SUR L'INTÉGRATION ALGÉBRIQUE DES DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES

PAR

J. PTASZYCKI
à S:t PÉTERSBOURG.

1. Le travail actuel a pour objet la solution du problème suivant:

Exprimer l'intégrale $\int ydx$, y étant liée à x par une équation algébrique, au moyen d'une fonction algébrique de x ou s'assurer que cette intégrale n'est pas algébrique.

Le premier pas vers la résolution de ce problème a fait ABEL, en démontrant que, si l'intégrale $\int ydx$ est une fonction algébrique de x, elle s'exprime rationellement au moyen de x et de y.

En s'appuyant sur cette proposition, LIOUVILLE a résolu complètement le problème (Journal de l'Ecole Polytechnique, 22^{e} cahier; Journal de Mathématiques, t. **3**).

Depuis, plusieurs autres géomètres ont étudié la question. Je citerai BRIOT et BOUQUET (*Théorie des fonctions elliptiques*), MM. ZEUTHEN (Comptes rendus, 1880), RAFFY (Annales de l'Ecole normale, 1883; 1885) et HUMBERT (Acta mathematica, 1887).

Toutes les solutions du problème, proposées jusqu'à présent, ramènent la question à la recherche de quelques polynômes entiers par la méthode des coefficients indéterminés.

Ici je vais établir un théorème qui permet de résoudre la question

Acta mathematica. 11. Imprimé le 11 Août 1888.

par une voie différente.[1] Ce théorème fournit aussi un nouveau moyen de suivre la méthode des coefficients indéterminés.

2. Théorème. *Soit P un polynôme entier en x; z une fonction de x, définie par l'équation irréductible à coefficients entiers*

$$z^n + \varphi_1(x) z^{n-1} + \varphi_2(x) z^{n-2} + \ldots = 0.$$

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les n déterminations de la fonction z; Δ le discriminant de l'équation en z. Soit enfin

$$\Delta = D^2 E,$$

où D est un polynôme entier, E un polynome entier qui n'a pas de facteurs linéaires multiples.

Si l'intégrale $\int \frac{z}{P} dx$ est algébrique, on peut poser

$$\int \frac{z}{P} dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y},$$

$Y, X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ étant des polynômes entiers en x, définis de la manière suivante:

1° *Y est le produit du polynôme D par le plus grand commun diviseur du polynôme P et de sa dérivée $\frac{dP}{dx}$;*

2° *$X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ satisfont aux équations:*

$$X_i = \frac{Y}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \ldots z_1^{i-1} & \int \frac{z_1}{P} dx & z_1^{i+1} \ldots z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 \ldots z_2^{i-1} & \int \frac{z_2}{P} dx & z_2^{i+1} \ldots z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_n & z_n^2 \ldots z_n^{i-1} & \int \frac{z_n}{P} dx & z_n^{i+1} \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (i=0,1,2,\ldots,n-1)$$

[1] En 1881, j'ai traité la question de cette manière, pour une classe assez étendue de fonctions algébriques, dans mon Mémoire intitulé *Sur l'intégration sous forme finie* (S:t Pétersbourg). Dans le cas où la fonction y est égale à la racine d'une fonction rationnelle, cette méthode se réduit au procédé de M. Tchébycheff. Je dois à l'obligeante communication de l'illustre géomètre la connaissance de son procédé. Maintenant au sujet dudit procédé on peut consulter *Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris* par M. Hermite (2ème ed.; p. 20).

3. Démonstration. Soit $\int \frac{z}{P} dx$ l'intégrale algébrique. L'intégrale sera de la forme (n° 1)

$$\int \frac{z}{P} dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z + \frac{X_2}{Y_2} z^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z^{n-1}, \tag{1}$$

X_0, Y_0; X_1, Y_1; ... désignant des polynômes entiers en x; on peut supposer que la fraction $\frac{X_i}{Y_i}$ soit irréductible.

On tire de l'égalité (1) les n équations

$$\int \frac{z_1}{P} dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_1 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z_1^{n-1},$$
$$\int \frac{z_2}{P} dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z_2^{n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\int \frac{z_n}{P} dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_n + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z_n^{n-1}.$$

Remarquons que ces équations montrent que l'intégrale

$$\int \frac{z_k}{P} dx, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{2}$$

sera représentée, dans le voisinage de chaque point a, par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - a$; au commencement de la série il n'y a qu'un nombre limité de termes à exposants négatifs.

En résolvant nos équations par rapport aux coefficients $\frac{X_0}{Y_0}$, $\frac{X_1}{Y_1}$, ..., on obtient la formule

$$\frac{X_i}{Y_i} = \frac{1}{\sqrt{J}} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \ldots z_1^{i-1} & \int \frac{z_1}{P} dx & z_1^{i+1} \ldots z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 \ldots z_2^{i-1} & \int \frac{z_2}{P} dx & z_2^{i+1} \ldots z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_n & z_n^2 \ldots z_n^{i-1} & \int \frac{z_n}{P} dx & z_n^{i+1} \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix}. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n-1) \tag{3}$$

Nous allons maintenant mettre cette formule sous une autre forme.

Dans ce but, je remarque que les éléments du déterminant qui figure dans la formule (3), excepté ceux de la i-ième colonne, restent finis pour toutes les valeurs finies de x. Quant à l'élément (2) de la i-ième colonne, on sait que les seules valeurs finies de x qui puissent le rendre infini sont les racines du polynôme P. Soit

$$P = (x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_l)^{\alpha_l}.$$

On voit sans peine que pour $x = a$ l'intégrale (2) sera finie ou infiniment grande d'un ordre égal au plus à celui de $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}$.

Le déterminant considéré se réduit donc à

$$\frac{f(x)}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 1}(x - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (x - a_l)^{\alpha_l - 1}},$$

$f(x)$ étant une fonction qui reste finie pour toutes les valeurs finies de x. Rappelons que le radical $\sqrt{\varDelta}$ qui figure dans la formule (3) est égal à $D\sqrt{E}$, où E désigne un polynôme qui n'a pas de facteurs linéaires multiples.

D'après cela, de la formule (3) on déduit que

$$\frac{X_i}{Y_i} = \frac{f(x)}{D \cdot (x - a_1)^{\alpha_1 - 1}(x - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (x - a_l)^{\alpha_l - 1} \cdot \sqrt{E}}.$$

On en conclut, en ayant égard aux propriétés des fonctions X_i, Y_i, $f(x)$, E, que le polynôme Y_i doit diviser le polynôme

$$Y = D \cdot (x - a_1)^{\alpha_1 - 1}(x - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (x - a_l)^{\alpha_l - 1}.$$

Par conséquent, dans l'égalité (1) on peut poser

$$Y_i = Y; \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

Portant la valeur de Y_i dans la formule (3), on obtient l'expression du polynôme X_i qui établit la seconde partie du théorème énoncé.

4. Application. En vertu de notre théorème, on peut procéder de de la manière suivante pour résoudre le problème proposé (n° 1).

On met la fonction à intégrer y sous la forme $\frac{z}{P}$ et le discriminant de l'équation en z sous la forme $\Delta = D^2E$.

On forme le produit du polynôme D par le plus grand commun diviseur du polynôme P et de sa dérivée $\frac{dP}{dx}$; on déterminera ainsi le polynôme Y.

Puis, on développe suivant les puissances décroissantes de x les n expressions

$$\frac{Y}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \ldots z_1^{i-1} & \int \frac{z_1}{P}dx & z_1^{i+1} \ldots z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 \ldots z_2^{i-1} & \int \frac{z_2}{P}dx & z_2^{i+1} \ldots z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_n & z_n^2 \ldots z_n^{i-1} & \int \frac{z_n}{P}dx & z_n^{i+1} \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

dans lesquelles $z_1, z_2, \ldots, z_n$ désignent les n déterminations de z; les parties entières dans les développements fourniront respectivement les polynômes $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$.

Les coefficients de ces polynômes contiendront, en général, n constantes inconnues $c_1, c_2, \ldots, c_n$; c_k représente la constante arbitraire de l'intégrale $\int \frac{z_k}{P}dx$.

L'une de ces constantes peut être choisie arbitrairement; on déterminera les autres par la condition que l'égalité

$$\frac{d}{dx}\left[\int \frac{z}{P}dx - \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1}z^{n-1}}{Y}\right] = 0$$

doit avoir lieu identiquement.

Les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant déterminées, la fonction

$$\frac{X_0 + X_1 z + \ldots + X_{n-1}z^{n-1}}{Y}$$

présentera la valeur de l'intégrale $\int \frac{z}{P}dx$. Si ces constantes ne satisfont pas à la condition indiquée, on concluera que notre intégrale n'est pas algébrique.

Remarque. Il peut arriver que l'impossibilité de l'intégration algébrique se manifeste avant que nos opérations soient menées à bout. L'intégrale $\int \frac{z}{P} dx$ n'est pas algébrique: 1° si le développement de la fonction $\frac{z_i}{P}$ contient un terme en x^{-1} (n° 3); 2° si, dans le développement de l'expression qui fournit le polynôme X_i, les puissances fractionnaires et positives de x ne s'evanouissent pour aucune valeur de $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

5. La seconde partie de notre théorème indique encore le moyen suivant de déterminer les polynômes $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$.

A l'aide de l'expression de X_i, on calcule les limites supérieures des degrés de ces polynômes et l'on cherche ensuite à déterminer leurs coefficients de manière à vérifier l'égalité du n° 4.

Remarque. Si l'on suit cette seconde marche, on n'aura à effectuer que les seules opérations arithmétiques pour résoudre le problème proposé (n° 1).