqslant +\infty}(A_T^{2-} + B_T^2)\big) \leqslant E\big(1_{T \leqslant +\infty}(A_T'^- + B_T')\big). \tag{2.27}$$

Par application du théorème de section optionnel, on a bien (2.25). ▯

2.1(c). *Caractérisation des* q.t.a.r. *et* q.t.a. *optimaux.* On va maintenant caractériser complètement les q.t.a.r. et q.t.a. optimaux.

THÉORÈME 2.3. *Pour que $\mu' \in E$, il faut et il suffit que, si μ' a la représentation* (1.13), *on ait*:

$$dA' \text{ est porté par } A^+.$$

$$dB' \text{ est porté par } A^-.$$

$$\mu' < \mu^2 \big(\text{ce qui est équivalent à } A_t^{2-} + B_t^2 \leqslant A_t'^- + B_t' \text{ pour } t \in]0, +\infty]\big).$$

En particulier μ^1 et μ^2 sont optimaux.

PREUVE. Ce résultat s'obtient par application immédiate des Propositions 2.1, 2.4, 2.6 et 2.7. ▯

On va enfin remarquer que, parmi les solutions du problème (P'), on a trouvé des q.t.a. On va donc revenir au problème (P).

THEOREME 2.4. *Pour qu'un* q.t.a. (T^-, T^+) *soit solution du problème* (P), *il faut et il suffit que*:

$$T^- \text{ soit section de } A^-.$$

$$T^+ \text{ soit section de } A^+.$$

$$T^- \wedge T^+ \leqslant D'^+.$$

$$\text{Sur } (T^- \leqslant +\infty),\ T^- \leqslant D'^-.$$

$$\text{Sur } (T^+ \leqslant +\infty),\ T^+ < D'^-.$$

En particulier (D^-, D^+) *et* (D'^-, D'^+) *sont solutions du problème* (P).

PREUVE. Il suffit d'appliquer le Théorème 2.3 aux $\mu' \in K'$ associés aux q.t.a. (T^-, T^+) par (1.16). ▯

2.1.(d). *Le cas où* ${}^3X \geqslant X^-$. Nous allons maintenant examiner le case traité dans [7] II. Supposons, en effet, que, si ${}^3X$ désigne la projection prévisible de X, on ait ${}^3X_t \geqslant X_t^-$ pour $t \in]0, +\infty]$. Alors, par les résultats de Bismut-Skalli [7], on sait que la surmartingale Z est régulière et qu'il existe des temps d'arrêt optimaux, qu'on caractérise complètement.

Nous ne redémontrerons pas ici ces résultats, par ailleurs aisément démontrables à partir des considérations précédentes, mais nous établissons des résultats techniques sur les ensembles aléatoires A^- et A^+.

On pose:

$$D_s^1 = \inf\{t \geqslant s; t \in A^+\}. \tag{2.28}$$

On a alors:

PROPOSITION 2.8. 1_A *et* 1_{A^+} *ont même projection prévisible.*

PREUVE. Il faut démontrer que, si T est un temps prévisible à valeurs dans $[0, +\infty] \cup \{\infty^+\}$, alors

$$E(1_{T \leqslant +\infty} 1_{T \in A}) = E(1_{T \leqslant +\infty} 1_{T \in A^+}). \tag{2.29}$$

On a $1_{A^+} \leqslant 1_A$. De plus, si $T \leqslant +\infty$, $T \in A$, ou bien $X_T = Z_T$, ou bien $X_T^- = Z_T^-$. $(X_T^- = Z_T^-)$ étant $\mathcal{F}_T^-$-mesurable, $T_{(X_T^- = Z_T^-)}$ est prévisible par [9] (IV (56.3)). On peut donc supposer que, sur $(T \leqslant +\infty)$, $X_T^- = Z_T^-$.

Comme ${}^3X_t \geqslant X_t^-$ pour $t \in]0, +\infty]$, on a:

$$E(1_{T \leqslant +\infty} X_T) \geqslant E(1_{T \leqslant +\infty} X_T^-).$$

De même, Z étant régulière, on a:

$$E(1_{T \leqslant +\infty} Z_T) = E(1_{T \leqslant +\infty} Z_T^-). \tag{2.30}$$

On en déduit:

$$E(1_{T \leqslant +\infty} X_T) \geqslant E(1_{T \leqslant +\infty} Z_T). \tag{2.31}$$

Or $Z \geqslant X$. De (2.31), on tire immédiatement que, sur $(T \leqslant +\infty)$, on a $Z_T = X_T$. (2.29) est bien démontré. ▯

PROPOSITION 2.9. *Les processus* D_s *et* D_s^1 *sont indistinguables.*

PREUVE. Pour démontrer que $D = D^1$, il suffit de démontrer:

(a) que les points d'accumulation à droite de A^- sont dans A^+;

(b) que l'ensemble γ des points isolés à gauche de A^- et qui appartiennent à A^- est inclus dans A^+.

(a) est trivial. Montrons (b). L'ensemble γ est mince. Montrons qu'il est prévisible. Par [9] (IV, Théorème 89), l'ensemble γ' des points d'accumulation à gauche de A^- est prévisible et γ n'est autre que l'intersection de ${}^c\gamma'$ avec le prévisible A^-.

Par [9] (IV, Théorème 88), γ est réunion dénombrable de graphes disjoints de temps prévisibles. Par la Proposition 2.8—ou plus précisément par sa démonstration—chacun de ces temps passe par A^+. Donc $\gamma \subset A^+$. La proposition en résulte. □

On sait, par ailleurs, que B^- est évanescent et que $D' = D'^+$.

On a donc bien élucidé pourquoi le t.a. D et le t.a. D' sont optimaux, le passage aux q.t.a. étant alors inutile.

2.2. *Extension au cas non borné.* Dans la Partie 3, on considère un problème de q.t.a. optimal où X n'est pas nécessairement borné.

On fait les hypothèses suivantes sur

(a) X est optionnel cad sur $[0, +\infty]$ et lag sur $]0, +\infty]$.

(b) $\{X_T;\ T \in \mathcal{C}\}$ est une famille de v.a.r. uniformément intégrable, i.e., X est de la classe (D).

On vérifie alors immédiatement que par passage à la limite, $\{X_T^-;\ T \in \mathcal{C};$ T prévisible$\}$ est uniformément intégrable.

On ne peut naturellement plus supposer que $X \geqslant 0$. L'enveloppe de Snell de X ne sera plus nécessairement $\geqslant 0$. La seule difficulté réelle par rapport au cas précédent est que la démonstration de l'existence de q.t.a. optimaux n'est pas tout à fait "triviale." On va démontrer ce dernier résultat, qui découle immédiatement de la proposition suivante:

Proposition 2.10. *L'application définie sur $K'\mu' \to \langle \mu', X\rangle$ est continue pour la topologie $\sigma(V', V)$ de K'.*

Preuve. En posant $X = X^+ - X^-$, on peut supposer que X est $\geqslant 0$. Il suffit de démontrer que $\mu' \to \langle \mu', X \wedge m\rangle$ converge uniformément vers $\mu' \to \langle \mu', X\rangle$ sur K'.

Si μ' a la représentation (1.13), soient T_s et T_s' les changements de temps:

$$T_s = \inf\{t \geqslant 0;\ A_t' \geqslant s\} \tag{2.32}$$

$$T_s' = \inf\{t \geqslant 0;\ B_t' \geqslant s\}.$$

On a:

$$\langle \mu', X\rangle = E\textstyle\int_0^1\left(1_{T_s \leqslant +\infty} X_{T_s} + 1_{T_s' \leqslant +\infty} X_{T_s'}^-\right) ds. \tag{2.33}$$

Comme B' est continu à droite et prévisible, $\{t \geqslant 0;\ B_t \geqslant s\}$ est prévisible et fermé à droite. Donc T_s' est prévisible par [9] (corrections).

Or, on a:

$$E\left(1_{T_s \leqslant +\infty}(X - X \wedge m)_{T_s}\right) \leqslant E\left(1_{T_s \leqslant +\infty} 1_{X_{T_s} > m} X_{T_s}\right) \tag{2.34}$$

$$E\left(1_{T_s' < +}(X^- - X^- \wedge m)_{T_s'}\right) \leqslant E\left(1_{T_s' \leqslant +\infty} 1_{X_{T_s'}^- > m} X_{T_s'}^-\right). \tag{2.35}$$

Or les conditions d'intégrabilité uniforme garantissent que (2.34) et (2.35) tendent uniformément vers 0 quand $m \to +\infty$. La proposition en résulte. □

2.3. *Le cas Markovien.* x_t désigne un processus droit à valeurs dans un espace lusinien métrisable E contenant un cimetière δ. On suppose que

x est à durée de vie finie ζ. m est une mesure de probabilité sur E/δ.

Soit g une fonction bornée $\geqslant 0$ presque-borélienne différence de deux fonctions excessives ou plus généralement telle que $g(x_t)$ est p.s. cad lag. On pose alors la définition suivante:

DEFINITION 2.4. On appelle problème (P) la recherche d'un q.t.a. $\tau = (T^-, T^+)$ maximisant

$$\tau' \to E_m(g(x_{\tau'})) \tag{2.36}$$

pour $\tau' \in \mathcal{C}'$.

Toutes les conditions précédentes sont vérifiées par le processus $g(x_t)$. Si q est l'enveloppe de Snell de g au sens de [12], q est une fonction excessive.

Soit A^+ l'ensemble finement fermé presque-borélien

$$A^+ = \{q = g\} \tag{2.37}$$

(A^+ est non vide puisqu'il contient δ).

Soit C la fonctionnelle additive prévisible engendrant q, et $C = C_1 + C_2$ sa décomposition en une fonctionnelle additive continue C^1 et une fonctionnelle additive purement discontinue C^2. Soit F^+ le support fin de C^1.

On a alors:

THÉORÈME 2.5. $F^+ \subset A^+$. *De plus* $\{t > 0;\ \Delta C_t > 0\} \subset \{t > 0;\ q(x_t)_- = g(x_t)_-\}$.

PREUVE. Supposons qu'il existe $x \in F^+$ tel que $x \notin A^+$. Par le Théorème 2.1, on a

$$q(x) = E_x(q(x_{D^*})) \tag{2.38}$$

avec

$$D = \inf\{t \geqslant 0;\ x_t \in A^+\} \wedge \inf\{t > 0;\ q(x_t)_- = g(x_t)_-\}$$

$$\begin{aligned} D^- &= D_{(D>0)\cap(q(x_D)_- = g(x_D)_-)} \\ D^+ &= D_{(D=0)\cup(D>0;\ q(x_D)_- \neq g(x_D)_-)}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Par la Proposition 2.2, D^- est prévisible > 0. Comme $x \in F^+$, on a nécessairement $D^- = \infty^+$, $D^+ = 0$. Donc $q(x) = g(x)$ et $x \in A^+$. La deuxième partie du théorème résulte du Théorème 2.2. ∎

Le Théorème 2.4 permet de caractériser les q.t.a. optimaux.

Remarquons enfin que, si x_t est un processus de Hunt, et si g est continue, par le Théorème 1.5 de [7], q est régulière. Alors nécessairement, pour $t > 0$, on a:

$$\begin{aligned} q(x_t)_- &= {}^3q(x_t) \\ g(x_t)_- &= {}^3g(x_t). \end{aligned} \tag{2.40}$$

3. Le temps retourné. L'objet de ce chapitre est d'interpréter certains résultats de Meyer-Mokodzki-Rost dans [13] en utilisant les techniques de retournement du temps sur les processus de Markov d'Azéma [1], en les faisant apparaître comme des résultats d'existence de t.a. ou q.t.a. optimaux par une famille de tribus retournées.

3.1. *Rappels sur le retournement du temps.* Pour un exposé complet sur le retournement du temps, nous renvoyons à l'article d'Azéma [1]. Nous ne chercherons ici qu'à donner un aperçu des fondements intuitifs de la théorie.

E et δ ont le même sens qu'à la Section 2.3.

Ω désigne l'ensemble des fonctions cad définies sur R^+ à valeurs dans $E \cup \{\delta\}$ à durée de vie finie ζ.

Pour $t \in R^+$, on appelle opérateur de meurtre k_t l'application de Ω dans Ω qui à $\omega = (x_s) \in \Omega$ associe $k_t(\omega)$ définie par:

$$\begin{aligned} k_t(\omega) &= x_s \quad s < t \\ &= \delta \quad s \geqslant t. \end{aligned}$$

Les opérateurs k_t vérifient trivialement les relations:

$$(3.1) \qquad \begin{array}{ll} \text{(a)} & k_s \circ k_t = k_{s \wedge t}, \\ \text{(b)} & \zeta \circ k_t = \zeta \wedge t, \\ \text{(c)} & k_s(\omega) = k_s(\omega')s < t \Rightarrow k_t(\omega) = k_t(\omega'), \\ \text{(d)} & \text{si } t > \zeta(\omega), k_t(\omega) = \omega. \end{array}$$

La famille de tribus canonique et régularisée à droite $\{\mathcal{F}_t^0\}$ de Ω peut alors être définie par:

$$(3.2) \qquad \mathcal{F}_t^0 = \cap_{s>t} k_s^{-1}(\mathcal{F}^0)$$

où $\mathcal{F}^0$ est la tribu canonique maximale de Ω, i.e., $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}_\infty^0$.

On montre alors très simplement, voir [1] (page 463), qu'un processus prévisible par rapport à $\mathcal{F}_t^0$ peut se mettre sous la forme $Z \circ k_t$ où Z est un v.a. $\mathcal{F}^0$-mesurable.

Pour $t \in R^+$, on définit aussi l'opérateur de translation θ_t qui à $\omega = (x_s) \in \Omega$ associe $\theta_t(\omega) \in \Omega$ défini par:

$$\theta_t(\omega) = (x_{s+t}).$$

Les opérateurs θ_t vérifient:

$$(3.3) \qquad \begin{array}{ll} \text{(a)} & \theta_s \circ \theta_t = \theta_{s+t} \qquad \theta_0(\omega) = \omega \\ \text{(b)} & \theta_s(\omega) = \theta_s(\omega') \qquad \text{pour} \quad s > t \Rightarrow \theta_t(\omega) = \theta_t(\omega') \\ \text{(c)} & \zeta \circ \theta_t = (\zeta - t)^+ \\ \text{(d)} & \forall\, t \geqslant \zeta(\omega) \qquad \theta_t(\omega) = \theta_{\zeta(\omega)(\omega)}. \end{array}$$

De plus on a:

$$(3.4) \qquad k_s \circ \theta_t = \theta_t \circ k_{s+t}.$$

Les opérateurs de meurtre et de translation sont dits être en dualité ([7], page 472).

On vérifie alors que les opérateurs $\hat{\theta}_t$ définis par:

$$\hat{\theta}_t(\omega) = \theta_{(\zeta(\omega)-t)^+}(\omega) \tag{3.5}$$

définissant une famille d'opérateurs de meurtre, i.e., vérifient les relations (3.1).

On définit une nouvelle famille de tribus $\hat{\mathcal{F}}_t^0$ par la relation:

$$\hat{\mathcal{F}}_t^0 = \cap_{s>t} \hat{\theta}_s^{-1}(\mathcal{F}^0).$$

On peut alors définir les temps d'arrêt, appelés "temps de retour" pour la filtration $\{\hat{\mathcal{F}}_t^0\}$, des processus optionnels ou prévisibles pour $\{\hat{\mathcal{F}}_t^0\}$.

A tout processus Z_t on associe le processus $\hat{Z}_t$ défini par

$$\hat{Z}_t = Z_{(\zeta(\omega)-t)^+}.$$

On dira alors que Z est co-optionnel ou co-prévisible si $\hat{Z}$ est optionnel ou prévisible pour les filtrations $\{\hat{\mathcal{F}}_t^0\}$. On montre alors que pour que Z soit co-prévisible, il faut et il suffit que $Z_t = Z_0 \circ \theta_t$.

On peut définir alors les opérateurs de projection optionnels, prévisibles, co-optionnels, co-prévisibles, et les opérations de compensation correspondantes.

Azéma définit dans [1] le retournement du temps dans un cadre plus général que celui que nous avons donné ici. Nous renvoyons le lecteur à [1].

3.2. *Hypothèses.* x et g vérifient encore les hypothèses de 2.3. m désigne une mesure de probabilité sur E.

On suppose que l'espace de base Ω sur lequel a été construit x est un espace de Blackwell, muni d'opérateurs de meurtre k_t et de translation θ_t en dualité au sens d'Azéma [1] (page 472), et que P_m vérifie les hypothèses de [1] ((2.1), page 474).

On utilise alors dans toute la suite les définitions et résultats d'Azéma [1].

3.3. *Le problème d'arrêt optimal et l'hypothèse* (CMF). On veut encore maximiser (2.36).

On suppose dans cette sous-partie que x vérifie l'hypothèse (CMF) d'Azéma [1] (page 491). En particulier, x_t est à limites à gauche pour $t \in]0, \zeta]$.

Remarquons qu'alors les processus $q(x_t)_-$ et $g(x_t)_-$ sont prévisibles et co-optionnels. L'hypothèse (CMF) permet d'affirmer qu'il existe deux fonctions $\hat{q}$ et $\hat{g}$ boréliennes, définies à un ensemble m-polaire à gauche près, telles que ces deux processus sont respectivement indistinguables de $\hat{q}(x_t^-)$ et $\hat{g}(x_t^-)$. $\hat{q}$ et $\hat{g}$ sont donc m-finement continues pour x_t^-. De plus, comme $(x_t \neq x_t^-)$ est mince, $(q \neq \hat{q})$ et $(g \neq \hat{g})$ sont m-semi-polaires (voir [1], page 479).

De même ΔC est prévisible et cooptionnel, et $\{t > 0;\ \Delta C_t > 0\}$ est mince. Il existe donc $\hat{h}$ borélienne, définie à un ensemble m-polaire à gauche près, et nulle hors d'un m-semi-polaire (voir [1], page 479), telle que ΔC_t est indistinguable de $\hat{h}(x_t^-)$ (si x est un processus de Hunt et si g est continue, on peut prendre $\hat{q} = q$ et $\hat{h} = 0$).

A^- désigne le borélien m-cofinement fermé:

$$A^- = \{\hat{q} = \hat{g}\}. \tag{3.6}$$

$A^+ \Delta A^-$ est alors m-semi-polaire.

De plus, par le Théorème 2.6, on peut supposer que $\hat{h} = 0$ hors de A^-. Soit F^- le borélien:

$$F^- = \{x \in E; \hat{h}(x) > 0\}. \tag{3.7}$$

On pose enfin:

$$\begin{aligned}
D &= \inf\{t \geq 0; x_t \in A^+\} \wedge \inf\{t > 0; x_t^- \in A^-\}\\
D^- &= D_{(D>0)\cap(x_D^- \in A^-)}\\
D^+ &= D_{(D=0)\cup(D>0;\, x_D^- \notin A^-)}\\
D' &= \inf\{t \geq 0; x_t \in F^+\} \wedge \inf\{t > 0; x_t^- \in F^-\} \wedge \{+\infty\}\\
D'^- &= D'_{(D'>0)\cap(x_{D'}^- \in F^-)}\\
D'^+ &= D'_{(D'=0)\cup(D'>0;\, x_{D'}^- \notin F^-)}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

On peut alors simplement caractériser les q.t.a. optimaux. En particulier, (D^-, D^+) et (D'^-, D'^+) sont optimaux. Remarquons que cette caractérisation fait intervenir explicitement la mesure d'entrée m, sauf dans le cas où x est un processus de Hunt et où g est continue, puisqu'alors on peut prendre $\hat{q} = q$, $\hat{g} = g$, $\hat{h} = 0$ $A^+ = A^-$, $F^- = \varnothing$.

3.4. *Décomposition des mesures, temps d'arrêt optimal et retournement du temps.* On va maintenant interpréter les résultats de Meyer-Mokobodzki-Rost dans [13]. On suppose ici encore que $\zeta < +\infty$ et de plus que x est transient (cette dernière hypothèse est en fait inutile).

Soient λ et μ deux mesures positives bornées sur E/δ (l'hypothèse de borne peut être levée par la méthode de [13], page 137).

m est une mesure de probabilité sur E/δ telle que λ et μ ne chargent pas les ensembles m-evanescents. Remarquons que la mesure $m = (\lambda + \mu)/\langle \lambda + \mu, 1\rangle$ convient.

Rappelons alors les principaux résultats de [13]. On sait que, si $\mu^\infty \mathrm{U}$ est la réduite excessive de $(\mu - \lambda)\mathrm{U}$, on a, pour toute fonction excessive f:

$$\langle \mu^\infty, f\rangle = \sup_{g \text{ excessive} \leq f} \langle \mu - \lambda, g\rangle. \tag{3.9}$$

On va maintenant interpréter la formule (3.9).

3.4(a). *Le sens du temps.* Pour éviter au lecteur des contorsions fatigantes, on écrira qu'un processus cag sur $]0, +\infty]$ est ^ cad, qu'un processus lad sur $[0, +\infty[$ est ^ lag, qu'un processus cooptionnel est ^ optionnel, qu'un processus coprévisible est ^ prévisible etc .... 1, 3, $\hat{1}$, $\hat{3}$ désignent les opérateurs de projection optionnelle, prévisible, ^ optionnelle, ^ prévisible.

Un temps de retour L sera appelé un ^ temps d'arrêt ou ^ t.a., un quasi-temps de retour un ^ q.t.a., etc ....

3.4(b). *Premiers résultats.* On va d'abord construire des processus associés à λ et μ.

PROPOSITION 3.1. *Il existe des processus M, L, M^{∞} nuls en 0, croissants, ^ cad, algébriquement prévisibles, tels que $M_{\zeta} - M_t$, $L_{\zeta} - L_t$, $M_{\zeta}^{\infty} - M_t^{\infty}$ soient ^ prévisibles et intégrables, et pour toute fonction borélienne bornée h, on a*

$$\langle \lambda, h \rangle = E_m \textstyle\int_0^{+\infty} h(x_t)\, dL_t$$

$$\langle \mu, h \rangle = E_m \textstyle\int_0^{+\infty} h(x_t)\, dM_t \tag{3.10}$$

$$\langle \mu^{\infty}, h \rangle = E_m \textstyle\int_0^{+\infty} h(x_t)\, dM_t^{\infty}.$$

L, M, M^{∞} sont définis à un ensemble P_m évanescent près.

PREUVE. C'est le théorème de [1] (page 491). □

On a alors immédiatement:

PROPOSITION 3.2. *$\hat{{}^1M}$, $\hat{{}^1L}$, $\hat{{}^1M}^{\infty}$ sont des ^ surmartingales ^ cad de la classe (D).*

PREUVE. Les processus M, L, M^{∞} étant croissants, ^ cad et intégrables, le résultat est évident. □

On pose:

$$X = \hat{{}^1M} - \hat{{}^1L}. \tag{3.11}$$

X est nécessairement un processus de la classe (D) et vérifie donc les hypothèses de 2.2. Soit Z son enveloppe de Snell (pour les tribus retournées). Comme $X_0 = 0$, Z est une surmartingale $\geqslant 0$, et de plus Z est ^ cad et de la classe (D).

Par [11], on sait que si $R \in \hat{\mathcal{C}}$ (i.e., R est un ^ temps d'arrêt, i.e., un temps de retour), on a:

$$E(1_{R>0} Z_R) = \sup_{R' \in \hat{\mathcal{C}};\, R' \leqslant R} E(1_{R'>0} X_{R'}). \tag{3.12}$$

Nous allons montrer maintenant que les formules (3.9) et (3.12) sont équivalentes.

THEOREME 3.1.

$$Z = \hat{{}^1M}^{\infty}. \tag{3.13}$$

PREUVE. Soit R un ^ t.a. algébrique. Soit f la fonction excessive:

$$f(x) = P_x(R > 0).$$

On a, par [1] (page 478 (2.4))

$$\hat{{}^1 1}_{[0, R[} = f(x). \tag{3.14}$$

Donc

$$\langle \mu^{\infty}, f \rangle = E_m \textstyle\int_0^{+\infty} f(x_t)\, dM_t^{\infty} = E(1_{R>0} M_R^{\infty}) = E\left(1_{R>0} \hat{{}^1M}_R^{\infty}\right). \tag{3.15}$$

Soit g une fonction excessive $\leqslant f$.

Le f-processus construit à partir de x dans [1] (2.7) prend ses valeurs dans $E'_f = \{x, f(x) > 0\}$ pour $t < \zeta$. $v = g/f$ est une fonction excessive $\leqslant 1$ pour le f-processus.

Par [14], page 310, v est projection optionnelle—relativement au f-processus de mesure d'entrée m—d'un processus décroissant C_t, i.e., $\hat{}$ croissant, cad, nul pour $t > \zeta$ et $\hat{}$ prévisible, tel que $C_t \leqslant 1$.

Soit C'_t un processus $\hat{}$ croissant algébriquement $\hat{}$ prévisible, $\geqslant 0$, $\hat{}$ cag, nul pour $t > \zeta$ et majoré par 1 indistinguable de C_t pour P_m. On supposera, sans inconvénient, que $C_{-\infty} = 1$.

Si E^f_m est l'opérateur d'espérance pour le f-processus de mesure d'entrée m, on a:

$$\langle \mu - \lambda, g\rangle = \langle m, f\rangle E^f_m\left(\int_0^{+\infty} v(x_t)\, dM - \int_0^{+\infty} v(x_t)\, dL\right) = \langle m, f\rangle E^f_m \int_\zeta^0 (M_t - L_t)\, dC'_t. \tag{3.16}$$

Posons:

$$H = \int_\zeta^0 (M_t - L_t)\, dC'_t \tag{3.17}$$

Si A est la fonctionnelle prévisible $\hat{}$ optionnelle—i.e., commutant avec les opérateurs de projection correspondants—engendrant f, on a par [1] (2.7):

$$\langle \mu - \lambda, g\rangle = E_m \int_0^{+\infty} H \circ k_t\, dA_t. \tag{3.18}$$

Comme dA est associé à $d1_{[R, \zeta]}$, il vient:

$$\langle \mu - \lambda, g\rangle = E_m H \circ k_R. \tag{3.19}$$

Soit R'_s le changement de temps (d'origine ζ) associé à C', i.e.,

$$R'_s = \sup\{t \leqslant \zeta;\, C'_t > s\}, \tag{3.20}$$

R'_s est trivialement un $\hat{}$ t.a. (nonalgébrique).

Donc de (3.17) et (3.19), on tire:

$$\langle \mu - \lambda, g\rangle = E_m\left(\int_0^1 (M - L)_{R'_s}\, ds\right) \circ k_R. \tag{3.21}$$

Or, comme M et L sont prévisibles, on a:

$$(M - L)_{R'_s} \circ k_R = (M - L)_{R'_s \circ k_R}. \tag{3.22}$$

De plus par [1] (page 472), $R'_s \circ k_R$ est un $\hat{}$ t.a. $\hat{\geqslant} R$.

Donc, de (3.21) et (3.22), on tire:

$$\langle \mu - \lambda, g\rangle = E_m \int_0^1 (M - L)_{R'_s \circ k_R}\, ds = E_m \int_0^{1^i} (M - L)_{R'_s \circ k_R}\, ds, \tag{3.23}$$

ou encore

$$\langle \mu - \lambda, g\rangle = E_m \int_0^1 X_{R'_s \circ k_R}\, ds. \tag{3.24}$$

Comme $X \leqslant Z$, on a donc:

$$\langle \mu - \lambda, g\rangle \leqslant E_m \int_0^1 Z_{R'_s \circ k_R}\, ds, \tag{3.25}$$

et comme Z est une $\hat{}$ surmartingale forte, nulle pour $t \leqslant 0$, il vient:

$$\langle \mu - \lambda, g \rangle \leqslant E_m(1_{R>0} Z_R). \tag{3.26}$$

En rassemblant (3.9) et (3.26), on tire:

$$E_m\left(1_{R>0}{}^{\hat{1}}M_R^\infty\right) \leqslant E_m(1_{R>0} Z_R). \tag{3.27}$$

De plus:

$$\langle \mu^\infty, f \rangle \geqslant \langle \mu - \lambda, f \rangle \tag{3.28}$$

ce qui implique aussi

$$E\left(1_{R>0}{}^{\hat{1}}M_R^\infty\right) \geqslant E(1_{R>0} X_R). \tag{3.29}$$

Par le théorème de section $\hat{}$ optionnel, on tire: $Z \geqslant {}^{\hat{1}}M^\infty \geqslant X$. Z étant la plus petite surmartingale $\hat{}$ optionnelle $\geqslant X$, $Z = {}^{\hat{1}}M^\infty$. ▯

REMARQUE 3.1. On peut aussi conclure à partir de (3.27), (3.29) et (3.12).
La démonstration donnée ici permet de redémontrer (3.12).

3.4(c). *Existence de* $\hat{}$ t.a. *optimaux*. Dans [13], on caractérise certaines fonctions $g \leqslant f$ excessives ou fortement surmédianes qui permettront de réaliser le maximum dans (3.9).

Nous allons ici interpréter les résultats de [13] comme des résultats d'existence de $\hat{}$ t.a. ou $\hat{}$ q.t.a. optimaux.

On suppose ici que μ ne charge pas les semipolaires. Par [1] (page 491) M est alors indistinguable d'un processus continu pour P_m.

Remarquons alors que X et ${}^{\hat{1}}M^\infty$ sont définis sur $t \in [-\infty, \zeta]$, puisqu'ils sont nuls pour $t \leqslant 0$. En prenant ζ pour origine des temps, X vérifie bien les hypothèses de I. De plus, grâce à la continuité de M, on vérifie immédiatement que

$${}^{\hat{3}}X_t \geqslant X_t^+ \qquad \text{pour} \quad t < \zeta. \tag{3.30}$$

Cette dernière condition est précisément une forme de la condition donnée dans [7] II, qui garantit l'existence de t.a. optimaux. On a, en effet:

THEOREME 3.2. *La $\hat{}$ surmartingale $Z = {}^{\hat{1}}M^\infty$ est $\hat{}$ cad et régulière. Si A est le fermé $\hat{}$ droit prévisible $\hat{}$ optionnel $\{t \in [-\infty, \zeta];\ Z_t = X_t\}$ et si B est le fermé $\hat{}$ droit prévisible $\hat{}$ progressif $\{t \in [0, \xi];\ \forall\, s < t,\ M_s^\infty < M_t^\infty\}$ alors $B \subset A$.*

Pour tout $t \in [-\infty, \zeta]$, on pose:

$$D_s = \sup\{t \leqslant s;\ s \in A\}, \tag{3.31}$$
$$D_s' = \sup\{t \leqslant s;\ s \in B\} \vee \{-\infty\}.$$

Alors, Z_t est projection $\hat{}$ optionnelle de Z_{D_t} (ou de $Z_{D_t'}$). Si R est un $\hat{}$ t.a., pour qu'un $\hat{}$ t.a. $R' \hat{\geqslant} R$ (i.e., $\leqslant R$) maximise $R'' \to E(X_{R''})$ parmi les $\hat{}$ t.a. $R'' \hat{\geqslant} R$, il faut et il suffit que R' soit section de A et $\hat{\leqslant} D_R'$. En particulier, D_R et D_R' sont optimaux.

PREUVE. Ces résultats sont contenus dans [7], Théorème 2.3. A est prévisible, car défini par des processus prévisibles. De même B est prévisible comme ensemble des points d'accumulation à gauche du progressif support de M^{∞} (dont on vérifie par ailleurs trivialement qu'il est continu, puisque ... μ^{∞} ne charge pas les semipolaires).

Nous allons maintenant rappeler un résultat de Meyer-Mokobodzki [13]:

PROPOSITION 3.3. *Si μ ne charge pas les semipolaires, il existe C finement fermé, tel que*

$$\mu^{\infty} = \mu^{\infty} P_C = (\mu - \lambda) P_C \tag{3.32}$$

où P_C est le noyau

$$P_C h(x) = E_x 1_{T_C < +\infty} h(x_{T_C}). \tag{3.33}$$

PREUVE. C'est la Proposition 7 de [13] (page 136). □

Nous allons retourner le temps pour obtenir le contenu probabiliste de (3.32), en redémontrant complètement ce résultat par des méthodes probabilistes et en construisant explicitement un ensemble C qui convient.

Puisque λ ne charge pas les m-evanescents, λP_C ne charge pas non plus les m-evanescents. Par [1] (page 491), il existe L' vérifiant les mêmes hypothèses que M, L, M^{∞} à la Proposition 3.1, telle que, pour h borélienne bornée, on ait:

$$\langle \lambda, P_C h \rangle = E_m \int_0^{+\infty} h(x_t)\, dL'_t. \tag{3.34}$$

On définit de même M' et $M^{\infty\prime}$.

On a alors:

PROPOSITION 3.4.

$$\hat{\mathrm{i}} L'_t = \hat{\mathrm{i}}\left(L_{T'_C \circ k_t}\right) = \hat{\mathrm{i}}\left(\left(\hat{\mathrm{i}} L\right)_{T'_C \circ k_t}\right) \tag{3.35}$$

avec

$$T'_C = \sup\{ s \in]0, \zeta[;\, x_s \in C \} \tag{3.36}$$

où $T'_C = -\infty$ si l'ensemble définissant T'_C est vide.

PREUVE. C'est à peut près évident. Il suffit de montrer que, pour tout ^ t.a. algébrique R, on a

$$E(1_{R>0} L'_R) = E\left(1_{R>0} L_{T'_C \circ k_R}\right) = E\left(1_{R>0}\left(\hat{\mathrm{i}} L\right)_{T'_C \circ k_R}\right). \tag{3.37}$$

Or T'_C est un ^ t.a. (non algébrique), car on a:

$$\begin{aligned} T'_C \circ \theta_t &= T' - t \qquad \text{si } T'_C > t \\ &= -\infty \qquad \text{si } T'_C \leqslant t. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Enfin, par [1] (page 472), $T'_C \circ k_R$ est un ^ t.a. Donc:

$$E\left(1_{R>0} L_{T'_C \circ k_R}\right) = E\left(1_{R>0}\left(\hat{\mathrm{i}} L\right)_{T'_C \circ k_R}\right). \tag{3.39}$$

La dernière égalité de la proposition étant démontrée, montrons la première.

Soit f la fonction excessive:

$$f(x) = P_x(R > 0). \tag{3.40}$$

Par une égalité du type (3.15), on a:

$$\langle \lambda, P_C f \rangle = E_m(1_{R>0} L'_R). \tag{3.41}$$

De plus

$$\langle \lambda, P_C f \rangle = E_m \int_0^{+\infty} P_C f(x_t)\, dL_t = E_m \int_0^{+\infty} E_{x_t}\big(1_{T_C<+\infty} f(x_{T_C})\big)\, dL_t. \tag{3.42}$$

Soit Y_t le processus algébriquement ^ prévisible $1_{[0,R[}$. $E_{x_t}(1_{T_C<+\infty} f(x_{T_C}))$ est alors la projection optionnelle du processus ^ prévisible $(Y \circ \theta_{T_C}) \circ \theta_t$. En effet:

$$^1\big((Y \circ \theta_{T_C}) \circ \theta_t\big) = E_{x_t}(Y \circ \theta_{T_C}) = E_{x_t}\big(1_{T_C<+\infty} Y_{T_C}\big). \tag{3.43}$$

Comme $f(x_t)$ est la projection optionnelle de Y, on a, pour tout $x \in E$:

$$E_x\big(1_{T_C<+\infty} Y_T\big) = E_x\big(1_{T_C<+\infty} f(x_{T_C})\big), \tag{3.44}$$

ce qui démontre l'assertion précédente. Donc:

$$\begin{aligned} \langle \lambda, P_C f \rangle &= E_m \int_0^{+\infty} (Y \circ \theta_{T_C}) \circ \theta_t\, dL_t \\ &= E_m \int_0^{+\infty} Y_{t+T_C \circ \theta_t}\, dL_t = E_m \int_0^{+\infty} 1_{t+T_C \circ \theta_t < R}\, dL_t. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Comme L est continu à gauche, par la définition de T'_C, on a bien:

$$\langle \lambda, P_C f \rangle = E\big(1_{R>0} L_{T'_C \circ k_R}\big). \tag{3.46}$$

De (3.41) et (3.46), on déduit bien (3.35). □

On a alors un résultat technique.

Proposition 3.5. *L'ensemble des points d'accumulation à gauche (i.e., à ^droite) de $\{s \geq 0;\ x_s \in C\}$) est prévisible et ^ progressif, est contenu dans A et contient B.*

Preuve. La prévisibilité de l'ensemble considéré résulte de [9] (IV, Théorème 89). Comme $\{s \geq 0;\ x_s \in C\}$ est ^ prévisible, par [9] (IV, Théorème 89), l'ensemble de ses points d'accumulation à ^ droite est ^ progressif.

Soit R un ^ t.a. algébrique, et f la fonction excessive $P_x(R > 0)$. Alors par (3.46), on a:

$$\langle \mu - \lambda, P_C f \rangle = E_m\big(1_{R>0} X_{T'_C \circ k_R}\big). \tag{3.47}$$

Or, par (3.15) et (3.32), on a:

$$\langle \mu - \lambda, P_C f \rangle = E_m(1_{R>0} M_R^\infty). \tag{3.48}$$

De (3.47) et (3.48), on tire que $T'_C \circ k_R$ est un ^ t.a. optimal $\mathrel{\hat{\geq}} R$. Par le Théorème 3.2, $T'_C \circ k_R$ passe par A. Or l'ensemble considéré est l'adhérence à ^ droite des $T'_C \circ k_{\zeta - t}$ $(t \in Q^+)$. Comme A est fermé à ^ droite, la première partie du théorème est bien démontrée. La seconde se démontre de la même manière. □

On va enfin construire un ensemble C qui convient. Soit $B' = \{t \in [0, \zeta[;\ \forall\, s > t;\ M_s^\infty > M_t^\infty\}$. Si $\bar{B}$ est le fermé optionnel et ^ optionnel support de M^∞,

B' est l'ensemble des points d'accumulation à droite de $\bar{B}$, et est donc, par [9], (IV, Théorème 89), progressif et $\hat{}$ prévisible. Soit ${}^1B'$ sa projection optionnelle.

Comme $\bar{B}$ est optionnel, on a ${}^1B' \subset \bar{B}$. De plus, en raisonnant comme dans la preuve du Théorème 2.1 de [7], on sait que B' étant un fermé droit, $B' \subset {}^1B'$. Enfin B' étant fermé à droite, par [8] (IV, Théorème 28), ${}^1B'$ est fermé à droite. Par [1] (page 478), il existe f borélienne telle que $1_{{}^1B'}$ et $f(x_t)$ soient des processus indistinguables. On peut choisir f à valeurs dans $\{0, 1\}$. Soit C l'adhérence fine de $\{f = 1\}$. Comme ${}^1B'$ est fermé à droite, ${}^1B'$ est indistinguable de $\{t \in [0, \zeta[;\ x_t \in C\}$.

On a alors:

PROPOSITION 3.6.

$$\mu^\infty = (\mu - \lambda)P_C. \tag{3.49}$$

PREUVE. Il suffit de démontrer que, si R est un $\hat{}$ t.a., $T'_C \circ k_R$ est optimal pour le problème défini au Théorème 3.2. Or $\{t \in [0, \zeta[;\ x_t \in C\}$ est dense dans B'. Donc

$$\sup\{s;\ 0 < s < R;\ s \in \bar{B}\} \quad \text{et} \quad \sup\{s;\ 0 < s < R;\ x_s \in C\}$$

coïncident. Or $\sup\{s;\ 0 < s < R;\ s \in \bar{B}\} = D'_R$. La proposition résulte de l'optimalité de D'_R prouvée au Théorème 3.2. ▯

3.4(d). *Le cas général.* On ne fait plus d'hypothèse sur μ. On va maintenant considérer des q.t.a. relatifs aux tribus retournées. On ajoutera un deuxième infini noté ∞^- qui est $< -\infty$. (On peut en fait se passer de ∞^-.)

THEOREME 3.3. *Soit A^+ le fermé $\hat{}$ droit, prévisible, $\hat{}$ optionnel*

$$A^+ = \{t \in [-\infty, \zeta];\ Z_t = X_t\} \tag{3.50}$$

et A^- le fermé droit, optionnel, $\hat{}$ prévisible

$$A^- = \{t \in [-\infty, \zeta[;\ Z_t^+ = X_t^+\}. \tag{3.51}$$

Soit $M^\infty = M_c^\infty + M_d^\infty$ la décomposition de M^∞ en sa partie continue M_c^∞ et sa partie totalement discontinue M_d^∞.

Soit B^+ le fermé $\hat{}$ droit, prévisible, $\hat{}$ progressif:

$$B^+ = \{t \in]-\infty, \zeta];\ \forall s < t;\ M_{c_s}^\infty < M_{c_t}^\infty\} \tag{3.52}$$

et B^- l'ensemble mince, optionnel, $\hat{}$ prévisible

$$B^- = \{t \in [-\infty, \zeta[;\ \Delta M_t^\infty > 0\}. \tag{3.53}$$

Alors $B^+ \subset A^+$ et $B^- \subset A^-$.

Pour tout $s \in [-\infty, \zeta]$, on pose:

$$
(3.54)\qquad
\begin{aligned}
D_s &= \sup\{t \leqslant s, s \in A^+\} \wedge \sup\{s < t; s \in A^-\}\\
D_s^- &= D_{s_{(D_s<s)\cap(D_s \in A^-)}}\\
D_s^+ &= D_{s_{(D_s=s)\cup(D_s<s;\, D_s \notin A^-)}}\\
D_s' &= \sup\{t \leqslant s; M_t^\infty < M_s^\infty\} \vee \{-\infty\}\\
D_s'^- &= D'_{s_{(D_s'<s)\cap(D_s' \in B^-)}}\\
D_s'^+ &= D'_{s_{(D_s'=s)\cup(D_s'<s;\, D_s' \notin B^-)}}.
\end{aligned}
$$

Z_t est la projection $\hat{}$ optionnelle de

$$
(3.55)\qquad 1_{(D_t^+ > -\infty)} Z_{D_t^+} + 1_{(D_t^- > -\infty)} Z_{D_t^-}^{+}\,{}^{1}.
$$

Si R est un $\hat{}$ t.a., *pour qu'un $\hat{}$* q.t.a. $(R'^-, R'^+) \hat{\geqslant} R$ *maximise*

$$
(R''^-, R''^+) \to E(1_{R''^- \geqslant -\infty} X_{R''^-}^+ + 1_{R''^+ \geqslant -\infty} X_{R''^+})
$$

avec $(R''^-, R''^+) \hat{\geqslant} R$, il faut et il suffit que R'^- soit section de A^-, R'^+ soit section de A^+ et que:

$$
\begin{gathered}
R'^- \vee R'^+ \geqslant D_R'^+\\
\text{sur } (R'^- \geqslant -\infty),\ R'^- \geqslant D_R'^-\\
\text{sur } (R'^+ \geqslant -\infty),\ R'^+ > D_R'^-.
\end{gathered}
$$

En particulier (D_R^-, D_R^+) et $(D_R'^-, D_R'^+)$ sont optimaux.

Preuve. C'est évident par le Théorème 2.4. □

En règle générale, si f est une fonction excessive, il n'existe pas de fonction excessive $g \leqslant f$ maximisant $g' \to \langle \mu - \lambda, g' \rangle$ pour g' excessive $\leqslant f$.

Par retournement du temps, on interprète ce résultat en remarquant qu'il n'existe généralement pas de $\hat{}$ t.a. optimal pour le problème retourné d'arrêt optimal.

On sait cependant par [13], Proposition 8 (page 140), qu'il existe G finement fermé, tel que:

$$
(3.56)\qquad \mu^\infty = (\mu - \lambda) H_G
$$

où H_G est l'opérateur

$$
(3.57)\qquad H_G(x) = E_x\big(1_{D_G < +\infty} h(x_{D_G})\big).
$$

Nous allons interpréter (3.56) en montrant, par retournement du temps, que l'introduction du noyau H_G au lieu de P_G est équivalente à la recherche d'un $\hat{}$ q.t.a. optimal au lieu d'un $\hat{}$ t.a. optimal.

Comme λ ne charge pas les m-evanescents, λH_G ne les charge pas non plus. Il existe L' $\hat{}$ cad optionnelle et $\hat{}$ prévisible telle que:

$$
(3.58)\qquad \langle \lambda H_G, h \rangle = E_m \textstyle\int_0^{+\infty} h(x_t)\, dL_t'.
$$

[1]Nous regrettons autant que le lecteur l'incohérence des notations. Nous lui suggérons vivement de trouver des notations plus adéquates.

On a alors l'équivalent de la Proposition 3.4:

PROPOSITION 3.7. *$\hat{1}L'_t$ est égal à la projection optionnelle de*:

$$1_{(D'_G \circ k_t < t) \cap (x_{D'_G \circ k_t} \in G)} L^+_{D'_G \circ k_t} + 1_{(D'_G \circ k_t = t) \cup (D'_G \circ k_t < t,\, x_{D'_G \circ k_t} \notin G)} L_{D'_G \circ k_t} \tag{3.59}$$

où D'_G est défini par:

$$D'_G = \sup\{s \in [0, \zeta[\,;\, x_s \in G\}.$$

On peut remplacer L par $\hat{1}L$ dans (3.59).

Pour tout $\hat{}$ t.a. R, $D'_G \circ k_R$ *est un* $\hat{}$ t.a. *et* $D'_G \circ k_{R_{(D'_G \circ k_R < R) \cap (x_{D'_G \circ k_R} \in G)}}$ *un* $\hat{}$ t.a. $\hat{}$ *prévisible.*

PREUVE. On vérifie simplement que les variables aléatoires indiquées à la fin de l'énoncé ont les propriétés demandées, car elles vérifient les conditions de la définition [1] (page 468). On peut alors remplacer trivialement L par $\hat{1}L$ dans (3.59).

(3.59) résulte alors des mêmes calculs que pour la Proposition 3.4 et en particulier de (3.45), où T_C est remplacé par D_G. ▯

REMARQUE 3.2. On a naturellement les résultats correspondant pour M, M^∞.

On va enfin construire explicitement un ensemble G qui convient.

Soit M_c^∞ la partie continue de M^∞. On construit f à partir de M_c^∞ comme en (c). Soit G_1 l'adhérence fine de $\{x \in E; f(x) = 1\}$.

Comme $(\Delta M^\infty > 0)$ est mince, optionnel et $\hat{}$ prévisible, il existe un borélien semipolaire G_2 tel que

$$\{t \in [0, \zeta[\,;\, \Delta M_t^\infty > 0\} = \{t \in [0, \zeta[\,;\, x_t \in G_2\}. \tag{3.60}$$

Soit G'_2 l'adhérence fine de G_2. On pose:

$$G = G_1 \cup G'_2. \tag{3.61}$$

On a alors:

THEOREME 3.4.

$$\mu^\infty = (\mu - \lambda) H_G. \tag{3.62}$$

PREUVE. $\{s \in [0, \zeta[;\, x \in G'_2\}$ est la projection optionnelle de l'ensemble progressif adhérence à droite de $\{s \in [0, \zeta[,\, x_s \in G_2\}$: ce résultat est en effet évident par vérification du fait que, par ces deux ensembles, passent les mêmes temps d'arrêt. $\{s \in [0, \zeta[;\, x_s \in G'_2\}$ est donc contenu dans l'adhérence de $\{s \in [0, \zeta[,\, x_s \in G_2\}$, puisque l'adhérence est un ensemble optionnel. De plus $G_2 \subset G'_2$. On en déduit que le $\hat{}$ début—à partir d'un $\hat{}$ t.a. R—de l'ensemble $\{s \in [0, \zeta[;\, x_s \in G\}$ est égal au $\hat{}$ début de $\{s \in [0, \zeta[;\, x_s \in G_1 \cup G_2\}$.

Grâce à la Proposition 3.7, il suffit de vérifier que le couple défini par:

$$\begin{aligned} R'^- &= D'_G \circ k_{R_{(D'_G \circ k_R < R) \cap (x_{D'_G \circ k_R} \in G)}} \\ R'^+ &= D'_G \circ k_{R_{(D'_G \circ k_R = R) \cup (D'_G \circ k_R < R;\, x_{D'_G \circ k_R} \notin G)}} \end{aligned} \tag{3.63}$$

est une solution du problème de ^ q.t.a. optimal. On va en effet montrer qu'on peut appliquer le Théorème 3.3.

Si D'_R est défini comme au Théorème 3.3, on a trivialement:

$$D'_R = D'_G \circ k_R \tag{3.64}$$

et donc

$$R'^- \vee R'^+ = D'_R \geqslant D'^+_R. \tag{3.65}$$

On a aussi très simplement:

$$\text{sur } (R'^- \geqslant -\infty),\ R'^- \geqslant D'^-_R$$

$$\text{sur } (R'^+ \geqslant -\infty),\ R'^+ > D'^-_R$$

la dernière inégalité étant stricte parce que, si $D'_G \circ k_R = R$, alors $D'^-_R = \infty^-$, et si $-\infty \leqslant R'^+ < R$, comme $x_{R'^+} \notin G_2$, alors $D'^-_R = \infty^-$.

Il reste à montrer que:

(a) R'^+ est section de A^+. C'est trivial parce que sur $(R'^+ \geqslant -\infty)$, comme $x_{R'^+} \notin G_2$, R'^+ est point d'accumulation à gauche de points du support de la partie continue de M^∞ ou de $(\Delta M^\infty > 0)$ et est donc section de A^+.

(b) R'^- est section de A^-. En effet, sur $(R'^- \geqslant -\infty)$:

(1) si $\Delta M^\infty_{R'^-} > 0$, grâce au Théorème 3.3, on a bien la condition demandée;

(2) si $\Delta M^\infty_{R'^-} = 0$, on a $x_{R'^-} \notin G_2$. De plus, R'^- passe alors par une extrémité droite de l'ensemble aléatoire $S = \{t \in [0, \zeta[;\ x_t \in G\}$. Or l'ensemble $S^\rightarrow$ des extrémités droites de S est mince. De plus par $S^\rightarrow \cap \{t \in [0, \zeta[;\ x_t \notin G_2\}$ il ne passe aucun t.a. En effet, si T passe par $S^\rightarrow$, il passe par $\{t \in [0, \zeta[;\ x_t \in G'_2\}$, donc par $\{t \in [0, \zeta[,\ x_t \in G_2\}$, et ne passe pas par $\{t \in [0, \zeta[;\ x_t \in G_1\}$, car si c'était le cas, il ne serait pas isolé à droite.

Or, comme M et L sont optionnels, l'ensemble mince $H = (\Delta M > 0) \cup (\Delta L > 0)$ est réunion dénombrable de graphes de t.a. disjoints. On en déduit que $H \cap S^\rightarrow \cap \{t \in [0, \zeta[;\ x_t \notin G_2\}$ est évanescent.

Donc, si $\Delta M^\infty_{R'^-} = 0$, alors $\Delta M_{R'^-} = \Delta L_{R'^-} = 0$. Comme $(\Delta M^\infty_{R'^-} = 0)$ est $\hat{\mathfrak{F}}^-_{R'^-}$-mesurable, $U = R'^-_{(\Delta M_{R'^-} = 0)}$ est ^ prévisible. Or, on a:

$$1_{(U > -\infty)} Z_U = {}^{\hat{1}}(M - L)_U. \tag{3.66}$$

Comme U est ^ prévisible, on a:

$${}^{\hat{3}}Z_U = {}^{\hat{3}}(M - L)_U. \tag{3.67}$$

Enfin, comme $\Delta M^\infty_U = \Delta M_U = \Delta L_U = 0$ et comme U est ^ prévisible, on a aussi:

$${}^{\hat{3}}Z_U = Z^+_U \tag{3.68}$$

$${}^{\hat{3}}(M - L)_U = {}^{\hat{1}}(M - L)^+_U. \tag{3.69}$$

De (3.67), (3.68) et (3.69), on déduit bien que, sur $\Delta M^\infty_{R'^-} = 0$, on a $Z^+_{R'^-} = X^+_{R'^-}$. Le théorème est bien démontré. □

3.4(e). *Un résultat sur les fonctions fortement surmédianes.* Si (R^-, R^+) est un $\hat{}$ q.t.a. algébrique (i.e., R^- et R^+ sont des $\hat{}$ t.a. algébriques), la fonction f définie par:

$$f(x) = P_x(R^+ > 0) + P_x(R^- \geqslant 0)$$

est trivialement fortement surmédiane et $\leqslant 1$.

Nous allons montrer qu'inversement, à toute fonction fortement surmédiane $\leqslant 1$, on peut associer de manière adéquate un $\hat{}$ q.t.a.r. Les fonctions surmédianes étendent ainsi les fonctions excessives comme les $\hat{}$ q.t.a.r. étendent les $\hat{}$ t.a.r. Ce résultat nous permet aussi d'interpréter la formule

$$\langle \mu_\infty, f\rangle = \sup_{q \leqslant f}\langle \mu - \lambda, q\rangle, \qquad q \text{ fortement surmédiane}$$

quand f est une fonction excessive. Par retournement du temps, elle s'interprète comme une conséquence de la Proposition 1.2 et du Théorème 1.1.

THEOREME 3.5. *Soit f une fonction fortement surmédiane $\leqslant 1$. Il existe alors deux processus C et D algébriquement $\hat{}$ optionnels, cag et $\hat{}$ croissants, nuls pour $t > \zeta$, tels que*:

C est non nécessairement nul en ζ.

Pour P_m, D est nul en ζ, $\hat{}$ prévisible et ne charge qu'une famille dénombrable de temps $\hat{}$ prévisibles.

C et D peuvent charger $-\infty$.

$C_{-\infty} + D_{-\infty} = 1.$

$f(x_t)$ est la projection optionnelle de $C_t^+ + D_t$ pour la mesure P_m.

PREUVE. Lorsque f est excessive; on peut appliquer la formule exponentielle (déjà utilisée) de [14]. De plus, lorsque f est simplement fortement surmédiane, on sait par [15] que f est la projection optionnelle d'un processus possédant toutes les propriétés précédentes, sauf la propriété essentielle qui est l'adaptation aux tribus retournées.

Par [12], Théorème IV, f est projection optionnelle pour toute mesure P_m de $\tilde{C}_{+\infty} + \tilde{D}_{+\infty} - \tilde{C}_t - \tilde{D}_t$ où $\tilde{C}$ est une fonctionnelle cad, croissante, prévisible et $\hat{}$ optionnelle, et $\tilde{D}$ est une fonctionnelle $\hat{}$ cad, croissante, optionnelle et $\hat{}$ prévisible.

Soient $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ deux processus bornés croissants cag et prévisibles nuls en 0. Soit $\tilde{X}$ la projection $\hat{}$ optionnelle de $\tilde{A} - \tilde{B}$. $\tilde{X}$ est alors prévisible, $\hat{}$ optionnelle et caglad. De plus, si $\tilde{L}$ et $\tilde{M}$ désignent respectivement les compensatrices $\hat{}$ prévisibles de A et B, on sait que, par [1] (page 485), $\tilde{L}$ et $\tilde{M}$ sont des fonctionnelles optionnelles et $\hat{}$ prévisibles.

Soit $\tilde{M}^\infty$ la fonctionnelle associée à $\tilde{M}$ et $\tilde{L}$ par 3.4. On pose alors:

$$\langle \tilde{\mu}, \tilde{X}\rangle = E_m\left(\textstyle\int_0^\zeta \tilde{X}_t\, d\tilde{C}_t + \int_0^\zeta \tilde{X}_t^+\, d\tilde{D}_t\right). \tag{3.70}$$

Si $\tilde{Z} = {}^{\hat{1}}\tilde{M}^\infty$, on a:

$$\langle \tilde{\mu}, \tilde{X}\rangle \leqslant \langle \tilde{\mu}, \tilde{Z}\rangle = E_m\left(\textstyle\int_0^\zeta \tilde{Z}_t\, d\tilde{C}_t + \int_0^\zeta \tilde{Z}_t^+\, d\tilde{D}_t\right). \tag{3.71}$$

Enfin, comme $\tilde{D}$ est ^ prévisible, on a, en intégrant par parties:

(3.72) $$\langle \tilde{\mu}, \tilde{Z} \rangle = E_m \int_0^\zeta (\tilde{C}_{+\infty} + \tilde{D}_{+\infty} - \tilde{C}_t - \tilde{D}_t)\, d\tilde{M}_t^\infty.$$

Comme $\tilde{M}^\infty$ est optionnelle, on a:

(3.73) $$\langle \tilde{\mu}, \tilde{Z} \rangle = E_m \int_0^\zeta f(x_t)\, d\tilde{M}_t^\infty.$$

En rassemblant (3.71) et (3.73), comme $f \leqslant 1$, il vient:

(3.74) $$\langle \tilde{\mu}, \tilde{X} \rangle \leqslant E_m(\tilde{Z}_\zeta).$$

On définit alors V, V', K' comme en 1.2, mais ici relativement aux *tribus retournées*. (3.74) peut s'écrire

(3.75) $$\langle \tilde{\mu}, \tilde{X} \rangle \leqslant \sup_{\mu' \in K'} \langle \mu', \tilde{X} \rangle.$$

Par le théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger la forme définie $\tilde{\mu}$ sur le sous-espace des $\tilde{X}$ de la forme $\hat{1}(A - B)$ en une forme linéaire notée encore $\tilde{\mu}$ sur V, vérifiant (3.75), pour tout $\tilde{X}$ de V. (3.75) montre alors que $\tilde{\mu}$ est dans K'.

Par la Définition 1.3, il existe donc C et D vérifiant les hypothèses données au théorème, tels que, pour $X \in V$, on ait

(3.76) $$\langle \tilde{\mu}, \tilde{X} \rangle = E_m\left(\int_\zeta^{-\infty} X_t\, dC_t + \int_\zeta^{-\infty} X_t^+\, dD_t\right).$$

Soit alors T un t.a.—pour les tribus naturelles—à valeurs dans $[0, +\infty]$, $\tilde{A}$ le processus prévisible borné croissant cag $1_{]T,\zeta]}$ et $\tilde{X}$ sa projection ^ optionnelle. Trivialement $\tilde{X}^+$ est la projection ^ prévisible de $\tilde{A}^+$. On a donc:

(3.77) $$\langle \tilde{\mu}, \tilde{X} \rangle = E_m(1_{T<\zeta}(C_T^+ + D_T)).$$

Or, par (3.70), on a aussi:

(3.78) $$\langle \tilde{\mu}, \tilde{X} \rangle = E_m(1_{T<\zeta}(\tilde{C}_\zeta + \tilde{D}_\zeta - \tilde{C}_T - \tilde{D}_T)).$$

De (3.77) et (3.78), on tire que $C_t^+ + D_t$ et $\tilde{C}_\zeta + \tilde{D}_\zeta - \tilde{C}_t - \tilde{D}_t$ ont même projection optionnelle $f(x_t)$. □

4. Un jeu sur q.t.a. Dans [3], on a considéré un jeu du type:

(4.1) $$\min_{T' \in \mathcal{C}} \max_{T \in \mathcal{C}} E_x(1_{T \leqslant T'} g(x_T) + 1_{T' < T} g'(x_{T'})),$$

sur des diffusions et des diffusions à sauts homogènes ou non. On a démontré dans [3] que, sous des hypothèses restrictives, le jeu a une solution et on a caractérisé certaines solutions du jeu.

Nous allons étendre les résultats précédents à tous les processus droits, en montrant que ces jeux ont une solution, à condition que l'on joue sur des q.t.a. et non plus seulement sur des t.a. Les hypothèses faites dans [3] nous permettaient en fait de montrer que le jeu avait pour solution de vrais t.a. De plus les résultats s'étendent trivialement dans le cadre de la théorie générale des processus. Pour des applications, nous renvoyons à [6].

x est un processus droit vérifiant les mêmes hypothèses qu'en 2.3.

g et g' désignent deux fonctions bornées presque-boréliennes, telles que $g(x_t)$ et $g'(x_t)$ soient p.s. cad lag, que $g(\delta) = g'(\delta) = 0$ et qu'il existe $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ excessives bornées telles que $g \leqslant \tilde{f} - \tilde{f}' \leqslant g'$. Cette hypothèse, suggérée par Mokobodzki, est bien vérifiée dans [3] (voir Remarque 2.3 dans [3]).

Soient $T = (T^-, T^+)$ et $T' = (T'^-, T'^+)$ deux q.t.a.

On considère le critère:

$$F_x(T, T') = E_x(1_{T \leqslant T'} g(x_T) + 1_{T' < T} g'(x_{T'})) \tag{4.2}$$

avec les conventions:

$$\begin{aligned} & s \leqslant t \Rightarrow s^+ \leqslant t^+, s^- \leqslant t^-, s^- < t^+ \\ & s < t \Rightarrow s^+ < t^+, s^+ < t^-, s^- < t^- \\ & h(x_{t^+}) = h(x_t) \\ & h(x_{t^-}) = h(x_t)_- \end{aligned} \tag{4.3}$$

et on cherche une solution du jeu à somme nulle associé à (4.2) où on minimise $F_x(T, T')$ en T' et où on maximise $F_x(T, T')$ en T.

Soit f_0 la plus petite fonction excessive majorant g. Comme $g(\delta) = 0$, f_0 est $\geqslant 0$.

Soit f_0' la plus petite fonction excessive majorant $-g'$. f_0' est encore $\geqslant 0$. Alors, f_0 est $\leqslant \tilde{f}$ et f_0' est $\leqslant \tilde{f}'$.

Par récurrence, soit f_{i+1} et f_{i+1}' les plus petites fonctions excessives majorant respectivement $f_i' + g$ et $f_i - g'$.

THEOREME 4.1. *La suite (f_i, f_i') est croissante, bornée et converge vers un couple de fonctions excessives bornées (f, f'). f est la plus petite fonction excessive $\geqslant f' + g$ et f' la plus petite fonction excessive $\geqslant f - g'$.*

PREUVE. Par récurrence, on voit que la suite (f_i, f_i') est croissante. Montrons par récurrence que $f_i \leqslant \tilde{f}$, $f_i' \leqslant \tilde{f}'$. Supposons ces relations vraies à l'ordre n. Alors $f_n' + g \leqslant \tilde{f}' + g \leqslant \tilde{f}$ et donc $f_{n+1} \leqslant \tilde{f}$. De même, on montre que $f_{n+1}' \leqslant \tilde{f}$. La suite de fonctions (f_i, f_i') converge donc vers le couple de fonctions excessives, bornées (f, f'). Si f^* est la plus petite fonction excessive $\geqslant f' + g$, comme $f^* \geqslant f_i' + g$, alors $f^* \geqslant f_i$ donc $f^* \geqslant f$. Or comme $f \geqslant f' + g$, on a $f = f^*$. On démontrera le résultat correspondant pour f'. ▯

On pose:

$$q = f - f'. \tag{4.4}$$

On a:

$$g \leqslant q \leqslant g'. \tag{4.5}$$

On va montrer que $q(x)$ est la valeur du jeu (4.2). On pose:

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \inf\{t \geqslant 0; q(x_t) = g(x_t)\} \wedge \{\inf t > 0; q(x_t)_- = g(x_t)_-\} \\ D^- &= \tilde{D}_{(\tilde{D} > 0) \cap (q(x_{\tilde{D}})_- = g(x_{\tilde{D}})_-)} \\ D^+ &= \tilde{D}_{(\tilde{D} = 0) \cup (D > 0;\, q(x_{\tilde{D}})_- \neq g(x_{\tilde{D}}))} \\ \tilde{D}' &= \inf\{t \geqslant 0; q(x_t) = g'(x_t)\} \wedge \{\inf t > 0; q(x_t)_- = g'(x_t)_-\} \\ D'^- &= \tilde{D}'_{(\tilde{D}' > 0) \cap (q(x_{\tilde{D}'})_- = g'(x_{\tilde{D}'})_-)} \\ D'^+ &= \tilde{D}'_{(\tilde{D}' = 0) \cup (\tilde{D}' > 0;\, q(x_{\tilde{D}'})_- \neq g'(x_{\tilde{D}'})_-)} \\ D &= (D^-, D^+) \\ D' &= (D'^-, D'^+). \end{aligned} \tag{4.6}$$

THEOREME 4.2. *(D, D') est une solution du jeu* (4.2). *De plus*

$$q(x) = \inf_{T' \in \mathcal{C}'} \sup_{T \in \mathcal{C}} F_x(T, T') = \sup_{T \in \mathcal{C}} \inf_{T' \in \mathcal{C}'} F_x(T, T'). \tag{4.7}$$

PREUVE. Par le Théorème 2.1, on a, avec les conventions (3.3):

$$f(x) = E_x f(x_D) \qquad f'(x) = E_x f'(x_D'). \tag{4.8}$$

Donc (ce n'est pas tout à fait évident vu qu'il s'agit de q.t.a.):

$$q(x) = E_x q(x_{D \wedge D'}). \tag{4.9}$$

On en déduit:

$$q(x) = E_x(1_{D \leqslant D'} g(x_D) + 1_{D' < D} g'(x_{D'})) = E_x(1_{D < D'} g(x_D) + 1_{D' \leqslant D} g'(x_{D'})) \tag{4.10}$$

la dernière égalité provenant du fait que, si $D = D'$, $q(x_D) = g(x_D) = g'(x_D)$.

Soit $T = (T^-, T^+)$ un q.t.a. Alors nécessairement:

$$f(x) \geqslant E_x f(x_{T \wedge D'}) \qquad f'(x) = E_x f'(x_{T \wedge D'}). \tag{4.11}$$

Donc, comme $g \leqslant q$ et comme $g'(x_{D'}) = q'(x_{D'})$, on a:

$$F_x(T, D') \leqslant E_x(1_{T \leqslant D'} q(x_T) + 1_{D' < T} q(x_{D'})) = E_x q(x_{T \wedge D'}) \tag{4.12}$$

et, grâce à (4.10) et (4.11), il vient:

$$F_x(T, D') \leqslant q(x) = F_x(D, D'). \tag{4.13}$$

De même si $T' = (T'^-, T'^+)$ est un q.t.a., on aura

$$q(x) = F_x(D, D') \leqslant F_x(D, T'). \tag{4.14}$$

De (4.13) et (4.14), on déduit bien que (D, D') est une solution du jeu et que $q(x)$ est sa valeur. ▯

COROLLAIRE. *Si $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ sont deux fonctions excessives bornées telles que $\tilde{f}$ est* (resp. $\tilde{f}'$) *est l'*inf. *des fonctions excessives* $\geqslant \tilde{f}' + g$ (resp. $\tilde{f} - g'$), *alors* $q = \tilde{f} - \tilde{f}'$.

PREUVE. L'égalité de $\tilde{f} - \tilde{f}'$ aux membres de droite de (4.7) est immédiate par la démonstration du Théorème 4.2. ▯

On sait que les fonctions définies au Théorème 4.2, ne dépendent pas de la position du signe $\leqslant$ dans (4.2).

On va établir que le changement de position du signe ne modifie pas ces fonctions lorsqu'on remplace les q.t.a. par des t.a.

On pose en effet, avec les conventions (4.3):

$$F'_x(T, T') = E_x(1_{T < T'} g(x_T) + 1_{T' \leqslant T} g'(x_{T'})). \tag{4.15}$$

On a alors:

PROPOSITION 4.1.

$$\begin{aligned} \sup_{T \in \mathcal{C}} \inf_{T' \in \mathcal{C}} F_x(T, T') &= \sup_{T \in \mathcal{C}} \inf_{T' \in \mathcal{C}} F'_x(T, T') \\ \inf_{T' \in \mathcal{C}} \sup_{T \in \mathcal{C}} F_x(T, T') &= \inf_{T' \in \mathcal{C}} \sup_{T \in \mathcal{C}} F'_x(T\ T'). \end{aligned} \tag{4.16}$$

PREUVE. Démontrons par exemple la seconde relation.

Si $T' \in \mathcal{C}$, il suffit de montrer:

(4.17) $$\sup_{T \in \mathcal{C}} F_x(T, T') = \sup_{T \in \mathcal{C}} F'_x(T, T').$$

Comme $g \leqslant g'$, on a:

(4.18) $$F_x(T, T') \leqslant F'_x(T, T').$$

Soit alors $T \in \mathcal{C}$ et T_n le t.a. défini par

(4.19) $$\begin{aligned} T_n &= T \quad \text{si} \quad T < T' \\ &= T + \frac{1}{n} \quad \text{si} \quad T \geqslant T'. \end{aligned}$$

Alors: soit $T_n < T'$; soit $T_n > T'$; soit $T_n = T'$ et alors $T_n = T = T' = +\infty$. Comme $g(x_{+\infty}) = g'(x_{+\infty}) = 0$, on a donc:

(4.20) $$F_x(T_n, T') = F'_x(T_n, T').$$

De plus:

(4.21) $$F'_x(T_n, T') \to F'_x(T, T').$$

De (4.18), (4.20) et (4.21), on déduit bien (4.16). □

On a enfin:

PROPOSITION 4.2.

(4.22) $$\sup_{T \in \mathcal{C}} \inf_{T' \in \mathcal{C}} F_x(T, T') \leqslant q(x) \leqslant \inf_{T' \in \mathcal{C}} \sup_{T \in \mathcal{C}} F_x(T, T').$$

PREUVE. Soit $T \in \mathcal{C}$. Alors le processus

(4.23) $$X_t = 1_{t<T} g'(x_t) + 1_{t \geqslant T} g(x_T)$$

vérifie les hypothèses de I.

Par la Proposition 1.1, on déduit

(4.24) $$\inf_{T' \in \mathcal{C}'} F_x(T, T') = \inf_{T' \in \mathcal{C}} F_x(T, T').$$

Donc:

(4.25) $$q(x) = \sup_{T \in \mathcal{C}'} \inf_{T' \in \mathcal{C}'} F_x(T, T') \geqslant \sup_{T \in \mathcal{C}} \inf_{T' \in \mathcal{C}} F_x(T, T').$$

Par la Proposition 4.1, on sait que:

(4.26) $$\inf_{T' \in \mathcal{C}} \sup_{T \in \mathcal{C}} F_x(T, T') = \inf_{T' \in \mathcal{C}} \sup_{T \in \mathcal{C}} F'_x(T, T').$$

Alors, si $T' \in \mathcal{C}$, le processus

(4.27) $$Y_t = 1_{t<T'} g(x_t) + 1_{t \geqslant T'} g'(x_{T'})$$

vérifie les hypothèses de la partie I.

Donc, par la Proposition 1.1., on a:

(4.28) $$\sup_{T \in \mathcal{C}} F'_x(T, T') = \sup_{T' \in \mathcal{C}'} F'_x(T, T')$$

et donc

(4.29) $$\inf_{T' \in \mathcal{C}} \sup_{T \in \mathcal{C}} F'_x(T, T') \geqslant q(x) = \inf_{T' \in \mathcal{C}'} \sup_{T \in \mathcal{C}'} F'_x(T, T').$$

Remerciements. L'auteur remercie un rapporteur anonyme pour les nombreux commentaires et suggestions relatives à cet article.

REFERENCES

[1] AZEMA, J. (1973). Théorie générale des processus et retournement du temps. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **6** 459–519.

[2] AZEMA, J. ET MEYER, P. A. (1974). Une nouvelle représentation du type du Skorokhod. Séminaire de Probabilités VIII. *Lecture Notes in Math.* **381** 1–10. Springer, Berlin.

[3] BISMUT, J. M. (1977). Sur un problème de Dynkin. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **39** 31–53.

[4] BISMUT, J. M. (1977). Temps d'arrêt optimal et quasi-temps d'arrêt. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **284** 1519–1521.

[5] BISMUT, J. M. (1977). Temps d'arrêt optimal et retournement du temps. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **285** 71–72.

[6] BISMUT, J. M. (1979). Contrôle des processus alternants et applications. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **47** 241–288.

[7] BISMUT, J. M. ET SKALLI, B. (1977). Temps d'arrêt optimal, théorie générale des processus et processus de Markov. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **39** 301–313.

[8] DELLACHERIE, C. (1972). *Capacités et processus stochastiques*. Ergebnisse der Mathematik. Springer, Berlin.

[9] DELLACHERIE, C. ET MEYER, P. A. (1975). *Probabilités et potentiels*, 2nd ed. Hermann, Paris.

[10] MAINGUENEAU, M. A. (1978). Théorie générale des processus et problèmes d'optimalité. Séminaire de Probabilités XII. *Lecture Notes in Mathematics* **649** 457–467.

[11] MERTENS, J. F. (1972). Processus stochastiques généraux et surmartingales. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **22** 45–68.

[12] MERTENS, J. F. (1973). Strongly super median functions and optimal stopping. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **26** 119–139.

[13] MEYER, P. A. (1972). Le schéma de remplissage en temps continu, d'après H. Rost. Séminaire de Probabilités VI. *Lecture Notes in Mathematics* **258** 130–150. Springer, Berlin.

[14] MEYER, P. A. (1974). Une représentation de surmartingales. Séminaire de Probabilités VIII. *Lecture Notes in Mathematics* **381** 310–315.

[15] MEYER, P. A. (1976). Intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X. *Lecture Notes in Mathematics* **511** 245–400. Springer, Berlin.

[16] ROST, H. (1971). The stopping distributions of a Markov process. *Invent. Math.* **14** 1–16.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
BÂTIMENT 425
91405 ORSAY
FRANCE