The Annals of Probability
1990, Vol. 18, No. 2, 626–629

VALEURS PRISES PAR LES MARTINGALES LOCALES POSITIVES CONTINUES A UN INSTANT DONNE

PAR C. STRICKER

Université de Franche-Comté

In a previous paper we proved that a necessary and sufficient condition for all martingales of a given filtration $(\mathscr{F}_t)$ to be continous is that, for every stopping time T and every $\mathscr{F}_T$-measurable random variable X, there exists a continuous local martingale M with $M_T = X$ a.s. The aim of this paper is to study the following question: Can we choose $M \geq 0$ whenever $X \geq 0$? We also give a negative answer to Conjecture 7.1 of Harrison and Pliska.

1. Introduction. Dudley [2] a établi le joli résultat suivant relatif à la filtration naturelle $(\mathscr{F}_t)$ d'un mouvement brownien réel (B_t) nul en 0: Pour tout $t > 0$ et toute variable aléatoire $(\mathscr{F}_t)$ mesurable X, il existe un processus prévisible H défini sur $[0, t]$ intégrable par rapport à B au sens des martingales locales (i.e., $\int_0^t H_s^2\, ds < +\infty$ p.s.) et tel que $\int_0^t H_s\, dB_s = X$. Dans Emery, Stricker et Yan, [3] nous avions étendu ce résultat à des filtrations plus générales et au cas où un temps d'arrêt remplace t. Dans une filtration $(\mathscr{F}_t)$ où toutes les martingales sont continues, si T est un temps d'arrêt et X une variable aléatoire $\mathscr{F}_T$-mesurable, il existe une martingale locale M telle que $M_T = X$ et nulle en 0 sur $\{S > 0\}$ où S est le plus petit temps d'arrêt vérifiant $\mathscr{F}_S = \mathscr{F}_T$; en outre si L est une martingale locale qui n'est constante sur aucun intervalle $]S(\omega) - \varepsilon(\omega), S(\omega)[$ (de telles L existent toujours) on peut prendre M de la forme $\int H_s\, dL_s$ où H est un processus prévisible L-intégrable. La démonstration de ce résultat montre qu'on peut choisir une infinité de martingales locales M vérifiant $M_T = X$, si bien qu'on peut se poser la question suivante: Peut-on choisir $M \geq 0$ lorsque $X \geq 0$? Comme toute martingale locale positive est une surmartingale, *la réponse est manifestement négative* si $P[E[X|\mathscr{F}_0] = +\infty] > 0$. En revanche lorsque $E[X|\mathscr{F}_0] < +\infty$, on peut prendre $M_t = E[X|\mathscr{F}_t]$ et *la réponse est positive*.

Rappelons que dans la modélisation retenue par Harrison et Pliska [4] la martingale locale $M_t = M_0 + \int_0^t H_s\, dL_s$ représente l'évolution de la valeur actualisée d'un portefeuille investi en actions et obligations dont la valeur finale est $X \geq 0$. Bien entendu il serait souhaitable que M reste positive ou nulle, ce qui nous amène à la deuxième question: Lorsque $X \geq 0$, peut-on choisir une martingale locale *positive* de la forme $M_t = M_0 + \int_0^t H_s\, dL_s$ vérifiant encore $M_T = X$?

Dans un premier temps nous verrons que la réponse à cette question est négative en général; puis nous donnerons un contre-exemple à la Conjecture 7.1 de Harrison et Pliska [4] et enfin nous montrerons qu'il existe un choix

Received July 1988; revised April 1989.
AMS 1980 *subject classifications*. Primary 60G44; secondary 60H05.
Key words and phrases. Stochastic integral, local martingale, integral representation.

optimal pour M_0 lorsque le problème de représentation ci-dessus admet une solution positive. Mais nous verrons aussi qu'il n'y a pas unicité dans le choix de la statégie H même lorsque M_0 est optimal sauf bien entendu si M est une martingale.

2. Notations. Dans toute la suite $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ est un espace probabilisé complet pourvu d'une filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ qui vérifie les conditions habituelles de Dellacherie et Meyer [1]: chaque tribu $\mathscr{F}_t$ contient tous les événements négligeables de $\mathscr{F}$ et l'on a $\mathscr{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathscr{F}_{t+\varepsilon}$. Nous supposerons aussi que $\mathscr{F}_0$ est la tribu triviale. Les égalités entre variables (respectivement processus) aléatoires ont lieu à un ensemble négligeable (respectivement évanescent) près. Si (Z_t) est un processus, nous désignons par $(\mathscr{F}_t^Z)$ la filtration naturelle de (Z_t), c'est-à-dire la plus petite filtration vérifiant les conditions habituelles et à laquelle (Z_t) est adaptée. Enfin nous notons $H \cdot M$ le processus $t \to \int_0^t H_s \, dM_s$ lorsque H est un processus prévisible intégrable par rapport à la semimartingale M.

3. Un probleme de représentation. Nous allons construire un contre-exemple à la question posée dans l'introduction. Soit $(\mathscr{F}_t)$ la filtration naturelle d'un mouvement brownien bidimensionel (B_t, W_t) issu de 0. D'après la proposition 1 d'Emery, Stricker et Yan [3] nous pouvons trouver un processus prévisible (H_t) tel que $W_1^+ = \int_0^1 H_s \, dB_s$ avec $\int_0^1 H_s^2 \, ds < +\infty$ p.s. Par contre il n'existe pas de nombre réel $\alpha \geq 0$ ni de processus prévisible (K_t) tels que $\int_0^1 K_s^2 ds < +\infty$, $M_t = \alpha + \int_0^t K_s \, dB_s \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et $M_1 = W_1^+$. En effet, raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'une telle martingale locale (M_t). Comme $M_t \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, la martingale locale (M_t) est aussi une surmartingale positive si bien que $E[W_1^+ \mid \mathscr{F}_t] \leq M_t$ pour tout $t \geq 0$. Il en résulte que $M_t - W_t \geq 0$ pour $0 \leq t \leq 1$. Or $\langle M - W, M - W \rangle_t = \int_0^t (K_s^2 + 1_{[0,1]}(s)) \, ds$. Par changement de temps, on se ramène à un mouvement brownien issu de α et arrêté à l'instant $\langle M - W, M - W \rangle_\infty \geq 1$. Donc $(M_t - W_t)$ prend aussi des valeurs négatives, ce qui est absurde. Nous verrons dans le paragraphe 5 que nécessairement $\alpha \geq \sup_t E[W_1^+ \mid \mathscr{F}_t]$, ce qui montrera à nouveau qu'il est impossible de trouver un processus (M_t) vérifiant les conditions précédentes.

4. Une conjecture de Harrison et Pliska. Supposons que la filtration $(\mathscr{F}_t)$ soit la filtration naturelle d'une martingale locale continue (L_t) et que X soit une variable aléatoire positive, intégrable, $\mathscr{F}_1$-mesurable et telle qu'il existe une martingale locale *positive* de la forme $\alpha + H \cdot L$ vérifiant $X = \alpha + (H \cdot L)_1$. *Est-il possible de choisir α et H de telle sorte que $\alpha + H \cdot L$ soit de plus une martingale* (qui sera nécessairement positive)? Puisque $\alpha + H \cdot L$ est une martingale locale positive, donc une surmartingale positive, la valeur initiale α est supérieure ou égale à $E[X]$ avec égalité si et seulement si $\alpha + H \cdot L$ est une martingale. Rappelons que dans la modélisation retenue par Harrison et Pliska, la martingale locale $M = \alpha + H \cdot L$ représente la valeur actualisée d'un portefeuille investi en actions et obligations. L'investisseur a tout intérêt à minimiser la valeur initiale α et à choisir *si possible* la valeur

$\alpha = E[X]$. L'exemple que nous allons fournir maintenant montrera que ce choix est impossible à réaliser en général. Les hypothèses et notations seront celles du paragraphe précédent: $(\mathscr{F}_t)$ est la filtration naturelle d'un mouvement brownien bidimensionnel (B_t, W_t) issu de 0. Soit $L = e^W \cdot B$. Le crochet $\langle L, L\rangle_t = \int_0^t e^{2W_s}\, ds$ est $(\mathscr{F}_t^L)$ adapté, si bien que W et $B = e^{-W} \cdot L$ le sont aussi; donc la filtration naturelle de L est égale à la filtration naturelle de (B, W). Posons $X = f(W_{1/2})$ où f est une fonction borélienne positive bornée. Choisissons $\alpha = \sup f(x)$ et considérons le processus prévisible $K_t = (1-t)^{-1} 1_{[1/2, 1[}(t)$. La martingale locale continue $S = \alpha + K \cdot L$ explose à l'instant $t = 1$, c'est-à-dire oscille entre $+\infty$ et $-\infty$. Si $T = \inf\{t \geq \frac{1}{2},\ S_t = X\}$, alors la martingale locale positive $N = S^T$ est de la forme $N = \alpha + H \cdot L$ avec $H = K 1_{[0, T]}$ et elle vérifie la condition finale $X = N_1$. Toutefois si X n'est pas une variable p.s. constante, il *n'existe pas* de processus prévisible (R_t) vérifiant $\int_0^1 R_s^2\, ds < +\infty$, et pour tout $t \geq 0$, $E[X|\mathscr{F}_t] = E[X] + \int_0^t R_s\, dL_s$ car l'indépendance de W et B entraîne que le crochet des martingales $(E[X|\mathscr{F}_t])$ et (L_t) est constant.

5. Un probleme d'optimisation. Nous venons de voir que l'investisseur ne peut pas choisir en général la valeur $\alpha = E[X]$. Cependant peut-il choisir une stratégie *optimale*? Avant de donner une réponse positive à cette question fixons quelques notations. L est une martingale locale continue fixée, T un temps d'arrêt et X une variable positive, $\mathscr{F}_T$ mesurable et intégrable. Nous noterons $\mathscr{C}(X)$ l'ensemble des réels α tels qu'il existe un processus prévisible H, L intégrable vérifiant $X = \alpha + (H \cdot L)_T$ et $\alpha + H \cdot L \geq 0$. Un tel processus prévisible H sera dit *associé à* α.

PROPOSITION. *Si $\mathscr{C}(X)$ n'est pas vide, il possède un élément minimal α_0 vérifiant $\alpha_0 \geq E[X]$. L'égalité $\alpha_0 = E[X]$ a lieu si et seulement si $\alpha_0 + H \cdot L$ est une martingale. En particulier si (L_t) reste une martingale locale par rapport à la filtration grossie $(\mathscr{G}_t)$ obtenue en rajoutant à $\mathscr{F}_0$ la variable X, alors la valeur α_0 est égale à la borne supérieure essentielle de X notée* ess sup X;

DÉMONSTRATION. Vérifions que $\alpha_0 = \inf \mathscr{C}(X)$ appartient à $\mathscr{C}(X)$. Soient α_1 et α_2 deux éléments de $\mathscr{C}(X)$. On note H^1 (resp. H^2) un processus associé à α_1 (resp. α_2). Si $\alpha_1 \geq \alpha_2$, on pose $M^1 = \alpha_1 + H^1 \cdot L$, $M^2 = \alpha_2 + H^2 \cdot L$, $S = \inf\{t > 0,\ M^1 \leq M^2\}$ et $M^3 = \alpha_2 + (H^2 1_{[0, S]} + H^1 1_{]S, +\infty[}) \cdot L$. Sous l'hypothèse $\alpha_1 > \alpha_2$, nous venons de construire un processus prévisible $H^3 = H^2 1_{[0, S]} + H^1 1_{]S, +\infty[}$ associé à α_2 et tel que $M^3 = \alpha_2 + H^3 \cdot L \leq M^1$. Comme $\alpha_0 = \inf \mathscr{C}(X)$, il existe une suite (α_n) de $\mathscr{C}(X)$ qui converge en décroissant vers α_0. Choisissons une suite (H^n) de processus prévisibles associés à (α_n) de telle sorte que pour tout $n \geq 1$, $M^n = \alpha_n + H^n \cdot L \geq \alpha_{n+1} + H^{n+1} \cdot L = M^{n+1}$. La suite (M^n) forme une suite décroissante de surmartingales positives, qui converge vers une surmartingale positive notée M. Il s'agit de montrer que la suite (H^n) converge aussi. A cet effet, introduisons pour p entier positif le temps d'arrêt $T_p = \inf\{t,\ M_t^1 \geq p\}$, si bien que pour tout

n on a la majoration $|(H^n \cdot L)^{T_p}| \le p + \alpha_1$. Grâce au théorème de convergence dominée

$$\lim_{n, m \to +\infty} E\left[\left(\int_0^{T_p}(H_s^n - H_s^m)\, dL_s\right)^2\right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n, m \to +\infty} E\left[\int_0^{T_p}(H_s^n - H_s^m)^2\, d\langle L, L\rangle_s\right] = 0.$$

Ainsi il existe un processus prévisible H vérifiant les propriétés suivantes: H est L intégrable, $(H^n \cdot L)_t$ converge p.s. vers $(H \cdot L)_t$, $\alpha_0 + H \cdot L \ge 0$ et $X = \alpha_0 + (H \cdot L)_T$. Donc H est associé à α_0. En outre $\alpha_0 = E[X]$ si et seulement si la surmartingale positive $\alpha_0 + H \cdot L$ est une martingale. Supposons que (L_t) reste une martingale locale par rapport à $(\mathscr{G}_t)$. Dans ce cas $M = \alpha_0 + H \cdot L$ est une $(\mathscr{G}_t)$ surmartingale positive prenant la valeur X à l'instant T si bien que $\alpha_0 \ge E[M_T|\mathscr{G}_0] = X$. Donc $\alpha_0 \ge \operatorname{ess\,sup} X$. Si $\alpha_0 > \operatorname{ess\,sup} X$, introduisons le temps d'arrêt $S = \inf\{t \ge 0,\ M_t = \operatorname{ess\,sup} X\}$. Comme $M_T = X$, nécessairement $S \le T$. Si H est un processus associé à α_0, il est aisé de vérifier que le processus $K = H 1_{]S, T]}$ est associé à $\alpha = \operatorname{ess\,sup} X$, c'est-à-dire α_0 n'est pas la valeur minimale de $\mathscr{E}(X)$, ce qui est absurde.

REMARQUES.

1. Revenons à l'exemple du paragraphe 3. La variable $X = W_1^+$ est indépendante de $L = B$ mais elle n'est pas bornée. La proposition précédente montre que dans ce cas $\mathscr{E}(X) = \varnothing$.
2. Dans l'exemple du paragraphe 4 il serait intéressant de déterminer α_0. Grâce à la proposition précédente on voit que la valeur α_0 est égale à la borne supérieure essentielle de f, $\mathbb{R}$ étant muni de la mesure de Lebesgue.
3. L'exemple du paragraphe 4 montre qu'il existe en général une infinité de processus H associés à α_0 [il suffit de considérer dans cet exemple les processus $K_t^n = (1-t)^{-n} 1_{[1/2, 1[}(t)$].

REFERENCES

[1] DELLACHERIE, C. et MEYER, P.-A. (1975). *Probabilité et Potentiel*, Chapitres I à IV. Hermann, Paris.

[2] DUDLEY, R. M. (1977). Wiener functionals as Itô integrals. *Ann. Probab.* **5** 140–141.

[3] EMERY, M., STRICKER, C. et YAN, J. A. (1983). Valeurs prises par les martingales locales continues à un instant donné. *Ann. Probab.* **11** 635–641.

[4] HARRISON, J. M. and PLISKA, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Process. Appl.* **11** 215–260.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES
U.A. CNRS NO. 741
UFR SCIENCES ET TECHNIQUES
16 ROUTE DE GRAY
F-25030 BESANÇON CEDEX
FRANCE