BEMERKUNG ÜBER DIEJENIGEN FLÄCHEN BEI DENEN DIE DIFFERENZ DER HAUPTKRÜMMUNGSRADIEN CONSTANT IST

VON

R. v. LILIENTHAL
in BONN.

Im 59ten Bande des Journals für Mathematik hat Herr WEINGARTEN den Satz aufgestellt und bewiesen, dass die dem Hauptkrümmungshalbmesser ρ_1 entsprechenden Krümmungsmittelpunktsflächen derjenigen Flächen, bei denen der Hauptkrümmungshalbmesser ρ_2 durch dieselbe Function von ρ_1 ausgedrückt wird, sämmtlich auf eine unter ihnen befindliche Rotationsfläche abwickelbar sind. Speciell sind die Krümmungsmittelpunktsflächen der Minimalflächen auf die Rotationsfläche jeder Kettenlinienevolute abwickelbar.

Der letzteren Bemerkung lässt sich die folgende an die Seite stellen. Die dem Hauptkrümmungshalbmesser ρ_1 entsprechenden Krümmungsmittelpunktsflächen sämmtlicher Flächen, bei denen $\rho_1 - \rho_2$ constant ist, sind auf die Rotationsfläche der Tractrix abwickelbar und besitzen somit ein constantes negatives Krümmungsmass. Dasselbe hat den Werth

$$\frac{-1}{c^2},$$

wenn $\rho_1 - \rho_2 = c$. Die Rotationsfläche der Tractrix selbst ist Krümmungsmittelpunktsfläche von einer Rotationsfläche, die sich durch geeignete Bestimmung der willkührlichen Constanten aus den Formeln des Herrn LIPSCHITZ (Acta Mathematica, Bd. **10**, S. 136, (16)) ergiebt.

Es sei zunächst gestattet den allgemeinen Satz des Herrn WEINGARTEN mit den Mitteln zu beweisen, die im **30**ten Bande der Mathematischen Annalen, p. 1 u. folg. entwickelt sind. Man erhält für das Quadrat des Linearelements ds_1 der zu ρ_1 gehörenden Krümmungsmittelpunktsfläche die Gleichung:

$$ds_1^2 = (\rho_1 - \rho_2)^2[\sqrt{L}\sin\sigma dp + \sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)dq]^2 + d\rho_1^2.$$

Unter der Voraussetzung

$$\rho_2 = f(\rho_1)$$

lässt sich nun, wenn ρ_1 als unabhängige Variable genommen und gleich p gesetzt wird, ein Factor λ in der Weise bestimmen, dass

$$\lambda(\rho_1 - \rho_2)[\sqrt{L}\sin\sigma dp + \sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)dq]$$

ein vollständiges Differential wird.

Die hierzu erforderliche Differentialgleichung nimmt unter Berücksichtigung der Beziehung (l. c., p. 10, (6)):

$$(\rho_1 - \rho_2)\left\{\frac{\partial\sqrt{L}\sin\sigma}{\partial q} - \frac{\partial\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)}{\partial p}\right\} = \frac{\partial\rho_2}{\partial q}\sqrt{L}\sin\sigma - \frac{\partial\rho_2}{\partial p}\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)$$

die Form an:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial q}(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{L}\sin\sigma - \frac{\partial\lambda}{\partial p}(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)$$
$$+ \frac{\partial\rho_1}{\partial q}\lambda\sqrt{L}\sin\sigma - \frac{\partial\rho_1}{\partial p}\lambda\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi) = 0.$$

Wird nun λ blos als Function von $p = \rho_1$ betrachtet, so folgt:

$$\lambda = e^{-\int\frac{d\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} + \text{Const.}},$$

und man kann setzen:

$$e^{-\int\frac{d\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}}(\rho_1 - \rho_2)[\sqrt{L}\sin\sigma dp + \sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)dq] = dq_1,$$

so dass:

$$ds_1^2 = e^{2\int\frac{d\rho_1}{\rho_1-\rho_2}} dq_1^2 + d\rho_1^2$$

wird, woraus die Behauptung des Herrn WEINGARTEN unmittelbar erhellt.

Nimmt man nun im betrachteten Falle $\rho_1 - \rho_2$ gleich c und schreibt statt q_1 wieder q, so ergiebt sich:

$$ds_1^2 = e^{\frac{2\rho_1}{c}} dq^2 + d\rho_1^2.$$

Wir suchen jetzt diejenige Rotationsfläche auf, bei welcher das Quadrat des Linearelements die letztgefundene Form hat. Sind

$$\xi = p\cos q, \qquad \eta = p\sin q, \qquad \zeta = f(p)$$

die Coordinaten einer Rotationsfläche, ds das Linearelement der letzteren, so wird:

$$ds^2 = [1 + f'(p)^2]dp^2 + p^2dq^2.$$

Daher sind p und $f(p)$ so als Functionen von ρ_1 zu bestimmen, dass:

$$p^2 = e^{\frac{2\rho_1}{c}}, \qquad [1 + f'(p)^2]dp^2 = d\rho_1^2$$

wird.

Nimmt man

$$p = e^{\frac{\rho_1}{c}},$$

so folgt:

$$f(p) = \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}} - \rho_1 + c\log\left(c - \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}}\right),$$

und:

$$\xi = e^{\frac{\rho_1}{c}}\cos q, \qquad \eta = e^{\frac{\rho_1}{c}}\sin q,$$

$$\zeta = \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}} - \rho_1 + c\log\left(c - \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}}\right).$$

Diese Gleichungen zeigen, dass wir es mit der Umdrehungsfläche der Tractrix zu thun haben. Das Krümmungsmass dieser Fläche ist $\frac{-1}{c^2}$.

Bezeichnen wir mit x, y, z die Coordinaten einer Fläche, für welche die in Rede stehende Rotationsfläche eine Evolute ist, so finden sich x, y, z leicht mit Hülfe eines von Herrn WEINGARTEN in Journal für Mathematik, Bd. **62**, S. 62 aufgestellten Formelsystems in der Form:

$$x = e^{\frac{\rho_1}{c}} \frac{c - \rho_1}{c} \cos q, \qquad y = e^{\frac{\rho_1}{c}} \frac{c - \rho_1}{c} \sin q,$$

$$z = \frac{c - \rho_1}{c} \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}} - \rho_1 + c \log\left(c - \sqrt{c^2 - e^{\frac{2\rho_1}{c}}}\right).$$

Diese Rotationsfläche, bei der nun

$$\rho_1 - \rho_2 = c$$

wird, ist unter den von Herrn LIPSCHITZ (Acta Mathematica, Bd. **10**, S. 136, (16)) angegebenen Rotationsflächen mit der genannten Eigenschaft enthalten, was sich mit Hülfe der Substitution:

$$\varphi = q, \qquad \sin\vartheta = \frac{1}{c} e^{\frac{\rho_1}{c}}, \qquad \log\frac{1}{c} + \mathfrak{A} = -1$$

sofort ergiebt.

Münster i/W. den 1 September 1887.