The Annals of Probability
1990, Vol. 18, No. 1, 140–159

LOI FONCTIONNELLE DU LOGARITHME ITERE POUR LES PROCESSUS DE MARKOV RECURRENTS

PAR ABDERRAHMEN TOUATI

Université de Paris-Sud

Let X be a Harris recurrent Markov process (in discrete or continuous time). We give a functional law of the iterated logarithm for the additive functionals of X which are (close to) square integrable martingales with respect to the invariant measure of X. The proof is based on the Skorokhod embedding technique and the construction of an atom for a Harris chain. In contrast with the positive recurrent case, "the suitable normalizations" are random in the null recurrent case. Moreover it is shown from two examples how to use the law of the iterated logarithm to get the rate of almost sure convergence of an estimator.

1. Introduction. Ce travail complète les résultats de convergence en loi que nous avons obtenu dans [18] pour des fonctionnelles additives de processus de Markov récurrents au sens de Harris. Il a pour but de généraliser la loi du logarithme itéré de Strassen [16] aux fonctionnelles additives martingales (F.A.M.) de tels processus.

L'approche est basée sur une extension facile du principe d'invariance de Strassen aux variables aléatoires indépendantes équidistribuées avec renouvellement et l'utilisation des chaînes atomiques comme dans [18].

Le plan de l'article est le suivant: la fin de ce paragraphe est consacrée aux données, rappels et notations. Au paragraphe 2 on généralise le principe d'invariance de Strassen aux variables i.i.d. avec renouvellement. L'application de ce principe d'invariance aux F.A.M. de processus Markov est réalisée aux paragraphes 3 et 4. Enfin le paragraphe 5 est consacré à quelques exemples d'application.

Notations. On désignera par $\mathscr{C}[0,1]$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence uniforme.

Pour simplifier les écritures on utilisera les notations suivantes:

1. $U_n \to_{n\to\infty} U$ $\mathbb{P}$ p.s. pour la convergence presque sûre sous la loi $\mathbb{P}$.
2. $\mathbb{1}_\Gamma$ indicateur de Γ.
3. $[u]$ partie entière du réel u.
4. δ_x masse de Dirac en x.

Enfin l'abbréviation v.a. (r.) signifiera variable aléatoire (réelle).

Received October 1987; revised August 1988.

AMS 1980 *subject classifications*. Primary 60F15, 60J55.

Key words and phrases. Processus de Markov, chaîne atomique, fonctionnelle additive, loi du logarithme itéré.

Données–Rappels. La donnée fondamentale est un processus de Markov homogène $X = \{\Omega, \mathscr{F}, (\mathbb{P}_x;\ x \in E), \mathbb{F} = (\mathscr{F}_t;\ t \in \mathbb{T}), (X_t;\ t \in \mathbb{T})\}$ indexé par $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ (cas discret) ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ (cas continu), à valeurs dans l'espace mesurable $(E, \mathscr{E})$. $\mathbb{F}$ désigne sa filtration naturelle et $\mathbb{P}_x$ sa loi partant de x.

Dans le cas continu on suppose que:

1. $(E, \mathscr{E})$ est un espace localement compact à base dénombrable muni de sa tribu borélienne.
2. $\mathbb{F}$ est convenablement complétée et rendue continue à droite.
3. X est continu à droite et fortement markovien.

On note $(R_\lambda;\ \lambda > 0)$ la résolvante de X:

$$R_\lambda(x, \Gamma) = \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{1}_\Gamma \circ X_t \, dt\right), \qquad x \in \mathbb{E},\ \Gamma \in \mathscr{E}.$$

Dans le cas discret on suppose (sauf dans la partie 3.1) que la tribu $\mathscr{E}$ est dénombrablement engendrée. On note Π la probabilité de transition de la chaîne X.

On suppose toujours que dans le cas continu (resp., discret) il existe une mesure positive σ-finie, μ sur $(E, \mathscr{E})$ invariante par R_1 (resp., Π) et telle que pour tout $\Gamma \in \mathscr{E}$ chargé par μ on ait:

$$\mathbb{P}_x\left\{\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_\Gamma \circ X_s \, ds = +\infty\right\} = 1, \qquad \left[\text{resp., } \mathbb{P}_x\left\{\sum_0^{\infty} \mathbb{1}_\Gamma \circ X_n = +\infty\right\} = 1\right],$$

pour tout $x \in E$. (Récurrence au sens de Harris de X.)

Le processus est dit récurrent positif (resp., nul) suivant que $\mu(E) < +\infty$ [resp., $\mu(E) = +\infty$].

Rappelons qu'une fonctionnelle additive (F.A.) $A = (A_t,\ t \in \mathbb{T})$ de X est un processus $\mathbb{F}$-adapté nul en 0, càd-làg dans le cas continu, tel que pour toute loi initiale ν sur $(E, \mathscr{E})$ et pour tous s, t de $\mathbb{T}$: $A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t$ $\mathbb{P}_\nu$ p.s. [θ_t, $t \in \mathbb{T}$, étant les opérateurs de translation sur $(\Omega, \mathscr{F})$].

Une F.A.M. $M = (M_t;\ t \in \mathbb{T})$ de X est une F.A. telle que pour toute loi initiale ν, M soit une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}_\nu)$ martingale c'est-à-dire: $\mathbb{E}_x(M_t) = 0$ pour tous $t \in \mathbb{T}$, $x \in E$.

2. Loi du logarithme itéré pour des v.a. i.i.d. avec renouvellement. Dans ce paragraphe $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité fixé une fois pour toutes, sur lequel on suppose donnés:

1. Une suite $(\xi_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ de v.a. i.i.d., telle que

$$\mathbb{E}(\xi_1) = 0, \qquad \mathbb{E}(\xi_1^2) = \sigma^2, \qquad \sigma > 0.$$

2. Un processus croissant $(N_t,\ t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Une suite croissante $(V_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ de v.a. positives.

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$:

(2.1) $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n \; (S_0 = 0), \qquad S_n^* = S_{N_n}, \qquad \xi_n^* = S_n^* - S_{n-1}^*.$

(2.2) $\varphi(\lambda) = (2\lambda \log\log \lambda)^{+1/2}$ si $\lambda \geq e^e$ et $\varphi(\lambda) = 1$ si $0 < \lambda < e^e$

et considérons les processus $(\psi_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ de $\mathscr{C}([0,1])$ définis par:

(2.3) $$\psi_n(t) = (\varphi \circ V_n)^{-1}\{S_i^* + (V_{i+1} - V_i)^{-1}(tV_n - V_i)\xi_{i+1}^*\}$$

lorsque $V_i \leq tV_n < V_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$. On a le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Supposons que le processus* $(N_t,\ t \geq 0)$ *et la suite* $(V_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ *vérifient les hypothèses suivantes*:

$$N_t \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty, \qquad \frac{V_n}{V_{n+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1, \qquad \frac{V_n}{N_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \sigma^2 \quad \mathbb{P}\ p.s.$$

(i) *La suite* $(\psi_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ *vérifie la propriété L.L.I. ce qui signifie que*: $\mathbb{P}$ *presque sûrement cette suite est relativement compacte dans l'espace* $\mathscr{C}([0,1])$ *et l'ensemble de ses valeurs d'adhérence pour la convergence* $\mathbb{P}$ *presque-sûre, coïncide avec le compact K de* $\mathscr{C}([0,1])$ *défini par*:

(2.4) $$K = \left\{x \in \mathscr{C}([0,1]),\ x_0 = 0,\ x \text{ absolument continu},\ \int_0^1 \left(\frac{dx_s}{ds}\right)^2 ds \leq 1\right\}.$$

(ii) *En outre pour toute suite de v.a.* $(M_n,\ n \in N^*)$ *telle que*:

$$(\varphi \circ V_n)^{-1} \max_{i \leq n} |M_i - S_i^*| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \mathbb{P}\ p.s.$$

les processus $(\Lambda_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ *de* $\mathscr{C}([0,1])$ *définis par*:

(2.5) $\Lambda_n(t) = (\varphi \circ V_n)^{-1}\{M_i + (V_{i+1} - V_i)^{-1}(tV_n - V_i)(M_{i+1} - M_i)\}$

lorsque $V_i \leq tV_n < V_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$, *vérifient aussi la propriété L.L.I.*

DÉMONSTRATION. Elle est basée sur le lemme suivant dû à Hall et Heyde ([7], page 118):

LEMME ([7]). *Soient* $(B_t,\ t \geq 0)$, $(T_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$, $(V_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ *respectivement un mouvement brownien réel standard et deux suites croissantes de v.a. positives définis sur un même espace de probabilité* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. *Posons* $S_n^* = B_{T_n}$, $\xi_n^* = S_n^* - S_{n-1}^*$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et considérons les processus* $(\psi_n;\ n \in \mathbb{N}^*)$ *de* $\mathscr{C}([0,1])$ *définis par*

$$\psi_n(t) = (\varphi \circ V_n)^{-1}\{S_i^* + (V_{i+1} - V_i)^{-1}(tV_n - V_i)\xi_{i+1}^*\}$$

lorsque $V_i \leq tV_n < V_{i+1}$ *et* $i = 0, \ldots, n-1$.

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées:

$$T_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty, \qquad \frac{T_n}{T_{n+1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1, \qquad \frac{V_n}{T_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \quad \mathbb{P}\ p.s.;$$

alors la suite $(\psi_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ *vérifie la propriété L.L.I.*

En effet d'après le théorème de représentation de Skorokhod on peut supposer qu'il existe un espace de probabilité [noté encore $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$] sur lequel les familles de v.a. $(\xi_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$, $(V_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ et $(N_t,\ t \geq 0)$ sont définies simultanément avec un mouvement brownien réel standard $(B_t;\ t \geq 0)$, indépendant de ces trois familles et tel que: $S_n = B_{R_n}$, où $(R_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $\mathbb{E}(R_1) = \sigma^2$. Posant alors $T_n = R_{N_n}$, on a $S_n^* = B_{T_n}$.

Le lemme s'applique alors et la suite $(\psi_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ définie par (2.3) vérifie la propriété L.L.I. La deuxième partie du théorème s'obtient en remarquant que:

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |\psi_n(t) - \Lambda_n(t)| \leq 3(\varphi \circ V_n)^{-1} \max_{i \leq n} |M_i - S_i^*| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

Conséquences. (a) En prenant $N_t = [t]$ et $V_n = \sigma^2 n$ on retrouve le principe d'invariance de Strassen [16]: la suite des processus

$$\left((\sigma^2 \varphi(n))^{-1} \{ S_{[nt]} + (nt - [nt]) \xi_{[nt]+1} \} ;\ 0 \leq t \leq 1 \right)$$

vérifie la propriété L.L.I. (Ici on utilise le fait que la fonction φ est à variations régulières d'ordre $\frac{1}{2}$ en $+\infty$.)

(b) $$\limsup_{n \to +\infty} (\varphi \circ N_n)^{-1} S_{N_n} = - \liminf_{n \to \infty} (\varphi \circ N_n)^{-1} S_{N_n} = \sigma.$$

Cela résulte du fait que la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$ appartient à K et est sa borne supérieure et de $V_n / N_n \to_{n \to +\infty} \sigma^2$ $\mathbb{P}$ p.s. (cf. [7]).

3. Loi du logarithme itéré pour des F.A.M. de processus de Markov.

3.1. *Cas des chaînes ayant un point récurrent.* Dans ce paragraphe, on suppose que la chaîne de Markov $X = \{\Omega, \mathscr{F}, (\mathbb{P}_x;\ x \in E), (X_n,\ n \in \mathbb{N})\}$ admet un état récurrent $a \in E$, tel que $\mathbb{P}_x(\limsup_n \{X_n = a\}) = 1$, pour tout $x \in E$. Soit $T = T_a$ le temps de retour de X en a, $T_a = \inf\{n > 0;\ X_n = a\}$ et $(T_n,\ n \geq 0)$ la suite des itétés de T $(T_0 = 0,\ T_1 = T)$.

La mesure invariante μ de la chaîne X est donnée par: $\mu(\Gamma) = \mathbb{E}_a(\sum_0^{T-1} \mathbb{1}_\Gamma \circ X_k)$; $\Gamma \in \mathscr{E}$ et on a $\|\mu\| = \mu(E) = \mathbb{E}_a(T) \leq +\infty$. L'état a est récurrent positif (resp., nul) suivant que $\mathbb{E}_a(T) < +\infty$ [resp., $\mathbb{E}_a(T) = +\infty$].

Soit maintenant $M = (M_n,\ n \in \mathbb{N})$ une F.A.M. de X de carré intégrable sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in E$ [i.e., $\mathbb{E}_x(M_n^2) < \infty$ pour tours $x \in E$, $n \in \mathbb{N}^*$] et telle que $0 < \sigma_M^2 = \mathbb{E}_\mu(M_1^2) < \infty$. Soit $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ la F.A. croissante prévisible associée à M. Alors pour tout $x \in E$, le processus: $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_x;\ (M_{T_n} - M_T,\ \langle M \rangle_{T_n} - \langle M \rangle_T,\ T_n - T;\ n \geq 2)\}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^*$ associée à la loi de $(M_T, \langle M \rangle_T, T)$ sous $\mathbb{P}_a$,

$$\mathbb{E}_a(M_T) = 0, \qquad \mathbb{E}_a(M_T^2) = \mathbb{E}_a(\langle M \rangle_T) = \mathbb{E}_\mu(M_1^2) = \sigma_M^2.$$

Posons pour $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$N_t = \inf\{n \geq 0,\ T_{n+1} > t\}, \qquad S_n = M_{T_n}, \qquad S_n^* = S_{N_n}, \qquad \xi_n^* = S_n^* - S_{n-1}^*,$$

et considérons pour toute suite croissante $(V_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ de v.a. positives sur

$(\Omega, \mathscr{F})$ les processus $(\psi_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ et $(\Lambda_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ de $\mathscr{C}([0,1])$:

$$\psi_n(t) = (\varphi \circ V_n)^{-1}\{S_i^* + (V_{i+1} - V_i)^{-1}(tV_n - V_i)\xi_{i+1}^*\}, \tag{3.1}$$

$$\Lambda_n(t) = (\varphi \circ V_n)^{-1}\{M_i + (V_{i+1} - V_i)^{-1}(tV_n - V_i)(M_{i+1} - M_i)\} \tag{3.2}$$

lorsque $V_i \le tV_n < V_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$.

THÉORÈME 2. *Si la suite* $(V_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ *vérifie* $\langle M \rangle_n / V_n \to_{n\to\infty} 1$ $\mathbb{P}_x$ *p.s. pour tout* $x \in E$, *alors les suites* $(\psi_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ *et* $(\Lambda_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ *définies par* (3.1) *et* (3.2) *vérifient la propriété L.L.I. sous* $\mathbb{P}_x$ *pour tout* $x \in E$.

COROLLAIRE 1. *Pour tout* $x \in E$, *on a*

$$\limsup_n (\varphi \circ V_n)^{-1} M_n = -\liminf_n (\varphi \circ V_n)^{-1} M_n = 1 \quad \mathbb{P}_x \ p.s. \tag{3.3}$$

COROLLAIRE 2. *Si l'état a est récurrent positif, alors les processus* $(\Gamma_n,$ $n \in \mathbb{N}^*)$ *de* $\mathscr{C}([0,1])$ *définis par*

$$\Gamma_n(t) = \left(\|\mu\|^{-1/2}\sigma_M \varphi(n)\right)^{-1}\{M_{[nt]} + (nt - [nt])(M_{[nt]+1} - M_{[nt]})\} \tag{3.4}$$

$[\|\mu\| = \mathbb{E}_a(T)]$ *vérifient la propriété L.L.I. sous* $\mathbb{P}_x$ *pour tout* $x \in E$. *En particulier*:

$$\limsup_n \frac{M_n}{\varphi(n)} = -\liminf_n \frac{M_n}{\varphi(n)} = \|\mu\|^{-1/2}\sigma_M \quad \mathbb{P}_x \ p.s.$$

pour tout $x \in E$.

DÉMONSTRATIONS. (a) On a

$$\frac{\langle M \rangle_{T_n}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma_M^2 \qquad \mathbb{P}_x \text{ p.s. pour tout } x \in E.$$

D'où l'on déduit facilement:

$$\frac{\langle M \rangle_{T_{N_n}}}{N_n},\ \frac{\langle M \rangle_n}{N_n} \text{ et } \frac{\langle M \rangle_n}{N_n} \text{ tendent p.s. vers } \sigma_M^2. \tag{3.5}$$

(b) Soit f une fonction positive, bornée, μ intégrable, $\int f\,d\mu > 0$ et $A_n^f = \sum_0^n f \circ X_k$. On a $(A_{n+1}^f - A_n^f)/A_n^f \le \|f\|/A_n^f \to_{n\to\infty} 0$ $\mathbb{P}_x$ p.s. pour tout $x \in E$ $[\|f\| = \sup_{x\in E} f(x)]$, ce qui signifie que $A_{n+1}^f/A_n^f \to_{n\to\infty} 1$ $\mathbb{P}_x$ p.s. Or d'après le théorème ergodique quotient on a $\langle M \rangle_n / A_n^f \to_{n\to\infty} \sigma_M^2/\mu(f)$ $\mathbb{P}_x$ p.s. pour tout $x \in E$ $[\mu(f) = \int f\,d\mu]$. D'où:

$$\frac{\langle M \rangle_n}{\langle M \rangle_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{V_n}{V_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \mathbb{P}_x \text{ p.s. pour tout } x \in E. \tag{3.6}$$

Vu (3.5) et (3.6) la première partie du théorème 1 montre que la suite $(\psi_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ vérifient la propriété L.L.I. sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in E$.

(c) Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$Y_p = \max_{T_p \le n \le T_{p+1}} |M_n - M_{T_p}| = \max_{0 \le n \le T_{p+1} - T_p} |M_{n+T_p} - M_{T_p}|.$$

La suite $(Y_p,\ p \in \mathbb{N})$ est, sous $\mathbb{P}_x$, indépendante et équidistribuée suivant la loi de Y_0 sous $\mathbb{P}_a$ et l'inégalité de Doob donne:

$$\mathbb{E}_a\left(Y_0^2\right) = \mathbb{E}_a\left(\left(\max_{0 \le n \le T} |M_n|\right)^2\right) \le 4\mathbb{E}_a\left(M_T^2\right) = 4\sigma_M^2 < \infty.$$

Or si $(Z_p,\ p \in \mathbb{N})$ est une suite de v.a. positives intégrables et de même loi on a $(1/n)\max_{p \le n} Z_p \to_{n \to \infty} 0$ p.s. D'où: $(1/\sqrt{n})\max_{p \le n} Y_p \to_{n \to \infty} 0$ et $N_n^{-1/2} \max_{p \le N_n} Y_p \to_{n \to \infty} 0$ $\mathbb{P}_x$ p.s. Compte tenu des inégalités évidentes suivantes: $|M_i - S_i^*| \le Y_{N_i} \le \max_{p \le N_n} Y_p$ pour $i \le n$ et de (3.5), on a

$$(3.7) \qquad (\varphi \circ V_n)^{-1} \max_{i \le n} |M_i - S_i^*| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \mathbb{P}_x \text{ p.s. pour tout } x \in E.$$

La deuxième partie du théorème 1 montre alors que la suite $(\Lambda_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ vérifient la propriété L.L.I. sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in E$.

(d) Le corollaire 1 est une conséquence classique du théorème 2 (cf. [7]). Le corollaire 2 s'obtient à partir du théorème 2 et du corollaire 1 en remarquant que lorsque l'état a est récurrent positif on a $\langle M \rangle_n / n \to_{n \to \infty} \|\mu\|^{-1}\sigma_M^2$ $\mathbb{P}_x$ p.s. pour tout $x \in E$; on peut donc prendre $V_n = n\|\mu\|^{-1}\sigma_M^2$, $\sigma_M^2 > 0$. Et puisque φ est à variations régulières d'ordre $\frac{1}{2}$ en $+\infty$ $\varphi(V_n)$ est équivalent à $\|\mu\|^{-1/2}\sigma_M \varphi(n)$ en $+\infty$. □

Remarque 1. Dans l'éconcé du théorème 2 et dans celui de son premier corollaire on peut prendre $V_n = [M_n]$ où $([M_n],\ n \in \mathbb{N})$ est le processus variation quadratique de M car d'après le théorème ergodique quotient on a $\langle M \rangle_n / [M]_n \to_{n \to \infty} 1$ $\mathbb{P}_x$ p.s. pour tout $x \in E$.

Remarque 2. Si M est une F.A.M. de X telle que $0 < \sigma_M^2 = \mathbb{E}_\mu(M_1^2) < \infty$, M est de carré intégrable sous $\mathbb{P}_x$ pour μ-presque tout $x \in E$. Par conséquent si $(V_n,\ n \ge 1)$ est une suite croissante de v.a. positives sur $(\Omega, \mathscr{F})$ telles que $\langle M \rangle_n / V_n \to_{n \to \infty} 1$ $\mathbb{P}_x$ p.s. pour μ-presque tout x, le théorème 2 et ses deux corollaires s'appliquent sous $\mathbb{P}_x$ pour μ-presque tout $x \in E$.

3.2. *Cas des processus récurrents au sens de Harris.* Considérons d'abord le cas discret. La tribu $\mathscr{E}$ est ici supposée dénombrablement engendrée, la probabilité de transition Π de la chaîne X vérifie l'hypothèse de minoration (cf. [11]):

(M) Il existe un entier $k \ge 1$, une fonction mesurable h de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que $0 \le h < 1$ et $\int h\, d\mu > 0$, une mesure de probabilité ν_0 sur $(E, \mathscr{E})$ tels que $\Pi_k \ge h \otimes \nu_0$ à savoir: $\Pi_k(x, \Gamma) \ge h(x)\nu_0(\Gamma)$ pour tous $x \in E$, $\Gamma \in \mathscr{E}$.

Etape 1. On suppose que la chaîne de Markov X vérifie l'hypothèse (M) avec $k = 1$ (i.e., $\Pi \ge h \otimes \nu_0$). On associe à X une chaîne de Markov atomique irréductible $X^* = \{\Omega^*, \mathscr{F}^*, (\mathbb{P}^*_{x^*};\ x^* \in E), (X^*_n;\ n \in N)\}$ d'espace des états $E^* = E \times \{0,1\}$ et d'atome $E_1 = E \times \{1\}$ (cf. [18]) pour les détails et les notations. L'atome joue ici le rôle de l'état récurrent du paragraphe précédent.

Notons: $\mathbb{F}^*$ la filtration naturelle de X^*, Π^* sa probabilité de transition, $T = T_{E_1}$ le temps de retour de X^* dans l'atome E_1: $T = \inf\{n > 0;\ X^*_n \in E_1\}$, (T_n) la suite des itérés de T.

Pour tout $a_1 \in E_1$: $\Gamma^* \mapsto \mu^*(\Gamma^*) = \mathbb{E}^*_{a_1}(\Sigma_1^T \mathbb{1}_{\Gamma^*}(X^*_n))$ est une mesure positive, invariante par Π^* et peut-être considérée comme l'extension de la mesure μ à E^*; $\mathbb{E}^*_{a_1}(T) < +\infty$ ou $\mathbb{E}^*_{a_1}(T) = +\infty$ suivant que la chaîne X est récurrente positive ou nulle, la chaîne X^* est récurrente au sens de Harris pour la mesure μ^*.

Pour toute v.a. Z sur $(\Omega, \mathscr{F})$ soit Z^* la v.a. sur $(\Omega^*, \mathscr{F}^*)$ définie par $Z^*(\omega^*) = Z(\omega)$, quelle que soit la mesure positive ν, sur $(E, \mathscr{E})$, telle que $\mathbb{E}_\nu(Z) < \infty$, on a $\mathbb{E}^*_{\nu^*}(Z^*) = \mathbb{E}_\nu(Z)$ où ν^* est l'extension de ν à E^* (cf. [18]).

Soit M une F.A.M. de X de carré intégrable sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in E$, telle que $0 < \sigma_M^2 = \mathbb{E}_\mu(M_1^2) < \infty$ et $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_n,\ n \in \mathbb{N})$ sa F.A. croissante prévisible associée. Alors M^* est une F.A.M. de X^* de carré intégrable sous $\mathbb{P}_{\delta^*_x}$ pour tout $x \in E$, telle que $\mathbb{E}^*_{\mu^*}(M_1^{*2}) = \sigma_M^2$ et sa F.A. croissante prévisible associée est $\langle M^* \rangle = \langle M \rangle^*$. En plus la loi du couple $(M^*, \langle M^* \rangle)$ sous $\mathbb{P}^*_{\nu^*}$ est celle du couple $(M, \langle M \rangle)$ sous $\mathbb{P}_\nu$ pour toute loi initiale ν sur $(E, \mathscr{E})$ et $\{\Omega^*, \mathscr{F}^*, \mathbb{P}^*_{\nu^*};\ (M^*_{T_n} - M^*_T, \langle M^* \rangle_{T_n} - \langle M^* \rangle_T, T_n - T;\ n \geq 2)\}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$ associée à la loi de $(M^*_T, \langle M^* \rangle_T, T)$ sous $\mathbb{P}^*_{a_1}(a_1 \in E_1)$, $\mathbb{E}^*_{a_1}(M^*_T) = 0$, $\mathbb{E}^*_{a_1}(M_T^{*2}) = \sigma_M^2$.

Pour toute suite croissante $(V_n,\ n \in \mathbb{N})$ de v.a. positives sur $(\Omega, \mathscr{F})$, considérons la suite de processus $(\Lambda^*_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$,

$$(3.8)\quad \Lambda^*_n(t) = (\varphi \circ V^*_n)^{-1}\left\{M^*_i + (V^*_{i+1} - V^*_i)^{-1}(tV^*_n - V^*_i)(M^*_{i+1} - M^*_i)\right\}$$

lorsque $V^*_i \leq tV^*_n < V^*_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$. Si la suite $(V_n,\ n \in \mathbb{N})$ est telle que: $V_n / \langle M \rangle_n \to_{n \to \infty} 1$ $\mathbb{P}_x$ p.s. pour tout $x \in E$, alors $V^*_n / \langle M^* \rangle_n \to_{n \to \infty} 1$ $\mathbb{P}_{\delta^*_x}$ p.s. pour tout $x \in E$. Le schéma de la démonstration du théorème 2 s'applique et la suite $(\Lambda^*_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ vérifie la propriété L.L.I. sous $\mathbb{P}_{\delta^*_x}$ quel que soit $x \in E$. Les processus $(\Lambda_n,\ n \in \mathbb{N})$ de $\mathscr{C}([0,1])$ définis par:

$$(3.9)\quad \Lambda_n(t) = (\varphi \circ V_n)^{-1}\left\{M_i + (V_{i+1} - V_i)^{-1}(tV_n - V_i)(M_{i+1} - M_i)\right\}$$

lorsque $V_i \leq tV_n < V_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$, vérifient donc aussi la propriété L.L.I. sous $\mathbb{P}_x$ quel que soit $x \in E$.

THÉORÈME 3. *Soit* $X = (\Omega, \mathscr{F}, (\mathbb{P}_x;\ x \in E), (X_n;\ n \in \mathbb{N})\}$ *une chaîne de Markov homogène, à valeurs dans l'espace mesurable* $(E, \mathscr{E})$. *On suppose que la tribu* $\mathscr{E}$ *est dénombrablement engendrée; que la chaîne* X *est récurrente au sens de Harris pour la mesure* μ *invariante par la probabilité de transition de* X *et qu'elle est apériodique.*

Alors pour toute F.A.M. M *de* X *de carré intégrable sous* $\mathbb{P}_x$ *pour tout* $x \in E$, *vérifiant* $0 < \sigma_M^2 = \mathbb{E}_\mu(M_1^2) < \infty$ *et pour toute suite croissante de v.a. positives*

$(V_n,\ n \in \mathbb{N})$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$ telles que: $\langle M\rangle_n/V_n \to_{n\to\infty} 1$ $\mathbb{P}_x$ p.s. quel que soit $x \in E$, les processus $(\Lambda_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ définis par (3.9) *vérifient la propriété L.L.I. sous $\mathbb{P}_x$ quel que soit $x \in E$.*

En outre si $\mu(E) = 1$, les processus $(\Gamma_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ de $\mathscr{C}([0,1])$ définis par:

$$(3.10)\qquad \Gamma_n(t) = (\sigma_M\varphi(n))^{-1}\{M_{[nt]} + (nt - [nt])(M_{[nt]+1} - M_{[nt]})\},$$

vérifient aussi la propriété L.L.I. sous $\mathbb{P}_x$ quel que soit $x \in E$.

ETAPE 2. Cas général: X est une chaîne ou un processus de Markov vérifiant les hypothèses du paragraphe 1.

On se propose d'établir les résultats suivants:

THÉORÈME 4. *Soit $X = \{\Omega, \mathscr{F}, (\mathbb{P}_x;\ x \in E), (X_t;\ t \in \mathbb{T})\}$ un processus de Markov homogène canonique, indexé par $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ (cas discret) ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ (cas continu) et vérifiant les hypothèses du paragraphe* 1, *notamment: X est récurrent au sens de Harris pour la mesure invariante μ et la tribu $\mathscr{E}$ est dénombrablement engendrée dans le cas discret.*

Supposons de plus que, lorsque $\mu(E) = +\infty$, le critère (C) *suivant est vérifié:*

(C) *Il existe une fonction v: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue strictement croissante vers $+\infty$, à variations régulières d'ordre $\alpha \in [0,1[$ en $+\infty$ [i.e., $v(\lambda r)/v(\lambda) \to_{\lambda\to+\infty} r^\alpha\ \forall\ r > 0$] et une fonction positive f_0 μ-intégrable, $\mu(f_0) = \int f_0\, d\mu$, telles que: $([1/v(t)])\mathbb{E}_x(A_t^{f_0}) \to_{t\to+\infty,\, t\in\mathbb{T}} \mu(f_0)\mu$ p.s. où $A_n^{f_0} = \sum_0^n f_0 \circ X_k$ (cas discret); $A_t^{f_0} = \int_0^t f_0 \circ X_s\, ds$ (cas continu).*

[Lorsque $\mu(E) < +\infty$ (C) *est vérifié pour la fonction v: $\lambda \to \lambda/\mu(E)$ et toute fonction $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$. C'est le cas correspondant à $\alpha = 1$.]*

Alors pour toute F.A.M. $M = (M_t;\ t \in \mathbb{T})$ de X de carré intégrable sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in E$, vérifiant $0 < \sigma_M^2 = \mathbb{E}_\mu(M_1^2) < \infty$ et pour toute famille croissante de v.a. positives $(V_t;\ t \in \mathbb{T})$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$ telles que: $\langle M\rangle_t/V_t \to_{t\to+\infty,\, t\in\mathbb{T}} 1$ $\mathbb{P}_x$ p.s. pour tout $x \in E$, les processus $(\Lambda_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ définis comme en (3.9) *vérifient la propriété L.L.I. sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in E$.*

COROLLAIRE 1. *Pour tout $x \in E$, on a*

$$(3.11)\qquad \limsup_{t\in\mathbb{T}} (\varphi \circ V_t)^{-1} M_t = -\liminf_{t\in\mathbb{T}} (\varphi \circ V_t)^{-1} M_t = 1 \quad \mathbb{P}_x \text{ p.s.}$$

COROLLAIRE 2. *Si $\mu(E) = 1$, les processus $(\Gamma_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ définis comme en* (3.10) *vérifient aussi la propriété L.L.I. sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in E$. En particulier,*

$$(3.12)\qquad \limsup_{t\in\mathbb{T}} (\varphi(t))^{-1} M_t = -\liminf_{t\in\mathbb{T}} (\varphi(t))^{-1} M_t = \sigma_M.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4. Posons:

$$\overline{\Pi}(x,\cdot) = e^{-1}\sum_{1}^{\infty}[1/(n-1)!]\,\Pi_n(x,\cdot);$$

$\overline{\Pi}$ est un noyau markovien sur $(E, \mathscr{E})$ vérifiant l'hypothèse de l'étape 1.

A la chaîne (resp., au processus) X on associe la chaîne de Markov $\overline{X}$ de probabilité de transition $\overline{\Pi}$ (resp., R_1) dont on construit une version de la manière suivante: soient F la loi de Poisson (resp., exponentielle) de paramètre 1 sur $\mathbb{N}^*$ (resp., $\mathbb{R}_+$); $T' = \{\Omega', \mathscr{F}', \mathbb{P}_0'; (T_n';\ n \in \mathbb{N})\}$ une version canonique de la marche aléatoire T' sur $\mathbb{N}^*$ (resp., $\mathbb{R}_+$) associée à la loi F et partant de 0 (i.e., $T_0' = 0$).

Posons: $\overline{\Omega} = \Omega \times \Omega'$, $\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}'$, $\overline{\mathbb{P}}_x = \mathbb{P}_x \otimes \mathbb{P}_0'$, $\overline{X}_n(\omega, \omega') = X_{T_n'(\omega')}(\omega)$, $\overline{\theta}(\omega, \omega') = (\omega_{t+\omega_1'}, \omega_{n+1}' - \omega_1';\ (t, n) \in \mathbb{T} \times \mathbb{N})$ alors $\overline{X} = \{\overline{\Omega}, \overline{\mathscr{F}}, (\overline{\mathbb{P}}_x;\ x \in E), (\overline{X}_n,\ n \in \mathbb{N}), (\overline{\theta}_n,\ n \in \mathbb{N})\}$ est une chaîne de Markov homogène de probabilité de transition $\overline{\Pi}$ (resp., R_1), récurrente au sens de Harris pour la mesure μ invariante par $\overline{\Pi}$ (resp., R_1). En outre pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\overline{X}_{n+1} = \overline{X}_n \circ \overline{\theta}$. On note $\overline{\mathbb{F}}$ sa filtration canonique.

Pour toute F.A.M. M vérifiant les hypothèses du théorème 4 $\overline{M} = (M_{T_n'},\ n \in \mathbb{N})$ est une F.A.M. de $\overline{X}$ telle que $\overline{\mathbb{E}}_\mu(\overline{M}_1^2) = \sigma_M^2$ et sa F.A. croissante prévisible associée est $\langle \overline{M} \rangle = (\langle M \rangle_{T_n'},\ n \in \mathbb{N})$.

Posons $\overline{V}_n = (V_{T_n'},\ n \in \mathbb{N})$, et considérons les processus continus $(\Delta_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$, $(\overline{\Delta}_n,\ n \in \mathbb{N})$ définis par:

$$\Delta_n(u) = M_i + (V_{i+1} - V_i)^{-1}(u - V_i)(M_{i+1} - M_i) \quad \text{lorsque } V_i \le u < V_{i+1},\ i = 0, \dots, n-1, \tag{3.13}$$

$$\overline{\Delta}_n(u) = \overline{M}_i + \left(\overline{V}_{i+1} - \overline{V}_i\right)^{-1}\left(u - \overline{V}_i\right)\left(\overline{M}_{i+1} - \overline{M}_i\right) \quad \text{lorsque } \overline{V}_i \le u < \overline{V}_{i+1},\ i = 0, \dots, n-1. \tag{3.14}$$

Alors on a

$$\Lambda_n(t) = (\varphi \circ V_n)^{-1}\Delta_n(tV_n), \qquad 0 \le t \le 1. \tag{3.15}$$

De même on définit les processus $(\overline{\Lambda}_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ de $\mathscr{C}([0,1])$ par:

$$\overline{\Lambda}_n(t) = \left(\varphi \circ \overline{V}_n\right)^{-1}\overline{\Delta}_n\left(t\overline{V}_n\right), \qquad 0 \le t \le 1. \tag{3.16}$$

Admettons provisoirement les deux lemmes suivants:

LEMME 1. *Soit A une F.A. de X croissante, nulle en 0 et telle que $0 < \mathbb{E}_\mu(A_1) < \infty$. Alors pour tout $x \in E$ on a $\mathbb{P}_x$ ou $\overline{\mathbb{P}}_x$ p.s.*

(i) $$\frac{A_n}{A_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \qquad \frac{\overline{A}_n}{\overline{A}_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

(ii) $$\frac{\overline{A}_n}{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

(iii) $$\textit{Si } \frac{A_n}{V_n} \to 1, \quad \textit{alors } \frac{\overline{A}_n}{\overline{V}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \textit{ et } \frac{\overline{V}_n}{V_n} \to 1.$$

LEMME 2. *Soient M $(V_t,\ t \in \mathbb{T})$, une F.A.M. de X et une famille de v.a. comme dans le théorème* 4. *Alors pour tout $x \in E$, les processus* $(\Delta_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$, $(\overline{\Delta}_n,\ n \in \mathbb{N})$, $(\Lambda_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$, $(\overline{\Lambda}_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ *définis respectivement par* (3.13), (3.14), (3.15) *et* (3.16) *sont tels que*:

(i)
$$\sup_{0 \le t \le 1} \left|\overline{\Lambda}_n(t) - \left(\varphi \circ \overline{V}_n\right)^{-1} \overline{\Delta}_n(tV_n)\right| = \left(\varphi \circ \overline{V}_n\right)^{-1} \sup_{0 \le t \le 1} \left|\overline{\Delta}_n\left(t\overline{V}_n\right) - \overline{\Delta}_n(tV_n)\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \mathbb{P}_x\ p.s.$$

(ii)
$$\sup_{0 \le t \le 1} \left|\Lambda_n(t) - (\varphi \circ V_n)^{-1} \overline{\Delta}_n(tV_n)\right| = (\varphi \circ V_n)^{-1} \sup_{0 \le t \le 1} \left|\Delta_n(tV_n) - \overline{\Delta}_n(tV_n)\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \overline{\mathbb{P}}_x\ p.s.$$

Plaçons-nous d'abord dans le cas discret. Puisque la chaîne $\overline{X}$ de probabilité de transition $\overline{\Pi}$ vérifie les hypothèses du théorème 3 et $\langle \overline{M} \rangle_n / \overline{V}_n \to_{n \to \infty} 1$ $\overline{\mathbb{P}}_x$ p.s. pour tout $x \in E$ d'après l'assertion (iii) du lemme 1, il en résulte que la suite $(\overline{\Lambda}_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ définie par (3.16) vérifie la propriété L.L.I. sous $\overline{\mathbb{P}}_x$ quel que soit $x \in E$. Compte-tenu du lemme 2 et du fait que $\overline{V}_n / V_n \to_{n \to \infty} 1$ $\overline{\mathbb{P}}_x$ p.s. la suite $(\Lambda_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ vérifie aussi la propriété L.L.I. sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in E$. Le théorème 4 est donc établi dans le cas discret. On l'obtient dans le cas continu en utilisant la chaîne $\overline{X}$ de probabilité de transition R_1 [qui vérifie les hypothèses du théorème 4 relatives au cas discret, y compris le critère (C) (cf. [18]) et le lemme 2. Donc le théorème 4 est complètement établi sous réserve de la validité des lemmes 1 et 2. □

DÉMONSTRATION DU LEMME 1. Le schéma de la preuve de (i) est exactement le même que celui de la partie (b) du théorème 2 du paragraphe 3.1. L'assertion (ii) est triviale dans le cas de la récurrence positive car:

$$\frac{A_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{E_\mu(A_1)}{\mu(E)} \qquad \mathbb{P}_x \text{ p.s.}$$

et

$$\frac{\overline{A}_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\overline{E}_\mu(\overline{A}_1)}{\mu(E)} = \frac{E_\mu(A_1)}{\mu(E)} \qquad \overline{\mathbb{P}}_x \text{ p.s.}$$

quel que soit $x \in E$. Le critère (C) sert uniquement pour établir (ii) dans le cas de la récurrence nulle. En effet si (C) est vérifié la suite $(\overline{A}_n / A_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ converge en loi vers 1 sous $\overline{\mathbb{P}}_x$ si $0 < \alpha < 1$ et $(\overline{A}_{[v^{-1}(n)]} / A_{[v^{-1}(n)]},\ n \in \mathbb{N}^*)$ converge en loi vers 1 sous $\overline{\mathbb{P}}_x$ si $\alpha = 0$, d'après [18] (v^{-1} étant la fonction réciproque de v). Mais d'après (i) on a $A_n / A_{n+p} \to_{n \to \infty} 1$ $\mathbb{P}_x$ p.s. et $\overline{A}_n / \overline{A}_{n+p} \to_{n \to \infty} 1$ $\overline{\mathbb{P}}_x$ p.s. pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Il en résulte que la suite $(\overline{A}_n / A_n,$

$n \in \mathbb{N}^*$) est de Cauchy $\overline{\mathbb{P}}_x$ p.s. et d'après ce qui précède $\overline{A}_n/A_n \to_{n\to\infty} 1$ $\overline{\mathbb{P}}_x$ p.s. pour tout $x \in E$. L'assertion (iii) résulte de (ii). □

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. Commençons par établir la partie (i) du lemme 2 dans le cas discret. Puisque la chaîne $\overline{X}$ de probabilité de transition $\overline{\Pi}$ vérifie les hypothèses du théorème 3, il en résulte que la suite $(\overline{\Lambda}_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ vérifie la propriété L.L.I. sous $\overline{\mathbb{P}}_x$ pour tout $x \in E$. En particulier elle est relativement compacte $\overline{\mathbb{P}}_x$ p.s. dans $\mathscr{C}([0,1])$, ce qui implique qu'il existe $\overline{N} \subset \overline{\Omega}$ $\overline{\mathbb{P}}_x$-négligeable tel que, pour tout $\overline{\omega} \notin \overline{N}$, on ait

$$(3.17)\qquad W_\eta = \limsup_{n\to\infty}\left(\varphi\circ\overline{V}_n\right)^{-1}\sup_{0\le t\le 1}\sup_{|h|\le\eta}\left|\overline{\Delta}_n\left((t+h)\overline{V}_n\right) - \overline{\Delta}_n\left(t\overline{V}_n\right)\right| \xrightarrow[\eta\downarrow 0]{} 0.$$

Mais d'après l'assertion (iii) du lemme 1: $\overline{V}_n/V_n \to_{n\to\infty} 1$ $\overline{\mathbb{P}}_x$ p.s. Donc il existe un ensemble $\overline{N}_1 \subset \overline{\Omega}$, $\overline{\mathbb{P}}_x$-négligeable, tel que, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $\overline{\omega} \notin \overline{N}_1$, on puisse trouver un entier $n_h(\overline{\omega})$ tel que pour tout $n \ge n_h(\overline{\omega})$: $|V_n/\overline{V}_n - 1|(\overline{\omega}) \le |h|$, d'où $\sup_{0\le t\le 1}|tV_n - t\overline{V}_n|(\overline{\omega}) \le |h|\overline{V}_n(\overline{\omega})$. Compte tenu de (3.17) on a $\lim_{n\to+\infty}(\varphi\circ\overline{V}_n)^{-1}\sup_{0\le t\le 1}|\overline{\Delta}_n(tV_n) - \overline{\Delta}_n(t\overline{V}_n)|(\overline{\omega}) = 0$ pour $\overline{\omega} \notin \overline{N}\cup\overline{N}_1$.

L'assertion (i) est donc établie dans le cas discret. Pour établir l'assertion (ii) du lemme (dans le cas discret ou continu) posons pour tout $t \ge 0$: $N_t' = \inf\{n \ge 0;\ T_{n+1}' > t\}$ et remarquons que si $V_i \le u < V_{i+1}$, $i = 0,\dots,n-1$, ou $u = V_n$ on a $\overline{V}_{N_i'} \le u < \overline{V}_{N_i'+1}$, $i = 0,\dots,n$, car $T_{N_t'}' \le t < T_{N_t'+1}'$ pour tout t. D'où

$$(3.18)\qquad \begin{aligned}\sup_{0\le u\le V_n}|\Delta_n(u) - \overline{\Delta}_n(u)| \le \max_{0\le i\le n}|M_i - M_{N_i'}| &+ \max_{0\le i\le n-1}|M_{i+1} - M_i|\\ &+ \max_{0\le i\le n}|\overline{M}_{N_i'+1} - \overline{M}_{N_i'}|.\end{aligned}$$

Soit $([M]_n,\ n \in \mathbb{N})$ le processus variation quadratique de $(M_n,\ n \in \mathbb{N})$ et $([\overline{M}]_n,\ n \in \mathbb{N})$ celui de $(\overline{M}_n,\ n \in \mathbb{N})$. On a

$$\max_{0\le i\le n-1}|M_{i+1} - M_i| \le \sqrt{[M]_n},\qquad \max_{0\le i\le n}|\overline{M}_{N_i'+1} - \overline{M}_{N_i'}| \le \sqrt{[\overline{M}]_{N_n'+1}}.$$

Puisque $\langle M\rangle_n/[M]_n \to_{n\to\infty} 1$ $\mathbb{P}_x$ p.s., $\langle M\rangle_n/\langle M\rangle_{n+1} \mapsto_{n\to\infty} 1$ $\mathbb{P}_x$ p.s.; il est aisé de voir que $[\overline{M}]_{N_n'+1}/[M]_n \to_{n\to\infty} 1$ $\overline{\mathbb{P}}_x$ p.s. D'où

$$(3.19)\qquad \begin{aligned}&(\varphi\circ V_n)^{-1}\max_{0\le i\le n-1}|M_{i+1} - M_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\quad \mathbb{P}_x \text{ p.s.},\\ &(\varphi\circ V_n)^{-1}\max_{0\le i\le n}|\overline{M}_{N_i'+1} - \overline{M}_{N_i'}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\quad \overline{\mathbb{P}}_x \text{ p.s.}\end{aligned}$$

Afin de montrer:

$$(3.20)\qquad (\varphi\circ V_n)^{-1}\max_{0\le i\le n}|M_i - \overline{M}_{N_i'}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\quad \overline{\mathbb{P}}_x \text{ p.s.},$$

remarquons que:

$$\max_{0 \le i \le n} |M_i - \overline{M}_{N'_i}| \le \max_{p \le N'_n} Y_p \quad \text{où } (Y_p,\ p \in \mathbb{N}),$$

est la suite définie par:

$$Y_p = \max_{T'_p \le q \le T'_{p+1}} |M_q - M_{T'_p}| = \max_{0 \le q \le T'_{p+1} - T'_p} |M_{q+T'_p} - M_{T'_p}| = Y_0 \circ \bar{\theta}_p,$$

et d'après l'inégalité de Doob (appliquée sous $\overline{\mathbb{P}}_x$),

$$\overline{\mathbb{E}}_\mu(Y_0^2) = \overline{\mathbb{E}}_\mu\left(\left(\max_{0 \le q \le T'_p} |M_q|\right)^2\right) \le 4\overline{\mathbb{E}}_\mu\left(M_{T'_1}^2\right) = 4\sigma_M^2 < \infty.$$

En suivant les idées de [2], on vérifie que le théorème ergodique quotient s'applique à la chaîne $\overline{X}$, d'où:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Sigma_0^n Y_p^2}{\langle \overline{M} \rangle_n} = \frac{\overline{\mathbb{E}}_\mu(Y_0^2)}{\sigma_M^2} \quad \overline{\mathbb{P}}_x \text{ p.s. pour tout } x \in E.$$

Compte tenu du fait que: $\Sigma_0^{n+1} Y_p^2 / \Sigma_0^n Y_p^2 \to_{n \to \infty} 1\ \overline{\mathbb{P}}_x$ p.s., on a

$$\left(\langle \overline{M} \rangle_n\right)^{-1/2} Y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0\ \overline{\mathbb{P}}_x \text{ p.s.}$$

En utilisant les indices d'échelle de la suite (Y_p) on montre que $\overline{\mathbb{P}}_x$ p.s.: $(\langle \overline{M} \rangle_n)^{-1/2} \max_{p \le n} Y_p \to_{n \to \infty} 0$, d'où $(\langle \overline{M} \rangle_{N'_t})^{-1/2} \max_{p \le N'_t} Y_p \to_{t \to +\infty} 0$. Comme $\langle \overline{M} \rangle_t / \langle \overline{M} \rangle_{N'_t} \to_{t \to \infty,\, t \in \mathbb{T}} 1\ \overline{\mathbb{P}}_x$ p.s., on a $(V_t)^{-1/2} \max_{p \le N'_t} Y_p \to_{t \to \infty} 0\ \overline{\mathbb{P}}_x$ p.s., ce qui implique (3.20). Vu (3.18), (3.19) et (3.20), la partie (ii) du lemme est établie. Le lemme 2 est donc valable dans le cas discret ce qui implique que le théorème 4 est vrai dans le cas discret. Comme la chaîne $\overline{X}$ de probabilité de transition R_1 vérifie les hypothèses du théorème 4 (relatives au cas discret), il en résulte que la suite $(\overline{\Lambda}_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ définie par (3.16) vérifie la propriété L.L.I. sous $\overline{\mathbb{P}}_x$ pour tout $x \in E$. Donc l'assertion (i) du lemme est vraie aussi dans le cas continu, d'après le raisonnement du début de la démonstration. Le lemme 2 est donc complètement démontré. □

PREUVE DU COROLLAIRE 1. Pour $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, la propriété (3.11) résulte immédiatement du théorème 4. Pour l'obtenir dans le cas continu avec $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, on remarque que puisque la suite $(\overline{\Lambda}_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ définie par (3.16) vérifie la propriété L.L.I. sous $\overline{\mathbb{P}}_x$ quel que soit $x \in E$, on a

$$\limsup_n \left(\varphi \circ \overline{V}_n\right)^{-1} \overline{M}_n = -\liminf_n \left(\varphi \circ \overline{V}_n\right)^{-1} \overline{M}_n = 1 \quad \overline{\mathbb{P}}_x \text{ p.s.} \tag{3.21}$$

D'où:

$$\limsup_{t \in \mathbb{R}_+} \left(\varphi \circ \overline{V}_{N'_t}\right)^{-1} \overline{M}_{N'_t} \le 1 \quad \overline{\mathbb{P}}_x \text{ p.s.,}$$

$$\liminf_{t \in \mathbb{R}_+} \left(\varphi \circ \overline{V}_{N'_t}\right)^{-1} \overline{M}_{N'_t} \ge -1 \quad \overline{\mathbb{P}}_x \text{ p.s.}$$

Compte tenu du fait que $\overline{\mathbb{P}}_x$ p.s.:

$$(V_t)^{-1/2}|M_t - \overline{M}_{N_t'}| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad V_t/\overline{V}_{N_t'} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

on a

$$(3.22) \quad \limsup_{t\in\mathbb{R}_+} (\varphi\circ V_t)^{-1}M_t \le 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{t\in\mathbb{R}_+} (\varphi\circ V_t)^{-1}M_t \ge -1 \quad \mathbb{P}_x \text{ p.s.}$$

Vu (3.21) et (3.22) on a la propriété (3.11) dans le cas continu avec $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. □

PREUVE DU COROLLAIRE 2. Si $\mu(E) = 1$ on a $\langle M\rangle_t/t \to_{t\to+\infty,\ t\in\mathbb{T}} \sigma_M^2$. Par conséquent la propriété (3.12) est une conséquence immédiate de la propriété (3.11). En appliquant le théorème 4 à la suite $V_n = n\sigma_M^2$, $\sigma_M^2 > 0$, on voit que la suite $(\Gamma_n,\ n\in\mathbb{N}^*)$ vérifie la propriété L.L.I. sous $\mathbb{P}_x$ quel que soit $x\in E$. □

REMARQUE 3. La remarque 2 est valable pour les théorèmes 3 et 4 et leurs corollaires respectifs.

4. Application aux temps d'occupation centrés. Désignons par Q l'un quelconque des noyaux R_1 ou Π et par

$$\hat{\mathscr{C}} = \left\{ f\in\mathscr{L}^1(\mu)\cap\mathscr{L}^2(\mu), \text{ telle que } \int f\,d\mu = 0 \text{ et il existe } l\in\mathscr{L}^2(\mu) \right.$$
$$\left. \text{vérifiant } Qf = Ql - l\ \mu \text{ p.s.} \right\},$$

$$\mathscr{C} = \left\{ f\in\mathscr{L}^1(\mu), \text{ telle que } f \text{ soit bornée}, \int f\,d\mu = 0 \text{ et il existe} \right.$$
$$\left. l \text{ mesurable bornée vérifiant } Qf = l - Ql \text{ partout sur } E \right\}.$$

Dans le cas continu notons A (resp., $\hat{A}$) le générateur faible [resp., fort sur $\mathscr{L}^2(\mu)$] du processus X et $\mathscr{R}_A$ (resp., $\mathscr{R}_{\hat{A}}$) son image. Dans le cas discret posons $\hat{A} = I - \Pi$ sur $\mathscr{L}^2(\mu)$ et $A = I - \Pi$ sur l'ensemble des fonctions mesurables bornées de E dans $\mathbb{R}$. On a alors:

1. $\mathscr{C} = \mathscr{R}_A \cap \{f\in\mathscr{L}^1(\mu),\ \int f\,d\mu = 0\}$, $\quad \hat{\mathscr{C}} = \mathscr{R}_{\hat{A}} \cap \{f\in\mathscr{L}^1(\mu);\ \int f\,d\mu = 0\}$,
2. $\mathscr{C} = \mathscr{R}_A$ et $\hat{\mathscr{C}} = \mathscr{R}_{\hat{A}}$ lorsque μ est bornée,
3. $\hat{\mathscr{C}} = \mathscr{R}_{\hat{A}} = \{f\in\mathscr{L}^2(\mu);\ \int f\,d\mu = 0\}$ si X est récurrent au sens de Doeblin (cf. [17]).

Remarquons aussi que $\mathscr{C}$ contient l'ensemble des charges $\mathscr{N}$ défini par:

$$\mathscr{N} = \left\{ f\in\mathscr{L}^1(\mu);\ \int f\,d\mu = 0,\ |f| \text{ est bornée et spéciale} \right\}.$$

En outre, lorsque le noyau Q est fellérien $\mathscr{N}$ (donc $\mathscr{C}$) contient toute fonction f bornée à support compact et d'intégrale nulle car dans ce cas $|f|$ est spéciale.

Soit $f = Ag$ une fonction de $\mathscr{C}$, alors le processus M^f défini par:

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} M_t^f &= g \circ X_t - g \circ X_0 - \int_0^t f \circ X_s \, ds, && t \in \mathbb{R}_+, \\ M_n^f &= \Pi g \circ X_n - \Pi g \circ X_0 + \sum_1^n f \circ X_k, && n \in \mathbb{N}^*, \ M_0^f = 0, \end{aligned}$$

est une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}_x)$ F.A.M. de carré intégrable pour tout $x \in E$. En outre dans le cas continu le processus:

$$(4.2)\qquad N_t^f = g^2 \circ X_t - g^2 \circ X_0 - 2\int_0^t gf \circ X_s \, ds - \langle M^f \rangle_t, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

est une $(\mathbb{F}, \mathbb{P}_x)$ martingale centrée pour tout $x \in E$.

Lorsque $f = \hat{A}g \in \hat{\mathscr{C}}$ les processus $(M^f, \mathbb{P}_x)$ et $(N^f, \mathbb{P}_x)$ vérifient les mêmes propriétés pour μ-presque tout x.

Dans le cas discret (resp., continu) (4.1) [resp., (4.2)] donne

$$(4.3)\qquad \sigma_f^2 = \sigma_{M^f}^2 = \mathbb{E}_\mu\left(\left(M_1^f\right)^2\right) = 2\int fg \, d\mu - \int f^2 \, d\mu \quad \left(\text{resp., } -2\int fg \, d\mu\right).$$

Avec les notations précédentes on a les deux résultats suivants:

THÉORÈME 5. *Soit X un processus (une chaîne) de Markov vérifiant les hypothèses du théorème 4 (du théorème 4 ou du théorème 3 ou du paragraphe 3.1). Pour toute fonction $f = Ag$ (resp., $f = \hat{A}g$) de $\mathscr{C}$ (resp., $\hat{\mathscr{C}}$) telle que $\sigma_f^2 > 0$, considérons les processus $(\Lambda_n^f,\ n \in \mathbb{N}^*)$ de $\mathscr{C}([0,1])$ définis par:*

$$(4.4)\qquad \Lambda_n^f(t) = (\varphi \circ U_n)^{-1}\left\{A_i^f + (U_{i+1} - U_i)^{-1}(tU_n - U_i)\left(A_{i+1}^f - A_i^f\right)\right\}$$

lorsque $U_i \le tU_n < U_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$, où

$$U_t = -2\int_0^t (fg) \circ X_s \, ds \left[2\sum_1^n (fg) \circ X_k - \sum_1^n f^2 \circ X_k\right],$$

$$A_t^f = \int_0^t f \circ X_s \, ds \left[\sum_0^n f \circ X_k\right].$$

Alors la suite $(\Lambda_n^f,\ n \in \mathbb{N}^*)$ vérifie la propriété L.L.I. sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in E$ (resp., μ-presque tout x).

En particulier:

$$(4.5)\qquad \begin{gathered} \limsup_{t \to +\infty} (\varphi \circ U_t)^{-1} A_t^f = -\liminf_{t \to +\infty} (\varphi \circ U_t)^{-1} A_t^f = 1 \quad \mathbb{P}_x \ p.s. \\ \left[\limsup_{n \to +\infty} (\varphi \circ U_n)^{-1} A_n^f = -\liminf_{n \to +\infty} (\varphi \circ U_n)^{-1} A_n^f = 1 \ \mathbb{P}_x \ p.s.\right] \end{gathered}$$

pour tout $x \in E$ (resp., μ-presque tout x).

THÉORÈME 6. *Soit X un processus (une chaîne) de Markov vérifiant les hypothèses du théorème 5. On suppose en plus que $\mu(E) = 1$. Pour toute* *fonction* $f = Ag$ *(resp.,* $f = \hat{A}g$*) de* $\mathscr{C}$ *(resp.,* $\hat{\mathscr{C}}$*) considérons les processus* $(\Gamma_n^f,\ n \in \mathbb{N}^*)$ *de* $\mathscr{C}([0,1])$ *définis par*:

$$(4.6)\qquad \Gamma_n^f(t) = (\varphi(n))^{-1}\int_0^{nt} f \circ X_s\, ds$$
$$\left[\Gamma_n^f(t) = (\varphi(n))^{-1}\left\{\sum_0^{[nt]} f \circ X_k + (nt - [nt]) f \circ X_{[nt]+1}\right\}\right].$$

Alors pour tout $x \in E$ *(resp.,* μ*-presque tout* $x \in E$*), la suite* $(\Gamma_n^f,\ n \in \mathbb{N}^*)$ *est* $\mathbb{P}_x$ *p.s. relativement compacte dans l'espace* $\mathscr{C}([0,1])$ *et ses valeurs d'adhérence pour la convergence* $\mathbb{P}_x$ *presque sûre à supprimer coïncident avec le compact* $\sigma_f K$ *(même si* $\sigma_f = 0$*). En particulier*:

$$(4.7)\qquad \limsup_{t\to+\infty} (\varphi(t))^{-1}\int_0^t f \circ X_s\, ds = -\liminf_{t\to+\infty} (\varphi(t))^{-1}\int_0^t f \circ X_s\, ds = \sigma_f$$
$$\left[\limsup_{n\to+\infty} (\varphi(n))^{-1}\sum_0^n f \circ X_k = -\liminf_{n\to\infty} (\varphi(n))^{-1}\sum_0^n f \circ X_k = \sigma_f\right].$$

REMARQUE 4. Dans le cas continu, le théorème 6 améliore le résultat 2.7 de [4], énoncé sans démonstration pour $f \in \mathscr{L}^{2+\delta}(\mu)$, $\delta > 0$, comme conséquence directe d'un corollaire de [7] ce qui est, nous semble-t-il, illicite. Dans le cas discret, le théorème 6 améliore le résultat 6.1 de [12].

DÉMONSTRATION DU THÈORÉME 5. D'après le théorème ergodique quotient et (4.3) on a

$$\frac{\langle M^f\rangle_t}{U_t} \xrightarrow[t\in\mathbb{T}]{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}_\mu(\langle M\rangle_1^f)}{\mathbb{E}_\mu(U_1)} = 1 \quad \mathbb{P}_x \text{ p.s. tout } x \in E$$

(resp., μ-presque tout x). On peut donc appliquer le théorème 4 à la F.A.M. εM^f ($\varepsilon = 1$ dans le cas discret, $\varepsilon = -1$ dans le cas continu) et à la suite $(V_n) = (U_n)$ ce qui nous permet d'affirmer que la suite $(\Lambda_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ des processus de $\mathscr{C}([0,1])$ définie par

$$\Lambda_n(t) = \varepsilon(\varphi\circ U_n)^{-1}\left\{M_i^f + (U_{i+1} - U_i)^{-1}(tU_n - U_i)\left(M_{i+1}^f - M_i^f\right)\right\},$$

vérifie la propriété L.L.I. sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in E$ (resp., μ-presque tout $x \in E$). Or

$$(4.8)\qquad \sup_{0\le t\le 1} |\Lambda_n^f(t) - \Lambda_n(t)| \le 3(\varphi\circ U_n)^{-1}\max_{0\le i\le n} |A_i^f - \varepsilon M_i^f|,$$

$$(4.9)\qquad |A_i^f - \varepsilon M_i^f| \le \begin{cases} |\Pi g|\circ X_i + |\Pi g|\circ X_0, & \varepsilon = 1,\\ |g|\circ X_i + |g|\circ X_0, & \varepsilon = -1.\end{cases}$$

Vu (4.8) et (4.9) la première affirmation du théorème résulte du lemme suivant:

LEMME 3. *Soit G une fonction positive, mesurable et telle que $\mu(G) = \int G\,d\mu < +\infty$. Soit $A = (A_t;\ t \in \mathbb{T})$ une F.A. croissante de X et telle que $0 < \mathbb{E}_\mu(A_1) < \infty$. Pour tout $x \in E$, on a*

$$(A_n)^{-1} \max_{p \le n} G \circ X_p \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mathbb{P}_x \ p.s.$$

PREUVE. D'après le théorème ergodique quotient on a $\mathbb{P}_x$ p.s. pour tout $x \in E$,

$$\frac{\Sigma_0^n G \circ X_k}{A_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\mu(G)}{\mathbb{E}_\mu(A_1)}.$$

Comme $(\Sigma_0^{n+1} G \circ X_k)^{-1}(\Sigma_0^n G \circ X_k) \to_{n \to \infty} 1$, on en déduit que $(A_n)^{-1} G \circ X_n \to_{n \to \infty} 0$. En utilisant les indices d'échelle de la suite $(G \circ X_n)$, on montre que $(A_n)^{-1} \max_{p \le n} G \circ X_p \to_{n \to \infty} 0$ $\mathbb{P}_x$ p.s. pour tout $x \in E$. □

Dans le cas discret la propriété (4.5) résulte de la première affirmation du théorème. On l'obtient dans le cas continu en appliquant le corollaire 1 du théorème 4 à la F.A.M. $(-M^f)$ et à la suite (U_n), puis le lemme 3. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6. Supposons d'abord $\sigma_f^2 > 0$. Comme $\langle M^f \rangle_t / t \to_{t \to +\infty,\, t \in \mathbb{T}} \sigma_f^2$, on peut affirmer grâce au corollaire 2 du théorème 4 appliqué à la F.A.M. εM^f ($\varepsilon = 1$ dans le cas discret et $\varepsilon = -1$ dans le cas continu) que la suite des processus $(\Gamma_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ définie par:

$$\Gamma_n(t) = \varepsilon(\varphi(n))^{-1}\{M_i^f + (nt - i)(M_{i+1}^f - M_i^f)\}$$

lorsque $i \le nt < i + 1$, $i = 0, \dots, n - 1$, est, pour tout $x \in E$ (resp., μ-presque tout $x \in E$), $\mathbb{P}_x$ p.s. relativement compacte dans $\mathscr{C}([0,1])$ et ses valeurs d'adhérence pour la convergence $\mathbb{P}_x$ p.s. coïncident avec le compact $\sigma_f K$. Or si $(\tilde{\Gamma}_n^f,\ n \in \mathbb{N})$ est la suite définie par:

$$\tilde{\Gamma}_n^f(t) = (\varphi(n))^{-1}\{A_i^f + (nt - i)(A_{i+1}^f - A_i^f)\},$$

pour $i \le nt < i + 1$, $i = 0, \dots, n - 1$, $A_n^f = \int_0^n f \circ X_s\,ds[\Sigma_0^n f \circ X_k]$. On a

$$\sup_{0 \le t \le 1} |\Gamma_n(t) - \tilde{\Gamma}_n^f(t)| \le 3(\varphi(n))^{-1} \max_{0 \le i \le n} |A_i^f - \varepsilon M_i^f|;$$

donc grâce à (4.9) et au lemme 3, on peut affirmer que pour tout $x \in E$ (resp., μ-presque tout $x \in E$) la suite $(\tilde{\Gamma}_n^f,\ n \in \mathbb{N}^*)$ vérifie les mêmes propriétés que la suite $(\Gamma_n,\ n \in \mathbb{N})$. Mais $(\Gamma_n^f,\ n \in \mathbb{N}^*)$ coïncide avec $(\tilde{\Gamma}_n^f,\ n \in \mathbb{N}^*)$ dans le cas discret et dans le cas continu on a

$$\begin{aligned} \sup_{0 \le t \le 1} |\Gamma_n^f(t) - \tilde{\Gamma}_n^f(t)| &\le 2(\varphi(n))^{-1} \sup_{0 \le t \le 1} \int_{[nt]}^{[nt]+1} |f| \circ X_s\,ds \\ &\le 2(\varphi(n))^{-1} \max_{p \le n} \int_p^{p+1} |f| \circ X_s\,ds \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mathbb{P}_x \text{ p.s.,} \end{aligned} \tag{4.10}$$

d'après le lemme 3. La première affrimation du théorème est donc établie lorsque $\sigma_f^2 > 0$. Les propriétés (4.7) résultent de (4.5) car: $U_t/t \to_{t \to +\infty,\, t \in \mathbb{T}} \sigma_f^2$ $\mathbb{P}_x$ p.s. Le théorème est donc complètement établi lorsque $\sigma_f^2 > 0$. Il est vrai aussi lorsque $\sigma_f^2 = 0$, car dans ce cas on a $M^f = 0$ P_x p.s. pour tout $x \in E$ (resp., μ-presque tout x). Autrement dit:

$$\tilde{\Gamma}_n^f(t) = (\varphi(n))^{-1}\{g \circ X_{[nt]} - g(X_0) + (nt - [nt])(g \circ X_{[nt]+1} - g \circ X_{[nt]})\}$$

$$\Big[\tilde{\Gamma}_n^f(t) = -(\varphi(n))^{-1}\{\Pi g \circ X_{[nt]} - \Pi g(X_0) + (nt - [nt])(\Pi g \circ X_{[nt]+1} - \Pi g \circ X_{[nt]})\}\Big].$$

Grâce au lemme 3 et à (4.10), on voit que: $\sup_{0 \le t \le 1} |\Gamma_n^f(t)| \to_{n \to \infty} 0$ $\mathbb{P}_x$ p.s. pour tout $x \in E$ (resp., μ-presque tout x) et les propriétés (4.7) en résultent. □

REMARQUES 5. (i) Supposons que les hypothèses du théorème 6 soient vérifiées et qu'en plus le noyau Q soit féllerien [ce qui sous-entend que $(E, \mathscr{E})$ est un espace localement compact à base dénombrable, muni de sa tribu borélienne dans le cas discret]. Soient f, g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$, mesurables bornées, à support compact et $\mu(g) = \int g\, d\mu \neq 0$. Alors la fonction $F = f\mu(g) - g\mu(f)$ est bornée à support compact et d'intégrale nulle. Donc $|F|$ est spéciale et $F \in \mathscr{N} \subset \mathscr{C}$ et il existe une fonction G bornée sur E telle que $F = AG$. Le théorème 6 et le théorème ergodique permettent alors de montrer:

$$\text{(4.11)} \quad \begin{aligned} &\limsup_{t \in \mathbb{T}} \sqrt{\frac{t}{2 \log\log t}} \left(\frac{A_t^f}{A_t^g} - \frac{\mu(f)}{\mu(g)} \right) \\ &= -\liminf_{t \in \mathbb{T}} \sqrt{\frac{t}{2 \log\log t}} \left(\frac{A_t^f}{A_t^g} - \frac{\mu(f)}{\mu(g)} \right) = \sigma_F(\mu(g))^{-2} \quad \mathbb{P}_x \text{ p.s.,} \end{aligned}$$

où $A_t^h = \int_0^t h \circ X_s\, ds [\sum_0^n h \circ X_k]$ [σ_F définie comme en (4.3)].

(ii) Si on renforce les hypothèses du théorème 6 en supposant que la chaîne de probabilité de transition Q est récurrente au sens de Doeblin, alors les résultats (4.11) sont valables sous $\mathbb{P}_x$ μ p.s. pour f et g dans $\mathscr{L}^2(\mu)$ à condition que $\int g\, d\mu \neq 0$. Cela résulte du fait que $\hat{\mathscr{C}} = \{h \in \mathscr{L}^2(\mu);\ \int h\, d\mu = 0\}$ dans ce cas.

5. Exemples.

EXEMPLE 1 (Mouvement brownien sur $\mathbb{R}$). Soit X le mouvement brownien réel, il est récurrent et la mesure de Lebesgue (notée dx) est stationaire. De plus le critère (C) est vérifié pour toute fonction appartenant à $\mathscr{L}^1(dx)$ avec la normalisation $v(\lambda) = (2\lambda/\pi)^{1/2}$.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses suivantes:

$$f \text{ continue bornée}, \int f(x)\, dx = 0, \qquad \int |xf(x)|\, dx < +\infty.$$

Posons: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\, dt$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{P}_x$ p.s.

$$\text{(5.1)} \quad \begin{aligned} &\limsup_{t \to +\infty} \left[\int_0^t F^2 \circ X_s\, ds \right]^{-1} \int_0^t f \circ X_s\, ds \\ &= -\liminf \left[\int_0^t F^2 \circ X_s\, ds \right]^{-1} \int_0^t f \circ X_s\, ds = 2. \end{aligned}$$

En effet, si $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}|x - y|f(y)\,dy$, un calcul facile donne:

$$g'(x) = 2F(x), \qquad \tfrac{1}{2}g''(x) = f(x) \quad (\text{i.e., } f = Ag),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x)\,dx = -\tfrac{1}{2}\int\int_{\mathbb{R}^2}|x - y|f(x)f(y)\,dx\,dy,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|g'(x)|\,dx < \infty \quad \text{ce qui implique que } g \text{ est bornée.}$$

En appliquant la formule d'Itô à la fonction g, on obtient:

$$M_t^f = g \circ X_t - g \circ X_0 - \int_0^t f \circ X_s\,ds = 2\int_0^t F \circ X_s\,dX_s.$$

D'où: $\langle M^f \rangle_t = 4\int_0^t F^2 \circ X_s\,ds$ et le résultat découle du corollaire 1 du théorème 4. Dans ce cas, le théorème ergodique quotient donne le résultat suivant, beaucoup moins précis que (5.1):

$$\frac{|\int_0^t f \circ X_s\,ds|}{\int_0^t F^2 \circ X_s\,ds} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \;\mathbb{P}_x \text{ p.s.}$$

REMARQUE 6. On peut donner un résultat semblable à (5.1) pour le mouvement brownien plan, pour les processus de Bessel d'indice 1 et 2 et pour les processus à accroissements indépendants symétriques stables d'indice $\beta \geq 1$ (cf. [18]).

EXEMPLE 2 (Processus d'Ornstein et Uhlenbeck). X est la diffusion canonique solution (forte) de l'équation différentielle stochastique:

$$dX_t = -\theta X_t\,dt + dB_t, \qquad X_0 = x,$$

où B est un mouvement brownien réel issu de 0 et θ un paramètre réel strictement positif; le processus X est récurrent positif de mesure stationnaire μ_θ de densité $y \mapsto \sqrt{\theta/\Pi}\,\exp(-\theta y^2)$.

L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ vaut:

$$\hat{\theta}_t = -\frac{\int_0^t X_s\,dX_s}{\int_0^t X_s^2\,ds} = \theta - \frac{\int_0^t X_s\,dB_s}{\int_0^t X_s^2\,ds}.$$

D'où:

$$(t\varphi(t))^{-1}\frac{\int_0^t X_s^2\,ds}{t}(\theta - \hat{\theta}_t) = (\varphi(t))^{-1}\int_0^t X_s\,dB_s.$$

Comme $t^{-1}\int_0^t X_s^2\,ds \to_{t\to+\infty} (2\theta)^{-1}$ $\mathbb{P}_{\theta,x}$ p.s. pour tout $x \in \mathbb{R}$, le théorème 6 implique:

$$\limsup_t \sqrt{\frac{t}{2\log\log t}}\,(\theta - \hat{\theta}_t)$$

$$= -\liminf_t \sqrt{\frac{t}{2\log\log t}}\,(\theta - \hat{\theta}_t) = (2\theta)^{1/2} \quad \mathbb{P}_{\theta,x} \text{ p.s. pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que les v.a. $(\sqrt{t}(\theta - \hat{\theta}_t);\ t \in \mathbb{R}_+)$ convergent en loi sous $\mathbb{P}_{\theta,x}$ vers la distribution normale de moyenne 0 et de variance 2θ.

EXEMPLE 3 (Chaîne AR1). On donne $\theta \in]-1, +1[$ et une suite $(\varepsilon_n,\ n \geq 1)$ de v.a.r. i.i.d. de fonction de répartition F centrée de variance 1. Soit X_0 une v.a.r. indépendante de la suite $(\varepsilon_n,\ n \geq 1)$. On définit la suite $(X_n,\ n \geq 1)$ par:

$$X_n = \theta X_{n-1} + \varepsilon_n.$$

Dès qu'elle est irréductible la chaîne X est récurrente positive. Sa loi stationnaire μ_θ est celle de $\sum_1^\infty \theta^{n-1}\varepsilon_n$; μ_θ a une moyenne nulle et une variance égale à $1/(1-\theta^2)$. La suite $(M_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ définie par:

$$M_n = \sum_1^n \left(X_i X_{i-1} - \theta X_{i-1}^2\right),$$

est une F.A.M. de X, telle que $\mathbb{E}_x(M_n^2) < \infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{E}_\mu(M_1^2) = 1/(1-\theta^2) = \sigma_M^2 < \infty$. On peut lui appliquer le théorème 6 sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier:

$$\begin{aligned}\limsup_n \,(\varphi(n))^{-1} \sum_1^n \left(X_i X_{i-1} - \theta X_{i-1}^2\right) &= -\liminf_n \,(\varphi(n))^{-1} \sum_1^n \left(X_i X_{i-1} - \theta X_{i-1}^2\right) \\ &= (1-\theta^2)^{-1/2} \quad \mathbb{P}_x \text{ p.s.}\end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned}\limsup_n \sqrt{\frac{n}{2\log\log n}}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) &= -\liminf_n \sqrt{\frac{n}{2\log\log n}}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \\ &= (1-\theta^2)^{1/2}\end{aligned} \tag{5.2}$$

en posant $\hat{\theta}_n = \sum_1^n X_i X_{i-1} / \sum_1^n X_{i-1}^2$ estimateur des moindres carrés de θ.

Remarquons que $\hat{\theta}_n \to_{n\to\infty} \theta$ $\mathbb{P}_x$ p.s.; que lorsque F est la loi normale centrée réduite, $\hat{\theta}_n$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ; enfin que la suite $[\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)]$ converge en loi vers la distribution normale de moyenne 0 et de variance $1 - \theta^2$.

L'exemple précédent montre que la loi du logarithme itérée peut être utilisée pour préciser la vitesse presque-sûre d'un estimateur. Voir [19] pour une généralisation du résultat (5.2) aux chaînes AR1 multidimensionnelles non nécessairement irréductibles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATHREYA, K. B. and NEY, P. (1978). A new approach to the limit theory of recurrent Markov chains. *Trans. Amer. Math. Soc.* **245** 493–501.

[2] AZEMA, J., KAPLAN-DUFLO, M. and REVUZ, D. (1967). Mesure invariante sur les classes récurrentes des processus de Markov. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **8** 157–181.

[3] BALDI, P. (1986). Large deviations and functional iterated logarithm law for diffusion. *Probab. Theory Related Fields* **71** 435–453.

[4] BHATTACHARYA, R. N. (1982). On the functional central limit theorem and the law of the iterated logarithm for Markov processes. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **60** 185–201.

[5] BULINSKII, A. V. (1980). A new variant of the functional law of the iterated logarithm. *Theory Probab. Appl.* **25** 493–503.

[6] HALL, P. G. and HEYDE, C. C. (1976). On a unified approach to the law of iterated logarithm for martingales. *Bull. Austral. Math. Soc.* **14** 435–477.

[7] HALL, P. G. and HEYDE, C. C. (1980). *Martingale Limit Theory and Its Application*. Academic, New York.

[8] HEYDE, C. C. and SCOTT, D. I. (1973). Invariance principles for the law of iterated logarithm for martingales and processes with stationary increments. *Ann. Probab.* **1** 428–436.

[9] KULINICH, G. L. (1984). On the law of iterated logarithm for one-dimensional diffusion processes. *Theory Probab. Appl.* **29** 563–566.

[10] MARTIKAINEN, A. I. (1985). On the one-sided law of the iterated logarithm. *Theory Probab. Appl.* **30** 736–749.

[11] NUMMELIN, A. (1984). *General Irreducible Markov Chains and Nonnegative Operators*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[12] PAKSHIRAJAN, R. P. and SHEEHARI, M. (1970). The law of the iterated logarithm for a Markov process. *Ann. Math. Statist.* **41** 945–955.

[13] PETROV, V. V. (1968). On the law of the iterated logarithm without assumptions about existence of moments. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **59** 1068–1072.

[14] STOUT, W. F. (1970a). A martingale analogue of Kolmogorov's law of the iterated logarithm. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **15** 279–290.

[15] STOUT, W. F. (1970b). The Hartman–Wintner law of the iterated logarithm for martingales. *Ann. Math. Statist.* **41** 2158–2160.

[16] STRASSEN, V. (1964). An invariance principle for the law of the iterated logarithm. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **3** 211–226.

[17] TOUATI, A. (1983). Théorèmes de limite centrale fonctionnels pour les processus de Markov. *Ann. Inst. H. Poincaré. Probab. Statist.* **19** 43–55.

[18] TOUATI, A. (1986). Théorèmes limites pour des processus de Markov récurrents. *Probab. Theory Related Fields*. To appear.

[19] TOUATI, A. (1988). Vitesse de convergence de l'estimateur des moindres carrés dans le modèle autorégressif général. *Ann. Inst. H. Poincaré. Probab. Statist.* To appear.

U.A. 743, C.N.R.S., STATISTIQUE APPLIQUÉE
MATHÉMATIQUES, BÂTIMENT 425
91405 ORSAY CEDEX
FRANCE