## Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

Soient, comme précédemment, $s$ et $z$ deux variables liées par une relation algébrique de genre $p$ et $R$ la surface de Riemann correspondante. Considérons une équation linéaire d'ordre $n$

$$\frac{d^n u}{dz^n} + \varphi_1(s, z)\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} + \varphi_2(s, z)\frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}} + \ldots + \varphi_n(s, z)u = 0,$$

les coefficients $\varphi_1(s, z)$, $\varphi_2(s, z)$, ..., $\varphi_n(s, z)$ étant des *fonctions rationnelles* de $s$ et $z$.

L'intégrale générale $u$ de cette équation peut cesser d'être uniforme dans le voisinage de deux sortes de points: 1° les points de la surface de Riemann où certains des coefficients $\varphi_i(s, z)$ deviennent infinis; 2° les points de ramification de cette surface de Riemann.

1° Prenons d'abord un point $\alpha$ de la surface de Riemann où certains coefficients $\varphi_i(s, z)$ deviennent infinis, ce point étant distinct des points de ramification. Nous supposons que, dans le voisinage de ce point, l'équation différentielle admette un système fondamental d'intégrales dont tous les éléments restent finis, pour $z = \alpha$, quand on les a préalablement multipliés par une puissance convenable de $z - \alpha$; et nous supposons de plus que *l'équation fondamentale déterminante* de M. Fuchs relative au point singulier $z = \alpha$ ne possède que des racines *entières*. (Voyez le Mémoire de M. Fuchs, Journal de Crelle T. 66, ou la Thèse présentée par M. Tannery à la Faculté des Sciences de Paris 1874, pages 41 et suiv.) Nous supposerons ces conditions remplies en tous les points ordinaires de la surface de Riemann où certains coefficients $\varphi_i(s, z)$ deviennent infinis, les points à l'infini compris. Alors, dans le voisinage de chacun de ces points, $z = \alpha$, de la surface de Riemann, l'intégrale générale, ou bien sera uniforme ou bien contiendra dans son expression des puissances de $\log(z - \alpha)$; dans ce dernier cas *nous dirons que le point $z = \alpha$ est un point critique logarithmique de l'intégrale générale.*

2° Prenons maintenant un point de ramification $z = c$ et supposons que ce soit un point de ramification d'ordre $m$. Alors pour étudier l'intégrale générale dans le voisinage de ce point, nous ferons avec C. NEUMANN, d'après RIEMANN,

$$z - c = (\zeta - \gamma)^m$$

(C. NEUMANN, loc. cit. pages 73—74), $\zeta$ étant une nouvelle variable indépendante et $\gamma$ une constante. Dans le voisinage de $\zeta = \gamma$, les coefficients de l'équation différentielle définissant $u$ en fonction de $\zeta$ seront uniformes. Nous supposerons ces coefficients tels que l'équation admette, dans le voisinage de $\zeta = \gamma$, un système fondamental d'intégrales dont les éléments restent finis pour $\zeta = \gamma$ quand on les a préalablement multipliés par une puissance convenable de $\zeta - \gamma$, et *que l'équation fondamentale déterminante* n'admette *que des racines entières*. Alors, dans le voisinage de $\zeta = \gamma$, ou bien l'intégrale générale sera uniforme, ou bien elle contiendra dans son expression des puissances de $\log(\zeta - \gamma)$ et, dans ce dernier cas, nous dirons que le point de ramification $z = c$ est un point *critique logarithmique de l'intégrale.*

Telles sont les conditions que nous supposons remplies et qui caractérisent la classe d'équations différentielles linéaires dont nous nous occupons. D'après les méthodes données par M. FUCHS, on pourra toujours reconnaître si une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques donnés rentre dans cette classe spéciale. On pourra de plus, d'après ces mêmes méthodes, reconnaître si dans le voisinage d'un point de la surface de Riemann l'intégrale générale est uniforme ou si elle admet ce point pour point critique logarithmique. Enfin, en supposant l'intégrale générale uniforme dans le voisinage d'un point de la surface de Riemann où certains coefficients deviennent infinis, on pourra, d'après les racines de l'équation fondamentale déterminante, voir si cette intégrale *reste finie* au point considéré, ou si elle y devient infinie auquel cas le point, qu'il soit de ramification ou non, sera dit un pôle de l'intégrale.

### *Classification des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques qui viennent d'être définies.*

En nous plaçant dans le même ordre d'idées que pour la classification des intégrales abéliennes, nous dirons:

1° qu'une de nos équations différentielles est *de première espèce ou encore que son intégrale générale est de première espèce* si cette intégrale générale est partout finie et n'a pas de points critiques logarithmiques;

2° qu'une de nos équations différentielles est *de deuxième espèce* ou encore que *son intégrale générale est de deuxième espèce* si cette intégrale générale a des *pôles mais n'a pas* de points critiques logarithmiques;

3° enfin qu'une de nos équations différentielles est de *troisième espèce* ou encore que son intégrale générale est de *troisième espèce* si cette intégrale générale possède des points critiques logarithmiques.

Les intégrales de fonctions à multiplicateurs, étudiées dans la deuxième partie, fournissent des exemples simples de ces trois espèces d'équations différentielles.

Soit par exemple

$$u = \omega(z)$$

une intégrale de première espèce de fonction à multiplicateurs: sa dérivée

$$\frac{du}{dz} = \omega'(z)$$

sera une fonction à multiplicateurs, et, comme la dérivée logarithmique d'une fonction à multiplicateurs est une fonction algébrique rationnelle en $s$ et $z$, on aura enfin

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \varphi_1(s, z)\frac{du}{dz} = 0, \tag{14}$$

$\varphi_1(s, z)$ désignant la fonction rationnelle de $s$ et $z$

$$-\frac{d \log \omega'(z)}{dz}.$$

L'équation différentielle du second ordre en $u$ ainsi obtenue rentre dans la classe que nous considérons ici. Son intégrale générale est

$$u = A\omega(z) + B,$$

$A$ et $B$ étant des constantes arbitraires: elle est donc de *première espèce* comme restant finie et n'ayant pas de points critiques logarithmiques.

De même si l'on fait

$$u = t(z, z_0)$$

où $t(z, z_0)$ désigne une intégrale de seconde espèce d'une fonction à multiplicateurs, $u$ vérifie une équation linéaire de la forme ci-dessus (14), à coefficient algébrique, ayant pour intégrale générale

$$u = At(z, z_0) + B;$$

cette nouvelle équation serait donc de *seconde espèce*.

Enfin une intégrale de troisième espèce d'une fonction à multiplicateurs

$$u = \varpi(z, z_0)$$

vérifie aussi une équation de la forme (14) ayant pour intégrale

$$u = A\varpi(z, z_0) + B;$$

cette équation différentielle serait donc de *troisième espèce*.

On pourrait, plus généralement, former ainsi des équations différentielles linéaires de la classe indiquée admettant pour intégrales des fonctions algébriques entières d'intégrales abéliennes et d'intégrales de fonctions à multiplicateurs. Mais nous laissons de coté ces exemples pour étudier les propriétés de l'intégrale générale d'une de nos équations, en suivant la méthode employée pour les intégrales de fonctions à multiplicateurs.

### *Equations différentielles de première ou deuxième espèce.*

Supposons que l'équation différentielle

$$\frac{d^n u}{dz^n} + \varphi_1(s, z)\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} + \varphi_2(s, z)\frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}} + \dots + \varphi_n(s, z)u = 0$$

soit de première ou de deuxième espèce. Alors l'intégrale générale $u$ est une fonction uniforme de $z$ sur la surface de Riemann $R_{abc}$ rendue simplement connexe à l'aide des coupures

$$a_1, a_2, \dots, a_p; \; b_1, b_2, \dots, b_p; \; c_2, c_3, \dots, c_p.$$

Nous supposerons que ces coupures présentent la disposition particulière que nous avons adoptée dans la deuxième partie et qui se trouve reproduite à la page 145; la coupure $c_h$ partant du point de croisement des coupures $a_{h-1}$ et $b_{h-1}$ pour aboutir au point de croisement des coupures $a_h$ et $b_h$ $(h = 2, 3, \ldots, p)$.

Soient $u_1(z), u_2(z), \ldots, u_n(z)$ les éléments d'un système fondamental d'intégrales, $\lambda$ un point du bord gauche d'une coupure et $\rho$ le point situé en face sur le bord droit. On aura *le long de la coupure* $a_k$

$$\begin{aligned}
u_1(\lambda) &= A_{11}^{(k)} u_1(\rho) + A_{12}^{(k)} u_2(\rho) + \ldots + A_{1n}^{(k)} u_n(\rho), \\
u_2(\lambda) &= A_{21}^{(k)} u_1(\rho) + A_{22}^{(k)} u_2(\rho) + \ldots + A_{2n}^{(k)} u_n(\rho), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_n(\lambda) &= A_{n1}^{(k)} u_1(\rho) + A_{n2}^{(k)} u_2(\rho) + \ldots + A_{nn}^{(k)} u_n(\rho),
\end{aligned}$$

les quantités $A_{ij}^{(k)}$ étant des constantes. En désignant par $S_k$ la substitution

$$S_k = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & \ldots & A_{1n}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} & \ldots & A_{2n}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}^{(k)} & A_{n2}^{(k)} & \ldots & A_{nn}^{(k)} \end{pmatrix},$$

nous écrirons pour abréger

$$u(\lambda) = S_k u(\rho)$$

pour rappeler que l'on obtient les valeurs $u_1(\lambda), u_2(\lambda), \ldots, u_n(\lambda)$ en faisant, sur $u_1(\rho), u_2(\rho), \ldots, u_n(\rho)$, la substitution $S_k$.

Ainsi l'on a

$$\text{le long de } a_k\text{:} \quad u(\lambda) = S_k u(\rho). \qquad (k=1,2,\ldots,p)$$

On aura de même, en désignant par $T_k$ une certaine substitution

$$T_k = \begin{pmatrix} B_{11}^{(k)} & B_{12}^{(k)} & \ldots & B_{1n}^{(k)} \\ B_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} & \ldots & B_{2n}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n1}^{(k)} & B_{n2}^{(k)} & \ldots & B_{nn}^{(k)} \end{pmatrix},$$

*le long de la coupure* $b_k$

$$u(\lambda) = T_k u(\rho). \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

Enfin, en désignant par $\Sigma_h$ une substitution

$$\Sigma_h = \begin{vmatrix} C_{11}^{(h)} & C_{12}^{(h)} & \ldots & C_{1n}^{(h)} \\ C_{21}^{(h)} & C_{22}^{(h)} & \ldots & C_{2n}^{(h)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n1}^{(h)} & C_{n2}^{(h)} & \ldots & C_{nn}^{(h)} \end{vmatrix},$$

on aura *le long de la coupure* $c_h$:

$$u(\lambda) = \Sigma_h u(\rho). \qquad {\scriptstyle (h=2,3,\ldots,p)}$$

Ces $(3p - 1)$ substitutions

$$S_k\,,\ T_k\,,\ \Sigma_h, \qquad {\scriptstyle \binom{k=1,2,\ldots,p}{h=2,3,\ldots,p}}$$

formeront ce que l'on peut appeler le groupe de l'équation.

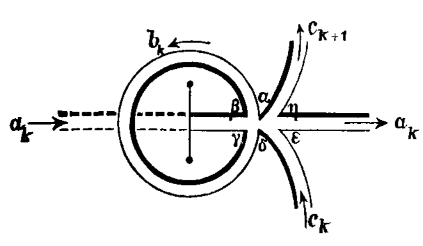
Ces substitutions sont liées par des relations qui se déduisent de la considération des points de concours des coupures

$$a_k\,,\ b_k\,,\ c_k\,,\ c_{k+1}. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,3,\ldots,p)}$$

Voici comment on obtient ces relations.

### *Relations entre les substitutions* $S_k\,,\ T_k\,,\ \Sigma_h$.

Figurons le point de croisement des coupures $a_k\,,\ b_k\,,\ c_k\,,\ c_{k+1}$



et appelons $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ les sommets des six angles formés par les bords des coupures, les bords gauches étant marqués d'un trait plus fort. On aura successivement

$$(15) \qquad \begin{cases} u(\beta) = T_k u(\alpha), \\ u(\gamma) = S_k^{-1} u(\beta), \\ u(\delta) = T_k^{-1} u(\gamma), \\ u(\varepsilon) = \Sigma_k^{-1} u(\delta), \\ u(\eta) = S_k u(\varepsilon), \\ u(\alpha) = \Sigma_{k+1} u(\eta). \end{cases}$$

Dans ces relations qui résultent immédiatement de la définition même des substitutions $S_k$, $T_k$, $\Sigma_k$, nous désignons, conformément à l'usage, par

$$S_k^{-1}, \ T_k^{-1}, \ \Sigma_k^{-1}$$

les substitutions inverses de $S_k$, $T_k$, $\Sigma_k$. Par exemple, le point $\beta$ étant sur le bord gauche de la coupure $a_k$ et le point $\gamma$ en face sur le bord droit, on aura

$$u(\beta) = S_k u(\gamma)$$

d'où, comme nous l'avons écrit,

$$u(\gamma) = S_k^{-1} u(\beta).$$

On tire des relations (15) la relation suivante entre les substitutions considérées

$$(16) \qquad T_k \Sigma_{k+1} S_k \Sigma_k^{-1} T_k^{-1} S_k^{-1} = 1,$$

qui signifie que ces substitutions faites successivement dans l'ordre indiqué conduisent à la substitution *unité*. On peut écrire cette relation (16) de façon que l'une quelconque des six substitutions soit la première, l'ordre dans lequel elles se suivent restant d'ailleurs le même. Ainsi

$$S_k^{-1} T_k \Sigma_{k+1} S_k \Sigma_k^{-1} T_k^{-1} = 1,$$

$$T_k^{-1} S_k^{-1} T_k \Sigma_{k+1} S_k \Sigma_k^{-1} = 1,$$

$$\Sigma_k^{-1} T_k^{-1} S_k^{-1} T_k \Sigma_{k+1} S_k = 1,$$

etc.

En faisant $k = 1, 2, \ldots, p$ on aura ainsi $p$ relations analogues à (16). Comme les coupures $c_1$ et $c_{p+1}$ n'existent pas, il faudra supposer

$$\Sigma_1 = 1, \qquad \Sigma_{p+1} = 1.$$

### *Conséquence de ces relations.*

On conclut de là que, les $2p$ substitutions $S_k$, $T_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ une fois connues, les $(p-1)$ substitutions

$$\Sigma_h, \qquad\qquad {\scriptstyle (h=2,3,\ldots,p)}$$

s'en déduisent immédiatement.

En effet on peut aussi écrire,

$$(17) \qquad \Sigma_{k+1}^{-1} = S_k \Sigma_k^{-1} T_k^{-1} S_k^{-1} T_k$$

comme il résulte directement des relations (15). Faisant alors $k = 1$ et $\Sigma_1^{-1} = 1$, comme nous venons de le dire, nous aurons

$$\Sigma_2^{-1} = S_1 T_1^{-1} S_1^{-1} T_1,$$

ce qui donne $\Sigma_2$.

Faisant ensuite, dans la relation (17), $k = 2$, nous aurons

$$\Sigma_3^{-1} = S_2 \Sigma_2^{-1} T_2^{-1} S_2^{-1} T_2$$

et $\Sigma_3^{-1}$ se trouve déterminée. En faisant de même successivement, dans (17), $k = 3, \ldots, p-1$ on calculera de proche en proche les substitutions $\Sigma_4, \Sigma_5, \ldots, \Sigma_p$.

### *Relation entre les $2p$ substitutions $S_k$, $T_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$.*

Après avoir calculé les substitutions $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_p$, comme nous venons de le voir, en fonction des substitutions $S_k$ et $T_k$, on aura, en faisant $k = p$ dans la relation (17) et se rappelant que $\Sigma_{p+1} = 1$, la relation

$$(18) \qquad 1 = S_p \Sigma_p^{-1} T_p^{-1} S_p^{-1} T_p,$$

qui donne une relation entre les substitutions $S_k$ et $T_k$, puisque $\Sigma_p^{-1}$ est connu en fonction de ces substitutions.

### *Cas particuliers.*

Si nous supposons le genre $p = 1$ nos équations de première et de deuxième espèce se ramènent immédiatement aux équations linéaires à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme que M. Picard a intégrées à l'aide de fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Dans ce cas il y a une coupure $a_1$, une coupure $b_1$ et deux substitutions $S_1$ et $T_1$. La relation (18) entre les $2p$ substitutions $S_k$, $T_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ se réduit à

$$1 = S_1 T_1^{-1} S_1^{-1} T_1$$

ou

$$T_1^{-1} S_1 = S_1 T_1^{-1},$$

qui montre que les substitutions $S_1$ et $T_1^{-1}$ sont *permutables;* ce qui est le fondement du théorème de M. Picard.

*Supposons maintenant* $p = 2$. Il y aura alors 5 substitutions

$$S_1, S_2, T_1, T_2, \Sigma_2,$$

et l'on aura, d'après la relation (17) de la page précédente où l'on fait successivement $k = 1$, $k = 2$,

$$(19) \qquad \begin{aligned} \Sigma_2^{-1} &= S_1 T_1^{-1} S_1^{-1} T_1, \\ 1 &= S_2 \Sigma_2^{-1} T_2^{-1} S_2^{-1} T_2 \end{aligned}$$

d'où, par l'élimination de $\Sigma_2^{-1}$,

$$(20) \qquad 1 = S_2 S_1 T_1^{-1} S_1^{-1} T_1 T_2^{-1} S_2^{-1} T_2.$$

Par exemple, si $S_1 = 1$, on a aussi $\Sigma_2 = 1$, puis d'après (20)

$$1 = S_2 T_2^{-1} S_2^{-1} T_2,$$

ce qui montre qu'alors les substitutions $S_2$ et $T_2^{-1}$ seraient permutables.

### *Formation des équations les plus générales de première et deuxième espèce d'un degré donné.*

**Première espèce.** En appliquant les théorèmes de M. Fuchs, on arrivera sans peine à former toutes les équations d'ordre $n$ dont l'intégrale générale est de première espèce. Il existe de ces équations dans chaque ordre $n$. Nous en avons formé une du second ordre à la page 165. Si l'on appelle $\omega(z)$ une intégrale de première espèce de fonction à multiplicateurs et $E(z)$ une exponentielle de la forme $e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \dots + \lambda_p w_p(z)]}$, le produit

$$u = E(z)\omega(z)$$

satisfait de même à une équation linéaire du second ordre ayant pour intégrale générale

$$u = E(z)[A\omega(z) + B],$$

$A$ et $B$ étant des constantes arbitraires. (Cette exponentielle $E(z)$ a, comme dans tout ce qui précède, pour exposant une expression linéaire à coefficients constants d'intégrales abéliennes de première espèce).

Le produit

$$u = E(z)\omega^{n-1}(z),$$

$n$ étant un entier positif, vérifiera une équation linéaire d'ordre $n$, qui sera par suite un exemple d'équation de première espèce. Cette équation aura pour intégrale générale

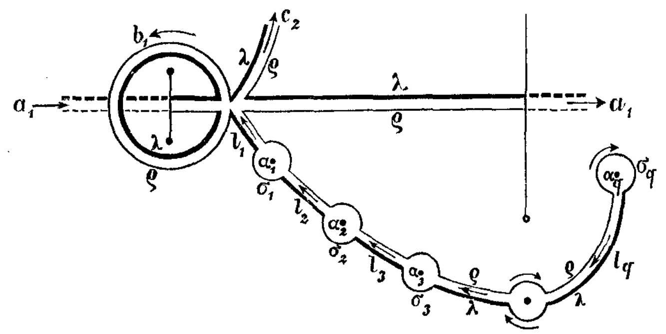
$$u = E(z)[A_1\omega^{n-1}(z) + A_2\omega^{n-2}(z) + A_3\omega^{n-3}(z) + \dots + A_{n-1}\omega(z) + A_n],$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ étant des constantes arbitraires.

**Equations de deuxième espèce.** On pourra de même former les équations d'ordre $n$ de deuxième espèce dont l'intégrale générale admette des pôles donnés d'avance. Il est facile d'en donner des exemples analogues aux précédents, composés avec des intégrales de seconde espèce de fonctions à multiplicateurs ou les dérivées de ces intégrales par rapport au paramètre.

### *Equations différentielles linéaires de troisième espèce.*

L'intégrale générale d'une équation différentielle de troisième espèce admet des points critiques logarithmiques $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$. Elle n'est donc plus uniforme sur la surface $R_{abc}$ de Riemann: mais elle devient uniforme sur la surface $R_{abcl}$ obtenue par l'adjonction d'une coupure $l_1 l_2 \ldots l_q$ partant du point de croisement des coupures $a_1 b_1 c_2$ et réunissant les unes aux autres des circonférences infiniment petits $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_q$ de centres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$. Nous avons figuré ci-dessous cette coupure $l_1, l_2, \ldots, l_q$.



Si, comme plus haut, on appelle

$$u_1(z)\,,\ u_2(z)\,,\ \ldots\,,\ u_n(z)$$

un système fondamental d'intégrales, $\lambda$ un point du bord gauche d'une coupure et $\rho$ le point situé en face sur le bord droit, on aura, comme précédemment,

$$\left.\begin{array}{l} \text{le long de la coupure } a_k\text{:}\quad u(\lambda) = S_k u(\rho), \\ \text{le long de la coupure } b_k\text{:}\quad u(\lambda) = T_k u(\rho), \end{array}\right. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

$$\text{le long de la coupure } c_h\text{:}\quad u(\lambda) = \Sigma_h u(\rho), \qquad {\scriptstyle (h=2,3,\ldots,p)}$$

$S_k, T_k, \Sigma_h$ désignant certaines substitutions linéaires.

Enfin on aura ici le long des nouvelles coupures $l_1, l_2, \ldots, l_q$,

$$\text{le long de la coupure } l_j\text{:}\quad u(\lambda) = L_j u(\rho), \qquad {\scriptstyle (j=1,2,\ldots,q)}$$

$L_j$ désignant aussi une substitution linéaire à coefficients constants.

La substitution $L_q$ est *connue* car on connaît la forme d'un système fondamental d'intégrales dans le voisinage du point critique logarithmique $\alpha_q$ où toutes les racines de l'équation fondamentale déterminante sont entières.

Les substitutions

$$S_k\,,\ T_k\,,\ \Sigma_h$$

sont liées entre elles par des relations identiques à celles que nous avons établies aux pages 169 et 170, avec cette seule différence que la substitution $\Sigma_1$ n'est plus, dans le cas actuel, égale à 1 mais bien à $L_1$, ainsi qu'il résulte de la figure de la page précédente.

Ces indications sommaires nous paraissent suffisantes pour montrer comment la méthode de RIEMANN que nous avons employée avec succès pour l'étude des intégrales de fonctions à multiplicateurs, peut, de la même façon, servir à l'étude des intégrales d'une classe étendue d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.