DIE DISKRIMINANTEN DER KÖRPER DER SINGULÄREN MODULN UND DER TEILUNGSKÖRPER DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN.

Von

RUDOLF FUETER

in Zürich.

Einleitung.

Mittag-Leffler hat in seiner tiefgründigen, ausgezeichneten: »An introduction to the theory of elliptic functions» (Annals of Mathematics, II. series, vol. 24, 1923) die verschiedenen Wege beleuchtet, die in der Theorie der elliptischen Funktionen eingeschlagen worden sind. Insbesondere hat er die Zusammenhänge zwischen Abels und Weierstrass' Arbeiten aufgedeckt. Im folgenden möchte ich zeigen, wie auch die *arithmetischen* Anwendungen der elliptischen Funktionen, wie sie Abel durch seine komplexe Multiplikation aufgedeckt hat, wohl am natürlichsten und einfachsten durch die Weierstrass'sche Begriffsbildung weiterentwickelt und zu Ende geführt werden können.

Bekanntlich führt die Frage nach der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen, deren Perioden einem imaginär-quadratischen Körper angehören, zunächst auf die Behandlung ihrer Modulfunktionen, der »*singulären Moduln*». Diese sind algebraische Zahlen, die den *Klassenkörper* festlegen. Stellt man jetzt die Formeln der komplexen Multiplikation auf, so ergeben die Wurzeln ihrer Zähler oder Nenner die Werte der elliptischen Funktionen an Stellen, wo das Argument einen gebrochenen Zahlwert des quadratisch imaginären Körpers annimmt. Diese Wurzeln sind wieder algebraische Zahlen, und legen die *Teilungskörper* der elliptischen Funktionen fest. Diese sind Oberkörper der Klassenkörper. Eine der tiefsten und feinsten Fragen ist diejenige nach den Diskriminanten der Klassen- und Teilungskörper. Sie konnte bisher nur teilweise so beantwortet werden, dass man entweder eine ausführliche eingehende zahlentheoretische Betrachtung der Oberkörper gab, oder zuerst durch ausserordentlich komplizierte Mittel arithmetisch Körper mit denselben Eigenschaften konstruierte, und nachträglich deren Übereinstimmung mit den funktionentheoretisch erhaltenen bewies. Der Wert der Existenz der Körper mittels der Funktionentheorie ging somit verloren.

Ich gebe in der vorliegenden Arbeit zum ersten Male einen vollständigen, rein funktionentheoretischen Beweis über die Primteiler, die in der Diskriminante der genannten Körper aufgehen können. Er benutzt aufs entscheidenste die *Differentialgleichung* und das *Additionstheorem* der elliptischen Funktionen, auch hierin die Bemerkungen am Ende der oben genannten Arbeit MITTAG-LEFFLERS illustrierend. Er lässt, meiner Meinung nach, an Einfachheit nichts zu wünschen übrig, abgesehen von einer kleinen Schwierigkeit, die wie immer in der Theorie der elliptischen Funktionen, die Primzahl 2 bringt.

Der Gang des Beweises ist in Kürze der Folgende: Schon in meinem Buche: »*Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen*» (Teubner 1924, Leipzig[1]), das ich im folgenden kurz als »Fueter» zitieren werde, wurde bewiesen, dass die Gruppen der Teilungskörper relativ zum quadratischimaginären Körper Abel'sch sind. Das Additionstheorem lässt erkennen, dass die Relativdiskriminante der Teilungskörper in Bezug auf die Klassenkörper als Unterkörper nur diejenigen Primteiler enthalten kann, die wesentlich im Nenner der Teilwerte auftreten, für die die elliptische Funktion genommen ist (III). Diese Primteiler bilden den *Führer*. Dieser Beweis ist rein funktionentheoretisch. Es bleibt somit nur noch der Beweis über die Diskriminante der Klassenkörper übrig (V). Dieser Klassenkörper ist nun Unterkörper aller Teilungskörper, welches auch der Führer der letzteren ist. Die Existenz der Teilungskörper für jeden Führer steht zudem durch die Funktionentheorie fest. Eine einfache Folgerung zeigt, dass dieser gemeinsame Klassenkörper keine Primteiler in seiner Relativdiskriminante zum quadratischen Körper enthalten darf. Benutzt wird ausser den beiden ebengenannten Resultaten nur die arithmetische Tatsache, dass es immer unendlich viele Primideale im quadratischen Körper mit vorgeschriebenen Restcharakteren gibt. Dies ist das einzige

---

[1] Wegen Litteratur verweise ich ebenfalls auf dieses Buch.

arithmetische Hilfsmittel. Damit ist die Diskriminante von Klassen- und Teilungskörper bestimmt.

Ich gebe im I. Abschnitt alle Begriffe, Sätze und Formeln wieder (ohne Beweise), die für das folgende wichtig sind, so dass die Arbeit ohne Kenntnis anderer Arbeiten gelesen werden kann. Wegen der Beweise verweise ich auf mein Buch.

I.

Begriffe und Sätze.

Es sei m eine negative, quadratfreie, ganze rationale Zahl. Dann ist $k=k(\sqrt{m})$ ein imaginärquadratischer Körper. h sei seine Klassenzahl, 1 und ω die Basis seiner ganzen Zahlen.

In Bezug auf k besitzt die elliptische Modulfunktion $j(z)$ besondere Eigenschaften. Es sei $\mathfrak{w}=(\omega_1, \omega_2)$ ein durch eine Basis gegebenes Ideal von k. Ich nenne ein *Ideal ungerade*, wenn es keinen Teiler mit (2) gemein hat. Die Ideale mit gemeinsamen Teilern mit (2) nenne ich *gerade Ideale*. $\mathfrak{w}$ sei stets ungerade. Der Funktionswert $j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ hängt dann weder von der Wahl der Basis von $\mathfrak{w}$, noch von $\mathfrak{w}$ selbst ab, sondern nur von der *Klasse*, in der $\mathfrak{w}$ liegt. Zudem ist $j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ eine algebraische Zahl. Man bezeichnet den aus k und $j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ zusammengesetzten Körper mit K und nennt ihn den Klassenkörper von k. Über denselben beweist man folgenden

1. **Satz:** *Der Körper K ist relativ-Abelsch vom Relativgrade h zu k. Seine Relativgruppe in Bezug auf k ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Idealklassen in k. Die Zahlen $j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ sind ganze algebraische Zahlen.*

Die Funktion $j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ ist so definiert. Man setzt nach Weierstrass:

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \sum_{n,\, m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(n\,\omega_2 + m\,\omega_1)^4},$$

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = 140 \sum_{n,\, m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(n\,\omega_2 + m\,\omega_1)^6},$$

$$G(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27\, g_3^2).$$

Jetzt wird:

$$j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)=\frac{4\,.\,27\,g_2^3(\omega_1,\omega_2)}{G(\omega_1,\omega_2)}.$$

Diese Funktion bleibt bei allen Operationen der Modulgruppe invariant.

Wir wollen jetzt nur die ungeraden Ideale von k betrachten und sie in *Ringklassen* (mod. 4) einteilen. Alle Zahlen von k, die einer ganzen rationalen Zahl (mod. 4) kongruent sind, bilden den Ring $r(4)$. Zwei ungerade Ideale von k liegen in der gleichen Ringklasse, wenn sie äquivalent im gewöhnlichen Sinne sind, und wenn ausserdem ihr Quotient eine Ringzahl ist. Die Ringklassenzahl sei $h_r(4)$. h ist ein Teiler von $h_r(4)$. In Bezug auf diesen Ring spielt die elliptische Modulfunktion 4. Stufe:

$$\mathfrak{t}(\omega_1,\omega_2)=\frac{4\cdot 3\,\wp\left(\frac{\omega_3}{2};\omega_1,\omega_2\right)}{\wp\left(\frac{\omega_3}{4};\omega_1,\omega_2\right)-\wp\left(\frac{\omega_3}{2};\omega_1,\omega_2\right)},\quad \text{wo } \omega_3=\omega_1+\omega_2 \text{ ist,}$$

dieselbe Rolle, wie vorhin die Funktion $j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$. Beide hängen durch die Gleichungen:

$$j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)=\frac{(\mathfrak{t}^2-3\,.\,2^4)^3}{\mathfrak{t}^2-2^6},$$

oder:

$$\mathfrak{t}^6-3^2\,.\,2^4\,\mathfrak{t}^4+\left(3^3\,.\,2^8-j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right)\mathfrak{t}^2-\left(3^3\,.\,2^6-j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right)2^6=0; \tag{1}$$

$$\frac{g_2}{e_3^2}=3\,.\,2^2\cdot\frac{\mathfrak{t}^2-3\,.\,2^4}{\mathfrak{t}^2};\quad \frac{g_3}{e_3^3}=2^3\,\frac{2^3\,.\,3^2-\mathfrak{t}^2}{\mathfrak{t}^2}$$

zusammen. Wählt man die Basis von $\mathfrak{w}=(\omega_1,\omega_2)$ in geeigneter Weise (siehe FUETER, S. 111, u. ff.), so legt $\mathfrak{t}(\omega_1,\omega_2)$ einen Oberkörper $K(4)$, den *Ringklassenkörper* (mod. 4), fest, der folgende Eigenschaften hat:

2. **Satz:** *Der Körper $K(4)$ ist relativ-Abelsch vom Relativgrade $h_r(4)$ zu k. Seine Relativgruppe in Bezug auf k ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Ringklassen in $r(4)$. Er ist Oberkörper des Klassenkörpers K. Die $\mathfrak{t}(\omega_1,\omega_2)$ sind ganze Zahlen.*

Wir betrachten jetzt eine noch feinere Einteilung der Klassen von k. Es sei $\mathfrak{f}$ ein beliebiges Ideal von k. Wir nennen alle Zahlen von k, die $\equiv 1$ (mod. $\mathfrak{f}$)

sind, *Strahlzahlen* (mod. $\mathfrak{f}$) in k. Sie bilden den *Strahl* $s(\mathfrak{f})$. Zwei zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde Ideale von k liegen in derselben *Strahlklasse* (mod. $\mathfrak{f}$), wenn sie äquivalent im gewöhnlichen Sinne sind, und wenn ausserdem ihr Quotient zu einer Strahlzahl gemacht werden kann. Die Anzahl dieser Strahlklassen ist die Strahlklassenzahl $h_s(\mathfrak{f})$. h ist ein Teiler von $h_s(\mathfrak{f})$. $\mathfrak{f}$ heisst der *Führer* des Strahles. Es ist:

$$h_s(\mathfrak{f}) = \frac{e_s}{e}\varphi(\mathfrak{f})\,h,$$

wo e die Anzahl der Einheiten in k, e_s in $s(\mathfrak{f})$ ist.

In Bezug auf die Strahlen mit dem Führer $(4)\mathfrak{f}$, wo $\mathfrak{f}$ wieder beliebig in k gewählt werden kann, spielt die elliptische Funktion:

$$\mathfrak{T}(z) = \frac{\wp\left(\frac{\omega_3}{4}; \omega_1, \omega_2\right) - \wp\left(\frac{\omega_3}{2}; \omega_1, \omega_2\right)}{\wp(z; \omega_1, \omega_2) - \wp\left(\frac{\omega_3}{2}; \omega_1, \omega_2\right)}, \qquad \omega_3 = \omega_1 + \omega_2,$$

genau die gleiche Rolle, wie $j(z)$ in Bezug auf k selbst. Die Perioden ω_1, ω_2 seien zunächst stets die richtig gewählte Basis des zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden, ungeraden Ideals $\mathfrak{w} = (\omega_1, \omega_2)$. Man setze:

$$z = \frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{4\nu},$$

wo x_1, x_2 ganze rationale Zahlen sind, die der Kongruenz $x_1 \equiv x_2 \equiv \pm 1 \pmod{4}$ genügen. ν ist eine durch $\mathfrak{f}$ teilbare ganze Zahl von k. Ausserdem seien x_1, x_2 so gewählt, dass $x_1\omega_1 + x_2\omega_2$ durch das Ideal $(\nu)/\mathfrak{f}$ teilbar sei. Dagegen sei der Quotient zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd. Man kann dann symbolisch setzen:

$$\frac{(x_1\omega_1 + x_2\omega_2)}{(4\nu)} = \frac{\mathfrak{j}\mathfrak{w}}{(4)\mathfrak{f}},$$

wo $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{w}$ ungerade und zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd sind. $\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{j}\mathfrak{w}}{(4)\mathfrak{f}}; \omega_1, \omega_2\right)$ ist dann eine algebraische Zahl, die einen Oberkörper $*(4\mathfrak{f})$ von $K(4)$ festlegt, der folgende Eigenschaften besitzt:

3. **Satz:** $*(4\mathfrak{f})$ *ist relativ-Abelsch vom Relativgrade* $h_s(4\mathfrak{f})$ *zu* k. *Seine Relativgruppe in Bezug auf* k *ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Strahl-*

klassen (mod. $(4)\mathfrak{f}$) in k. Zum Klassenring $K(4)$, der ein Unterkörper von $*(4\mathfrak{f})$ ist, besitzt er eine Relativgruppe, die holoedrisch isomorph ist mit der Gruppe der Strahlklassen von k (mod. $4\mathfrak{f}$), in die die Zahlen von $r(4)$ zerfallen.

$*(4\mathfrak{f})$ heisst der *Strahlklassenkörper* von $s(4\mathfrak{f})$.

Wir werden im folgenden besonders den Fall benutzen, dass $\mathfrak{f}$ ein ungerades Ideal ist. In diesem Falle ist es praktisch, auch die Zahlen:

$$\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{j}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}; \omega_1, \omega_2\right) = \mathfrak{T}\left(\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{\nu}; \omega_1, \omega_2\right)$$

zu betrachten, wo über x_1, x_2, ν, die vorigen Annahmen gelten, nur fällt die Bedingung $x_1 \equiv x_2 \equiv \pm 1$ (mod. 4) weg, dafür muss:

$$\nu \equiv 1 \pmod{2}$$

sein. Aus $\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{j}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}\right)$ und $\mathfrak{t}$ bilden wir den Oberkörper $K_s(\mathfrak{f})$. Derselbe hat folgende Eigenschaften:

4. **Satz:** *Der Körper $K_s(\mathfrak{f})$ ist relativ-Abelsch zu k. Sein Relativgrad zu $K(4)$ ist $\frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{f})$. Die Zahlen $\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{j}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}\right)$ sind ganze algebraische Zahlen. Sie sind Einheiten, wenn $\mathfrak{f}$ durch wenigstens zwei, von einander verschiedenen Primideale von k teilbar ist, Zahlen, die nur durch die Primideale von $\mathfrak{p}$ teilbar sind, falls $\mathfrak{f}$ die Potenz eines ungeraden Primideals $\mathfrak{p}$ in k ist. $K_s(\mathfrak{f})$ ist Unterkörper von $*(4\mathfrak{f})$. Seine Relativgruppe zu $K(4)$ ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$) in k, die von den Zahlen in k gebildet werden.*

Wir stellen für die elliptische Funktion $\mathfrak{T}(z)$ noch einige Formeln zusammen, die wir später gebrauchen, und die sehr leicht aus den Formeln der $\wp$-funktion erhalten werden. $\mathfrak{T}(z)$ ist homogen 0-ter Ordnung in z, ω_1, ω_2. Setzt man $\zeta = 2\sqrt{\frac{3e_3}{\mathfrak{t}}}\cdot z$, $e_3 = \wp\left(\frac{\omega_3}{2}\right)$, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, so ist:

$$\mathfrak{T}_1(z; \omega_1, \omega_2) = \frac{d\mathfrak{T}(z)}{d\zeta} = -2\sqrt{\frac{3e_3}{\mathfrak{t}}}\frac{\wp'(z)}{(\wp(z) - e_3)^2}$$

eine elliptische Funktion 3. Ordnung mit entsprechenden Eigenschaften. Es besteht die Gleichung:

(2) $$\mathfrak{T}_1(z)^2 = \mathfrak{T}(z)\,(4\,\mathfrak{T}(z)^2 + \mathrm{t}\,\mathfrak{T}(z) + 4).$$

Ferner besitzt $\mathfrak{T}(z)$ das Additionstheorem:

(3) $$\mathfrak{T}(z+t) = \frac{\mathfrak{T}(z)\dfrac{\mathfrak{T}_1(t)^2}{\mathfrak{T}(t)} + 2\,\mathfrak{T}_1(z)\,\mathfrak{T}_1(t) + \mathfrak{T}(t)\dfrac{\mathfrak{T}_1(z)^2}{\mathfrak{T}(z)}}{4\,(\mathfrak{T}(z)\,\mathfrak{T}(t) - 1)^2}.$$

II.

Die Relativdiskriminante von $K(4)$ zu K.

a) $m = -1$ *oder* -3. In diesem Falle wird $K(4)$ nach FUETER S. 105 durch $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{-1}$ gegeben. Die Relativdiskriminante enthält daher nur die Primideale von 2.

b) $m \equiv 1$ (*mod.* 8): Nach dem Beweise von FUETER S. 111 liegen 4 Wurzeln von (1) in K, und nur 2 entgegengesetzte in $K(4)$. Es seien t, $-\mathrm{t}$, $\bar{\mathrm{t}}$, $-\bar{\mathrm{t}}$, die 4 in K liegenden Wurzeln. Dann ist nach FUETER S. 108:

$$2\,\bar{\mathrm{t}}^2 = 3^2 \cdot 2^4 - \mathrm{t}^2 \pm \frac{\mathrm{t}(\mathrm{t}^2 - 3 \cdot 2^4)}{\sqrt{\mathrm{t}^2 - 2^6}};$$

daher liegt $\sqrt{\mathrm{t}^2 - 2^6}$, und entsprechend $\sqrt{\bar{\mathrm{t}}^2 - 2^6}$ ebenfalls in K. Ferner ist für eines der beiden Zeichen rechts:

$$\pm\,\bar{\mathrm{t}} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{t} \pm \frac{3}{2}\sqrt{\mathrm{t}^2 - 2^6}\right)\sqrt{\frac{\pm\,\mathrm{t} - \sqrt{\mathrm{t}^2 - 2^6}}{2\sqrt{\mathrm{t}^2 - 2^6}}},$$

d. h. ebenfalls in K. Nimmt man rechts das andere Zeichen, so erhält man das $K(4)$ bestimmende $\bar{\bar{\mathrm{t}}}$. Nun ist aber:

$$\sqrt{\frac{\mp\,\mathrm{t} - \sqrt{\mathrm{t}^2 - 2^6}}{2\sqrt{\mathrm{t}^2 - 2^6}}} = \sqrt{-1}\,\frac{2^6}{\sqrt{\mathrm{t}^2 - 2^6}\sqrt{\dfrac{\pm\,\mathrm{t} - \sqrt{\mathrm{t}^2 - 2^6}}{2\sqrt{\mathrm{t}^2 - 2^6}}}},$$

somit wird $\bar{\bar{\mathrm{t}}}$ durch Adjunktion von $\sqrt{-1}$ erhalten.

5. **Satz:** *Im Falle $m \equiv 1$ (mod. 8) wird $K(4)$ aus K durch Adjunktion von $\sqrt{-1}$ erhalten. Die Relativdiskriminante kann somit höchstens die Ideale von (2) enthalten.*

Da $k(\sqrt{-1})$ in Bezug auf $k(\sqrt{m})$ sicherlich die Relativdiskriminante (2) hat, muss somit jedes Primideal von (2) in $K(4)$ quadratisch in (2) aufgehen.

Man setze:

$$F(\omega) = \mathfrak{t}^2 - 2^6, \quad \omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Dann folgt, da nach Definition (S. 46):

$$\mathfrak{t}(-\omega_2, \omega_1) = -\mathfrak{t}(\omega_1, \omega_2)$$

ist, sofort:

$$F\left(-\frac{1}{\omega}\right) = F(\omega).$$

Ferner ist:

$$\mathfrak{t}(\omega_1, \omega_2 + 2\omega_1) = -\mathfrak{t}(\omega_1, \omega_2),$$

also:

$$F(\omega + 2) = F(\omega).$$

Daraus erkennt man, dass nach Weber[1], S. 114—15, $F(\bar{\omega})$ nichts anderes wie die Function:

$$F(\bar{\omega}) = -f^{24}(\bar{\omega})$$

ist. Ist daher $\mathfrak{w} = (w, w + 2(s+\omega))$ ein Ringideal, so ist nach dem Satz, Weber, S. 540:

$$\frac{F(\bar{\omega})}{2^{12}}, \quad \bar{\omega} = \frac{\pm w + 2(s+\omega)}{w}, \quad \omega = \frac{-1 + \sqrt{m}}{2},$$

eine algebraische Einheit, d. h. eine ganze Zahl. Nun genügt $F(\bar{\omega})$ der Gleichung:

$$F(\bar{\omega})\, F\left(\frac{\bar{\omega} - 1}{\bar{\omega} + 1}\right) = 2^{12},$$

und setzt man hier:

$$\bar{\omega} = -\frac{\pm w + s + \omega}{s + \omega},$$

[1] *Lehrbuch der Algebra,* Bd. III. 2. Auflage: *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen.* Braunschweig 1908. Wird im folgenden kurz als Weber zitiert.

so wird:

$$F\left(-\frac{\pm w+s+\omega}{s+\omega}\right)F\left(\frac{\pm w+2(s+\omega)}{w}\right)=2^{12}$$

also muss wegen obigem $F\left(-\frac{\pm w+s+\omega}{s+\omega}\right)$ eine Einheit sein. Hier ist aber nach FUETER, S. 112 gerade t das den Körper $K(4)$ bestimmende. Also:

6. **Satz:** *Die Grössen* $\mathfrak{t}^2-2^6$ *sind algebraische Einheiten, im Falle* $m\equiv 1$ $(mod.\ 8)$:

c) $m\equiv 5$ $(mod.\ 8)$. Die Gleichung (1) ist irreduzibel in K. Sie legt einen relativ-Abelschen Körper vom Relativgrade 6 fest. Wir denken uns denselben so aufgebaut, dass wir zuerst die kubische Wurzel $\mathfrak{t}^2$ zu K adjungieren. Dadurch erhalten wir K_3. Dann wird noch eine Quadratwurzel adjungiert, um $K(4)$ zu erhalten. Wegen:

$$2\mathfrak{t}^2=-3^2\cdot 2^4-\mathfrak{t}^2\pm\frac{\mathfrak{t}(\mathfrak{t}^2-3\cdot 2^4)}{\sqrt{\mathfrak{t}^2-2^6}},$$

ist $\mathfrak{t}:\sqrt{\mathfrak{t}^2-2^6}$ eine Zahl von K_3. Ferner ist:

$$\sqrt{j-2^6\cdot 3^3}=\frac{\mathfrak{t}(\mathfrak{t}^2-2^3\cdot 3^2)}{\sqrt{\mathfrak{t}^2-2^6}}.$$

Anderseits ist:

$$\mathfrak{t}\cdot\bar{\mathfrak{t}}\cdot\mathfrak{t}=\pm\sqrt{2^6\cdot 3^3-j\cdot 2^3}=\pm i\cdot\frac{2^3(2^3\cdot 3^2-\mathfrak{t}^2)\mathfrak{t}}{\sqrt{\mathfrak{t}^2-2^6}},\qquad i=\sqrt{-1},$$

wo i mit einer Zahl von K_3 multipliziert ist. Wäre nun i in K_3, so bliebe die rechte Seite ungeändert bei der Substitution des relativquadratischen Körpers $K(4)$ in Bezug auf K_3. Dies ist unmöglich, da bei derselben alle $\mathfrak{t}$ in $-\mathfrak{t}$, die linke Seite also in den entgegengesetzten Wert übergeht. Also ist i nicht in K_3, sondern erst in $K(4)$. Letzterer entsteht daher durch Adjunktion von i. $k(i)$ hat aber in seiner Diskriminante nur die Primteiler von 2. Somit enthält die Relativdiskriminante von $K(4)$ in Bezug auf K_3 nur Teiler von 2.

Um die Relativdiskriminante von K_3 zu K zu berechnen, bedenken wir, dass für $m\not\equiv 0$ (mod. 3) $\sqrt[3]{j(\omega)}$ eine Zahl von K ist (siehe WEBER, S. 459). Die Relativdiskriminante von $\sqrt[3]{j(\omega)}$ in Bezug auf K kann also höchstens die Teiler von 3 enthalten.

Ist dagegen $m \equiv 0 \pmod{3}$, so wähle man eine zur Diskriminante von $K(4)$ teilerfremde Primzahl p, die in $k(\sqrt{m})$ in $\mathfrak{p} . \mathfrak{p}^1$ zerfällt, d. h.:

$$\left(\frac{m}{p}\right) = +1, \text{ und für die } p \equiv 2 \pmod{3}$$

ist. Solche gibt es immer unendlich viele. Denn da $m \neq -3$ ist, so gibt es unendlich viele Primzahlen, für die

$$\left(\frac{m}{p}\right) = +1, \quad \left(\frac{-3}{p}\right) = -1,$$

ist. Nach WEBER, S. 250 ist dann eine bestimmte der Wurzeln:

$$\sqrt[3]{j\left(\frac{s+\omega}{w}\right)}^{p-1} \cdot \sqrt[3]{\frac{G\left(p, \frac{s+\omega}{w}\right)}{G\,(p, s+\omega)}}$$

eine Zahl von K. Dabei ist die gleiche Bezeichnung wie FUETER, S. 69 gewählt. Nun ist aber nach WEBER, S. 252—53

$$\frac{G\left(p, \frac{s+\omega}{w}\right)}{G\,(p, s+\omega)}$$

eine ganze algebraische Zahl von K. Nach FUETER, S. 70—71 ist sie ein Teiler von $\mathfrak{p}^r$. Somit kann die Relativdiskriminante von $\sqrt[3]{j\left(\frac{s+\omega}{w}\right)}$ in Bezug auf K, da $p-1$ nicht durch 3 teilbar sein soll, nur Teiler von $\mathfrak{p}$ und 3 enthalten, wobei $\mathfrak{p}$ zur Diskriminante von $K(4)$ teilerfremd ist.

Zu dem so vergrösserten Bereich von K erhalten wir jetzt K_3 indem wir in der Gleichung FUETER, S. 105 an Stelle von $x = \mathfrak{t}^2 - 3 \cdot 2^4, y = x$: $\sqrt[3]{j\left(\frac{s+\omega}{w}\right)}$ setzen. Die Gleichung lautet dann:

$$y^3 - \sqrt[3]{j\left(\frac{s+\omega}{w}\right)}\, y + 2^4 = 0.$$

Die Adjunktion einer Wurzel y ergibt dann K_3. Würde die Relativdiskriminante von y in Bezug auf den vergrösserten Bereich von K einen andern Primteiler als solche von 2 und 3 enthalten, z. B. $\mathfrak{L}$, so wäre:

$$y \equiv y' \equiv y'' \pmod{\mathfrak{L}}, \text{ oder } 0 = y + y' + y'' \equiv 3y \pmod{\mathfrak{L}},$$

was unmöglich ist, da in y nur Teiler von 2 aufgehen.

Die Relativdifferente von $K(4)$ in Bezug auf K ist aber ein Teiler des Produktes der Relativdifferenten, kann daher nur 2 und 3 enthalten, da $\mathfrak{p}$ nicht darin vorkommen soll.

7. **Satz**: *Die Relativdiskriminante von $K(4)$ in Bezug auf K enthält höchstens die Primteiler von 2 und 3.*

Im Falle $m \not\equiv 0 \pmod{3}$ sieht man, dass wegen (1) auch $(\mathrm{t}^2 - 2^6)^{1/3}$ in $K(4)$ liegen muss. Aber auch im Falle $m \equiv 0 \pmod{3}$ muss $(\mathrm{t}^2 - 2^6)$ die 3. Potenz eines Ideales sein, da der Faktor von $\sqrt[3]{j\left(\frac{s+\omega}{w}\right)}$ zu 2 teilerfremd ist.

Nach Weber, S. 540 ist, falls wieder $F(\overline{\omega}) = (\mathrm{t}^2 - 2^6)$ ist, $F\left(\frac{s+2\,\omega}{\overline{w}}\right) : 2^8$ eine Einheit. Setzt man in

$$F(\overline{\omega})\, F\left(\frac{\overline{\omega} - 1}{\overline{\omega} + 1}\right) = 2^{12},$$

für $\overline{\omega}$ die Zahl $\frac{s+\omega}{w}$, so folgt:

$$F\left(\frac{s+\omega}{w}\right) F\left(\frac{s+\omega-w}{s+\omega+w}\right) = F\left(\frac{s+\omega}{w}\right) F\left(\frac{s+2\,\omega}{\overline{w}}\right) = 2^{12},$$

somit ist wegen des vorigen

$$\frac{F\left(\frac{s+\omega}{w}\right)}{2^4} = \frac{\mathrm{t}^2 - 2^6}{2^4}$$

eine Einheit. Ausserdem ist $(\mathrm{t}^2 - 2^6) = (2)^4$.

8. **Satz**: *Die Zahlen $\frac{\mathrm{t}^2 - 2^6}{2^4}$ sind Einheiten von $K(4)$ und die Ideale $(\mathrm{t}^2 - 2^6)$ sind 12. Potenzen von Idealen in $K(4)$.*

c) $m \not\equiv 1$ (*mod.* 4): Setzt man in:

$$\frac{G\left(1, \frac{\overline{\omega}+b}{d}\right)}{G(1, \overline{\omega})}$$

$d=(1-m)^2=(1+m)^2-4m$, so ist d die Norm der Zahl $1+m+2\omega$, $\omega=\sqrt{m}$, in $k(\sqrt{m})$. Ist:

$$\overline{\omega}=\frac{s+2\omega}{w}$$

die einem Ringideal von $r(2)$ zugeordnete Zahl, so gibt es 4 natürliche Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ für die:

$$\frac{\overline{\omega}+b}{d}=\frac{\alpha\overline{\omega}+\beta}{\gamma\overline{\omega}+\delta}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1$$

ist. In der Tat folgt für $\overline{\omega}$ die quadratische Gleichung:

$$\gamma\overline{\omega}^2-(\alpha d-\gamma b-\delta)\overline{\omega}+(\delta b-\beta d)=0, \quad \overline{\omega}=\frac{\frac{\alpha d-\gamma b-\delta}{2}+y\sqrt{m}}{\gamma}.$$

Somit muss:

$$\left(\frac{\alpha d-\gamma b-\delta}{2}\right)^2-\gamma(\delta b-\beta d)=\left(\frac{\alpha d-\gamma b+\delta}{2}\right)^2-d=y^2 m$$

und daher:

$$\gamma=w, \quad y=2, \quad d=\left(\frac{\alpha d-\gamma b+\delta}{2}\right)^2-4m$$

sein. Daraus folgt:

$$\alpha d-\gamma b+\delta=2(1+m)$$

$$\alpha d-\gamma b-\delta=2s$$

oder:

$$\gamma=w, \quad \delta=1+m-s, \quad \gamma\overline{\omega}+\delta=2\omega+1+m=(1+\omega)^2.$$

Anderseits ist (Weber, S. 254):

$$\left(\frac{G\left(1, \frac{\overline{\omega}+b}{d}\right)}{G(1, \overline{\omega})}\right)^{\frac{1}{8}}=\left(\frac{G\left(1, \frac{\alpha\overline{\omega}+\beta}{\gamma\overline{\omega}+\delta}\right)}{G(1, \overline{\omega})}\right)^{\frac{1}{8}}$$

eine Zahl in $K(2)$, also auch in $K(4)$. Wegen der obigen Bedingung ist aber auch (Fueter, S. 403, Weber, S. 130):

$$\left(\frac{G\left(1, \frac{\alpha\bar{\omega}+\beta}{\gamma\bar{\omega}+\delta}\right)}{G(1,\bar{\omega})}\right)^{\frac{1}{8}} = \pm\sqrt{-i(\gamma\bar{\omega}+\delta)^3} = \pm\sqrt{-i^3}\,(1+\omega)^3.$$

Also muss $\sqrt{-i}$ in $K(2)$ sein und i und $\sqrt{2}$ gehören $K(2)$ an; $K(2)$ entsteht aus K, indem man diese Zahlen zu K adjungiert. Denn beide können nicht schon in K enthalten sein, wie man aus Fueter, S. 74, Satz 79 und den Entwicklungen von Weber, S. 517 ersieht.

Diese Zahlen haben aber höchstens die Primteiler von 2 in ihrer Relativdiskriminante, somit enthält auch die Relativdiskriminante von $K(2)$ zu K höchstens diese Teiler.

Um nun $K(4)$ zu erhalten, bedenken wir, dass $\mathfrak{t}^2$ in $K(2)$ liegt, nach den Entwicklungen von Fueter, S. 107. Ferner muss die kubische Gleichung von $\mathfrak{t}^2$ in K in einen linearen, und einen quadratischen Faktor in $\mathfrak{t}^2$ zerfallen, siehe Fueter, S. 113 und ff. Unter den sechs Wurzeln $\pm\mathfrak{t}$, $\pm\bar{\mathfrak{t}}$, $\pm\bar{\bar{\mathfrak{t}}}$ liegt also eine, z. B. $\bar{\mathfrak{t}}$ in $K(2)$. Nun ist aber:

$$2\bar{\bar{\mathfrak{t}}}^2 = 3^2 \cdot 2^4 - \mathfrak{t}^2 \pm \frac{\mathfrak{t}}{\sqrt{\mathfrak{t}^2-2^6}}(\mathfrak{t}^2 - 3\cdot 2^4),$$

Also erhält man $\mathfrak{t}$ durch Adjunktion von $\sqrt{\mathfrak{t}^2-2^6}$ zu $K(2)$, in dem $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}^2$ liegen. Diese Zahl kann aber nur Primteiler von 2 enthalten; denn es ist

$$(\mathfrak{t}^2-2^6)(\bar{\mathfrak{t}}^2-2^6)(\bar{\bar{\mathfrak{t}}}^2-2^6) = 2^{12}.$$

Daher ist die Relativdiskriminante von $K(4)$ zu $K(2)$ nur durch Primteiler von 2 teilbar.

9. **Satz**: *Im Falle* $m \not\equiv 1 \pmod{4}$ *enthält die Relativdiskriminante von* $K(4)$ *zu* K *nur die Primteiler von* 2.

Nach Weber, S. 540 ist:

$$\frac{\mathfrak{t}^2-2^6}{2^6}$$

eine Einheit. Da aber nach obigem $\sqrt{2}$ sicherlich in $K(4)$ vorkommt, so gilt der Satz:

10. **Satz:** *Die Zahlen* $(\mathfrak{t}^2-2^6):2^6$ *sind Einheiten, und die Ideale* $(\mathfrak{t}^2-2^6)$ *sind in* $K(4)$ 12. *Potenzen von Idealen.*

Zusammenfassend ergibt sich für alle Fälle der Satz:

11. **Satz:** *Die Relativdiskriminante des Körpers* $K(4)$ *zum Klassenkörper* K *enthält nur die Primteiler von* (2). *Nur im Falle* $m \equiv 5$ (*mod.* 8) *kann der kubische Unterkörper auch noch die Primteiler von* (3) *enthalten.*

Die ganzen Zahlen $\mathfrak{t}^2-2^6$ *von* $K(4)$ *sind* 12. *Potenzen eines Ideals* $\mathfrak{L}$ *von* $K(4)$.

III.

Die Relativdiskriminante der Teilungskörper zum Klassenringkörper $K(4)$.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein ungerades Primideal von $k(\sqrt{m})$, das zur Diskriminante des Klassenrings $K(4)$ teilerfremd sei. Wir wollen der Einfachheit halber im Folgenden immer an dieser Annahme festhalten, trotzdem alle Sätze auch für beliebige ungerade Ideale $\mathfrak{f}$ statt $\mathfrak{p}^r$ bewiesen werden können. Da wir aber zu unserem Beweise nur den genannten Fall gebrauchen werden, und die Beweise bei der Annahme einfacher werden, begnüge ich mich mit dem Unterfall.

12. **Satz:** *Die ganze Zahl* $\sqrt{(\mathfrak{t}+8)\,\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)}$ *ist eine bestimmende Zahl des Relativkörpers* $*(4\,\mathfrak{p}^r)$ *von* $K(4)$.

Nach Fueter, S. 126 ist der Relativgrad von $*(4\,\mathfrak{p}^r)$ zu $K(4)$ gleich $\varphi(\mathfrak{p}^r)$. Die Zahl $\sqrt{(\mathfrak{t}+8)\,\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)}$ ist ferner nach Fueter S. 139, Satz 143 in $*(4\,\mathfrak{p}^r)$. Ausserdem ist im Körper $K\left(\mathfrak{t}, \sqrt{(\mathfrak{t}+8)\,\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)}\right)$ das Primideal $\mathfrak{p}$ die $\varphi(\mathfrak{p}^r)$:te Potenz eines Ideals (Fueter, S. 139, Satz 145), somit muss, da $\mathfrak{p}$ zur Diskriminante von $K(4)$ teilerfremd ist, der Relativgrad von $\sqrt{(\mathfrak{t}+8)\,\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)}$ wenigstens gleich $\varphi(\mathfrak{p}^r)$ sein. Der Grad ist also gleich $\varphi(\mathfrak{p}^r)$, und somit $\sqrt{(\mathfrak{t}+8)\,\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)}$ eine bestimmende Zahl von $*(4\,\mathfrak{p}^r)$.

1. **Hilfssatz:** *Es gilt die Formel:*

$$\mathfrak{T}_1(z)\,\mathfrak{T}_1\left(z+\frac{\omega_1}{2}\right)\mathfrak{T}_1\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right)\mathfrak{T}_1\left(z+\frac{\omega_3}{2}\right)=\mathfrak{t}^2-2^6.$$

$\mathfrak{T}_1(z)$ hat im Periodenparallelogramm als elliptische Funktion 3. Ordnung nur bei $z=\frac{\omega_3}{2}$ einen Pol 3. Ordnung, und für $z=0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ je eine Nullstelle 1. Ordnung. Daraus erkennt man, dass die linke Seite der Gleichung im Periodenparallelogramm nirgends null oder unendlich wird, also eine Konstante ist. Um dieselbe zu berechnen setzt man $z=\frac{\omega_3}{4}$, dann wird wegen $\mathfrak{T}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{4}\right)=1$ und (2):

$$\mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_3}{4}\right)^2=\mathfrak{T}\left(\frac{\omega_3}{4}\right)\left(4\,\mathfrak{T}\left(\frac{\omega_3}{4}\right)^2+\mathfrak{t}\,\mathfrak{T}\left(\frac{\omega_3}{4}\right)+4\right)$$
$$=\mathfrak{t}+8,$$

und wegen $\mathfrak{T}\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{4}\right)=-1$:

$$\mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{4}\right)^2=\mathfrak{t}-8,$$

also:

$$\mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_3}{4}\right)\mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_3}{4}+\frac{\omega_1}{2}\right)\mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_3}{4}+\frac{\omega_2}{2}\right)\mathfrak{T}_1\left(\frac{3\,\omega_3}{4}\right)=\mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_3}{4}\right)^2\mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{4}\right)^2=\mathfrak{t}^2-2^6,$$

womit die Formel bewiesen ist.

2. **Hilfssatz:** *Ist ν eine ganze Zahl von $k(\sqrt{m})$, für die $\nu\equiv 1 \pmod{2}$ ist, so gilt die Formel:*

$$(-1)^{\frac{a}{2}}(\mathfrak{t}^2-2^6)^{\frac{n(\nu)-1}{4}}\,\mathfrak{T}_1(\nu z)=\mathfrak{T}_1(z)\prod_{(\mu)}\mathfrak{T}_1(z+\mu),\quad a \text{ eine der Zahlen } 0, 1, 2, 3.$$

Dabei sind die Perioden ω_1, ω_2 die besonders gewählten Basen eines zu (ν) teilerfremden, ungeraden Ideals $\mathfrak{w}$ von k, und μ durchläuft alle Zahlen der Form:

$$\frac{x_1\,\omega_1+x_2\,\omega_2}{\nu}$$

in denen $x_1\,\omega_1+x_2\,\omega_2$ ein volles Restsystem von ganzen Zahlen in $k \pmod{\nu}$ mit Ausnahme von null bedeutet.

Denn $\mathfrak{T}_1(\nu z)$ hat die einfachen Nullstellen:

$$z=\frac{x_1\,\omega_1+x_2\,\omega_2}{\nu}=\mu,\quad z=\frac{\omega_1}{2}+\mu,\quad z=\frac{\omega_2}{2}+\mu,$$

und die dreifachen Pole:

$$z = \frac{\omega_3}{2} + \mu$$

da z. B. wegen $\nu \equiv 1 \pmod{2}$:

$$\frac{\omega_3}{2\nu} + \frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{\nu} = \frac{\omega_3}{2} + \frac{\left(x_1 - \frac{\nu-1}{2}\right)\omega_1 + \left(x_2 - \frac{\nu-1}{2}\right)\omega_2}{\nu} = \frac{\omega_3}{2} + \frac{\bar{x}_1\omega_1 + \bar{x}_2\omega_2}{\nu},$$

ist. Genau dieselben Nullstellen und Pole hat aber auch die rechte Seite der Gleichung, daher ist der Quotient der Funktion $\mathfrak{T}_1(\nu z)$ und der rechten Seite eine Konstante:

$$\mathfrak{T}_1(\nu z) = c\,\mathfrak{T}_1(z)\prod_{(\mu)}\mathfrak{T}_1(z+\mu).$$

Um c zu berechnen, bedenken wir, dass:

$$\lim_{z=0}\frac{\mathfrak{T}_1(\nu z)}{\mathfrak{T}_1(z)} = \lim_{z=0}\frac{\frac{d\mathfrak{T}_1(\nu z)}{d\zeta}}{\frac{d\mathfrak{T}_1(z)}{d\zeta}} = \lim_{z=0}\frac{\nu(6\,\mathfrak{T}(\nu z)^2 + \mathrm{t}\,\mathfrak{T}(\nu z) + 2)}{6\,\mathfrak{T}(z)^2 + \mathrm{t}\,\mathfrak{T}(z) + 2} = \nu;$$

$$\lim_{z=\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}}\frac{\mathfrak{T}_1(\nu z)}{\mathfrak{T}_1(z)} = \lim_{z=\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}}\frac{\nu(6\,\mathfrak{T}(\nu z)^2 + \mathrm{t}\,\mathfrak{T}(\nu z) + 2)}{6\,\mathfrak{T}(z)^2 + \mathrm{t}\,\mathfrak{T}(z) + 2} = \nu, \text{ da } \mathfrak{T}\left(\frac{\omega_{1,2}}{2}\right) = \mathfrak{T}\left(\nu\frac{\omega_{1,2}}{2}\right);$$

$$\lim_{z=\frac{\omega_3}{2}}\frac{\mathfrak{T}_1(\nu z)}{\mathfrak{T}_1(z)} = \lim_{z=\frac{\omega_3}{2}}\left(\frac{\mathfrak{T}(\nu z)}{\mathfrak{T}(z)}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\nu^3}.$$

Setzt man somit in:

$$\frac{\mathfrak{T}_1(\nu z)}{\mathfrak{T}_1(z)} = c\prod_{(\mu)}\mathfrak{T}_1(z+\mu)$$

für z die Werte $0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_3}{2}$ ein, so folgt:

$$\nu = c\prod_{(\mu)}\mathfrak{T}_1(\mu),$$

$$\nu = c\prod_{(\mu)}\mathfrak{T}_1\left(\mu + \frac{\omega_1}{2}\right),$$

$$\nu = c\prod_{(\mu)}\mathfrak{T}_1\left(\mu + \frac{\omega_2}{2}\right),$$

$$\frac{1}{\nu^3} = c\prod_{(\mu)}\mathfrak{T}_1\left(\mu + \frac{\omega_3}{2}\right).$$

Multipliziert man die Gleichungen, so folgt:

$$1 = c^4 \Pi \mathfrak{T}_1(\mu) \mathfrak{T}_1\left(\mu + \frac{\omega_1}{2}\right) \mathfrak{T}_1\left(\mu + \frac{\omega_2}{2}\right) \mathfrak{T}_1\left(\mu + \frac{\omega_3}{2}\right),$$

oder wegen Hilfssatz 1:

$$1 = c^4 (t^2 - 2^6)^{n(\nu)-1}, \quad c = (-1)^{\frac{a}{2}} \frac{1}{(t^2-2^6)^{\frac{n(\nu)-1}{4}}}, \quad a = 0 \text{ oder } 1, \text{ oder } 2 \text{ oder } 3,$$

denn die Anzahl der μ ist gleich der Norm $n(\nu)$ von ν in k weniger der ausgeschlossenen Restklasse 0.

13. **Satz:** *Ist ν eine ganze Zahl von k, die zu $\mathfrak{w}$ teilerfremd ist, und für die $\nu \equiv 1$ (mod. 2), so sind alle Zahlen*

$$\mathfrak{T}_1\left(\frac{x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2}{\nu}\right),$$

wo x_1, x_2, irgendwelche ganze rationale Zahlen sind, ganze algebraische Zahlen, die nur Teiler von (2ν) enthalten können.

Denn nach dem Beweise des letzten Hilfssatzes und der Berechnung von c ist:

$$(-1)^{\frac{a}{2}} (t^2 - 2^6)^{\frac{n(\nu)-1}{4}} \nu = \Pi_{(\mu)} \mathfrak{T}_1\left(\frac{x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2}{\nu}\right), \quad \mu = \frac{x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2}{\nu}.$$

Nun ist wegen $\nu \equiv 1$ (mod. 2) nach Fueter, S. 120 Korrollar zu Satz 123 $\mathfrak{T}\left(\frac{x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2}{\nu}\right)$ eine ganze algebraische Zahl, also auch:

$$\mathfrak{T}_1\left(\frac{x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2}{\nu}\right)^2 = \mathfrak{T}\left(\frac{x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2}{\nu}\right) (4\, \mathfrak{T}(\mu)^2 + t\, \mathfrak{T}(\mu) + 4),$$

also auch $\mathfrak{T}_1(\mu)$ selbst. Wegen der vorigen Formel kann aber diese Zahl nur in ν oder $t^2 - 2^6$ aufgehen. Die letztere Zahl enthält aber nur Teiler von (2), wodurch der Satz bewiesen ist.

14. **Satz:** *Die Relativdiskriminante von $\mathfrak{K}(4\mathfrak{p}^r)$ zu $K(4)$ enthält nur die Teiler von $\mathfrak{p}$ und (2).*

Es sei π eine durch $\mathfrak{p}^r$ teilbare ganze Zahl von k. Da $\mathfrak{p}$ ungerade ist, darf man $\pi \equiv 1 \pmod{2}$ annehmen. Man kann dann setzen:

$$\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right) = \mathfrak{T}\left(\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{\pi}\right),$$

wo x_1, x_2 bestimmte ganze rationale Zahlen sind, für die $x_1 \equiv x_2 \equiv \pm 1 \pmod{4}$ ist. Aus dem Additionstheorem (3) der $\mathfrak{T}$-funktion folgt:

$$\mathfrak{T}(z+t) = \frac{\mathfrak{T}(z)\dfrac{\mathfrak{T}_1(t)^2}{\mathfrak{T}(t)} + 2\,\mathfrak{T}_1(z)\,\mathfrak{T}_1(t) + \mathfrak{T}(t)\dfrac{\mathfrak{T}_1(z)^2}{\mathfrak{T}(z)}}{4\,(\mathfrak{T}(z)\,\mathfrak{T}(t) - 1)^2},$$

$$\mathfrak{T}(z-t) = \frac{\mathfrak{T}(z)\dfrac{\mathfrak{T}_1(t)^2}{\mathfrak{T}(t)} - 2\,\mathfrak{T}_1(z)\,\mathfrak{T}_1(t) + \mathfrak{T}(t)\dfrac{\mathfrak{T}_1(z)^2}{\mathfrak{T}(z)}}{4\,(\mathfrak{T}(z)\,\mathfrak{T}(t) - 1)^2},$$

woraus durch Subtraktion und Multiplikation:

$$\mathfrak{T}(z+t) - \mathfrak{T}(z-t) = \frac{\mathfrak{T}_1(z)\,\mathfrak{T}_1(t)}{(\mathfrak{T}(z)\,\mathfrak{T}(t) - 1)^2},$$

$$\mathfrak{T}(z+t)\,\mathfrak{T}(z-t) = \frac{(\mathfrak{T}(z) - \mathfrak{T}(t))^2}{(\mathfrak{T}(z)\,\mathfrak{T}(t) - 1)^2}.$$

Durch Kombination der beiden Formeln folgt:

$$(\mathfrak{T}(z) - \mathfrak{T}(t))^2\,(\mathfrak{T}(z+t) - \mathfrak{T}(z-t)) = \mathfrak{T}(z+t)\,\mathfrak{T}(z-t)\,\mathfrak{T}_1(z)\,\mathfrak{T}_1(t).$$

Man setzt jetzt hier:

$$\begin{aligned} z+t &= \xi\mu = \xi\,\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{\pi}, \\ z-t &= \eta\mu = \eta\,\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{\pi}, \end{aligned} \qquad \text{wo } \xi \equiv \eta \equiv 1 \pmod{2},\ (\mu) = \frac{\mathfrak{f}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r},$$

sei. Dagegen sei $\xi \not\equiv \pm\mu \pmod{\mathfrak{p}^r}$, und beide zu $\mathfrak{p}$ teilerfremde ganze Zahlen in k. Dann muss:

$$z = \frac{\xi+\eta}{2}\,\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{\pi} = \frac{\bar{x}_1\omega_1 + \bar{x}_2\omega_2}{\pi}, \quad t = \frac{\xi-\eta}{2}\,\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{\pi} = \frac{\bar{\bar{x}}_1\omega_1 + \bar{\bar{x}}_2\omega_2}{\pi},$$

$$\frac{(\bar{x}_1\omega_1 + \bar{x}_2\omega_2)}{(\pi)} = \frac{\bar{\mathfrak{f}}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}, \quad \frac{(\bar{\bar{x}}_1\omega_1 + \bar{\bar{x}}_2\omega_2)}{(\pi)} = \frac{\bar{\bar{\mathfrak{f}}}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}$$

sein und die obige Formel lautet

$$(\mathfrak{T}(\xi\mu))-\mathfrak{T}(\eta\mu)\left(\mathfrak{T}\left(\frac{\bar{\mathfrak{s}}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)\right)-\mathfrak{T}\left(\frac{\bar{\bar{\mathfrak{s}}}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)\Big)^2=\mathfrak{T}(\xi\mu)\,\mathfrak{T}(\eta\mu)\,\mathfrak{T}_1\left(\frac{\bar{\mathfrak{s}}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)\mathfrak{T}_1\left(\frac{\bar{\bar{\mathfrak{s}}}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right);$$

wegen Satz 4 und 13 enthält daher die Differenz $\mathfrak{T}\left(\xi\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)-\mathfrak{T}\left(\eta\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)$ nur Primteiler, die in (2π) aufgehen. Die Zahlen $\mathfrak{T}\left(\xi\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)$ und $\mathfrak{T}\left(\eta\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)$ sind aber konjugierte Zahlen der Relativgleichung von $\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)$ in Bezug auf $K(4)$. Die Relativdifferente von $\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)$ in Bezug auf $K(4)$ kann daher, da die Gleichung relativ-Abelsch in Bezug auf $K(4)$ ist, nur die Primteiler von (2π) enthalten.

Von π ist nur vorausgesetzt, dass es durch $\mathfrak{p}^r$ teilbar sei, und $\equiv 1 \pmod 2$ ist. Nimmt man ein π^*, so dass $\frac{(\pi)}{\mathfrak{p}^r}$ und $\frac{(\pi^*)}{\mathfrak{p}^r}$ zueinander teilerfremd sind, so enthält die Relativdifferente nur die Primteiler von $(2\pi^*)$, also nur die Primteiler von $(2)\mathfrak{p}$.

Der Körper $*(4\mathfrak{p}^r)$ wird wegen Satz 12 erhalten, indem man zu $\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)$ noch die Quadratwurzel $\sqrt{(\mathfrak{t}+8)\,\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)}$ adjungiert. Die Relativdifferente dieses relativquadratischen Oberkörpers kann nach Fueter, S. 139 nur die Teiler von $(2)\mathfrak{p}$ enthalten. Die Relativdifferente von $*(4\mathfrak{p})$ zu $K(4)$ ist aber nach Hilbert, Zahlbericht, S. 209, Satz 41 das Produkt der beiden Relativdifferenten. Daher kann auch dieses Produkt nur die Teiler von $(2)\mathfrak{p}$, also auch die Relativdiskriminante nur die Teiler von $(2)\mathfrak{p}$ enthalten.

Es gilt nun aber noch der feinere Satz:

15. **Satz:** *Die Zahlen* $\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)$ *legen einen zu k und $K(4)$ relativ-Abelschen Oberkörper vom Relativgrade $\frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{p}^r)$ zu $K(4)$ fest, dessen Relativdiskriminante zu $K(4)$ nur die Teiler von $\mathfrak{p}$ enthalten kann.*

Die erste Tatsache folgt aus Satz 4 und 12. Wir haben nur noch zu beweisen, dass die Relativdifferente von $\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)$ zu $K(4)$ *ungerade* ist. Wir brauchen dazu eine Reihe von Sätzen.

Der Körper von $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)$ werde mit $K_s(\mathfrak{p}^r)$ abgekürzt. Ferner setzen wir über die oben definierte Zahl π noch mehr voraus, der Einfachheit halber, nämlich:

$$\pi \equiv \pm 1 \pmod{4}.$$

3. **Hilfssatz**: *Die Zahlen:*

$$\frac{2^{12}}{\mathfrak{t}^2 - 2^6}, \quad \frac{2^8}{\mathfrak{t} \pm 2^3},$$

sind ganze algebraische Zahlen.

Zum Beweise setzt man den Wert $= x$, rechnet umgekehrt $\mathfrak{t}^2$ oder $\mathfrak{t}$ aus, und setzt ihn in der Gleichung (1) ein. Da $j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ eine ganze algebraische Zahl ist, wird auch x ganz sein, wie die einfache Rechnung ergibt.

Wir setzen im folgenden stets:

$$\mu = \frac{x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2}{\pi}, \quad \text{in Idealform: } (\mu) = \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r},$$

wobei $x_1 \equiv x_2 \equiv \pm 1 \pmod{4}$, sonst aber beliebige ganze rationale Zahlen sind.

16. **Satz**: *Die Zahlen:*

$$\frac{\mathfrak{T}(\mu) - 1}{(\mathfrak{t} + 2^3)^{1/8}} \text{ und } \frac{\mathfrak{T}(\mu) + 1}{(\mathfrak{t} - 2^3)^{1/8}},$$

sind ganze algebraische Zahlen.

Wir beweisen nur, dass die ersten Zahlen ganz sind. Der Beweis der 2. ist genau gleich. Nach dem Additionsgesetz ist:

$$\mathfrak{T}(2z) = \frac{\mathfrak{T}(z)(4\,\mathfrak{T}(z)^2 + \mathfrak{t}\,\mathfrak{T}(z) + 4)}{(\mathfrak{T}(z)^2 - 1)^2}$$

oder:

$$(\mathfrak{T}(z)^2 - 1)^2 = \frac{\mathfrak{T}(z)}{\mathfrak{T}(2z)}(4\,\mathfrak{T}(z)^2 + \mathfrak{t}\,\mathfrak{T}(z) + 4).$$

Setzt man $z = \mu$, so ist $\frac{\mathfrak{T}(\mu)}{\mathfrak{T}(2\mu)} = \varepsilon$ eine Einheit (siehe Fueter, S. 129, Satz 135). Die Grösse:

$$u = \mathfrak{T}(\mu) - 1$$

genügt daher der Gleichung:

$$((u+1)^2-1)^2=\varepsilon(4(u+1)^2+\mathfrak{t}(u+1)+4),$$

oder:

$$u^4+4u^3+4(1-\varepsilon)u^2-\varepsilon(\mathfrak{t}+2^3)u-\varepsilon(\mathfrak{t}+2^3)=0.$$

Daraus folgt, dass

$$x=\frac{\mathfrak{T}(\mu)-1}{\lambda},\ \lambda=(\mathfrak{t}+2^3)^{1/8},$$

der Gleichung genügt:

$$x^4+\frac{2^2}{\lambda}x^3+\frac{2^2}{\lambda^2}(1-\varepsilon)x^2-\varepsilon\lambda^5 x-\varepsilon\lambda^4=0.$$

Wegen des 3. Hilfssatzes sind aber alle Koeffizienten ganz, also auch x.

Es gilt aber noch der schärfere Satz:

17. **Satz:** *Die Zahlen:*

$$U=\frac{\mathfrak{T}(\mu)-1}{(\mathfrak{t}+2^3)^{1/4}} \text{ und } V=\frac{\mathfrak{T}(\mu)+1}{(\mathfrak{t}-2^3)^{1/4}},$$

sind ganze algebraische Zahlen, und zwar Einheiten.

Wäre dies nicht erfüllt, so müsste es wegen Satz 16 eine Zahl r geben, so dass

$$\frac{u}{\lambda^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^r}}} \text{ ganz, } \frac{u}{\lambda^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{r+1}}}} \text{ gebrochen, } \lambda=(\mathfrak{t}+2^3)^{1/8},$$

wäre. Wir kürzen den Exponenten $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^r}$ mit n_r ab. Dann ist sicherlich:

$$1\leqq n_r<2.$$

Nach dem obigen Beweise gilt die Formel:

$$\left(\frac{u}{\lambda^{n_r+1}}\right)^4+\frac{2^2}{\lambda^{n_r+1}}\left(\frac{u}{\lambda^{n_r+1}}\right)^3-\frac{2^2}{\lambda^{2n_{r+1}-n_r}}\frac{\varepsilon-1}{\lambda^{n_r}}\left(\frac{u}{\lambda^{n_r+1}}\right)^2-\varepsilon\lambda^{8-3n_{r+1}}\left(\frac{u}{\lambda^{n_r+1}}\right)-\varepsilon\lambda^{8-4n_{r+1}}=0.$$

Nach Annahme ist:

$$\frac{u}{\lambda^{n_r}}=\frac{\mathfrak{T}(\mu)-1}{\lambda^{n_r}}$$

ganz, daher auch die konjugierte:

$$\frac{\mathfrak{T}(2\mu)-1}{\lambda^{n_r}}.$$

Somit ist:

$$\frac{\varepsilon-1}{\lambda^{n_r}}=\frac{1}{\mathfrak{T}(2\mu)}\,\frac{\mathfrak{T}(\mu)-\mathfrak{T}(2\mu)}{\lambda^{n_r}}$$

ebenfalls ganz, da $\mathfrak{T}(2\mu)$ nur Primteiler besitzt, die in dem ungeraden Primideal $\mathfrak{p}$ aufgehen, und $(\mathfrak{t}+2^3)$ nur gerade Teiler besitzt. Ferner ist nach Definition $2n_{r+1}-n_r=2$. Somit sind auch alle Coeffizienten von $u/\lambda^{n_{r+1}}$ ganz, d. h. die Zahl selbst ist ganz gegen die Voraussetzung. Der Satz ist damit bewiesen. Dass $\frac{\mu}{\lambda^2}$ eine Einheit ist, sieht man aus derselben Gleichung.

18. **Satz:** *Die Zahlen:*

$$\frac{\mathfrak{T}_1(\mu)^2}{\mathfrak{T}(\mu)\sqrt{\mathfrak{t}^2-2^6}},$$

sind ganze algebraische Zahlen, und zwar Einheiten.

Denn nach Satz 17 ist

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{t}^2-2^6}}(\mathfrak{T}(\mu)^2-1)^2=\left\{\frac{\mathfrak{T}(\mu)-1}{(\mathfrak{t}+2^3)^{1/4}}\cdot\frac{\mathfrak{T}(\mu)+1}{(\mathfrak{t}-2^3)^{1/4}}\right\}^2$$

ganz, also auch:

$$\frac{\mathfrak{T}(\mu)}{\mathfrak{T}(2\mu)}\cdot\frac{\mathfrak{T}_1(\mu)^2}{\mathfrak{T}(\mu)\sqrt{\mathfrak{t}^2-2^6}}=\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{t}^2-2^6}}(\mathfrak{T}(\mu)^2-1)^2.$$

Nun ist aber $\mathfrak{T}(\mu)/\mathfrak{T}(2\mu)$ eine algebraische Einheit. Somit ist die Zahl des Satzes ganz.

Anderseits ist nach S. 58

$$\prod_{(\mu)}\mathfrak{T}_1(\mu)=(\mathfrak{t}^2-2^6)^{\frac{n(\pi)-1}{4}}\cdot\pi(-1)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Lässt man nur über diejenigen unserer μ das Produkt gehen, deren Zähler zum Nenner $\mathfrak{p}^r$ teilerfremd sind, so sieht man leicht nach bekannten Methoden, dass

$$\left(\prod_{(\mu)}{}'\,\mathfrak{T}_1(\mu)\right)=(\mathfrak{t}^2-2^6)^{\frac{\varphi(\mathfrak{p}^r)}{4}}\cdot\mathfrak{p}$$

ist. Da nach FUETER, S. 129 auch

$$(\underset{(\mu)}{\Pi'}\mathfrak{T}(\mu)) = \mathfrak{p}^{2r}$$

ist, wo über dieselben μ zu multiplizieren ist, so folgt:

$$\left(\frac{\mathfrak{T}_1(\mu)^2}{\mathfrak{T}(\mu)(\mathfrak{t}^2-2^6)^{1/2}}\right) = (1),$$

d. h. die Zahlen sind Einheiten.

19. **Satz:** *Sind μ_1 und μ_2 zwei Zahlen μ, deren Zähler zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd, und (mod. $\mathfrak{p}^r$) nicht in denselben Strahlklassen sind, so sind die Zahlen:*

$$\frac{\mathfrak{T}(\mu_1)-\mathfrak{T}(\mu_2)}{(\mathfrak{t}^2-2^6)^{1/6}} \quad \textit{und} \quad \frac{\mathfrak{T}(\mu_1)\,\mathfrak{T}(\mu_2)-1}{(\mathfrak{t}^2-2^6)^{1/6}}$$

ganze algebraische Zahlen, die nur durch die Primteiler von $\mathfrak{p}$ teilbar sein können, zu allen übrigen Primidealen aber teilerfremd sind. Die zweiten Zahlen sind Einheiten.

Setzt man in der Gleichung:

$$(\mathfrak{T}(z+t)-\mathfrak{T}(z-t))(\mathfrak{T}(z)-\mathfrak{T}(t))^2 = \mathfrak{T}(z+t)\,\mathfrak{T}(z-t)\,\mathfrak{T}_1(z)\,\mathfrak{T}_1(t),$$

an Stelle von z die Grösse $z+t$, an Stelle von t die Grösse $z-t$, so wird:

$$(\mathfrak{T}(2z)-\mathfrak{T}(2t))(\mathfrak{T}(z+t)-\mathfrak{T}(z-t))^2 = \mathfrak{T}(2z)\,\mathfrak{T}(2t)\,\mathfrak{T}_1(z+t)\,\mathfrak{T}_1(z-t).$$

Eliminiert man aus beiden Gleichungen die Differenz mit den Argumenten $z+t$ und $z-t$, so folgt:

$$\frac{(\mathfrak{T}(z)-\mathfrak{T}(t))^{2^2}}{\mathfrak{T}(2z)-\mathfrak{T}(2t)} = \frac{\mathfrak{T}^2(z+t)\,\mathfrak{T}^2(z-t)\,\mathfrak{T}_1^2(z)\,\mathfrak{T}_1^2(t)}{\mathfrak{T}(2z)\,\mathfrak{T}(2t)\,\mathfrak{T}_1(z+t)\,\mathfrak{T}_1(z-t)}.$$

Setzt man hier $z=\mu_1$, $t=\mu_2$, so werden rechts die Werte der Funktion $\mathfrak{T}$ nur die Primideale von $\mathfrak{p}$ enthalten können. Ferner muss wegen des letzten Satzes rechts noch der Faktor $\sqrt{\mathfrak{t}^2-2^6}$ auftreten. Dagegen kann wegen der Annahmen über μ_1 und μ_2 niemals ein Faktor null oder unendlich werden. Wir setzen:

$$\frac{(\mathfrak{T}(\mu_1)-\mathfrak{T}(\mu_2))^{2^2}}{(\mathfrak{T}(2\mu_1)-\mathfrak{T}(2\mu_2))} = \Pi_1(\mathfrak{t}^2-2^6)^{1/2},$$

wo Π_1 eine ganze algebraische Zahl ist, die nur Primteiler von $\mathfrak{p}$ enthalten kann. Genau dasselbe Resultat erhält man, wenn man für z und t die Zahlen $2^i\mu_1$ und $2^i\mu_2$, $i=1, 2, 3, \ldots r$ setzt. So findet man die Reihe von Gleichungen:

$$\frac{(\mathfrak{T}(\mu_1)-\mathfrak{T}(\mu_2))^{2^{2r}}}{(\mathfrak{T}(2\mu_1)-\mathfrak{T}(2\mu_2))^{2^{2r-2}}} = \Pi_1^{2^{2r-2}}(\mathfrak{t}^2-2^6)^{\frac{1}{2}2^{2r-2}},$$

$$\frac{(\mathfrak{T}(2\mu_1)-\mathfrak{T}(2\mu_2))^{2^{2r-2}}}{(\mathfrak{T}(2^2\mu_1)-\mathfrak{T}(2^2\mu_2))^{2^{2r-4}}} = \Pi_2^{2^{2r-4}}(\mathfrak{t}^2-2^6)^{\frac{1}{2}2^{2r-4}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{(\mathfrak{T}(2^{r-1}\mu_1)-\mathfrak{T}(2^{r-1}\mu_2))}{(\mathfrak{T}(2^r\mu_1)-\mathfrak{T}(2^r\mu_2))} = \Pi_{r-1}(\mathfrak{t}^2-2^6)^{\frac{1}{2}},$$

in der alle Π ganze Zahlen sind, die nur Primteiler von $\mathfrak{p}$ enthalten. Durch Multiplikation aller Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{(\mathfrak{T}(\mu_1)-\mathfrak{T}(\mu_2))^{2^{2r}}}{(\mathfrak{T}(2^r\mu_1)-\mathfrak{T}(2^r\mu_2))} = \Pi^*(\mathfrak{t}^2-2^6)^{\frac{1}{2}\frac{2^{2r}-1}{3}},$$

wo Π^* dieselbe Eigenschaft wie die Π hat. Ist r der kleinste Exponent, für den (r *nicht* der Exponent von $\mathfrak{p}$!):

$$2^r \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^r},$$

so wird:

$$\mathfrak{T}(2^r\mu_1)=\mathfrak{T}(\mu_1),\ \mathfrak{T}(2^r\mu_2)=\mathfrak{T}(\mu_2),$$

also:

$$(\mathfrak{T}(\mu_1)-\mathfrak{T}(\mu_2))^{2^{2r}-1} = \Pi^*(\mathfrak{t}^2-2^6)^{\frac{1}{2}\frac{2^{2r}-1}{3}}$$

oder:

$$\mathfrak{T}(\mu_1)-\mathfrak{T}(\mu_2)=\Pi^{**}(\mathfrak{t}^2-2^6)^{1/6}$$

wo Π^{**} eine ganz Zahl ist, die nur Primteiler von $\mathfrak{p}$ enthält. Damit ist der Satz für die ersten Zahlen bewiesen. Wegen der frühern Formel:

$$\frac{\mathfrak{T}(z)-\mathfrak{T}(t)}{\mathfrak{T}(z)\,\mathfrak{T}(t)-1} = \pm\sqrt{\mathfrak{T}(z+t)\,\mathfrak{T}(z-t)}$$

folgt er ohne weiteres auch für die zweiten Zahlen, falls man wieder $z=\mu_1$, $t=\mu_2$ setzt. Zugleich sieht man, dass $\mathfrak{T}(\mu_1)\,\mathfrak{T}(\mu_2)-1$ auch zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd sein muss, und $\mathfrak{T}(\mu_1)-\mathfrak{T}(\mu_2)$ genau durch $\sqrt{\mathfrak{T}(\mu_1+\mu_2)\mathfrak{T}(\mu_1-\mu_2)}$ teilbar ist.

20. **Satz:** *Die Zahlen:*

$$\frac{\sqrt{\mathfrak{T}(\mu_1)\,\mathfrak{T}(\mu_2)} \pm 1}{(\mathfrak{t}^2-2^6)^{1/12}}$$

sind ganze algebraische Zahlen, und zwar Einheiten.

Denn aus der eben angeführten Gleichung folgt:

$$\pm\sqrt{\mathfrak{T}(z+t)\,\mathfrak{T}(z-t)} \pm 1 = \frac{\mathfrak{T}(z)-\mathfrak{T}(t)}{\mathfrak{T}(z)\,\mathfrak{T}(t)-1} \pm 1 = \frac{\pm(\mathfrak{T}(z)\mp 1)(\mathfrak{T}(t)\pm 1)}{\mathfrak{T}(z)\,\mathfrak{T}(t)-1}. \tag{4}$$

Setzt man wieder $z+t=\mu_1$, $z-t=\mu_2$, so ist jeder der Faktoren des Zählers rechts genau durch $(\mathfrak{t}\mp 2^3)^{1/4}$ teilbar (Satz 17). Der Nenner rechts ist durch $(\mathfrak{t}^2-2^6)^{1/6}$ genau teilbar (Satz 19). Also die linke Seite genau durch $(\mathfrak{t}^2-2^6)^{1/12}$ und der Quotient ist eine Einheit. Andere Teiler können nicht auftreten.

Aus dem Satze 19 folgt, dass die beiden Zahlen:

$$\frac{\sqrt{\mathfrak{T}(\mu_1)} \pm \sqrt{\mathfrak{T}(\mu_2)}}{(\mathfrak{t}^2-2^6)^{1/12}}$$

ganze Zahlen sind, da ihre Summe und ihr Produkt ganz sind (siehe Hilfssatz 3). Ferner sind sie nur durch Primteiler von $\mathfrak{p}$ und durch keine andern Primideale teilbar. Es sei μ_3 eine 3. Zahl μ, dann ist auch:

$$\frac{\sqrt{\mathfrak{T}(\mu_1)\,\mathfrak{T}(\mu_3)}-\sqrt{\mathfrak{T}(\mu_3)\,\mathfrak{T}(\mu_2)}}{(\mathfrak{t}^2-2^6)^{1/12}} = \frac{\sqrt{\mathfrak{T}(\mu_1)\,\mathfrak{T}(\mu_3)}-1}{(\mathfrak{t}^2-2^6)^{1/12}} - \frac{\sqrt{\mathfrak{T}(\mu_2)\,\mathfrak{T}(\mu_3)}-1}{(\mathfrak{t}^2-2^6)^{1/12}}$$

ganz und nur durch die Primideale von $\mathfrak{p}$, aber keine andern (geraden) Primideale teilbar. Wir setzen:

$$\mu_2=\xi^2\mu_1, \qquad \mu_3=\xi\mu_1,$$

wo sicherlich:

$$\xi\not\equiv\pm 1 \pmod{\mathfrak{p}^r}, \quad \text{oder} \quad \xi^2\not\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^r} \quad \text{und} \quad \xi\equiv 1 \pmod{2},$$

sein soll. Sonst ist aber ξ eine beliebige, zu $\mathfrak{p}$ teilerfremde ganze Zahl von k. Jetzt sind:

$$\frac{\sqrt{\mathfrak{T}(\mu_1)\,\mathfrak{T}(\xi\mu_1)}-1}{(\mathfrak{t}^2-2^6)^{1/12}}, \qquad \frac{\sqrt{\mathfrak{T}(\xi\mu_1)\,\mathfrak{T}(\xi^2\mu_1)}-1}{(\mathfrak{t}^2-2^6)^{1/12}}$$

ganze Zahlen nach Satz 20. Ihre Zähler gehören dem Körper $K_s(\mathfrak{p}^r)$ an (siehe (4)). Die Nenner können höhern Körpern angehören. Nach Satz 11 ist aber in $K(4)$ schon:

$$(\mathfrak{t}^2-2^6)=\mathfrak{L}^{12},$$

wir können somit in $\mathfrak{L}$ stets eine ganze Zahl λ von $K(4)$ finden, so dass $\lambda:(\mathfrak{t}^2-2^6)^{1/12}$ keinen Teiler mit (2) gemein hat. Es gibt dann eine ungerade ganze rationale Zahl a, so dass:

$$\Xi=a\frac{\sqrt{\mathfrak{T}(\mu_1)\,\mathfrak{T}(\xi\mu_1)}-1}{\lambda}, \qquad \Xi'=a\frac{\sqrt{\mathfrak{T}(\xi\mu_1)\,\mathfrak{T}(\xi^2\mu_1)}-1}{\lambda},$$

ganze Zahlen von $K_s(\mathfrak{p}^r)$ sind, die keinen geraden Primteiler besitzen. Diese beiden Zahlen sind aber ausserdem relativconjugiert in Bezug auf $K(4)$ (Fueter, Satz 133, S. 128). Ihre Differenz:

$$\Xi'-\Xi$$

ist nach obigem und weil a ungerade ist, ebenfalls durch keinen geraden Primteiler teilbar, somit muss, da $K_s(\mathfrak{p}^r)$ zu $K(4)$ relativ-Abelsch ist, die Relativdifferente von $K_s(\mathfrak{p}^r)$ zu $K(4)$ ungerade sein. Damit ist Satz 15 völlig bewiesen.

Wir fassen das erhaltene nochmals in dem Satz zusammen:

21. **Satz:** *Ist $\mathfrak{p}$ ein ungerades, zur Diskriminante von $K(4)$ teilerfremdes Primideal von k, so legt $\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}^r}\right)=\mathfrak{T}(\mu)$, wo $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{w}$ zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd sind, einen Oberkörper $K_s(\mathfrak{p}^r)$ von $K(4)$ fest, der folgende Eigenschaften besitzt:*

1) *$K_s(\mathfrak{p}^r)$ ist relativ-Abelsch zu k und $K(4)$.*
2) *Sein Relativgrad zu $K(4)$ ist $\frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{p}^r)$.*
3) *Seine Relativgruppe zu $K(4)$ ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Strahlklassen (mod. $\mathfrak{p}^r$), in die die Zahlen von k zerfallen.*
4) *Seine Relativdiskriminante in Bezug auf $K(4)$ kann nur die Primteiler von $\mathfrak{p}$ enthalten.*

IV.

Der allgemeine Strahlklassenkörper.

Nach der Definition der $\mathfrak{T}$-Funktion ist:

$$\frac{\wp(z)}{e_3} = 1 + \frac{2^2 . 3}{\mathfrak{t}\,\mathfrak{T}(z)}.$$

Sind wieder ω_1, ω_2 Basiszahlen eines Ideals $\mathfrak{w}=(\omega_1, \omega_2)$ von $k(\sqrt{m})$, so setze ich:

a) $m \neq -3$, $\neq -1$: Dann sind g_2 und g_3 von null verschieden.

$$\mathfrak{S}(z;\ \omega_1, \omega_2) = \frac{g_2 \wp(z;\ \omega_1, \omega_2)}{g_3} = \frac{g_2}{e_3^2} \cdot \frac{\wp(z)}{e_3} \cdot \frac{1}{\frac{g_3}{e_3^3}}.$$

Setzt man für $\frac{g_2}{e_3^2}$, $\frac{g_3}{e_3^3}$, $\frac{\wp(z)}{e_3}$ die Werte ein, so wird (siehe (1)):

$$\mathfrak{S}(z;\ \omega_1, \omega_2) = 3\,\frac{\mathfrak{t}^2 - 3 . 2^4}{2^4 . 3^2 - 2\,\mathfrak{t}^2}\left(1 + \frac{2^2 . 3}{\mathfrak{t}\,\mathfrak{T}(z;\ \omega_1, \omega_2)}\right).$$

b) $m = -1$: Dann ist $g_3 = 0$, $g_2 \neq 0$,

$$\mathfrak{t}^2 = 2^3 . 3^2, \quad \frac{g_2}{e_3^2} = 2^2.$$

$$\mathfrak{S}(z;\ \omega_1, \omega_2) = \frac{\wp(z)^2}{g_2} = \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{2^2 . 3}{\mathfrak{t}\,\mathfrak{T}(z;\ \omega_1, \omega_2)}\right)^2.$$

c) $m = -3$: Dann ist $g_2 = 0$, $g_3 \neq 0$,

$$\mathfrak{t}^2 = 3 . 2^4, \quad \frac{g_3}{e_3^3} = 2^2.$$

$$\mathfrak{S}(z;\ \omega_1, \omega_2) = \frac{\wp(z)^3}{g_3} = \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{2^2 . 3}{\mathfrak{t}\,\mathfrak{T}(z;\ \omega_1, \omega_2)}\right)^3.$$

Aus der bekannten Eigenschaft der Weierstrass'schen Funktionen $\wp$, g_2, g_3, folgt:

22. **Satz:** *$\mathfrak{S}(z; \omega_1, \omega_2)$ bleibt ungeändert, falls man auf ω_1, ω_2 irgend eine Substitution der Modulgruppe ausübt.*

Das Ziel dieser Arbeit ist, zu beweisen, dass die Relativdiskriminante von K zu k gleich eins ist. Da im Falle $m = -1$ und $m = -3$ die Klassenzahl eins ist, ist $K = k$, also nichts zu beweisen. Um die wegen der Definition von $\mathfrak{S}$ nötigen Fallunterschiede zu vermeiden, *setzen wir im folgenden voraus, dass $m \neq -1$ und $m \neq -3$ sei.* Die Sätze gelten übrigens alle auch in diesen Fällen, nur müssten die Beweise besonders geführt werden.

Es sei $\mathfrak{f}$ ein beliebiges, zu $\mathfrak{w}$ teilerfremdes Ideal in k. Wir setzen:

$$z = \frac{x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2}{4\nu}, \qquad \text{wo } x_1 \equiv x_2 \equiv \pm 1 \pmod{4} \text{ ist.}$$

z habe die symbolische Form:

$$z = \frac{\mathfrak{j}\mathfrak{w}}{(4)\mathfrak{f}}, \qquad \mathfrak{j} \text{ teilerfremd zu } \mathfrak{f}.$$

Dann gilt der

23. **Satz:** *$\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{j}\mathfrak{w}}{(4)\mathfrak{f}}; \omega_1, \omega_2\right)$ ist eine algebraische Zahl. Der Oberkörper $\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{j}\mathfrak{w}}{(4)\mathfrak{f}}; \omega_1, \omega_2\right)$ von $j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$, wo ω_1, ω_2 die Basis von $\mathfrak{w}$ ist, ist identisch mit dem Körper $*(4\,\mathfrak{f})$, der Körper $K\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{j}\mathfrak{w}}{(4)\mathfrak{f}}\right), j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right)$ hat daher den Relativgrad $h_s(4\,\mathfrak{f})$ zu $k(\sqrt{m})$, ist relativ-Abelsch zu k, und seine Relativgruppe ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Strahlklassen in k (mod. $4\,\mathfrak{f}$).*

Denn nach Definition ist $\mathfrak{S}$ sicherlich eine Zahl des Körpers $*(4\,\mathfrak{f})$, der durch $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{j}\mathfrak{w}}{(4)\mathfrak{f}}\right)$ gebildet wird. Ebenso folgt auch wegen Fueter, Satz 123, S. 117, dass jede Zahl $\mathfrak{S}\left(\frac{x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2}{\nu}\right)$, bei beliebigem x_1, x_2 eine algebraische Zahl ist. Nach dem Prinzip der komplexen Multiplikation folgt, wie bei Weber, S. 572 u. ff.:

24. **Satz:** *Ist $\mathfrak{w} = (\omega_1, \omega_2)$ ein Ideal von k, gegeben durch seine Basiszahlen, ν eine beliebige ganze Zahl von k, so ist:*

$$\mathfrak{S}(\nu z) = R(\mathfrak{S}(z)),$$

wo R eine rationale Funktion von $\mathfrak{S}(z)$ ist, deren Koeffizienten Zahlen des Klassenkörpers K sind.

Daraus folgt, dass $\mathfrak{S}\left(\frac{x_1\omega_1+x_2\omega_2}{4}\right)$ dem Körper $j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$, $\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{j}\,\mathfrak{w}}{(4)\mathfrak{f}}\right)$ angehört.

Nun gehört umgekehrt $\mathfrak{t}$ dem Körper von $j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ und $\mathfrak{S}\left(\frac{x_1\omega_1+x_2\omega_2}{4}\right)$ an. Denn $\mathfrak{t}$ geht bei allen Substitutionen der Modulgruppe in die 6 Werte $\mathfrak{t}_i$ über, die Wurzeln der Gleichung (1) sind. Diese sind alle von einander verschieden (da $m \neq -1$ und -3 ist). $\mathfrak{S}\left(\frac{x_1\omega_1+x_2\omega_2}{4}\right)$ geht aber durch die Substitutionen in die 6 Werte:

$$x_1=\mathfrak{S}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{4}\right),\qquad x_2=\mathfrak{S}\left(\frac{2\,\omega_1+\omega_2}{4}\right),\qquad x_3=\mathfrak{S}\left(\frac{\omega_2}{4}\right),$$

$$x_4=\mathfrak{S}\left(\frac{\omega_1}{4}\right),\qquad x_5=\mathfrak{S}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{4}\right),\qquad x_6=\mathfrak{S}\left(\frac{2\,\omega_2+\omega_1}{4}\right)$$

über, die ebenfalls von einander verschieden sind, und der Gleichung genügen:

$$f(x)\equiv 2^4x^6-2^2.5\cdot\frac{g_2^3}{g_3^2}x^4-2^3\cdot\frac{g_2^3}{g_3^2}x^3-5\cdot\left(\frac{g_2^3}{g_3^2}\right)^2x^2-2^2\cdot\left(\frac{g_2^3}{g_3^2}\right)^2x+\left(\frac{1}{4}\left(\frac{g_2^3}{g_3^2}\right)^3-8\left(\frac{g_2^3}{g_3^2}\right)^2\right)=0,$$

$$\frac{g_2^3}{g_3^2}=\frac{3^3 j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}{j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)-2^6\cdot 3^3}.$$

Diese Gleichung findet man leicht, wenn man das Additionstheorem der $\wp$-Funktion für $\mathfrak{S}(z)$ schreibt, daraus in der bekannten Weise $\mathfrak{S}'(2z)$ berechnet, und dessen Nenner null setzt. Das bekannte Lagrange'sche Prinzip (siehe WEBER, S. 245) ergibt dann, dass:

$$\mathfrak{t}=\frac{F\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{4}\right),\ j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right)}{f'\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{4}\right)\right)}.$$

Daher ist $\mathfrak{t}$, und somit auch $\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{j}\,\mathfrak{w}}{(4)\mathfrak{f}}\right)$ eine Zahl des Oberkörpers $\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{j}\,\mathfrak{w}}{(4)\mathfrak{f}}\right),\ j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right)$, und der Satz bewiesen.

Ich definiere jetzt für jedes Ideal $\mathfrak{f}$ *von* k *den Oberkörper* $*(\mathfrak{f})$ *von* k *als den Körper von* $\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}; \omega_1, \omega_2\right)$ *und* $j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$:

$$*(\mathfrak{f}) = K\left(\sqrt{m},\ \mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}};\ \omega_1,\ \omega_2\right),\ j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right).$$

Wegen Satz 23 ist die Definition die frühere im Falle, dass $\mathfrak{f}$ die Form $(4)\,\bar{\mathfrak{f}}$ hat. Über die Körper $*(\mathfrak{f})$ gelten die folgenden Sätze:

25. **Satz:** $*(\mathfrak{f})$ *ist Unterkörper von* $*(4\,\mathfrak{f})$; $*(\mathfrak{f})$ *ist somit relativ-Abelsch in Bezug auf* $k(\sqrt{m})$.

Denn nach Satz 24 ist

$$\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}\right) = R\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{(4)\,\mathfrak{f}}\right),\ j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right).$$

Die Koeffizienten von R sind rational in k.

26. **Satz:** *Der Relativgrad von* $*(\mathfrak{f})$ *in Bezug auf* k *ist* $h_s(\mathfrak{f})$.

Ist $\mathfrak{f}$ von der Form $(4)\,\mathfrak{f}$, so geht der Satz hervor aus Satz 23 und Fueter, Satz 142, S. 138. Wir wollen nur noch den einzig für das folgende wichtigen Fall beweisen, dass $\mathfrak{f}$ ein ungerades Ideal von k ist. In diesem Falle sei n der Grad von $*(\mathfrak{f})$ relativ zu k. Es ist $h_s(4\,\mathfrak{f})$ der Relativgrad von $*(4\,\mathfrak{f})$ zu k. Diesen Körper erhält man aus $*(\mathfrak{f})$, indem man zunächst $\mathfrak{t}$ adjungiert, was einen Relativgrad von höchstens $h_r(4)/h$ zu $*(\mathfrak{f})$ ergibt. h ist die Klassenzahl von k. In dem so erhaltenen Körper findet sich auch $\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}\right)$. Denn nach Definition ist:

$$\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}\right) = \frac{2^2.\,3}{\mathfrak{t}}\cdot\frac{1}{\dfrac{2^4.\,3^2-2\,\mathfrak{t}}{3\,(\mathfrak{t}^2-3\,.\,2^4)}\,\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}\right)-1}.$$

Nach Satz 12 erhält man $*(4\,\mathfrak{f})$ durch die weitere Adjunktion der Quadratwurzel:

$$\sqrt{(\mathfrak{t}+8)\,\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}\right)},$$

Der Relativgrad von $*(4\mathfrak{f})$ zu $*(\mathfrak{f})$ ist daher höchstens gleich:

$$\frac{2\,h_r(4)}{h},$$

und es ist:

$$h_s(4\mathfrak{f}) : n \leqq \frac{2\,h_r(4)}{h}, \quad \text{oder} \quad n \geqq \frac{h\,h_s(4\mathfrak{f})}{2\,h_r(4)}.$$

Nun ist aber, da $\mathfrak{f}$ ungerade ist:

$$h_s(4\mathfrak{f}) = \varphi(4)\,h_s(\mathfrak{f}) = 2\,\frac{h_r(4)}{h}\,h_s(\mathfrak{f}),$$

somit wird:

$$n \geqq h_s(\mathfrak{f}).$$

Andererseits genügen aber alle Werte $\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}\right)$ einer Relativgleichung von $h_s(\mathfrak{f}):h$-tem Grade in Bezug auf den Klassenkörper K. Denn es ist:

$$n_1 = \frac{h_s(\mathfrak{f})}{h} = \frac{1}{2}\,\varphi(\mathfrak{f}),$$

es gibt somit ein System von n_1 ganzen Zahlen ξ (mod. $\mathfrak{f}$), deren Summe oder Differenz von je zweien niemals congruent null (mod. $\mathfrak{f}$) ist. Ist $\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}\right)$ eine Wurzel, so erhält man alle weiteren durch $\mathfrak{S}\left(\xi\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}\right)$. Siehe hiezu die Entwicklungen, WEBER, S. 573 u. ff. Daher ist:

$$n \leqq n_1\,h = h_s(\mathfrak{f}), \qquad \text{oder} \qquad n \leqq h_s(\mathfrak{f}),$$

da der Grad des Klassenkörpers h ist. Beide Ungleichungen sind nur zu vereinigen, wenn

$$n = h_s(\mathfrak{f}), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Das System der ξ, als Kongruenzklassen (mod. $\mathfrak{f}$) aufgefasst, bildet nichts anderes als die verschiedenen Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$), zu denen alle Zahlen von k Anlass geben, in die also die Hauptklasse von k im Strahl (mod. $\mathfrak{f}$) zerfällt. Denn da $m = -1$ und $m = -3$ ausgeschlossen ist, so können in k nur die Einheiten ± 1 auftreten. Daraus folgt der weitere

27. **Satz:** *Die Relativgruppe des Körpers* $*(\mathfrak{f})$ *in Bezug auf den Klassenkörper* K *ist holoedrisch-isomorph mit der Gruppe der Strahlklassen* (*mod.* $\mathfrak{f}$), *in die die Hauptklasse von* k *zerfällt.*

Aus den beiden Sätzen 1 und 27 folgt der weitere

28. **Satz:** *Die Relativgruppe des Körpers* $*(\mathfrak{f})$ *in Bezug auf* $k(\sqrt{m})$ *ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Strahlklassen* (*mod.* $\mathfrak{f}$) *in* k.

Die Hauptaufgabe ist, die Relativdiskriminante von $*(\mathfrak{f})$ in Bezug auf den Klassenkörper K festzustellen. Dazu nehmen wir von den Klassengruppen in k, oder den Strahlklassengruppen (mod. $\mathfrak{f}$) in k nur die grössten Untergruppen, deren Ordnung eine Potenz von l ist, wo l irgend eine Primzahl ist. Die Untergruppe der Klassen in k heisst die Klassenzahl von k bezüglich l und wird mit $h^{(l)}$ bezeichnet. Der Quotient $h/h^{(l)}$ ist dann sicherlich zu l teilerfremd. Entsprechend heisst die Ordnung der Untergruppe der Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$) in k die Strahlklassenzahl bezüglich l und wird mit $h_s^{(l)}(\mathfrak{f})$ bezeichnet.

Entsprechend besitzen K und $*(\mathfrak{f})$ Unterkörper $K^{(l)}$ und $*^{(l)}(\mathfrak{f})$ vom Relativgrade $h^{(l)}$ resp. $h_s^{(l)}(\mathfrak{f})$ in Bezug auf k. Diese Körper sind ebenfalls relativ-Abelsch zu k, und ihre Relativgruppen sind holoedrisch-isomorph mit den zu l gehörigen Untergruppen der Klassen. Wir nennen diese Unterkörper *die zu* l *gehörenden Unterkörper*.

Ich werde mich von jetzt an auf den für den Beweis einzig wichtigen Fall beschränken, dass $\mathfrak{f}$ *ein ungerades Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* k *sei, das zu* l *teilerfremd ist.* Dann entsteht $*(4\,\mathfrak{p})$ aus $*(\mathfrak{p})$, indem man $\mathfrak{t}$ und noch eine Quadratwurzel adjungiert. Der Relativgrad von $\mathfrak{t}$ zu K ist aber 2, 6, oder 4, je nachdem $m \equiv 1$ (mod. 8), $\equiv 5$ (mod. 8) oder $\not\equiv 1$ (mod. 4) ist. Somit ist für $l \neq 2$ und für $m \equiv 5$ (mod. 8) $l \neq 3$ sicherlich:

$$*^{(l)}(4\,\mathfrak{p}) = *^{(l)}(\mathfrak{p}).$$

Wegen Satz 21 enthält die Relativdiskriminante von $*^{(l)}(\mathfrak{p})$ daher in Bezug auf K nur das Primideal $\mathfrak{p}$. Es bleiben nur noch die beiden Fälle $l=2$, und für $m \equiv 5$ (mod. 8): $l=3$ übrig.

1) $l=2$:

a) $m \equiv 1$ (*mod. 4*). Nach Satz 5 und 7 erhält man den zu 2 gehörigen Unterkörper von $\mathfrak{t}$ durch Adjunktion von $\sqrt{-1}$. Somit ist $*^{(2)}(4\,\mathfrak{p})$ der zu 2 gehörige Unterkörper des Körpers:

$$K\left(\sqrt{-1},\quad \mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{w}}{(4)\mathfrak{p}}\right),\quad j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right)$$

und ist relativ-Abelsch zu k vom Relativgrade 2^n, wo 2^n die grösste in $h_s(4\mathfrak{p})$ enthaltene Potenz von 2 ist. Die Relativgruppe ist holoedrisch isomorph mit der zu 2 gehörigen Untergruppe der Strahlklassen (mod. $(4)\mathfrak{p}$) in k. Die Operationen der Relativgruppe $\mathfrak{G}$ werden mit O bezeichnet, und

$$\mathfrak{G}: \qquad O_1^{x_1}.\, O_2^{x_2}.\, O_3^{x_3} \ldots O_r^{x_r}, \qquad 0 \leqq x_i < 2^{n_i}, \qquad i = 1, \ldots, r,$$

sei eine Basisdarstellung der Gruppe. Die Relativgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ von $*^{(2)}(4\mathfrak{p})$ in Bezug auf den zu 2 gehörigen Unterkörper des Klassenkörpers K ist eine Untergruppe dieser Gruppe. Wegen HILBERT, Zahlbericht, Satz 28, S. 193, ist die Relativgruppe des Strahles $s(4\mathfrak{p})$ zum Strahl $s(4)$ zyklisch. Wegen der obigen Definition von $*^{(2)}(4\mathfrak{p})$ muss somit diese letztere Relativgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ die Gestalt haben:

$$\overline{\mathfrak{G}}: \qquad O_1^{2^{n_1-u}x_1}.\, O_r^{x_r}, \qquad 0 \leqq x_1 < 2^u, \quad 0 \leqq x_r < 2, \qquad O_r = (\sqrt{-1} : -\sqrt{-1}).$$

Man sieht leicht, dass man die Basisdarstellung von $\mathfrak{G}$ immer so wählen kann, dass $\overline{\mathfrak{G}}$ in dieser Weise gegeben ist. Nach den Sätzen 14 und 15 kann die Relativdiskriminante von $*^{(2)}(4\mathfrak{p})$ zu $K^{(2)}$ nur die Primideale von (2) und $\mathfrak{p}$ enthalten.

Es sei $\mathfrak{L}$ ein in (2) aufgehendes Primideal von $K^{(2)}$. Dann wird $\mathfrak{L}$ in $*^{(2)}(4\mathfrak{p})$ höchstens die 4. Potenz eines Ideales, d. h. die Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{L}$ in $*^{(2)}(4\mathfrak{p})$ ist höchstens von der Ordnung 4. Dies folgt aus Satz 5, Satz 7 und Satz 15. Die Verzweigungsgruppe ist eine Untergruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$. Sie kann keinesfalls die Gruppe $O_1^{2^{n_1-2}x}$, $x = 0, 1, 2, 3$ sein. Denn die Potenzen von $O_1^{2^{n_1-u}}$ geben die Relativgruppe von $*^{(2)}(4\mathfrak{p})$ zu dem aus $K^{(2)}$ und $\mathfrak{k}$ zusammengesetzten Körper, und nach Satz 15 tritt $\mathfrak{L}$ höchstens in der Diskriminante der letzten zu adjungierenden Quadratwurzel auf. Ist die Verzweigungsgruppe durch:

$$\mathfrak{V}: \qquad O_1^{2^{n_1-1}x_1}.\, O_r^{x_r}, \qquad 0 \leqq x_1 < 2, \qquad 0 \leqq x_r < 2,$$

gegeben, so ist der Verzweigungskörper $*^{(2)}(\mathfrak{p})$ selbst, dieser hat also eine zu $\mathfrak{L}$ teilerfremde Relativdiskriminante zu $K^{(2)}$.

Ist die Verzweigungsgruppe dagegen:

$$\mathfrak{V}: \qquad (O_1^{2^{n_1-2}} \,.\, O_r)^x, \qquad x=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

so ist die Faktorgruppe $\bar{\mathfrak{G}}/\mathfrak{V}$ trotzdem zyklisch. Der Verzweigungskörper hat eine zu $\mathfrak{L}$ teilerfremde Relativdiskriminante zu $K^{(2)}$, ist zu $K^{(2)}$ relativzyklisch vom Relativgrade $\frac{h_s^{(2)}(\mathfrak{p})}{h^{(2)}}$ und zu k relativ-Abelsch vom Relativgrade $h_s^{(2)}(\mathfrak{p})$. Seine Relativgruppe zu k ist holoedrisch-isomorph zur Untergruppe der Strahlklassen (mod. $\mathfrak{p}$) in k, die zu 2 gehören. Somit hat der Verzweigungskörper alle Eigenschaften von $*^{(2)}(\mathfrak{p})$, wir bezeichnen ihn mit $\bar{*}^{(2)}(\mathfrak{p})$. Seine Relativdiskriminante in Bezug auf $K^{(2)}$ enthält nur die Idealteiler von $\mathfrak{p}$ und (2), ist aber teilerfremd zu einem beliebigen Primidealteiler $\mathfrak{L}$ von (2) in K.

b) $m \not\equiv 1$ (*mod. 4*).

In diesem Falle erhält man $*^{(2)}(4\,\mathfrak{p})$ aus $*^{(2)}(\mathfrak{p})$, indem man zunächst $\sqrt{2}$ ($m\equiv 3$ (mod. 4)), resp. $\sqrt{-1}$ ($m \equiv 2$ (mod. 4)) adjungiert. Dazu kommt dann noch die Adjunktion einer Quadratwurzel aus einer Zahl von $K^{(2)}$. Damit ist aber erst der Körper von $(*^{(2)}(\mathfrak{p}), \mathfrak{t})$ erhalten. Es ist noch weiter:

$$\sqrt{(\mathfrak{t}+8)\,\mathfrak{T}\left(\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{p}}\right)}$$

zu adjungieren. Die Relativgruppe von $*^{(2)}(4\,\mathfrak{p})$ zu $K^{(2)}$ ist:

$$\bar{\mathfrak{G}}: \quad O_1^{x_1}\,.\,O_2^{x_2}\,.\,O_3^{x_3}, \qquad 0 \leqq x_1 < 2^{n_1}, \qquad 0 \leqq x_2 < 2, \qquad 0 \leqq x_3 < 2, \qquad O_3 = (\sqrt{2} : -\sqrt{2})$$
$$\text{resp. } (\sqrt{-1} : -\sqrt{-1}).$$

Es sei wieder $\mathfrak{L}$ ein beliebiges Primideal von $K^{(2)}$, das in (2) enthalten sei. Dasselbe kann wegen der Sätze 14 und 15 in $*^{(2)}(4\,\mathfrak{p})$ höchstens die 8. Potenz eines Ideals werden, d. h. die Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{L}$ in $*^{(2)}(4\,\mathfrak{p})$ hat höchstens den Grad 8. Da die Operationen $O_1^{x_1}$ die Relativgruppe von $*^{(2)}(4\,\mathfrak{p})$ zu $(K^{(2)}, \mathfrak{t})$ ergaben, so kann wegen Satz 15 erst die Potenz $O_1^{2^{n_1-1}}$ in der Verzweigungsgruppe auftreten. Ist die Verzweigungsgruppe durch

$$\mathfrak{V}: \qquad O_1^{2^{n_1-1}x_1}\,.\,O_2^{x_2}\,.\,O_3^{x_3}, \qquad 0 \leqq x_i < 2, \qquad i=1,\ 2,\ 3,$$

gegeben, so ist der Verzweigungskörper mit $*^{(2)}(\mathfrak{p})$ identisch, und dieser Körper hat eine zu $\mathfrak{L}$ teilerfremde Relativdiskriminante zu $K^{(2)}$. Ist die Verzweigungsgruppe durch:

$$\mathfrak{V}\colon\ (O_1^{2^{n_1-2}} \cdot O_2)^{x_1}\, O_3^{x_2}, \text{ oder } (O_1^{2^{n_1-1}} \cdot O_3)^{x_1}\, O_2^{x_2}, \text{ oder } (O_1^{2^{n_1-1}} \cdot O_2 \cdot O_3)^{x_1}\, O_3^{x_2};\ x_1=0,1,2,3;\ x_2=0,1;$$

gegeben, so ist die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{V}$ wie bei a) zyklisch und der Verzweigungskörper, der mit $\overline{*}(\mathfrak{p})$ bezeichnet werde, hat dieselbe Relativgruppe wie $*^{(2)}(\mathfrak{p})$ sowohl in Bezug auf $K^{(2)}$, als in Bezug auf k. Seine Relativdiskriminante in Bezug auf $K^{(2)}$ enthält nur die Primideale von (2) und $\mathfrak{p}$, ist aber zu $\mathfrak{L}$ teilerfremd.

Ist die Verzweigungsgruppe durch:

$$(\mathfrak{V}) \qquad (O_1^{2^{n_1-3}} \cdot O_3)^{x_1}, \qquad \text{oder} \qquad (O_1^{2^{n_1-3}} \cdot O_2 \cdot O_3)^{x_1}, \qquad x_1=0, 1, \ldots 7,$$

gegeben (der 3. mögliche Fall ist ausgeschlossen, weil $\mathfrak{L}$ sicher in der Relativdiskriminante von $\sqrt{2}$, resp. $\sqrt{-1}$ auftritt), so wäre $O_1^{2^{n_1-2}}$ in der Verzweigungsgruppe, was nach dem obigen unmöglich ist.

Somit ist in jedem Falle die Existenz folgender Körper $*^{(2)}(\mathfrak{p})$ oder $\overline{*}^{(2)}(\mathfrak{p})$ bewiesen:

29. **Satz**: *Ist $\mathfrak{p}$ ein ungerades Primideal von k, so existiert ein Körper $*^{(2)}(\mathfrak{p})$ oder $\overline{*}^{(2)}(\mathfrak{p})$ von folgenden Eigenschaften:*

a) *er ist relativ-Abelsch zu k.*

b) *seine Relativgruppe zu k ist holoedrisch isomorph mit der zu 2 gehörigen Untergruppen der Strahlklassen (mod. $\mathfrak{p}$) in k.*

c) *Seine Relativgruppe zu $K^{(2)}$ ist holoedrisch isomorph mit der zu 2 gehörigen Untergruppe der Strahlklassen, die von den Zahlen von k gebildet werden.*

d) *Die Relativdiskriminante in Bezug auf $K^{(2)}$ enthält nur die Primideale von (2) und $\mathfrak{p}$, ist aber teilerfremd zu einem beliebig gewählten Primideal $\mathfrak{L}$ von (2).*

2) $l=3$, $m\equiv 5$ (*mod.* 8).

Man erhält aus $*^{(3)}(\mathfrak{p})$ den Körper $*^{(3)}(4\,\mathfrak{p})$, indem man die cubische Wurzel $\mathfrak{t}^2$ adjungiert. Die Relativgruppe von $*^{(3)}(4\,\mathfrak{p})$ zu $K^{(3)}$ wird gegeben durch:

$$\overline{\mathfrak{G}}\colon \qquad O_1^{x_1} \cdot O_2^{x_2}, \qquad 0 \leqq x_1 < 3^{n_1}, \qquad 0 \leqq x_2 < 3, \qquad O_2=(\mathfrak{t}^2 : \bar{\mathfrak{t}}^2).$$

Es sei $\mathfrak{L}$ ein in (2) oder (3) aufgehendes beliebiges Primideal von $K^{(3)}$. Dann wird wegen Satz 15 $\mathfrak{L}$ in $*^{(3)}(4\,\mathfrak{p})$ höchstens die 3. Potenz eines Ideals. Die

Verzweigungsgruppe wird also höchstens die Ordnung 3 besitzen. Dieselbe wird sicherlich nicht durch $O_1^{3^{n_1-1}}$ gegeben, denn nach Satz 15 kann $O_1^{3^{n_1-1}}$ nicht der Verzweigungsgruppe angehören, da es der Relativgruppe von $*^{(3)}(4\,\mathfrak{p})$ zum Körper $(K^{(3)}, \mathfrak{t}^2)$ angehört. Ist die Verzweigungsgruppe durch

$$\mathfrak{V}: \qquad O_2^{x_2}, \qquad x_2=0, 1, 2,$$

gegeben, so ist der Verzweigungskörper mit $*^{(3)}(\mathfrak{p})$ identisch, letzterer hat daher eine zu $\mathfrak{L}$ teilerfremde Relativdiskriminante zu $K^{(3)}$.

Ist die Verzweigungsgruppe dagegen durch:

$$\mathfrak{V}: \qquad (O_1^{3^{n_1-1}}.\,O_2)^{x_1} \text{ oder } (O_1^{3^{n_1-1}}.\,O_2^2)^{x_1}, \qquad x_1=0, 1, 2,$$

gegeben, so hat der Verzeigungskörper, der mit $\bar{*}^{(3)}(\mathfrak{p})$ bezeichnet werde, genau die Eigenschaften von $*^{(3)}(\mathfrak{p})$ in Bezug auf die Relativgruppen zu $K^{(3)}$ und k. Somit gilt auch hier der Satz:

30. **Satz:** *Ist $\mathfrak{p}$ ein ungerades zu (3) teilerfremdes Primideal von k, so existiert ein Körper $*^{(3)}(\mathfrak{p})$ oder $\bar{*}^{(3)}(\mathfrak{p})$, der genau die in Satz 29 angegebenen Eigenschaften hat. Dabei ist $\mathfrak{L}$ ein beliebiges in (2) oder (3) aufgehendes Primideal von $K^{(3)}$.*

Aus den Körpern $*^{(l)}(\mathfrak{p}_i)$ resp. $\bar{*}^{(l)}(\mathfrak{p}_i)$ können umgekehrt die Körper $*^{(l)}(\mathfrak{f})$ aufgebaut werden, falls man:

$$\mathfrak{f}=\mathfrak{p}_1\,.\,\mathfrak{p}_2\,.\,.\,.\,\mathfrak{p}_u,$$

setzt, und alle $\mathfrak{p}_i$ ungerade sind. Ist $l\neq 2$, und für $m\equiv 5 \pmod{8}$ auch $l\neq 3$, so ergeben die Formeln:

$$h_s(\mathfrak{f})=\frac{1}{2}(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_u-1)\,h,$$

$$h_s(\mathfrak{p}_i)=\frac{1}{2}(p_i-1)\,h,$$

wo noch vorausgesetzt ist, dass alle $\mathfrak{p}_i$ vom ersten Grade sind (wir werden nachher nur diesen Fall gebrauchen), dass die Körper $*^{(l)}(\mathfrak{p}_1), *^{(l)}(\mathfrak{p}_2), \dots, *^{(l)}(\mathfrak{p}_u)$ zusammen den Körper $*^{(l)}(\mathfrak{f})$ ergeben. Somit gilt der

31. **Satz:** *Ist l eine ungerade Primzahl, die im Falle $m \equiv 5 \pmod{8}$ $\neq 3$ ist, sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_u$ ungerade voneinander verschiedene zu l teilerfremde Primideale 1. Grades in k, und $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}_1 . \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_u$, so existiert ein Körper $*^{(l)}(\mathfrak{f})$ von folgenden Eigenschaften:*

a) *$*^{(l)}(\mathfrak{f})$ ist relativ-Abelsch zu k.*

b) *Seine Relativgruppe zu k ist holoedrisch isomorph mit der zu l gehörigen Untergruppe der Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$) in k.*

c) *Seine Relativgruppe in Bezug auf $K^{(l)}$ ist holoedrisch isomorph mit der zu l gehörigen Untergruppe der Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$) in k, die durch die Zahlen von k allein gebildet werden.*

d) *Die Relativdiskriminante von $*^{(l)}(\mathfrak{f})$ in Bezug auf $K^{(l)}$ enthält nur Idealteiler von $\mathfrak{f}$.*

Ist $l = 3$, $m \equiv 5$ (mod. 8), so nimmt man an Stelle von $*^{(3)}(\mathfrak{p}_i)$ die Körper $\bar{*}^{(3)}(\mathfrak{p}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, u$, deren Relativdiskriminante in Bezug auf $K^{(l)}$ zu einem bestimmten in (2) oder (3) enthaltenen Primideal $\mathfrak{L}$ teilerfremd ist. Der zusammengesetzte Körper muss wegen Satz 30 genau dieselben Gruppeneigenschaften haben, wie $*^{(3)}(\mathfrak{f})$. Wir bezeichnen ihn mit $\bar{*}^{(3)}(\mathfrak{f})$. Dann gilt der

32. **Satz:** *Ist $l = 3$, $m \equiv 5 \pmod{8}$, sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_u$ ungerade Primideale 1. Grades in k und $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}_1 . \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_u$, so existiert ein Körper $\bar{*}^{(3)}(\mathfrak{f})$, der die Eigenschaften a), b), c), des Satzes 31 hat und überdies die Eigenschaft:*

d) *Die Relativdiskriminante von $*^{(3)}(\mathfrak{f})$ enthält nur die Teiler von $\mathfrak{f}$ und ev. Teiler von (2) und (3), ist aber teilerfremd zu einem bestimmten, beliebig festzusetzenden Primidealteiler $\mathfrak{L}$ von (2) oder (3) in $K^{(3)}$.*

Ist dagegen $l = 2$, so wird durch Zusammensetzung der Körper $\bar{*}^{(2)}(\mathfrak{p}_i)$ nicht der Körper $*^{(2)}(\mathfrak{f})$ erhalten. Wir definieren dann folgende Einteilung der Ideale von k in *erweiterte Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$)*: Zunächst schliessen wir, um Fallunterschiede zu vermeiden die Fälle $m = -1$ und $m = -3$ aus. Wir sagen, eine zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde Zahl α von k sei erweiterte Strahlzahl, falls:

$$\alpha \equiv \pm 1 \pmod{\mathfrak{p}_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, u,$$

wobei das + oder — Zeichen für jedes i ganz beliebig ist. Zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von k sollen nur dann in derselben erweiterten Strahlklasse (mod. $\mathfrak{f}$) liegen, wenn sie im gewöhnlichen Sinne äquivalent sind, und ausserdem ihr Quotient eine erweiterte Strahlzahl (mod. $\mathfrak{f}$) ist. Die Anzahl der Klassen sei $h_s(\mathfrak{f})$. Es ist dann:

$$\bar{h}_s(\mathfrak{f}) = \frac{1}{2^u} \varphi(\mathfrak{p}_1) \varphi(\mathfrak{p}_2) \ldots \varphi(\mathfrak{p}_u) h.$$

Der aus $\mathfrak{K}^{(2)}(\mathfrak{p}_1), \ldots \mathfrak{K}^{(2)}(\mathfrak{p}_u)$ zusammengesetzte Körper werde wieder mit $\mathfrak{K}^{(2)}(\mathfrak{f})$ bezeichnet. Man sieht sofort, dass seine Relativgruppe in Bezug auf k holoedrisch isomorph ist mit der zu 2 gehörenden Untergruppe der erweiterten Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$). Aus Satz 29 folgt somit der

33. **Satz:** *Ist $l=2$, sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_u$ ungerade Primideale 1. Grades in k ($m \neq -1$, und $\neq -3$), und $\mathfrak{f}=\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_u$, so existiert ein Körper $\mathfrak{K}^{(2)}(\mathfrak{f})$, der die Eigenschaften a), b), c) des Satzes 31 hat, falls man darin an Stelle der Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$) die erweiterten Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$) setzt. Ausserdem hat er die Eigenschaft:*

d) *Seine Relativdiskriminante enthält nur die Teiler von $\mathfrak{f}$ und ev. Teiler von (2), ist aber zu einem bestimmten, beliebig festzusetzenden in (2) enthaltenen Primideal $\mathfrak{L}$ von $K^{(2)}$ teilerfremd.*

V.

Die Diskriminante des Klassenkörpers.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal von $k(\sqrt{m})$ und l eine beliebige rationale Primzahl. Ist α eine beliebige ganze Zahl von k, und gibt es eine ganze Zahl ξ in k, so dass:

$$\alpha \equiv \xi^l \pmod{\mathfrak{p}},$$

so sagt man, der Potenzcharakter der Zahl α in Bezug auf das Primideal $\mathfrak{p}$ sei 1. Im andern Falle sagt man, der Potenzcharakter sei nicht gleich 1. Dann gilt der

4. **Hilfssatz:** *Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_u$ ganze, zu l teilerfremde Zahlen von k mit der Beschaffenheit, dass die $2\,l^u$ Zahlen:*

$$\pm\,\alpha_1^{x_1} \cdot \alpha_2^{x_2} \ldots \alpha_u^{x_u}, \qquad 0 \leqq x_i \leqq l-1, \qquad i=1, 2, \ldots u,$$

nur dann die l. Potenz einer Zahl von k werden, wenn alle x_i null sind. Dann gibt es unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}_i$ von k mit den Eigenschaften:

a) *Der l. Potenzcharakter der Zahl α_i nach $\mathfrak{p}_i$ ist $\neq 1$, derjenige der übrigen Zahlen α_k nach $\mathfrak{p}_i$ ist $=1$.*

b) *$\mathfrak{p}_i$ ist vom 1. Grade.*

c) *Est ist:*

$$n(\mathfrak{p}_i) - 1 \equiv 0 \pmod{l} \not\equiv 0 \pmod{l^2},\ l \text{ ungerade},$$

$$n(\mathfrak{p}_i) - 1 \equiv 0 \pmod{4} \not\equiv 0 \pmod{8},\ l = 2.$$

Beweis.

1) *l ungerade:* Wir schliessen den Körper $k(\sqrt{-3})$ der Einfachheit halber aus.

Wir adjungieren zum Körper k die l. Einheitswurzel $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$. Dadurch entstehe der Körper k_l. Es sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiges, in $\mathfrak{p}$ enhaltenes Primideal von k_l. Ist A eine beliebige ganze zu l teilerfremde Zahl von k_l, so setzt man in der bekannten Weise für das Symbol:

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{P}}\right\} = \zeta^c, \text{ falls } l \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},\ A \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}, \text{ und } A^{\frac{n(\mathfrak{P})-1}{l}} \equiv \zeta^c \pmod{\mathfrak{P}} \text{ ist.}$$

Die Zahlen:

$$\zeta^{x_0} \alpha_1^{x_1} \cdot \alpha_2^{x_2} \ldots \alpha_u^{x_u}, \qquad 0 \leqq x_i \leqq l-1, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots u,$$

sind in k_l niemals die l. Potenz einer Zahl, ausser im Falle, dass alle x_i null sind. Denn da alle α_i in k liegen, müsste auch die Relativnorm von k_l in Bezug auf k, oder:

$$\alpha_1^{(l-1)x_1} \alpha_2^{(l-1)x_2} \ldots \alpha_u^{(l-1)x_u}$$

eine l. Potenz sein; dies ist gegen die über die α gemachte Annahme, es sei denn, dass alle x_i null sind, $i = 1, 2, \ldots u$. Dann müsste aber ζ^{x_0} selbst l. Potenz sein, was unmöglich ist, ausser für $x_0 = 0$.

Somit gibt es nach Satz 152, HILBERT, Zahlbericht, S. 426 unendlich viele Primideale $\mathfrak{P}$, 1. Grades in k_l, für die:

$$\left\{\frac{\zeta}{\mathfrak{P}}\right\} \neq 1,\ \left\{\frac{\alpha_k}{\mathfrak{P}}\right\} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots i-1,\ i+1, \ldots u,$$

$$\left\{\frac{\alpha_i}{\mathfrak{P}}\right\} \neq 1,$$

ist. Da $\mathfrak{P}$ vom ersten Grade in k_l ist, so muss die durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primzahl p jedenfalls in k zerfallen, $\mathfrak{P}$ also Teiler eines Primideals $\mathfrak{p}$ von k sein, das in k vom 1. Grade ist. Ebenso muss $\mathfrak{p}$ im Körper der l. Einheitswurzeln in Primideale 1. Grades zerfallen, also

$$p-1 \equiv 0 \pmod{l}$$

sein. Wäre $p-1 \equiv 0 \pmod{l^2}$, so wäre im Körper der l. Einheitswurzeln:

$$\zeta^{\frac{p-1}{l}} = 1, \qquad \zeta \equiv \xi^l \pmod{\mathfrak{P}}$$

also auch in k_l. Dies ist gegen die Bedingung:

$$\left\{\frac{\zeta}{\mathfrak{P}}\right\} \neq 1.$$

Also ist $p-1 \not\equiv 0 \pmod{l^2}$. Dagegen muss in k_l:

$$\alpha_k \equiv \xi^l \pmod{\mathfrak{P}}, \qquad k = 1, 2, \ldots i-1, i+1, \ldots u,$$

sein, oder wenn die Relativnorm in Bezug auf k genommen wird:

$$\alpha_k^{l-1} \equiv (n(\xi))^l \pmod{\mathfrak{P}} \equiv \bar{\xi}^l \pmod{\mathfrak{p}}, \qquad \bar{\xi} \text{ in } k,$$

d. h. α_k hat in k den l. Potenzcharakter eins. Wäre dagegen α_i mit dem Potenzcharakter 1 behaftet, so müsste:

$$\alpha_i \equiv \xi^l \pmod{\mathfrak{p}} \equiv \xi^l \pmod{\mathfrak{P}}$$

sein, d. h. es wäre:

$$\left\{\frac{\alpha_i}{\mathfrak{P}}\right\} = 1,$$

gegen die Bedingung oben. Somit erfüllen die $\mathfrak{p}$ alle Eigenschaften des Hilfssatzes, und da es unendlich viele $\mathfrak{P}$ gibt, gibt es auch unendlich viele $\mathfrak{p}$, w. z. b. w.

2) $l = 2$: Wir schliessen den Körper $k(\sqrt{-1})$ der Einfachheit halber aus. Wegen der Annahme wird keine der Zahlen:

$$(-1)^{x_{-1}} 2^{x_0} \alpha_1^{x_1} . \alpha_2^{x_2} \ldots \alpha_u^{x_u}, \qquad 0 \leqq x_i \leqq 1, \qquad i = -1, 0, 1, 2, \ldots u,$$

in k ein Quadrat, es sei denn, dass alle x_i null sind. Denn alle α_i sind zu 2 teilerfremd, und 2 selbst ist sicher kein Quadrat, falls von $k(\sqrt{-2})$ abgesehen wird (wo die Klassenzahl 1 ist). Es gibt dann wieder in k unendlich viele Primideale 1. Grades, für die bei beliebigem i:

$$\left\{\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right\}=1,\quad \left\{\frac{2}{\mathfrak{p}}\right\}\neq 1,\quad \left\{\frac{\alpha_k}{\mathfrak{p}}\right\}=1,\quad k=1,2,\ldots i-1,\ i+1,\ldots u,$$

$$\left\{\frac{\alpha_i}{\mathfrak{p}}\right\}\neq 1,$$

ist. Da $\mathfrak{p}$ von erstem Grade in k ist, wird jede Zahl (mod. $\mathfrak{p}$) einer ganzen rationalen Zahl congruent sein. Somit folgt aus:

$$\left\{\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right\}=1,\quad \text{sofort: } p\equiv 1 \pmod{4}$$

und aus:

$$\left\{\frac{2}{\mathfrak{p}}\right\}\neq 1\text{: sofort: } p\not\equiv 1 \pmod{8}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Mit Hilfe dieses analytisch-zahlentheoretischen Satzes und der funktionentheoretischen Entwicklungen der vorigen Paragraphen gelingt nun überraschend einfach der Beweis des

34. **Hauptsatz**: *Die Relativdiskriminante des Klassenkörpers in Bezug auf den Grundkörper $k(\sqrt{m})$ ist eins.*

Beweis. Es sei $h_l=l^t$ die zu l gehörige Klassenzahl des Körpers k. Die zu l gehörige Untergruppe der Abel'schen Gruppe aller Klassen sei durch die Abel'sche Gruppe:

$$\mathfrak{G}:\qquad O_1^{x_1}\,.\,O_2^{x_2}\,.\,\ldots\,.\,O_u^{x_u},\qquad 0\leqq x_i<l^{t_i},$$

gegeben, wo sicher $t_1+t_2+\cdots+t_u=t$, und etwa:

$$t_1\geqq t_2\geqq t_3\geqq\cdots\geqq t_u>0,$$

sei. Wir wählen jetzt in jeder der Klassen:

$$O_i^{l^{t_i-1}},\quad i=1,2,\ldots u,$$

ein zu $2l$ teilerfremdes Ideal $\mathfrak{a}_i$. Dann ist sicher:

$$\mathfrak{a}_i^l\sim 1,\quad \text{also etwa}\quad \mathfrak{a}_i^l=(\alpha_i),\quad i=1,2,\ldots,u.$$

Diese α_i haben die im Hilfssatz vorausgesetzten Eigenschaften. Wäre nämlich, ohne dass alle x_i null sind:

$$\pm \alpha_1^{x_1} . \alpha_2^{x_2} . \dots \alpha_u^{x_u} = \xi^l, \qquad 0 \leqq x_i < l, \qquad i = 1, 2, \dots u,$$

so müsste:

$$\mathfrak{a}_1^{l x_1} . \mathfrak{a}_2^{l x_2} \dots \mathfrak{a}_u^{l x_u} = (\xi)^l,$$

oder:

$$\mathfrak{a}_1^{x_1} . \mathfrak{a}_2^{x_2} \dots \mathfrak{a}_u^{x_u} = (\xi), \quad \text{d. h.:} \quad O_1^{l^{t_1-1} x_1} . O_2^{l^{t_2-1} x_2} \dots O_u^{l^{t_u-1} x_u} = \text{Einheit}$$

sein, gegen die Annahme, dass die O_i eine Basis der Gruppe der Klassen in k seien.

Wir wählen unter den unendlich vielen Primidealen $\mathfrak{p}_i$ von k, die die im Hilfssatz angegebenen Eigenschaften haben, ein Primideal $\mathfrak{p}_i$ aus, das zudem zu $2l$ und zur Diskriminante des Klassenkörpers $K^{(l)}$ von k teilerfremd ist. Lassen wir i alle Werte $1, 2, \dots, u$ durchlaufen, so sind damit u Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots \mathfrak{p}_u$, bestimmt, die sicherlich alle zu $2l$ und zur Diskriminante von $K^{(l)}$ teilerfremd sind. Wir setzten:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{p}_1 . \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_u,$$

und betrachten den Strahl (mod. $\mathfrak{f}$) in k.

Im Falle $m = -1$, $m = -3$, $m = -2$ ist die Klassenzahl von k gleich 1. Somit wird hier $K = k$, und der Satz ist selbstverständlich. Wir können daher diese drei Fälle ausschliessen. In den übrigen Fällen ist:

1) *l ungerade:*

$$h_s(\mathfrak{f}) = \frac{1}{2} \varphi(\mathfrak{p}_1) . \varphi(\mathfrak{p}_2) \dots \varphi(\mathfrak{p}_u) \, h,$$

also wegen $\varphi(\mathfrak{p}_i) = p_i - 1 \equiv 0 \pmod{l} \not\equiv 0 \pmod{l^2}$:

$$h_s^{(l)}(\mathfrak{f}) = l^u \, h^{(l)}.$$

Die Zahlen von k liegen in l^u verschiedenen Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$). Diese können durch die l^u Klassen:

$$\alpha_1^{x_1} . \alpha_2^{x_2} \dots \alpha_u^{x_u}, \qquad 0 \leqq x_i \leqq l-1, \qquad i = 1, 2, \dots, u,$$

repräsentiert werden. Denn alle diese Zahlen liegen nicht in der Hauptstrahlklasse (mod. $\mathfrak{f}$), da der Potenzcharakter von α_k in Bezug auf $\mathfrak{p}_i$ eins ist ($i \neq k$) und

$$p_i - 1 \not\equiv 0 \pmod{l^2},$$

ist, somit die Kongruenzen gelten:

$$\alpha_k \equiv \xi^l \pmod{\mathfrak{p}_i}, \quad \text{also} \quad \alpha_k^{\frac{p_i-1}{l}} \equiv \xi^{p_i-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i}, \qquad i \neq k,$$

oder wenn $\alpha_k^l \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i}$:

$$\alpha_k \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i},$$

ist.

Dagegen ist der Potenzcharakter von α_i in Bezug auf $\mathfrak{p}_i$ sicher nicht eins, also auch sicher

$$\alpha_i \not\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i},$$

und α_i^l die niederste Potenz, die (mod. $\mathfrak{p}_i$) der Einheit kongruent ist. Daraus folgt, dass:

$$x_i \neq 0: \ \alpha_1^{x_1} \cdot \alpha_2^{x_2} \ldots \alpha_u^{x_u} \equiv \alpha_i^{x_i} \not\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i}, \text{ und } \alpha_1^{x_1} \cdot \alpha_2^{x_2} \ldots \alpha_u^{x_u} \not\equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$$

wird, ausser wenn alle x_i null sind. Da in k nur die Einheiten ± 1 auftreten, und l ungerade ist, gilt dasselbe auch für die zugehörigen Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$). Diese Untergruppe der Strahlklassen in Bezug auf l wollen wir mit $\mathfrak{g}(\mathfrak{f})$ bezeichnen. Wir können sie durch:

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{f}): \qquad o_1^{x_1} \cdot o_2^{x_2} \ldots o_u^{x_u}, \qquad 0 \leqq x_i \leqq l-1, \qquad i = 1, 2, \ldots, u,$$

gegeben denken. $\mathfrak{G}$ ist dann die Faktorgruppe $\mathfrak{G}(\mathfrak{f})/\mathfrak{g}(\mathfrak{f})$, falls $\mathfrak{G}(\mathfrak{f})$ die Gruppe aller zu l gehörigen Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$) ist. Es folgt aber weiter, dass die ganze, zu l gehörige Untergruppe der Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$) in k symbolisch durch:

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{f}): \qquad O_1^{x_1} \cdot O_2^{x_2} \ldots O_u^{x_u}, \qquad 0 \leqq x_i < l^{t_i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, u,$$

gegeben wird. Denn die α_i repräsentieren die l^{x_i}-te Potenz einer Klasse in k, also auch im Strahl (mod. $\mathfrak{f}$).

Wir nehmen jetzt den im vorigen Paragraphen definierten Körper $\mathfrak{K}^{(l)}(\mathfrak{f})$. Derselbe existiert. Seine Relativgruppe zu k ist $\mathfrak{G}(\mathfrak{f})$, zu $K^{(l)}$ dagegen $\mathfrak{g}(\mathfrak{f})$. Die Relativdiskriminante von $\mathfrak{K}^{(l)}(\mathfrak{f})$ zu $K^{(l)}$ kann nur die Primteiler von $\mathfrak{f}$ enthalten (siehe Satz 31).

Würde nun irgend ein Primideal $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}^{(l)}(\mathfrak{f})$ in der Relativdiskriminante von $K^{(l)}$ aufgehen, so wäre sicherlich $\mathfrak{L}$ zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd, nach Voraussetzung. Ist T eine Substitution der Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{K}^{(l)}(\mathfrak{f})$ relativ zu k, so müsste für jede ganze Zahl A von $\mathfrak{K}^{(l)}(\mathfrak{f})$

$$A \equiv TA \quad (\text{und } \mathfrak{L})$$

sein. T wäre eine Substitution von $\mathfrak{G}(\mathfrak{f})$. Jede Potenz von T gehört ebenfalls der Verzweigungsgruppe an, also auch:

$$T^{x_i l^u}, \quad u = 1, 2, 3, \ldots r.$$

Ist l^r der niederste Exponent von T, der T^{l^r} zur Einheitssubstitution macht, so setze man:

$$O = T^{l^{r-1}},$$

dann ist:

$$O^l = \text{Einheit}, \quad A \equiv OA \ (\text{mod. } \mathfrak{L}) \text{ für jede Zahl von } \mathfrak{K}^{(l)}(\mathfrak{f}).$$

Nach obigem ist O eine der Substitutionen o von $\mathfrak{g}(\mathfrak{f})$. Also wäre auch die Relativdiskriminante von $\mathfrak{K}^{(l)}(\mathfrak{f})$ zu $K^{(l)}$ durch $\mathfrak{L}$ teilbar. Dies ist ein Widerspruch zu Satz 31. Daher ist unsere Annahme zu verwerfen. $K^{(l)}$ hat die Relativdiskriminante eins in Bezug auf k.

Ist $\mathfrak{L}$ ein Teiler von (2) oder (3), und ist $l=3$, $m\equiv 5$ (mod. 8), so hat man statt $\mathfrak{K}^{(l)}(\mathfrak{f})$ den Körper $\bar{\mathfrak{K}}^{(l)}(\mathfrak{f})$ zu nehmen, dessen Relativdiskriminante in Bezug auf $K^{(l)}$ zu $\mathfrak{L}$ teilerfremd ist.

2) $l=2$: Wir legen hier nicht den Strahlbegriff des vorigen Falles zu Grunde, sondern den weitern, den wir schon S. 79 betrachtet haben. Es gibt (mod. $\mathfrak{p}_i$) $\frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{p}_i)$ Strahlklassen der Zahlen in k, die eine zyklische Gruppe bilden.

Kombiniert man für jedes $i = 1, 2, \ldots, u$, jede dieser Strahlklassen miteinander, so erhält man:

$$\frac{1}{2^u}\,\varphi(\mathfrak{p}_1)\,\varphi(\mathfrak{p}_2)\ldots\varphi(\mathfrak{p}_u)$$

erweiterte Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$), in die die Zahlen von k zerfallen. Diese Klassen bilden eine Untergruppe aller erweiterten Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$), die gesammte erweiterte Klassenzahl im Strahl ist daher:

$$h_s(\mathfrak{f}) = \frac{1}{2^u}\,\varphi(\mathfrak{p}_1)\,\varphi(\mathfrak{p}_2)\ldots\varphi(\mathfrak{p}_u)\,h.$$

Die Gruppe der erweiterten Strahlklassen (mod. $\mathfrak{f}$), die durch Zahlen repre-sentiert werden, hat die zu 2 gehörige Untergruppe $\mathfrak{g}(\mathfrak{f})$; sie besitzt die Ordnung:

$$2^u.$$

Denn nach dem Hilfssatz ist jedes $p_i - 1$ genau durch 4, nicht aber durch 8 teilbar, somit ist 2^u die in der Anzahl jener Klassen enthaltenen Potenz von 2. Die Untergruppe selbst hat folgendes Aussehen:

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{f}):\qquad o_1^{x_1}\,.\,o_2^{x_2}\ldots o_u^{x_u},\qquad 0 \leqq x_i \leqq 1,\qquad i = 1, 2, \ldots, u.$$

Denn die 2^u Kongruenzklassen:

$$\alpha_1^{x_1}\,.\,\alpha_2^{x_2}\ldots\alpha_u^{x_u},\qquad 0 \leqq x_i \leqq 1,\qquad i = 1, 2, \ldots, u,$$

sind Repräsentanten derselben. Wäre nämlich:

$$\alpha_1^{x_1}\,.\,\alpha_2^{x_2}\ldots\alpha_u^{x_u} \equiv \pm 1 \pmod{\mathfrak{p}_i},\qquad i = 1, 2, \ldots, u,$$

ohne dass alle x_i null wären, und etwa x_i von null verschieden, so folgte (da $p_i - 1$ genau durch 4 teilbar ist):

$$\alpha_1^{x_1\frac{p_i-1}{2}}\,.\,\alpha_2^{x_2\frac{p_i-1}{2}}\ldots\alpha_u^{x_u\frac{p_i-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i}.$$

Nun ist aber nach dem Hilfssatz der Potenzcharakter in Bezug auf 2 von α_k, $k \neq i$, eins, also:

$$\alpha_k \equiv \xi^2 \pmod{\mathfrak{p}_i}, \quad \text{und} \quad \alpha_k^{\frac{p_i-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i}, \qquad i \neq k,$$

somit auch:

$$\alpha_i^{x_i \frac{p_i-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i}.$$

Daraus folgt, dass auch der Potenzcharakter von α_i in Bezug auf 2 nach $\mathfrak{p}_i$ eins ist, gegen die Annahme des Hilfssatzes.

Es sei $\mathfrak{G}(\mathfrak{f})$ die zu 2 gehörige Gruppe aller erweiterten Strahlklassen. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ aller Klassen in k ist dann die Faktorgruppe $\mathfrak{G}(\mathfrak{f})/\mathfrak{g}(\mathfrak{f})$. Man sieht wieder, dass $\mathfrak{G}(\mathfrak{f})$ gegeben werden kann durch:

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{f}): \qquad O_1^{x_1} \cdot O_2^{x_2} \ldots O_u^{x_u}, \qquad 0 \leqq x_i < 2^{t_i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, u,$$

Die o sind nichts anderes wie die $O_i^{2^{t_i}}$.

Wir nehmen den im vorigen Abschnitt definierten Körper $*^{(2)}(\mathfrak{f})$, dessen Gruppe relativ zu k $\mathfrak{G}(\mathfrak{f})$, und relativ zu $K^{(2)}$ $\mathfrak{g}(\mathfrak{f})$ ist. Die Relativdiskriminante zu $K^{(2)}$ enthält nur die Primideale von $\mathfrak{f}$, und solche von 2, ist aber zu einem bestimmten Primideal von (2) teilerfremd. Da alle $\mathfrak{p}_i$ zur Relativdiskriminante von $K^{(2)}$ zu k teilerfremd sind, enthält die Relativdiskriminante von $*^{(2)}(\mathfrak{f})$ zu $K^{(2)}$, abgesehen von gewissen Teilern von (2), keine Teiler der Relativdiskriminante von $K^{(2)}$ zu k.

Würde in der Relativdiskriminante von $K^{(2)}$ zu k ein Primidealteiler $\mathfrak{L}$ aufgehen, der zu (2) teilerfremd ist, so ist $\mathfrak{L}$ zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd, und besitzt wenigstens eine Substitution T der Verzweigungsgruppe in Bezug auf k. Der Beweis ist jetzt wörtlich gleich, wie im Falle der ungeraden l. Man kommt auf einen Widerspruch. Also kann die Relativdiskriminante von $K^{(2)}$ zu k keinen ungeraden Teiler besitzen. Hätte sie aber einen geraden Teiler $\mathfrak{L}$, so wähle man $*^{(2)}(\mathfrak{f})$ so, dass die Relativdiskriminante von $*^{(2)}(\mathfrak{f})$ zu $K^{(2)}$ zu $\mathfrak{L}$ teilerfremd ist. Dann führt die gleiche Schlussweise zu einem Widerspruch, somit enthält die Relativdiskriminante von $K^{(2)}$ zu k auch keinen geraden Teiler, sondern ist eins.

Lässt man l alle endlichvielen Primteiler von h durchlaufen, so erhält man lauter Körper $K^{(l)}$ mit der Relativdiskriminante eins zu k, somit hat nach dem Hilbert'schen Satze (Zahlbericht, Satz 41, S. 209) auch der ganze, aus allen $K^{(l)}$ zusammengesetzte Körper K die Relativdiskriminante eins, und der Satz ist bewiesen.

Auf Grund des Fundamentalsatzes folgt sehr einfach aus dem bisherigen (nur für $l=2$, und für $l=3$, $m\equiv 5 \pmod{8}$ sind noch einige Ergänzungen nötig) der grundlegende Satz:

35. **Hauptsatz**: *Die Relativdiskriminante der Teilungskörper von* $\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{j}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}\right)$ *in Bezug auf k enthält nur die Primideale von* $\mathfrak{f}$.