The Annals of Probability
2003, Vol. 31, No. 3, 1296–1304

EXTENSION DU THÉORÈME DE CAMERON–MARTIN AUX TRANSLATIONS ALÉATOIRES

PAR XAVIER FERNIQUE

Université Louis Pasteur et C.N.R.S.

Let G be a Gaussian vector taking its values in a separable Fréchet space E. We denote by γ its law and by $(H, \|\cdot\|)$ its reproducing Hilbert space. Moreover, let X be an E-valued random vector of law μ. In the first section, we prove that if μ is absolutely continuous relative to γ, then there exist necessarily a Gaussian vector G' of law γ and an H-valued random vector Z such that $G' + Z$ has the law μ of X. This fact is a direct consequence of concentration properties of Gaussian vectors and, in some sense, it is an unexpected achievement of a part of the Cameron–Martin theorem.

In the second section, using the classical Cameron–Martin theorem and rotation invariance properties of Gaussian probabilities, we show that, in many situations, such a condition is sufficient for μ being absolutely continuous relative to γ.

Introduction, notations. On note γ une probabilité gaussienne sur un espace de Fréchet séparable E, on note $(H, \|\cdot\|)$ l'espace autoreproduisant asssocié à γ. On se propose d'analyser la continuité absolue d'une probabilité μ relativement à γ. Ce type de propriété lié aux transformations de mesures dans l'espace de Wiener intervient dans de nombreuses situations: calcul stochastique, théorie du contrôle ou du filtrage; on renvoie à l'Introduction de Ustunel et Zakaï (2000) pour plus de détails.

La réflexion s'orientera à partir de deux exemples.

EXEMPLE 1 (Le théorème de Cameron–Martin). Supposons que μ soit de la forme $\mu = \tau_a\gamma, a \in E$, on sait alors [Fernique (1997), 2.6] que μ est absolument continue relativement à γ (en fait équivalente à γ) si et seulement si a est un élément de H.

Cet exemple nous permet en particulier de nous limiter au cas où γ et éventuellement μ sont centrées.

EXEMPLE 2 [Le cas où μ est gaussienne (centrée)]. Supposons pour simplifier que E soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et que γ soit la loi du vecteur gaussien fondamental $G = (g_n, n \in \mathbb{N})$ à composantes indépendantes de lois respectives $N(0, 1)$ de sorte que $H = \ell_2$; supposons aussi que μ soit la loi d'un vecteur aléatoire $X = G + Y$ où

Received October 2001; revised May 2002.

AMS 2000 subject classifications. Primary 60G15, 60G30; secondary 28D05.

Key words and phrases. Théorème de Cameron–Martin, probabilité gausssienne, absolue continuité.

$Y = (y_n, n \in \mathbb{N})$ est gaussien, indépendant de G et à composantes indépendantes; dans cette situation réduite, un théorème de Rozanov (1962), couplé avec les propriétés d'intégrabilité gaussiennes, indique que μ est absolument continue relativement à γ (en fait équivalente à γ) si et seulement si $\mathbf{P}\{Y \in \ell_4\} = 1$; la condition "$\mathbf{P}\{Y \in \ell_2\} = 1$" est alors suffisante, mais n'est pas nécessaire et la situation semble donc radicalement différente de celle du premier exemple. En fait on peut opérer un rapprochement:

Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y'_n = \big[[1 + \mathbf{E}|y_n|^2]^{1/2} - 1\big] g_n,$$
$$x'_n = g_n + y'_n = [1 + \mathbf{E}|y_n|^2]^{1/2} g_n,$$
$$Y' = (y'_n, n \in \mathbb{N}), \qquad X' = (x'_n, n \in \mathbb{N}) = G + Y'.$$

On constate alors que X' a même loi μ que X et que μ est absolument continue relativement à γ si et seulement si $\mathbf{P}\{Y' \in H\} = 1$.

Ce type de conclusion s'étend à une situation plus générale: Dans le cas où E est un espace de Fréchet séparable arbitraire et où γ et μ sont des probabilités gaussiennes centrées sur E, on sait en effet [Fernique (1985), Théorème 5.2.6] que μ est absolument continue relativement à γ (en fait équivalente à γ) si et seulement si μ est la loi d'un vecteur $X = G + Y$ où G a pour loi γ et où Y prend ses valeurs dans l'intersection $H \cap H_\mu$ des espaces autoreproduisants de γ et de μ.

Dans la première section de ce travail, on montre en utilisant les propriétés de concentration des vecteurs gaussiens [Ledoux et Talagrand (1991), 1.1] et le théorème de Kantorovich et Rubinstein (1958) que si une probabilité arbitraire μ sur E est absolument continue relativement à γ, alors il existe nécessairement un vecteur aléatoire G de loi γ et un vecteur aléatoire Z à valeurs dans H tels que $X = G + Z$ ait la loi μ. Ce résultat définitif complète donc harmonieusement une partie du théorème de Cameron–Martin. Sa généralité est un peu inattendue; on peut pourtant noter dans Ustunel et Zakaï [(2000), 2.7.1] un résultat approché du même type concernant une situation voisine.

Dans la deuxième section, on constate inversement que dans de nombreuses situations, une telle condition est suffisante pour que μ soit absolument continue par rapport à γ.

1. L'application des inégalités de concentration.

THÉORÈME 1. *Soient G un vecteur gaussien de loi γ et X un vecteur aléatoire de loi $\mu = D.\gamma$ absolument continue par rapport à γ. Il existe alors deux vecteurs aléatoires G' de même loi que G et Z à valeurs dans l'espace autoreproduisant H de G tels que $X' = G' + Z$ ait même loi μ que X et que*

$$\forall t, T > 0, \qquad \mathbf{P}\{\|Z\| > t\} \leq 6\frac{T}{t} + \int_{D>T} D\, d\gamma. \tag{1.1}$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est présentée en quatre étapes successives:

(a) Dans la première étape, nous supposons que D est inférieure ou égale à un nombre A et que G et donc X prennent leurs valeurs dans l'espace autoreproduisant H qui est alors de dimension finie; nous notons d_H la distance hilbertienne dans H, nous notons $\mathrm{Lip}(H)_1$ l'ensemble des fonctions sur H qui sont d_H-Lipschitziennes de norme de Lipschitz majorée par 1. Dans ces conditions, pour tout $f \in \mathrm{Lip}(H)_1$ et pour tout $t > 0$, les propriétés de concentration des vecteurs aléatoires gaussiens impliquent que

$$\gamma\{|f - \mathbf{E}f(G)| > t\} = \mathbf{P}\{|f(G) - \mathbf{E}f(G)| > t\} \le \exp[-t^2/2];$$

les hypothèses sur X impliquent alors

$$\mathbf{P}\{|f(X) - \mathbf{E}f(G)| > t\} = \mu\{|f - \mathbf{E}f(G)| > t\} \le A \times \exp[-t^2/2].$$

En intégrant, ceci fournit pour tout $f \in \mathrm{Lip}(H)_1$,

$$|\mathbf{E}f(X) - \mathbf{E}f(G)| \le \mathbf{E}|f(X) - \mathbf{E}f(G)| \le A \times \sqrt{\pi/2}\,.$$

Le théorème de Kantorovich et Rubinstein indique alors [Dudley (1976), Kantorovich et Rubinstein (1958), Rachev et Rüschendorf (1998)] que dans cette situation particulière, on peut construire effectivement deux vecteurs aléatoires G' de même loi que G et Z à valeurs dans l'espace autoreproduisant H de G tels que $G' + Z$ ait même loi que X et que

$$\mathbf{E}\|Z\| \le A \times \sqrt{\pi/2}\,.$$

Ceci termine l'étape fondamentale de la preuve. Les étapes suivantes utiliseront des approximations adaptées.

(b) Nous conservons maintenant la seule hypothèse de majoration de D par le nombre A et nous supprimons l'hypothèse que G est à valeurs dans H. Nous notons θ l'application canonique [Fernique (1997), 2.1] de H sur l'adhérence du dual E' de E dans $\mathbf{L}^2(\gamma)$, nous choisissons une base orthonormale $(h_n, n \in \mathbb{N})$ de H de sorte que son image par θ soit contenue dans E'; pour tout $N \in \mathbb{N}$, nous notons F_N l'application de E dans E définie par

$$\forall\, x \in E, \qquad F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \langle x, \theta h_n\rangle h_n,$$

et nous posons

$$G_N = F_N(G) = \sum_{n=1}^{N} \langle G, \theta h_n\rangle h_n,$$

$$X_N = F_N(X) = \sum_{n=1}^{N} \langle X, \theta h_n\rangle h_n.$$

Nous notons H_N le sous-espace de H engendré par $(h_n, n \leq N)$. Alors G_N et X_N sont des vecteurs aléatoires à valeurs dans $H_N \subset E$; G_N est gaussien et prend ses valeurs dans H_N qui est son espace autoreproduisant; G_N et X_N sont les images de G et X par la même application F_N de sorte que la loi de X_N est absolument continue par rapport à celle de G_N et sa densité est majorée par A; on peut donc leur appliquer les conclusions de la première étape et construire deux vecteurs aléatoires G'_N de même loi que G_N et X'_N de même loi que X_N tels que

$$\mathbf{E}\|X'_N - G'_N\| \leq A \times \sqrt{\pi/2}.$$

Remarquons maintenant que la suite $\{G_N, N \in \mathbb{N}\}$ converge p.s. vers G dans E, cette propriété s'écrit en fonction de la loi γ de G,

$$\gamma\left\{x \in E : \sum_n \langle x, \theta h_n\rangle h_n \text{ converge vers } x\right\} = 1,$$

l'absolue continuité de μ relativement à γ implique alors que

$$\mu\left\{x \in E : \sum_n \langle x, \theta h_n\rangle h_n \text{ converge vers } x\right\} = 1;$$

ceci signifie que la suite $\{X_N, N \in \mathbb{N}\}$ converge p.s. vers X et dans ces conditions, l'isonomie implique que les suites $\{G'_N, N \in \mathbb{N}\}$ et $\{X'_N, N \in \mathbb{N}\}$ convergent en loi dans E; la suite double $\{(G'_N, X'_N), N \in \mathbb{N}\}$ est alors tendue dans E et on peut en extraire une suite partielle convergeant en loi qu'on peut même réaliser de sorte qu'elle converge p.s. dans E vers une limite (G', X'); G' a la même loi que G, X' a la même loi que X; le lemme de Fatou assure que

$$\mathbb{E}\|G' - X'\| \leq A \times \sqrt{\pi/2}.$$

Ceci termine la deuxième étape de la preuve.

(c) En troisième étape, nous supposons que la densité D est arbitraire; nous posons $A_0 = 0$ et pour tout $n > 0$,

$$A_n = 2^{n-1}, \qquad E_n = \{D \in [A_{n-1}, A_n[\},$$

$$D_n = \mathbf{I}_{E_n} \times D, \qquad \mu_n = \begin{cases} D_n.\gamma \Big/ \int D_n\, d\gamma & \text{si } \int D_n\, d\gamma > 0, \\ \gamma, & \text{sinon;} \end{cases}$$

on applique successivement pour tout $n > 0$, le résultat de la deuxième étape à G et à X_n de loi μ_n en réalisant des vecteurs aléatoires G'_n, X'_n de lois respectives γ, μ_n sur des espaces d'épreuves respectifs $(\Omega_n, \mathbf{P}_n)$ de sorte que

$$\mathbf{E}\|X'_N - G'_N\| \leq \left[A_n \Big/ \int D_n\, d\gamma\right] \times \sqrt{\pi/2} \qquad \text{si } \int D_n\, d\gamma > 0.$$

Dans ces conditions, sur l'espace somme $\Omega = \sum \Omega_n$ muni de la probabilité $\mathbf{P} = \sum(\int D_n\, d\gamma) \times \mathbf{P}_n$, on construit les vecteurs aléatoires G' et X' par recollements

$$G'(\omega) = G'_n(\omega), \qquad X'(\omega) = X'_n(\omega) \qquad \text{si } \omega \in \Omega_n;$$

on pose $Z = X' - G'$; alors G' a la même loi que G, X' a la même loi que X et

$$\mathbf{P}\{Z \in H\} = \sum\left(\int D_n\, d\gamma\right) \times \mathbf{P}_n\{G'_n - X'_n \in H\} = 1.$$

(d) Dans cette étape finale, nous évaluons la loi de Z; sa construction fournit pour tout $t > 0$ et tout $N > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\|Z\| > t\} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int D_n\, d\gamma \times \left[1 \wedge (\mathbf{E}\|X'_n - G'_n\|/t)\right] \\ &\leq (1/t)\sqrt{\pi/2} \sum_{n \leq N} \sup D_n + \sum_{n \geq N+1} \int D_n\, d\gamma \\ &\leq \sqrt{\pi/2} \times 2^N/t + \int_{D \geq 2^{N-1}} D\, d\gamma.\end{aligned}$$

On obtient alors la majoration (1.1) en choisissant convenablement N en fonction de T. La preuve du théorème est complète. $\square$

2. Des propriétés réciproques. Dans ce paragraphe, on utilise les mêmes notations et on suppose inversement que le vecteur X a même loi que $G + Z$ où le vecteur aléatoire Z prend ses valeurs dans l'espace autoreproduisant H de G; on pose la question:

Dans quelles conditions, peut-on affirmer que la loi μ de X est absolument continue par rapport à la loi γ de G?

2.1. *Des exemples classiques.*

Des situations positives. La situation la plus simple est celle où la loi de Z est atomique; le théorème de Cameron–Martin conclut alors directement: μ est en fait équivalente à γ. Si la loi de Z est discrète ou si Z est indépendant de G, on conclut de même. Le cas gaussien a été détaillé dans l'Introduction.

Des situations négatives. Des cas de réponse négative sont les cas triviaux où il existe une suite $(y_n, n \in \mathbb{N}) \subset E'$ telle que

$$\mu\left\{\lim_n \langle x, y_n\rangle = 0\right\} = 1, \qquad \gamma\left\{\lim_n \langle x, y_n\rangle = 0\right\} \neq 1.$$

C'est en particulier le cas si X étant gaussien, les espaces autoreproduisants de X et de G sont différents.

2.2. *Un énoncé général.*

THÉORÈME 2. *Soient G et X deux vecteurs aléatoires à valeurs dans un espace de Fréchet localement convexe séparable E; on note γ la loi de G. On suppose que G est gaussien; on suppose aussi que X est de la forme $G+Y$ où Y est indépendant de G et que X a même loi que $G+Z$ où Z est un vecteur aléatoire à valeurs dans l'espace autoreproduisant H de G. Dans ces conditions, pour tout $\lambda \in [0,1[$, la loi μ_λ de $X_\lambda = G + \lambda Y$ est absolument continue relativement à la loi γ de G et vérifie*

$$\forall p > 1,\ \forall t > 0,\ \forall A \in \mathcal{B}(E),$$

(2.1)
$$\mu_\lambda(A) \le \mathbf{P}\{\|Z\| > t\} + \exp\left[\frac{(p-1)\lambda^2 t^2}{2(1-\lambda^2)}\right] \times [\gamma(A)]^{1-1/p}.$$

REMARQUE. On aurait préféré énoncer une propriété d'absolue continuité pour la loi μ de X. On doit noter que dans la situation du théorème classique, l'absolue continuité de μ_λ pour une valeur non nulle de λ implique la même absolue continuité pour toute autre valeur de λ. La situation plus générale peut être différente.

2.3. *Un exemple.* On détaille ici un exemple pour illustrer les différentes structures utilisées par les Théorèmes 1 et 2.

Sur $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soit G un vecteur gaussien de loi $\gamma = \gamma_\infty = N(0, I)$; soit de plus Y indépendant de G à composantes indépendantes de lois respectives définies par

$$\mathbf{P}\{y_n = 0\} = 1 - 1/n, \qquad \mathbf{P}\{y_n = \sqrt{2\log n}\} = 1/n.$$

Nous notons η la loi de Y et pour tout $\lambda > 0$, μ_λ la loi de $X_\lambda = G + \lambda Y$.

Dans ces conditions, l'espace autoreproduisant est $H = \ell_2$ et dans cet exemple, $\mathbf{P}\{Y \in \ell_2\} = 0$ et même $\mathbf{P}\{Y \in \ell_\infty\} = 0$.

Pour $\lambda \ge 1$, μ_λ est étrangère à γ; on constate en effet dans ce cas que la série

$$\sum_{n>1} [\log n]^{-a} \times \mathbf{I}_{\{|g_n| > [2\log n]^{1/2}\}}$$

converge p.s. et en fait dans L_1 dès que $a > 1/2$, alors que la série

$$\sum_{n>1} [\log n]^{-a} \times \mathbf{I}_{\{|g_n + \lambda y_n| > [2\log n]^{1/2}\}}$$

ne converge p.s. et en fait dans L_1 que si $a > 1$.

Par contre, μ_λ est équivalente à γ pour $\lambda \in [0,1[$; on le vérifiera en utilisant le critère du Corollaire 2.2 de Fernique (1994) [poser $t_n = c\sqrt{2\log n}$, $c = 1 + (1-\lambda)^2 > 1$].

Cet exemple fournit donc en appliquant les Théorèmes 1 et 2, une situation où $Y/2$ est indépendant de G, où $G + Y/2$ a une loi équivalente à celle de G, où il existe un vecteur G' de même loi que G et un vecteur Z à valeurs dans ℓ_2 tels que $G' + Z$ ait même loi que $G + Y/2$.

On ne peut pas confondre ici $Y/2$ et Z, car le couple $(G, Y/2)$ est indépendant alors que (G', Z) ne l'est pas et que Z est à valeurs dans ℓ_2 alors que $Y/2$ ne l'est pas (il n'est même pas dans ℓ_∞).

2.4. *Lemme préliminaire.* L'outil technique pour la preuve du théorème est fourni par un lemme basé principalement sur le théorème classique de Cameron–Martin:

Pour tout nombre $\lambda \in [0, 1]$ et toute fonction f mesurable et bornée sur E, on note $M_\lambda f$ la fonction définie sur E par

$$\forall z \in E, \qquad M_\lambda f(z) = \int f\Big[\lambda(G+z) + \sqrt{1-\lambda^2}\,g'\Big]\,d\gamma(g'). \tag{2.2}$$

LEMME 1. (a) *On suppose que z appartient à l'espace autoreproduisant H de G; dans ces conditions et pour tout $p > 1$, on a*

$$\begin{aligned} |M_\lambda f(z)| \le {} & \left[\int \Big| f\big(\lambda G + \sqrt{1-\lambda^2}\,g'\big)\Big|^q\,d\gamma(g')\right]^{1/q} \\ & \times \exp\left[\frac{(p-1)\lambda^2\|z\|^2}{2(1-\lambda^2)}\right], \qquad q = \frac{p}{p-1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

(b) *Soit de plus Z un vecteur aléatoire à valeurs dans H; pour tout $p > 1$ et tout $T > 0$, on a*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{1 \wedge |M_\lambda f(Z)|\} \le {} & \mathbf{P}\{\|Z\| > T\} \\ & + \exp\left[\frac{(p-1)\lambda^2\|T\|^2}{2(1-\lambda^2)}\right] \times [\mathbf{E}|f(G)|^q]^{1/q}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

(c) *Soit Y un vecteur aléatoire à valeurs dans E indépendant de G. On suppose que $G + Y$ a même loi que $G + Z$; dans ces conditions et pour tout $\lambda \in]0, 1[$, $M_\lambda f(Y)$ a même loi que $M_\lambda f(Z)$.*

De plus pour toute fonction f mesurable et bornée sur E, on a

$$\mathbf{E} f(G + \lambda Y) = \mathbf{E} M_\lambda f(Y). \tag{2.5}$$

DÉMONSTRATION. (a) On utilise le théorème de Cameron–Martin [Fernique (1997), Théorème 2.6.1]:

Fixons λ, G et posons

$$\forall g' \in E, \qquad F(g') = f\Big(\lambda G + \sqrt{1-\lambda^2}\,g'\Big); \qquad \forall z \in H, \qquad z' = \frac{\lambda z}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Alors $M_\lambda f(z)$ est égal à $\int F(g')\,d\big(\tau_{z'}\gamma\big)(g')$ et le théorème de Cameron–Martin implique

$$M_\lambda f(z) = \int F(g') \exp\big[(\theta z')(g') - \|z'\|^2/2\big]\,d\gamma(g').$$

A cette dernière intégrale, on applique une (q,p)-inégalité de Hölder qui fournit

$$|M_\lambda f(z)| \leq \left[\int \left|f\left(\lambda G+\sqrt{1-\lambda^2}g'\right)\right|^q d\gamma(g')\right]^{1/q}$$
$$\times \left[\int \exp\left[p(\theta z' - \|z'\|^2/2)\right] d\gamma\right]^{1/p}.$$

La dernière intégrale se calcule explicitement et fournit le résultat annoncé.

(b) Avec les notations de l'énoncé et avant d'intégrer $\{1 \wedge |M_\lambda f(Z)|\}$, on le majore par 1 si $\|Z\|$ est supérieur à T et en utilisant (2.3) sinon. En intégrant sous cette forme, on obtient

$$\mathbf{E}\{1 \wedge |M_\lambda f(Z)|\} \leq \mathbf{P}\{\|Z\| > T\} + \exp\left[\frac{(p-1)\,\lambda^2 T^2}{2(1-\lambda^2)}\right]$$
$$\times \left[\int\left\{\int \left|f\left(\lambda g+\sqrt{1-\lambda^2}g'\right)\right|^q d\gamma(g')\right\}^{1/q} d\gamma(g)\right].$$

Pour majorer le dernier facteur, on utilise une inégalité de Hölder et l'invariance par rotation de la probabilité gaussienne γ qui fournissent

$$\left[\int\left\{\int \left|f\left(\lambda g+\sqrt{1-\lambda^2}g'\right)\right|^q d\gamma(g')\right\}^{1/q} d\gamma(g)\right]$$
$$\leq \left[\iint \left|f\left(\lambda g+\sqrt{1-\lambda^2}g'\right)\right|^q d\gamma(g')\,d\gamma(g)\right]^{1/q} = [\mathbf{E}|f(G)|^q]^{1/q}$$

c'est la conclusion (b).

(c) La première conclusion résulte du fait que $G+Y$ et $G+Z$ ont même loi; la seconde résulte de l'indépendance de G et de Y, la preuve du lemme est complète. □

2.5. *Démonstration du théorème.* On fixe $\lambda \in]0,1[$ et pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$, on applique le lemme ci-dessus à $f = \mathbf{I}_A$. La Propriété 2.5 fournit

$$\mathbf{P}\{G+\lambda Y \in A\} = \int f\,d\mu_\lambda = \mathbf{E}M\lambda f(Y);$$

puisque f prend ses valeurs dans $[0,1]$, la Définition 2.2 de $M_\lambda f$ implique que

$$1 \wedge |M_\lambda f(Y)| = M_\lambda f(Y).$$

On déduit donc de la Propriété 2.4, en prenant par exemple $p=2$

$$\forall T>0, \qquad \mu_\lambda(A) \leq \mathbf{P}\{\|Z\|>T\} + \exp\left[\frac{\lambda^2T^2}{2(1-\lambda^2)}\right][\gamma(A)]^{1/2}.$$

Cette inégalité implique

$$\forall A \in \mathcal{B}(E), \qquad \gamma(A)=0 \quad\Longrightarrow\quad \mu_\lambda(A) \leq \lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\{\|Z\|>T\} = 0,$$

et donc l'absolue continuité de μ_λ relativement à γ. Le théorème est démontré.

2.6. *Un exemple*: *le cas du chaos multiplicatif p.s. borné.*

COROLLAIRE 1. *On suppose que* $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et que les composantes de* $G = (g_n, n \in \mathbb{N})$ *sont indépendantes et de lois normales* $N(0,1)$. *On suppose aussi que* X *est de la forme* $G + Y$ *où* Y, *à composantes indépendantes*, *est indépendant de* G; *on suppose enfin que* $\mathbf{P}\{Y \in \ell_\infty\} = 1$. *Dans ces conditions*, *la loi de* X *est équivalente à celle de* G *si et seulement si* X *a même loi que* $G + Z$ *où* Z *est un vecteur aléatoire à valeurs dans* ℓ_2.

DÉMONSTRATION. Elle résulte des Théorèmes 1 et 2 et du fait que dans les conditions indiquées, l'absolue continuité de μ_λ relativement à γ pour $\lambda \in]0,1[$ s'étend aux autres valeurs de λ [Kitada et Sato (1989)] et implique l'équivalence. □

REFÉRÉNCES

DUDLEY, R. M. (1976). Probability and metrics. Aarhus Univ.

FERNIQUE, X. (1985). Gaussian random vectors and their reproducing kernel Hilbert spaces. Technical Report Series 34, Ottawa Univ.

FERNIQUE, X. (1994). Sur l'équivalence de certaines mesures produit. *Probab. Theory Related Fields* **98** 77–90.

FERNIQUE, X. (1997). Fonctions aléatoires gaussiennes, vecteurs aléatoires gaussiens. Les Publications C.R.M., Montréal.

KANTOROVICH, L. V. et RUBINSTEIN, G. SH. (1958). On the space of completely additive functions. *Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom.* **13** 52–59.

KITADA, K. et SATO, H. (1989). On the absolute continuity of infinite product measure and its convolution. *Probab. Theory Related Fields* **81** 609–627.

LEDOUX, M. et TALAGRAND, M. (1991). *Probability in Banach spaces*. Springer, Berlin.

RACHEV, S. T. et RÜSCHENDORF, L. (1998). *Mass Transportation Problems*. Springer, Berlin.

ROZANOV, YU. A. (1962). On the density of one Gaussian measure with respect to another. *Theory Probab. Appl.* **7** 82–87.

USTUNEL, A. S. et ZAKAÏ, M. (2000). *Transformation of Measure on Wiener Space*. Springer, Berlin.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR ET C.N.R.S.
7 RUE RENÉ DESCARTES
67084 STRASBOURG CEDEX
FRANCE
E-MAIL: fernique@math.u-strasbg.fr