The Annals of Probability
1990, Vol. 18, No. 4, 1739–1745

REGULARITE DE FONCTIONS ALEATOIRES GAUSSIENNES A VALEURS VECTORIELLES

PAR X. FERNIQUE

Université Louis Pasteur

On donne une condition simple, suffisante pour qu'une fonction aléatoire gaussienne X sur un espace métrique séparable T à valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe lusinien et quasi-complet E ait une modification à trajectoires continues. Le résultat généralise des résultats précédents supposant X stationnaire ou à accroissements stationnaires; la preuve est basée, comme dans les situations stationnaires, sur le théorème de Talagrand relatif aux mesures majorantes qui permet, si E est un espace de Banach séparable, de majorer la loi du maximum sur T de la norme dans E de la fonction aléatoire X.

In this paper, we give a simple condition ensuring that a Gaussian random function X on a metric space T with values in a Lusin topological vector space has a modification with continuous paths. This result extends previous results where X was supposed to be stationary or have stationary increments. As in the stationary case, proof is based on Talagrand's theorem about the majorizing measures which permit us, if E is a separable Banach space, to bound the law of the maximum on T of the norm of X in E.

1. Introduction. La Physique, la Mécanique, l'Economie utilisent des fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs vectorielles. Si les théorèmes de Talagrand [7] permettent en théorie de caractériser la régularité de leurs trajectoires à partir de mesures majorantes, pourtant l'absence d'algorithmes simples pour la construction de ces mesures en limite l'efficacité; il reste donc à fournir des critères à partir de paramètres plus accessibles permettant d'exprimer des évaluations plus maniables. On a présenté ([4], [5] et [6]) de tels résultats pour les fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires ou à accroissements stationnaires sur $\mathbf{R}^d$ et pour les fonctions aléatoires d'Ornstein et Uhlenbeck sur $\mathbf{R}^+$ à valeurs dans les espaces de Banach séparables ou plus généralement dans les espaces vectoriels topologiques localement convexes et lusiniens; ils sont en fait des cas particuliers d'un résultat plus général qu'on présente ici.

On note $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{P})$ une space d'épreuves complet, $T = (T, \delta)$ un espace métrique séparable, E un espace vectoriel topologique localement convexe et lusinien ([1] et [6]), E' son dual topologique. Rappelons qu'un espace est lusinien s'il est séparé et l'image d'un espace polonais par une application continue bijective; la plupart des espaces fonctionnels classiques sont des espaces lusiniens (cf. [6], 1.7). Pour toute partie symétrique convexe fermée B

Received March 1989; revised June 1989.
AMS 1980 *subject classifications*. Primary 60G15; secondary 60B11, 60G20, 28C15.
Key words and phrases. Gaussian random functions, Gaussian random vectors, Lusin space, regularity of paths.

de E, N_B désigne la jauge de B et B^0 l'ensemble polaire de B dans E'; E est muni de sa tribu topologique. Pour toute fonction aléatoire gaussienne réelle f sur T, on note d_f la distance associée sur T:

$$\forall\, s,t \in T, \qquad d_f(s,t) = \left[\left(\mathbf{E}|\,f(s) - f(t)\,|^2\right)\right]^{1/2};$$

pour tout (t,u) appartenant à $T \times \mathbf{R}^+$, $B_f(t,u)$ est la d_f-boule fermée de centre t et de rayon u; N_f est l'entropie définie par d_f sur T: pour tout $u > 0$, $N_f(u)$ est le cardinal minimal d'un recouvrement $S_f(u)$ de T par des d_f-boules fermées de rayon u. Pour tout vecteur aléatoire gaussien x à valeurs dans E, on note d_x la distance associée sur E'. A toute fonction aléatoire gaussienne X sur T à valeurs dans E, on associe de la même manière une distance d_X sur $T \times E'$, on peut aussi pour tout y appartenant à E' lui associer une distance $d_{\langle X,y\rangle}$ sur T.

2. Enoncés des résultats. Le résultat principal est le théorème 2.1.

THÉORÈME 2.1. *Soit X une fonction aléatoire gaussienne sur un espace métrique séparable T à valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe et lusinien E. On suppose qu'il existe un vecteur gaussien x à valeurs dans E tel que*:

$$\forall\,(t,y) \in T \times E', \qquad \mathbf{E}\langle X(t), y\rangle^2 \le \mathbf{E}\langle x, y\rangle^2.$$

On suppose aussi que pour tout y appartenant à E', $\langle X, y\rangle$ est continu en probabilité sur T. Dans ces conditions:

(a) *Pour que X ait une modification ayant toutes ses trajectoires bornées sur T dans E, il suffit que l'application*:

$$y \to \int_0^\infty \left[\log N_{\langle X,y\rangle}(u)\right]^{1/2} du$$

soit continue sur E' pour la topologie forte.

(b) *On suppose que E est quasi-complet; pour que X ait une modification ayant toutes ses trajectoires continues sur T dans E, il suffit que la même application soit continue sur E' pour la topologie de la convergence compacte.*

L'argument central de la preuve sera basé sur le lemme 2.2.

LEMME 2.2. *Soient T un ensemble dénombrable, E un espace de Banach séparable, x un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans E et X une fonction aléatoire gaussienne sur T à valeurs dans E; on suppose que*:

$$\forall\,(t,y) \in T \times E', \qquad \mathbf{E}\langle X(t), y\rangle^2 \le \mathbf{E}\langle x, y\rangle^2;$$

dans ces conditions, on a:

$$\mathbf{E}\sup_{t\in T}\|X(t)\| \le c\left\{\mathbf{E}\|x\| + \sup_{\|y\|\le 1}\int_0^\infty \left[\log N_{\langle X,y\rangle}(u)\right]^{1/2} du\right\},$$

où c est une constante absolue finie.

COMMENTAIRES. L'intégrale d'entropie $\int_0^\infty [\log N_{\langle X,y\rangle}(u)]^{1/2}\,du$ est ([2]) le paramètre simple le plus efficace pour majorer $\mathbf{E}\sup_{t\in T}|\langle X(t),y\rangle|$; dans un travail précédent ([6]), on a montré que si une fonction aléatoire gaussienne X sur un espace métrique séparable T à valeurs dans un espace lusinien E a des trajectoires bornées, il existe une partie symétrique convexe fermée et bornée B de E telle que pour tout y appartenant à B^0, $\mathbf{E}\sup_{t\in T}\langle X(t),y\rangle$ soit inférieure ou égale à 1; on a prouvé aussi un résultat analogue pour la continuité des trajectoires; le théorème 2.1. caractérisera donc la régularité des trajectoires si l'intégrale d'entropie $\int_0^\infty [\log N_{\langle X,y\rangle}(u)]^{1/2}\,du$ fournit à un facteur numérique près une minoration de $\mathbf{E}\sup_{t\in T}\langle X(t),y\rangle$. C'est le cas si X est stationnaire ou à accroissements stationnaires sur $\mathbf{R}^d$ ou si X est une fonction d'Ornstein et Uhlenbeck sur $\mathbf{R}^+$.

3. Démonstration du lemme. Pour éviter des problèmes délicats de mesurabilité, nous ferons la preuve en supposant que T est fini, que E est de dimension finie n et que $\|x\|$ est égal à $\sup_{k\in[1,n]}|x_k|$; le résultat général s'en déduira, du fait de l'hypothèse de séparabilité de E.

Dans la situation particulière indiquée, X définit sur $T' = T\times[1,n]$ une fonction aléatoire X': $X'(\omega,t,k) = X_k(\omega,t)$; on écrira d_k au lieu de d_{X_k}, N_k au lieu de N_{X_k}; de même x définit sur $[1,n]$ une fontion aléatoire x': $x'(\omega,k) = x_k(\omega)$. Nous notons $D = D_{X'}$ le $d_{X'}$-diamètre de T'. Les théorèmes de Talagrand indiquent qu'il existe une constante finie c_1 et une probabilité μ sur $[1,n]$ telles que:

$$\sup_{k\in[1,n]}\int\left[\log\frac{1}{\mu\{m\in[1,n]\colon d_{x'}(k,m)\le u\}}\right]^{1/2}du \le c_1\mathbf{E}\sup_{k\in[1,n]}|x'(k)|.$$

Pour tout k appartenant à $[1,n]$ et tout $u>0$, nous notons $S(k,u)$ une partie de T de cardinal $N_k(u)$ telle que $\{B_k(s,u),\ s\in S(k,u)\}$ recouvre T. Nous notons π_k la probabilité:

$$\pi_k = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p}\sum_{s\in S(k,2^{-p})}\frac{\delta_s}{N_k(D/2^p)}.$$

A partir de μ et de $(\pi_k,\ k\in[1,n])$, nous construisons une probabilité ρ sur $T' = T\times[1,n]$:

$$\rho = \int(\delta_k\otimes\pi_k)\,d\mu(k).$$

On sait dans ces conditions ([3]) qu'il existe une constante finie c_2 telle que:

$$\mathbf{E}\sup_{t\in T}\|X(t)\| \le c_2\sup_{(t,k)\in T'}\int\left[\log\frac{1}{\rho\{(s,m)\colon d_{X'}(t,k;s,m)\le u\}}\right]^{1/2}du + \mathbf{E}\|x\|;$$

le lemme sera donc établi si on majore le deuxième membre ci-dessus par le deuxième membre de l'inégalité de l'énoncé.

Fixons (t, k) appartenant à T' et $u > 0$; pour tout (s, m) appartenant à T', on a alors l'implication:

$$d_m(s,t) \le D/2^{p+1}, \qquad d_{x'}(k,m) \le D/2^{p+3} \Rightarrow d_{X'}(t,k;s,m) \le D/2^p,$$

et par suite,

$$\rho\{(s,m) \in T': d_{X'}(t,k;s,m) \le D/2^p\} \ge \int \frac{1}{2^{p+1}N_m(D/2^{p+1})} I_{\{d_{x'}(k,m) \le D/2^{p+3}\}}\, d\mu(m);$$

on a aussi l'implication:

$$d_k(s,t) \le D/2^{p+2}, \qquad d_{x'}(k,m) \le D/2^{p+3} \Rightarrow d_m(s,t) \le D/2^{p+1},$$

et par suite puisque $\{B_k(s, D/2^{p+2}),\ s \in S(k, D/2^{p+2})\}$ recouvre T, $\{B_m(s, D/2^{p+1}),\ s \in S(k, D/2^{p+2})\}$ recouvre aussi T si $d_{x'}(k,m) \le D/2^{p+3}$, c'est-à-dire qu'on a l'implication:

$$d_{x'}(k,m) \le D/2^{p+3} \Rightarrow N_m(D/2^{p+1}) \le N_k(D/2^{p+2});$$

on en déduit:

$$\rho\{(s,m) \in T': d_{X'}(t,k;s,m) \le D/2^p\} \ge \frac{1}{2^{p+1}N_k(D/2^{p+2})} \mu\{m: d_{x'}(k,m) \le D/2^{p+3}\};$$

en intégrant, cette inégalité fournit pour tout (t, k) appartenant à T':

$$\begin{aligned}
&\int \left[\log \frac{1}{\rho\{(s,m) \in T': d_{X'}(t,k;s,m) \le u\}}\right]^{1/2} du \\
&\quad \le \sum_{p \in \mathbf{N}} \frac{D}{2^p} \left[\log \frac{1}{\rho\{(s,m) \in T': d_{X'}(t,k;s,m) \le D/2^p\}}\right]^{1/2} \\
&\quad \le \sum_{p \in \mathbf{N}} \frac{D}{2^p} \left[\log \frac{2^{p+1}N_k(D/2^{p+2})}{\mu\{m: d_{x'}(k,m) \le D/2^{p+3}\}}\right]^{1/2} \\
&\quad \le \sum_{p \in \mathbf{N}} \frac{D}{2^p} \left\{ [\log 2^{p+1}]^{1/2} + \left[\log N_k\left(\frac{D}{2^{p+2}}\right)\right]^{1/2} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left[\log \frac{1}{\mu\{m: d_{x'}(k,m) \le D/2^{p+3}\}}\right]^{1/2} \right\} \\
&\quad \le c_3 \left\{ D + \int [\log N_k(u)]^{1/2} du + \int \left[\log \frac{1}{\mu\{m: d_{x'}(k,m) \le u\}}\right]^{1/2} du \right\};
\end{aligned}$$

pour obtenir l'inégalité de l'énoncé, il reste à majorer D; l'inégalité de Hölder fournit:

$$D \leq \sup_{(t,k;s,l)} \left[\mathbf{E}|X_k(t) - X_l(s)|^2\right]^{1/2}$$

$$\leq (\pi/2)^{1/2}\left\{\sup_{(k;t,s)} \mathbf{E}|X_k(t) - X_k(s)| + \sup_{(s;k,l)} \mathbf{E}|X_k(s) - X_l(s)|\right\},$$

on en déduit:

$$D \leq (\pi/2)^{1/2}\left\{\sup_{(k,l)} \mathbf{E}|x_k - x_l| + \sup_{(k;t,s)} \mathbf{E}|X_k(t) - X_k(s)|\right\},$$

et il en résulte:

$$D \leq (2\pi)^{1/2}\left\{\mathbf{E}\|x\| + \sup_k \mathbf{E} \sup_t |X_k(t)|\right\},$$

d'où le résultat du lemme. □

COROLLAIRE. *Soient E un espace vectoriel topologique localement convexe lusinien et B une partie symétrique convexe fermée et bornée de E; soient de plus X une fonction aléatoire gaussienne sur un ensemble dénombrable S à valeurs dans E et x un vecteur gaussien à valeurs dans E; on suppose que*

$$\forall\,(t,y) \in S \times E', \qquad \mathbf{E}\langle X(t), y\rangle^2 \leq \mathbf{E}\langle x, y\rangle^2,$$

on a alors:

$$\mathbf{E} \sup_{t \in S} N_B X(t) \leq c\left\{\mathbf{E} N_B(x) + \sup_{y \in B^0} \int \left[\log N_{\langle X,y\rangle}(u)\right]^{1/2} du\right\}.$$

DÉMONSTRATION. Puisque E est lusinien et régulier, il existe ([1], 9.76, proposition 3, (b)) une suite d'hyperplans fermés séparant B de son complémentaire et donc une suite croissante (N_k) de semi-normes continues sur E convergeant simplement vers N_B; l'inégalité énoncée sera établie si on établit son analogue pour chaque semi-norme N_k pour laquelle son second membre est fini. Or l'espace E muni de la seule semi-norme N_k définit par passage au quotient et complétion un espace de Banach séparable $E_k = (E, N_k)$ dans lequel l'image canonique X_k de X vérifie les hypothèses du lemme 2.2. La conclusion de ce lemme fournit le résultat du corollaire. □

4. Démonstration du théorème. A partir du lemme et de son corollaire, la démonstration du théorème suit un schéma déjà utilisé ailleurs ([6]). Nous notons S une partie dénombrable et dense de T.

(a) Sous les hypothèses (a), il existe une partie symétrique convexe fermée et bornée B de E telle que:

$$\mathbf{E} N_B(x) + \sup_{y \in B^0} \int \left[\log N_{\langle X, y\rangle}(u)\right]^{1/2} du\} \leq 1.$$

Le corollaire du lemme 2 montre donc que $\mathbf{E}\sup_{t \in S} N_B(X(t))$ est fini; de plus X est continu en probabilité. Il existe alors un procédé général ([6], théorème 4.1.9) pour construire une modification X' de X telle que $\mathbf{E}\sup_{t \in T} N_B(X'(t))$ soit égal à $\mathbf{E}\sup_{t \in S} N_B(X(t))$ de sorte que X' a presque toutes ses trajectoires sur T bornées dans E.

(b) Sous les hypothèses (b), il existe une partie symétrique convexe compacte K de E telle que

$$\mathbf{E} N_K(x) + \sup_{y \in K^0} \int \left[\log N_{\langle X, y\rangle}(u)\right]^{1/2} du\} \leq 1.$$

Le corollaire du lemme 2 montre donc que $\mathbf{E}\sup_{t \in S} N_K(X(t))$ est fini; de plus, pour tout y appartenant à E', $\langle X, y\rangle$ a une modification à trajectoires continues sur T dans $\mathbf{R}$. Il existe alors un procédé général ([6], théorème 4.2.1) pour construire une modification X' de X ayant toutes ses trajectoires sur T continues dans E. Le théorème est donc démontré. □

5. Conjecture. Au vu de l'énoncé du théorème et de sa preuve, on peut envisager le problème suivant:

Soit X une fonction aléatoire gaussienne sur un espace métrique séparable T à valeurs dans un espace vectoriel topologique lusinien E. On suppose qu'il existe un vecteur gaussien x à valeurs dans E tel que:

$$\forall (t, y) \in T \times E', \qquad \mathbf{E}\langle X(t), y\rangle^2 \leq \mathbf{E}\langle x, y\rangle^2.$$

On suppose aussi que pour tout y appartenant à E', $\langle X, y\rangle$ est continu en probabilité sur T. On note S une partie dénombrable et dense de T. Dans ces conditions:

(a) Pour que X ait une modification ayant toutes ses trajectoires bornées sur T dans E, suffit-il que l'application:

$$y \to \mathbf{E}\sup_{t \in S}\langle X(t), y\rangle$$

soit continue sur E' pour la topologie forte?

(b) On suppose que E est quasi-complet et que pour tout y appartenant à E', $\langle X, y\rangle$ a une modification à trajectoires continues; pour que X ait une modification ayant toutes ses trajectoires continues sur T dans E, suffit-il que la même application soit continue sur E' pour la topologie de la convergence compacte?

Les techniques utilisées dans les preuves ci-dessus sont insuffisantes pour répondre, faute de savoir suivre les variations des mesures majorantes

$\mu_{\langle X, y\rangle}$ associées aux variables aléatoires réelles $\langle X, y\rangle$ par les théorèmes de Talagrand quand y parcourt E'.

REFERENCES

[1] BOURBAKI, N. (1974). *Eléments de Mathématique*, *Topologie Générale*, Chapitres 5 à 10. Hermann, Paris.

[2] DUDLEY, R. M. (1967). The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes. *J. Funct. Anal.* **1** 290–330.

[3] FERNIQUE, X. (1975). Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. *Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour IV–1974. Lecture Notes in Math.* **480** 1–96. Springer, Berlin.

[4] FERNIQUE, X. (1989). Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires à valeurs vectorielles. *Probability Theory on Vector Spaces IV. Lecture Notes in Math.* **1391**. Springer, Berlin.

[5] FERNIQUE, X. (1990). Fonctions aléatoires à valeurs vectorielles. In *Probability in Banach Spaces VI. Progress in Probability* **20**. Birkhäuser, Boston.

[6] FERNIQUE, X. (1990). Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces lusiniens. *Expositiones Math.* A paraître.

[7] TALAGRAND, M. (1987). Regularity of Gaussian processes. *Acta Math.* **159** 99–150.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UNITÉ ASSOCIÉE AU C.N.R.S.
UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
7 RUE RENÉ DESCARTES
67084 STRASBOURG CÉDEX
FRANCE