ZUR THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

(Zweite Abhandlung[1])

VON

H. WEBER
in MARBURG.

Nach längerer Unterbrechung setze ich meine in dieser Zeitschrift begonnenen Publicationen aus der Theorie der elliptischen Functionen fort. Ich beginne mit einigen Betrachtungen über die allgemeine Transformationstheorie, besonders die Modulargleichungen, welche den Zweck haben, die Formeln dieser Theorie unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt zu betrachten und dieselben teils zu erweitern, teils zu vereinfachen. Diese Untersuchungen berühren sich mit den Arbeiten, die in den letzten Jahren von F. KLEIN und einigen seiner Schüler veröffentlicht sind.[2] Im zweiten Teile der vorliegenden Arbeit werden diese Formeln angewandt auf die Berechnung der aus der complexen Multiplication entspringenden algebraischen Zahlen (der sogenannten singulären Moduln), mit Anwendung verschiedenartiger Methoden. Einige dieser algebraischen Zahlen finden sich in den einschlagenden Arbeiten von HERMITE,[3] JOUBERT,[4]

[1] Acta Mathematica, Bd. **6**, S. 329. Die mit I bezeichneten Citate beziehen sich auf diese Abhandlung.

[2] Man vgl. die sehr dankenswerten Übersichten, die F. KLEIN in den Berichten der Sächsischen Gesellschaft d. Wissensch. (2 März 1885) und in den Mathematischen Annalen (Bd. **26**) über diese Untersuchungen und ihren Zusammenhang gegeben hat. Von besonderem Interesse war mir die Dissertation von E. W. FIEDLER, die im Jahr 1885 der phil. Facultät der Universität Leipzig vorgelegt wurde, in welcher sich viele der von mir benutzten Formeln wenn auch in anderer Form finden.

[3] HERMITE, *sur la théorie des équations modulaires*, Paris 1859.

[4] JOUBERT, Comptes rendus 1860, t. **50**.

Acta mathematica. 11. Imprimé le 28 Mai 1888.

KRONECKER.[1] Die von mir angewandten Methoden, die alle bisher bekannten Fälle umfassen, vermehren dies Material bedeutend und geben die Resultate meist in überraschend einfacher Gestalt. Die Rechnungen lassen sich auf denselben Wegen noch weiter fortsetzen. Bezüglich dieser Rechnungen bemerke ich noch, dass dieselben, mit Ausnahme der in § 8 behandelten Fälle, nicht wie bei HERMITE und KRONECKER auf numerischen Rechnungen, sondern auf algebraischen Umformungen beruhen, dass aber trotzdem vielfach die numerische Rechnung, die bei der enormen Convergenz der in Betracht kommenden Reihen sehr leicht ist, teils zur Controlle der Richtigkeit, teils zur leichteren Auffindung rationaler Factoren mit Nutzen angewandt wird.

I. ABSCHNITT.

Zur Transformationstheorie.

§ 1. *Einführung der Functionen $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$.*

In der Abhandlung I, § 6, habe ich als absolute Invariante eines Systems doppelt periodischer Functionen mit den Perioden 1, ω die Function

$$j(\omega) = 2^8 \frac{(1 - k^2 k'^2)^3}{k^4 k'^4} \tag{1}$$

eingeführt, deren Entwicklung nach steigenden Potenzen von q den folgenden Anfang hat

$$j(\omega) = q^{-2}(1 + 744q^2 + \ldots). \tag{2}$$

Hierin ist, wenn ω das Periodenverhältniss bedeutet

$$q = e^{\pi i \omega}.$$

Von derjenigen Function, welche DEDEKIND (Journal für Mathematik, Bd. 83) die Valenz von ω nennt, die mit der von F. KLEIN als absolute

[1] KRONECKER, Monatsberichte der Berliner Akademie, 26 Juni 1862.

Invariante $J(\omega)$ bezeichneten Function übereinstimmt, unterscheidet sie sich durch einen Zahlenfactor, so dass $j(\omega) = 27.64 J(\omega)$ ist. Der Grund, der mich zu dieser Abweichung von der sonst schon gebräuchlichen Bezeichnung, zu der ich mich ungern entschloss, bewog, war der, dass die der complexen Multiplication entsprechenden singulären Werte von $j(\omega)$ *ganze* algebraische Zahlen sind, was für $J(\omega)$ nicht der Fall ist. Derselbe Umstand hat mich auch zu den folgenden Einführungen bewogen, welche sich übrigens auch sonst als zweckmässig erweisen.

An Stelle der Invarianten g_2, g_3 (I, § 6) benutze ich die von ihnen durch Zahlenfactoren verschiedenen Functionen

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
\gamma_2(\omega) &= 3\sqrt[3]{4}\,g_2(\omega) = \sqrt[3]{j(\omega)} &&= q^{-\frac{2}{3}}(1 + 248q^2 + \ldots),\\
\gamma_3(\omega) &= 54 g_3(\omega) = \sqrt{j - 27.64} &&= q^{-1}(1 - 492q^2 + \ldots),
\end{aligned}
$$

und an Stelle der Hermite'schen Functionen $\varphi(\omega), \psi(\omega), \chi(\omega)$ (I, § 4) sollen drei Functionen $f(\omega), f_1(\omega), f_2(\omega)$ eingeführt werden, welche mit denselben in folgendem Zusammenhang stehen:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
f(\omega) &= \frac{\sqrt[6]{2}}{\chi(\omega)} = \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[12]{kk'}}\\
f_1(\omega) &= \frac{\sqrt[6]{2}\,\psi(\omega)}{\chi(\omega)} = \sqrt[6]{2}\sqrt[12]{\frac{k'^2}{k}}\\
f_2(\omega) &= \frac{\sqrt[6]{2}\,\varphi(\omega)}{\chi(\omega)} = \sqrt[6]{2}\sqrt[12]{\frac{k^2}{k'}}.
\end{aligned}
$$

Diese drei Functionen lassen sich in folgender Weise durch die Function $\eta(\omega)$ darstellen:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
f(\omega) &= e^{-\frac{\pi i}{24}}\frac{\eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right)}{\eta(\omega)},\\
f_1(\omega) &= \frac{\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\eta(\omega)},\\
f_2(\omega) &= \sqrt{2}\,\frac{\eta(2\omega)}{\eta(\omega)}.
\end{aligned}
$$

Führt man hier das unendliche Product

$$(6) \qquad \eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}} \prod_{1,\infty}^{\nu} (1 - q^{2\nu})$$

ein, so erhält man

$$f(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{1,\infty}^{\nu} (1 + q^{2\nu-1}),$$

$$(7) \qquad f_1(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{1,\infty}^{\nu} (1 - q^{2\nu-1}),$$

$$f_2(\omega) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} \prod_{1,\infty}^{\nu} (1 + q^{2\nu}),$$

woraus die Reihen:

$$f(\omega) = q^{-\frac{1}{24}}(1 + q + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + 2q^8 + 2q^9 + 2q^{10} + 2q^{11} + \ldots),$$

$$(8) \quad f_1(\omega) = q^{-\frac{1}{24}}(1 - q - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 + 2q^8 - 2q^9 + 2q^{10} - 2q^{11} + \ldots),$$

$$f_2(\omega) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}}(1 + q^2 + q^4 + 2q^6 + 2q^8 + 3q^{10} + \ldots).$$

Zwischen den drei Functionen $f(\omega), f_1(\omega), f_2(\omega)$ bestehen die aus (4) sich ergebenden beiden Relationen

$$(9) \qquad f(\omega) f_1(\omega) f_2(\omega) = \sqrt{2},$$

$$(10) \qquad f(\omega)^8 = f_1(\omega)^8 + f_2(\omega)^8.$$

Die Invariante $\gamma_2(\omega)$ lässt sich durch $f(\omega)$ in der Weise ausdrücken

$$(11) \qquad \gamma_2(\omega) = \frac{f^{24} - 16}{f^8},$$

so dass $f^8, -f_1^8, -f_2^8$ die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$x^3 - x\gamma_2(\omega) - 16 = 0$$

sind, deren Discriminante $4\gamma_3(\omega)^2$ ist, woraus

$$(12) \qquad \gamma_3(\omega) = \frac{1}{2}[f(\omega)^8 + f_1(\omega)^8][f(\omega)^8 + f_2(\omega)^8][f_1(\omega)^8 - f_2(\omega)^8]$$

$$= \frac{[f(\omega)^{24} + 8][f_1(\omega)^8 - f_2(\omega)^8]}{f(\omega)^8}.$$

Mittels der Formeln (5) erhält man (nach I, § 5, 7, 8) die zur Transformation erster und zweiter Ordnung gehörigen Fundamentalformeln

$$
(13) \qquad
\begin{aligned}
f(\omega + 1) &= e^{-\frac{\pi i}{24}} f_1(\omega),\\
f_1(\omega + 1) &= e^{-\frac{\pi i}{24}} f(\omega),\\
f_2(\omega + 1) &= e^{\frac{\pi i}{12}} f_2(\omega).
\end{aligned}
$$

$$
(14) \qquad
\begin{aligned}
f\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= f(\omega),\\
f_1\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= f_2(\omega),\\
f_2\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= f_1(\omega).
\end{aligned}
$$

$$
(15) \qquad
\begin{aligned}
f_2(\omega) f_1(2\omega) &= \sqrt{2},\\
f_1(\omega) f_2\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \sqrt{2},\\
f(\omega) f_2\left(\frac{\omega + 1}{2}\right) &= e^{\frac{\pi i}{24}} \sqrt{2},\\
f(\omega) f\left(\frac{\omega - 1}{\omega + 1}\right) &= \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Ich führe noch die Formeln für die allgemeine lineare Transformation der Functionen f, f_1, f_2 an, die man aus den bekannten HERMITE'schen Formeln für die Transformation der Functionen φ, ψ, χ erhält, die sich aber auch (wie in I, § 5 angedeutet) leicht mittels der Transformation der Function $\eta(\omega)$ aus (5) herleiten lassen.[1] Ich gebe diese Formeln tabellarisch, indem in der ersten Colonne die nach dem Modul 2 reducierten

[1] Vgl. MOLIEN, *Über gewisse in der Theorie der elliptischen Functionen auftretende Einheitswurzeln.* Berichte der Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., 1885.

Transformationszahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ stehen wonach sechs mögliche Fälle zu unterscheiden sind.

(16)

$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$	$f\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)$	$f_1\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)$	$f_2\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\rho\left(\frac{2}{\alpha\delta}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta-\gamma\delta)}f(\omega)$	$\rho\left(\frac{2}{\delta}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f_1(\omega)$	$\rho\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f_2(\omega)$
$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\rho\left(\frac{2}{\gamma\beta}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta-\gamma\delta)}f(\omega)$	$\rho\left(\frac{2}{\gamma}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f_2(\omega)$	$\rho\left(\frac{2}{\beta}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f_1(\omega)$
$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$-\rho\left(\frac{2}{\delta}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta+\gamma\delta)}f_2(\omega)$	$-\rho\left(\frac{2}{\delta}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f_1(\omega)$	$-\rho e^{\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f(\omega)$
$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$-\rho\left(\frac{2}{\gamma}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta+\gamma\delta)}f_1(\omega)$	$-\rho\left(\frac{2}{\gamma}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f_2(\omega)$	$-\rho e^{-\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f(\omega)$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	$-\rho\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta+\gamma\delta)}f_1(\omega)$	$-\rho e^{-\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f(\omega)$	$-\rho\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{-\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f_2(\omega)$
$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	$-\rho\left(\frac{2}{\beta}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}(\alpha\beta+\gamma\delta)}f_2(\omega)$	$-\rho e^{\frac{3i\pi}{8}\gamma\delta}f(\omega)$	$-\rho\left(\frac{2}{\beta}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}\alpha\beta}f_1(\omega)$

$$\rho = e^{-\frac{2i\pi}{3}(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\delta-\alpha\beta^2\gamma)} \tag{17}$$

Für die lineare Transformation von γ_2, γ_3 erhält man

$$\begin{aligned}\gamma_2\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) &= \rho\gamma_2(\omega),\\ \gamma_3\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) &= (-1)^{\alpha\beta+\gamma\delta+\beta\gamma}\gamma_3(\omega).\end{aligned} \tag{18}$$

Als Ergänzung der Sätze am Schluss von Abhandlung I, § 7, ergiebt sich noch als unmittelbare Folgerung jener Sätze (n° 1)

1.) *Wenn eine Function von ω, als Function von k^2 überall einen algebraischen Character hat, und durch die beiden Substitutionen*

$$(\omega, \omega+2), \left(\omega, -\frac{1}{\omega}\right)$$

ungeändert bleibt, so ist sie eine rationale Function von $f(\omega)^{24}$.

2.) *Bleibt eine solche Function ungeändert durch die Substitutionen*

$$(\omega\,,\,\omega + 2r)\,,\,\left(\omega\,,\,-\frac{1}{\omega}\right)$$

worin r *ein Teiler von* 24 *und* $rr_1 = 24$ *ist, so ist sie eine rationale Function von* $f(\omega)^{r_1}$.

Denn bezeichnen wir eine solche Function mit $\varphi(\omega)$ und setzen

$$\varepsilon = e^{\frac{-2\pi i s r_1}{24}}$$

so ist nach 1.) für jedes ganzzahlige s

$$f(\omega)^{sr_1}\{\varphi(\omega) + \varepsilon\varphi(\omega + 2) + \varepsilon^2\varphi(\omega + 4) + \ldots + \varepsilon^{r-1}\varphi[\omega + 2(r - 1)]\}$$

eine rationale Function von $f(\omega)^{24}$.

§ 2. *Die Transformation n^{ten} Grades.*

Ist n eine beliebige positive ganze Zahl und

$$n = ad \tag{1}$$

irgend eine Zerlegung derselben in zwei Factoren, ferner c eine nach dem Modul a genommene Zahl, so dass $a\,,\,d\,,\,c$ keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, so sind die Grössen

$$j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right) \tag{2}$$

deren Anzahl, wenn p die sämmtlichen in n aufgehenden von einander verschiedenen Primzahlen durchläuft

$$\nu = n\prod\left(1 + \frac{1}{p}\right) \tag{3}$$

ist, die Wurzeln einer Gleichung ν^{ten} Grades, deren Coëfficienten rationale Functionen von $j(\omega)$ sind, der *Invariantengleichung* (I, § 16).

Diese Thatsache ergiebt sich sehr einfach aus der Bemerkung, dass durch die Substitutionen

$$(4) \qquad \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 1, 1 \end{pmatrix} = (\omega, \omega + 1),$$

$$(5) \qquad \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix} = \left(\omega, \frac{-1}{\omega}\right),$$

die ν Grössen (2) nur unter einander vertauscht werden. Es ist nämlich

$$(6) \qquad \begin{pmatrix} a, 0 \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 1, 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ \lambda, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, 0 \\ c', d \end{pmatrix},$$

wenn

$$(7) \qquad c' = c + d - \lambda a,$$

und

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} a, 0 \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a', 0 \\ c', d' \end{pmatrix},$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

wenn

$$(9) \qquad \begin{aligned} \alpha a' + \beta c' &= 0, & \beta d' &= a, \\ \gamma a' + \delta c' &= -d, & \delta d' &= c. \end{aligned}$$

Hiernach ist d' als grösster gemeinschaftlicher Teiler von a und c, und dadurch wegen $a'd' = n$ auch a' bestimmt, und dann ergiebt sich c' aus der Congruenz

$$(10) \qquad cc' \equiv -dd' \pmod{n}.$$

Aus (9) folgt sodann

$$(11) \qquad \begin{aligned} \alpha d &= -c', & \beta d' &= a, & \beta d &= a', \\ -\gamma n &= cc' + dd', & \delta d' &= c, \end{aligned}$$

und d ist der grösste gemeinschaftliche Teiler von a', c'.

Hieraus schliesst man, dass die Grössen (2) durch die Substitutionen (4), (5) nur unter einander vertauscht, und die symmetrischen Functionen derselben nicht geändert werden. Letztere sind daher rationale Functionen von $j(\omega)$ w. z. b. w.

Die Invariantengleichung ist irreducibel in dem Sinne, dass sie sich nicht in Factoren niedrigeren Grades zerlegen lässt, deren Coëfficienten rationale Functionen von $j(\omega)$ sind, wie man am einfachsten aus der folgenden Zusammensetzung von Transformationen n^{ter} Ordnung erkennt.

Man bestimme bei gegebenen a, c, d die Zahl x so, dass

$$\alpha = ax + c, \qquad \beta = d$$

ohne gemeinschaftlichen Teiler sind, und dann γ, δ so dass

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Es ist dann

$$(12) \qquad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & , & 1 \\ d\gamma - c\delta, & & a\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix},$$

und daraus folgt, dass durch die Substitution

$$\left(\omega, \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right),$$

welche $j(\omega)$ ungeändert lässt, $j(n\omega)$ in

$$j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$$

übergeht. Wenn also eine rationale Function von u und $j(\omega)$ für $u = j(n\omega)$ verschwindet, so verschwindet dieselbe auch für die sämmtlichen Grössen (2), und da letztere von einander verschieden sind, so ist damit die Irreducibilität bewiesen.

Wenn nun irgend ein System von ν Functionen von ω vorliegt, entsprechend den ν Zahlensystemen a, c, d, die wir, da bei festgehaltenem n durch a die Zahl d mitbestimmt ist, mit

$$\Phi_{a,c}$$

bezeichnen, welche ebenso wie die Functionen (2) durch die Substitutionen (4), (5) in $\Phi_{a',c'}$ permutiert werden, so sind dies gleichfalls die Wurzeln einer Gleichung ν^{ten} Grades, welche rational von $j(\omega)$ abhängt, und es lässt sich $\Phi_{a,c}$ rational durch

$$j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right) \text{ und } j(\omega)$$

ausdrücken. Letzteres folgt in bekannter Weise daraus, dass für jedes ganzzahlige r die Summe

$$\Sigma\, \Phi_{a,c}\, j\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)^r$$

durch die Substitutionen (4), (5) ungeändert bleibt, und daher eine rationale Function von $j(\omega)$ ist.

Die Werte von $\Phi_{a,c}$ sind entweder alle von einander verschieden und dann ist die betreffende Gleichung irreducibel, oder sie zerfallen in Gruppen von gleich viel unter einander gleichen.

Indem wir diese Transformationsprincipien auf die Functionen f, f_1, f_2 anwenden, setzen wir n als ungerade voraus, und nehmen was alsdann freisteht

$$c \equiv 0 \pmod{16}, \tag{13}$$

und wenn n nicht durch 3 teilbar ist

$$c \equiv 0 \pmod{48} \tag{14}$$

an, was natürlich auch für die aus (7), (10) bestimmten Zahlen c' gelten soll.

Wird zur Abkürzung

$$\begin{array}{lll} f(\omega) = u, & f_1(\omega) = u_1, & f_2(\omega) = u_2, \\ f\left(\dfrac{c+d\omega}{a}\right) = v, & \left(\dfrac{2}{a}\right) f_1\left(\dfrac{c+d\omega}{a}\right) = v_1, & \left(\dfrac{2}{d}\right) f_2\left(\dfrac{c+d\omega}{a}\right) = v_2 \end{array} \tag{15}$$

gesetzt, so erhält man mit Benutzung der linearen Transformationsformeln § 1 (16), wenn man auf die Änderungen des Zahlensystems a, d, c, wie sie durch (7), (9), (10) characterisiert sind, in der Bezeichnung keine Rücksicht nimmt, folgende zusammengehörige Vertauschungen:

$$\begin{array}{llllllll} \omega & ; u, & u_1, & u_2; & v, & v_1, & v_2, \\ -\dfrac{1}{\omega} & ; u, & u_2, & u_1; & \rho v, & \rho v_2, & \rho v_1, \\ \omega + 1 & ; e^{-\frac{\pi i}{24}} u_1, & e^{-\frac{\pi i}{24}} u, & e^{\frac{\pi i}{12}} u_2; & \sigma e^{-\frac{n\pi i}{24}} v_1, & \sigma e^{-\frac{n\pi i}{24}} v, & \sigma e^{\frac{n\pi i}{12}} v_2, \end{array} \tag{16}$$

worin ρ, σ dritte Einheitswurzeln sind, welche, *falls n nicht durch* 3 *teilbar ist, den Wert* 1 *haben.*

Hieraus schliessen wir nun durch eine Wiederholung der letzten Substitution (16), gestützt auf den Satz am Schlusse des § 1, dass die drei Reihen von je ν Grössen

$$f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \left(\frac{2}{a}\right)f_1\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \left(\frac{2}{d}\right)f_2\left(\frac{c+d\omega}{a}\right) \tag{17}$$

falls n nicht durch 3 teilbar ist, die Wurzeln je einer Gleichung ν^{ten} Grades sind, deren Coëfficienten rational von $f(\omega)$ resp. $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ abhängen. Ist der Transformationsgrad n aber durch 3 teilbar, so kommt diese Eigenschaft den Cuben der Grössen (17) zu. Ebenso ergiebt sich, wenn r ein Divisor von 24 ist, eine solche Gleichung für

$$f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)^r,$$

deren Coëfficienten rational von $f(\omega)^r$ abhängen. Diese Gleichungen wollen wir die SCHLÄFLI'schen Modulargleichungen nennen. (SCHLÄFLI, Journal für Mathematik, Bd. 72.)

§ 3. *Princip zur Aufstellung von Transformationsgleichungen.*

Wir betrachten im Folgenden, immer unter Voraussetzung eines ungeraden n, rationale Functionen $\Phi_{a,c}$ der sechs Grössen

$$f(\omega), f_1(\omega), f_2(\omega), f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \left(\frac{2}{a}\right)f_1\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \left(\frac{2}{d}\right)f_2\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \tag{1}$$

welche durch die Substitutionen

$$\left(\omega, -\frac{1}{\omega}\right), (\omega, \omega+1) \tag{2}$$

in einander übergehen, und demnach Wurzeln von Transformationsgleichungen sind, welche rational von $j(\omega)$ abhängen.

Diese Gleichungen sind, wie oben gezeigt, entweder irreducibel oder Potenzen von irreducibeln Gleichungen.

Sind die $\Phi_{a,c}$ *ganze* rationale Functionen der Grössen (1) oder enthalten sie im Nenner nur Potenzen dieser Grössen (1), so wird keine von ihnen für einen *endlichen* Wert von $j(\omega)$ unendlich, und dieselben sind also *ganze algebraische* Functionen von $j(\omega)$, d. h. wenn in der Transformationsgleichung, deren Wurzeln die $\Phi_{a,c}$ sind, der Coëfficient der höchsten Potenz der Unbekannten $= 1$ ist, so sind die übrigen Coëfficienten dieser Gleichung *ganze* rationale Functionen von $j(\omega)$.

Richtet man nun die Functionen $\Phi_{a,c}$ durch geeignete Bestimmung gewisser Constanten so ein, dass sie für $q = 0$ endlich bleiben, so werden dieselben auch für ein unendliches $j(\omega)$ alle endlich bleiben, die Coëfficienten jener Gleichung werden mithin constant und *die Functionen $\Phi_{a,c}$ selbst sind alle einer und derselben Constanten gleich.*

Auf diese Weise ist man dann zur Aufstellung einer Transformationsgleichung gelangt, wenn auch nicht in expliciter Form.

Bezüglich der Bildung solcher Functionen $\Phi_{a,c}$ gelten die folgenden Bemerkungen.

1.) Hat man zwei dieser Functionen Φ, die wir in der Folge immer mit A, B bezeichnen, so ist jede ganze rationale Function von A, B ebenfalls eine solche Function Φ, und man kann die gesuchte Modulargleichung in Gestalt einer rationalen Gleichung zwischen A, B aufstellen. Denn da A, B algebraische Functionen von einer Variablen, $j(\omega)$, sind, so lässt sich durch Elimination von $j(\omega)$ immer eine solche Gleichung zwischen A, B herleiten. Damit aber diese Gleichung eine wirkliche Transformationsgleichung, nicht eine Identität sei, ist selbstverständlich erforderlich, dass aus den Functionen A, B sich nicht die sämmtlichen Variablen (1), wenn man sie als unabhängig oder nur durch die zwischen den Functionen f, f_1, f_2 bestehenden Relationen verbunden betrachtet, eliminieren lassen.

2.) Wenn n keinen quadratischen Teiler hat, so hat man nur dafür zu sorgen, dass die Functionen $\Phi_{a,0}$ für $q = 0$ endlich bleiben, denn daraus folgt durch Vermehrung von ω um eine ganze Zahl die Endlichkeit der übrigen.

3.) Ist n eine Primzahl, und hat die Function $\Phi_{a,c}$ die Eigenschaft durch Vertauschung von

$$f(\omega), \qquad f_1(\omega), \qquad f_2(\omega)$$

mit

$$f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \ \left(\frac{2}{a}\right) f_1\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \ \left(\frac{2}{d}\right) f_2\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)$$

ungeändert zu bleiben, so genügt der Nachweis der Endlichkeit von $\Phi_{1,0}$, woraus durch Vertauschung von ω mit $\omega:n$ die Endlichkeit von $\Phi_{n,0}$ und daraus nach 1. die der übrigen folgt.

4.) Es ist nicht immer erforderlich, dass die in n° 1.) erwähnten Functionensysteme A, B durch die Substitutionen (2) vollständig ungeändert bleiben. Dieselben können auch Einheitswurzeln als Factoren annehmen, wenn nur solche Producte $A^h B^k$ benutzt werden, in welchen diese Einheitswurzeln dieselben sind. Man erhält alsdann ein Functionensystem $\Phi_{a,c}$ in der Form

$$\Sigma M_{h,k} A^h B^k,$$

welches die Eigenschaft hat, dass eine Potenz desselben durch die Substitutionen (2) ungeändert bleibt, worauf man die obigen Schlüsse ungeändert anwenden kann. Die weiter unten folgenden Beispiele werden dies Verfahren klar legen.

§ 4. *Die Schläfli'schen Modulargleichungen.*

Wenn die Transformationsgleichung, welcher die Functionen $\Phi_{a,c}$ genügen, nicht von $j(\omega)$, sondern von $f(\omega)$ rational abhängen, wie bei den Schläfli'schen Modulargleichungen, so ist das im vorigen Paragraphen entwickelte Princip nicht unmittelbar anwendbar. Wenn es in diesem Falle auch gelungen ist, die Functionen $\Phi_{a,c}$ so zu bestimmen, dass sie für $q = 0$ endlich bleiben, so folgt daraus noch nicht, dass die Coëfficienten der Transformationsgleichung für $\Phi_{a,c}$ constant sind, da dieselben eine Potenz von $f(\omega)$ im Nenner enthalten können. Man kann aber durch einen kleinen Zusatz auch in diesem Fall unser Princip anwendbar machen. Es geht nämlich (nach § 1, 15) durch die Transformation zweiter Ordnung

$$(1) \qquad \left(\omega\, , \frac{\omega - 1}{\omega + 1}\right)$$

$f(\omega)$ in $\sqrt{2}:f(\omega)$ über. Wenn man daher die Functionen $\Phi_{a,c}$ so bestimmt, dass sie durch die Vertauschung (1) nur unter einander vertauscht werden, so haben die Coëfficienten der Transformationsgleichung, deren Wurzeln diese sind, die Eigenschaft, durch die Vertauschung

$$(2) \qquad \left(f(\omega)\,,\ \frac{\sqrt{2}}{f(\omega)}\right)$$

sich nicht zu ändern, und sind also *ganze rationale* Functionen von

$$f(\omega) + \frac{\sqrt{2}}{f(\omega)}.$$

Bleiben diese nun für $q = 0$, also für $f(\omega) = \infty$ endlich, so müssen sie constant sein und alles ist wie in dem vorigen Fall.

Um Functionen $\Phi_{a,c}$ wie die hier geforderten zu bilden, suchen wir zunächst für ein gegebenes Zahlensystem a, c, d die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a', c', d'$ so zu bestimmen, dass

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a', & 0 \\ c', & d' \end{pmatrix},$$

$$(4) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Dieser Ansatz führt zu den Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{aligned} a &= c'(\alpha + \beta) + a'(\alpha - \beta), & a &= d'(\alpha + \beta), \\ c - d &= c'(\gamma + \delta) + a'(\gamma - \delta), & c + d &= d'(\gamma + \delta). \end{aligned}$$

Hierdurch ist zunächst d' bestimmt als der grösste gemeinschaftliche Teiler von a und $c + d$, und aus $n = a'd'$ ergiebt sich a'.

Man erhält dann aus (5)

$$(6) \qquad \begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{a}{d'}, & \alpha - \beta &= \frac{a(d' - c')}{n}, \\ \gamma + \delta &= \frac{c + d}{d'}, & \gamma - \delta &= \frac{c(d' - c') - d(d' + c')}{n}, \end{aligned}$$

woraus für c' die beiden Congruenzen folgen:

$$(7) \qquad c'\frac{d + c}{d'} \equiv c - d, \qquad c'\frac{a}{d'} \equiv a \pmod{a'},$$

welche mit einander verträglich sind und c' nach dem modul a' vollständig bestimmen. Ausserdem soll, wie immer, c' durch 16, und wenn n nicht durch 3 teilbar ist, durch 48 teilbar sein.

Aus den Formeln (6) ergiebt sich, dass entweder α, δ gerade, β, γ ungerade oder α, δ ungerade, β, γ gerade sind, und im ersten Fall $\beta\gamma \equiv n \pmod 8$, im zweiten $\gamma\delta \equiv n \pmod 8$, ferner in beiden Fällen $\alpha\beta - \gamma\delta \equiv 0 \pmod{16}$, und wenn n nicht durch 3 teilbar ist,

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta^2\gamma \equiv 0 \pmod 2.$$

Hiernach ergeben sich nach § 1 (16) folgende zusammengehörige Vertauschungen

$$(8)\qquad \begin{array}{ccc} \omega, & f(\omega), & f\left(\dfrac{c+d\omega}{a}\right), \\[2ex] \dfrac{\omega-1}{\omega+1}, & \dfrac{\sqrt{2}}{f(\omega)}, & \rho\left(\dfrac{2}{n}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{f\left(\dfrac{c+d\omega}{a}\right)}, \end{array}$$

worin, wie oben, ρ eine dritte Einheitswurzel bedeutet, welche, falls n nicht durch 3 teilbar ist, den Wert 1 hat.

Definieren wir hiernach die beiden Functionen

$$(9)\qquad \begin{aligned} A &= \left(\frac{f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)}{f(\omega)}\right)^r + \left(\frac{f(\omega)}{f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)}\right)^r, \\ B &= \left[f(\omega)f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)\right]^s + \left(\frac{2}{n}\right)^{r+s}\frac{2^s}{\left[f(\omega)f\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)\right]^s}, \end{aligned}$$

worin r, s ganze Zahlen sind, so ergiebt sich, wenn r_1 als Divisor von 24 so bestimmt wird, dass

$$(n-1)rr_1 \equiv 0, \qquad (n+1)sr_1 \equiv 0 \pmod{12},$$

nach § 2 (16), das folgende System von Vertauschungen, (wobei auf die Änderungen der Zahlen a, c, d nicht Rücksicht genommen ist)

$$(10)\qquad \begin{array}{ccc} \omega, & A, & B, \\[1ex] -\dfrac{1}{\omega}, & A, & B, \\[1ex] \omega + 2r_1, & (-1)^{\frac{(n-1)rr_1}{12}}A, & (-1)^{\frac{(n+1)sr_1}{12}}B, \\[1ex] \dfrac{\omega-1}{\omega+1}, & \left(\dfrac{2}{n}\right)^r A, & \left(\dfrac{2}{n}\right)^r B, \end{array}$$

und diese Functionen sind also zur Anwendung des im vorigen Paragraphen dargelegten Princips geeignet.

Ist n eine Primzahl so genügt nach den Bemerkungen des vorigen Paragraphen die Betrachtung des Falles $a = 1$, für welchen man die Entwicklungen hat

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
A &= q^{-\frac{(n-1)r}{24}} \prod^{\nu} \left(\frac{1 + q^{n(2\nu-1)}}{1 + q^{2\nu-1}}\right)^{r} + q^{\frac{(n-1)r}{24}} \prod^{\nu} \left(\frac{1 + q^{2\nu-1}}{1 + q^{n(2\nu-1)}}\right)^{r}, \\
B &= q^{-\frac{(n+1)s}{24}} \Pi(1 + q^{2\nu-1})^{s}(1 + q^{n(2\nu-1)})^{s} + \left(\frac{2}{n}\right)^{r+s} \frac{2^{s} q^{\frac{(n+1)s}{24}}}{\Pi(1 + q^{2\nu-1})^{s}(1 + q^{n(2\nu-1)})^{s}}.
\end{aligned}
$$

Die Wahl der Zahlen r, s ist an sich willkürlich. Für kleinere Zahlen r, s wird man im Allgemeinen einfachere Resultate zu erwarten haben. Indessen ist die zweckmässigste Wahl nicht $s = 1$, $r = 1$, sondern die, bei welcher

$$
\frac{(n-1)r}{24}, \qquad \frac{(n+1)s}{24},
$$

welches die Exponenten der höchsten Potenz von q^{-1} in den Entwicklungen (11) sind, Brüche mit demselben Nenner, und zugleich r, s möglichst klein werden. Eine andere Wahl würde gewisse Potenzerhebungen nötig machen. Ausserdem müssen, für ein durch 3 teilbares n, auch r, s durch 3 teilbar sein.

Um die Anwendung des Princips im einfachsten Fall etwas ausführlicher darzulegen, sei $n = 3$, also $r = 6$, $s = 3$, und

$$
A = q^{-\frac{1}{2}} - 5q^{\frac{1}{2}} + \dots, \qquad B = q^{-\frac{1}{2}} - 5q^{\frac{1}{2}} - \dots,
$$

woraus, da $A - B$ keine negativen Potenzen von q enthält:

$$
A - B = 0
$$

als Modulargleichung folgt.

Auf diese Weise findet man folgende Formeln, worin

$$
v = f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), \qquad u = f(\omega)
$$

gesetzt ist.

I. $n = 3.$ $A = \left(\frac{u}{v}\right)^6 + \left(\frac{v}{u}\right)^6,$ $B = u^3v^3 - \frac{8}{u^3v^3};$

$$A - B = 0.$$

$n = 5.$ $A = \left(\frac{u}{v}\right)^3 + \left(\frac{v}{u}\right)^3,$ $B = u^2v^2 - \frac{4}{u^2v^2};$

$$A - B = 0.$$

$n = 7.$ $A = \left(\frac{u}{v}\right)^4 + \left(\frac{v}{u}\right)^4,$ $B = u^3v^3 + \frac{8}{u^3v^3};$

$$A - B + 7 = 0.$$

$n = 11.$ $A = \left(\frac{u}{v}\right)^6 + \left(\frac{v}{u}\right)^6,$ $B = uv - \frac{2}{uv};$

$$A - B^5 + B^3 + 2B = 0.$$

$n = 13.$ $A = \frac{u}{v} + \frac{v}{u},$ $B = u^6v^6 - \frac{64}{u^6v^6};$

$$A^7 + 6A^5 + A^3 - 20A - B = 0.$$

$n = 17.$ $A = \left(\frac{u}{v}\right)^3 + \left(\frac{v}{u}\right)^3,$ $B = u^4v^4 + \frac{16}{u^4v^4};$

$$A^3 - B^2 + 17AB - 34A^2 + 34B + 116A + 440 = 0.$$

$n = 19.$ $A = \left(\frac{u}{v}\right)^2 + \left(\frac{v}{u}\right)^2,$ $B = u^3v^3 - \frac{8}{u^3v^3};$

$$A^5 - B^3 + 19AB^2 - 95A^2B + 109A^3 + 128B - 128A = 0.$$ [1]

---

[1] Die bei Berechnung dieser Formeln benutzten Reihenentwicklungen, die man behufs Verification derselben nur einzusetzen hat, sind, soweit sie gebraucht werden, folgende:

$n = 3.$ $A = B = q^{-\frac{1}{2}}(1 - 5q \ldots)$

$n = 5.$ $A = B = q^{-\frac{1}{2}}(1 - 2q \ldots)$

$n = 7.$ $A = q^{-1}(1 - 4q \ldots)$
$B = q^{-1}(1 + 11q \ldots)$

$n = 11.$ $A = q^{-\frac{5}{2}}(1 - 6q + 21q^2 \ldots)$
$B = q^{-\frac{1}{2}}(1 - q + 2q^2 \ldots)$

$n = 13.$ $A = q^{-\frac{1}{2}}(1 + 2q^2 - 2q^3 \ldots)$
$B = q^{-\frac{7}{2}}(1 + 6q + 15q^2 + 26q^3 \ldots)$

Aus diesem ersten System leitet man ein zweites und drittes her für die Functionen f_1, f_2, indem man ω durch $\omega + 1$ und darauf ω durch $-1:\omega$ ersetzt (§ 2, 13). Diese beiden Systeme haben dieselbe Form, nur dass einmal

$$u_1 = f_1(\omega), \qquad v_1 = \left(\frac{2}{a}\right) f_1\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$$

das andere mal

$$u_1 = f_2(\omega), \qquad v_1 = \left(\frac{2}{d}\right) f_2\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$$

zu setzen ist.

II. $n = 3$. $\qquad A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^6 - \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^6, \qquad B_1 = u_1^3 v_1^3 + \frac{8}{u_1^3 v_1^3};$

$$A_1 + B_1 = 0.$$

$n = 5$. $\qquad A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^3 - \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^3, \qquad B_1 = u_1^2 v_1^2 + \frac{4}{u_1^2 v_1^2};$

$$A_1 + B_1 = 0.$$

$n = 7$. $\qquad A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^4 + \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^4, \qquad B_1 = u_1^3 v_1^3 + \frac{8}{u_1^3 v_1^3};$

$$A_1 - B_1 - 7 = 0.$$

$n = 11$. $\qquad A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^6 - \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^6, \qquad B_1 = u_1 v_1 + \frac{2}{u_1 v_1};$

$$A_1 + B_1^5 + B_1^3 - 2B_1 = 0.$$

$n = 13$. $\qquad A_1 = \frac{u_1}{v_1} - \frac{v_1}{u_1}, \qquad B_1 = u_1^6 v_1^6 + \frac{64}{u_1^6 v_1^6};$

$$A_1^7 - 6A_1^5 + A_1^3 + 20A_1 + B_1 = 0.$$

$n = 17$. $\qquad A = q^{-2}(1 - 3q + 6q^2 - 13q^3 + 25q^4 - 39q^5 + 76q^6 \ldots)$

$\qquad\qquad B = q^{-3}(1 + 4q + 6q^2 + 8q^3 + 17q^4 + 28q^5 + 54q^6 \ldots)$

$n = 19$. $\qquad A = q^{-\frac{3}{2}}(1 - 2q + 3q^2 - 5q^3 + 11q^4 - 13q^5 + 24q^6 - 28q^7 \ldots)$

$\qquad\qquad B = q^{-\frac{5}{2}}(1 + 3q + 3q^2 + 4q^3 + 9q^4 + 4q^5 + 39q^6 - 27q^7 \ldots).$

$$n = 17. \qquad A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^3 + \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^3, \qquad B_1 = u_1^4 v_1^4 + \frac{16}{u_1^4 v_1^4};$$

$$A_1^3 - B_1^2 - 17 A_1 B_1 - 34 A_1^2 - 34 B_1 + 116 A_1 + 440 = 0.$$

$$n = 19. \qquad A_1 = \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^2 - \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^2, \qquad B_1 = u_1^3 v_1^3 + \frac{8}{u_1^3 v_1^3};$$

$$A_1^5 + B_1^3 - 19 A_1 B_1^2 + 95 A_1^2 B_1 - 109 A_1^3 + 128 B_1 - 128 A_1 = 0.$$

§ 5. *Die irrationalen Modulargleichungen.*

Noch einfacher gestaltet sich die Anwendung unseres Princips (§ 2) bei den folgenden Annahmen.

Wir setzen wie oben

$$(1) \qquad \begin{aligned} u &= f(\omega), & u_1 &= f_1(\omega), & u_2 &= f_2(\omega), \\ v &= f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), & v_1 &= \left(\frac{2}{a}\right) f_1\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), & v_2 &= \left(\frac{2}{d}\right) f_2\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), \end{aligned}$$

so dass sich aus § 2 (16) die Vertauschungen ergeben

$$(2) \qquad \begin{array}{cccc} \omega, & uv, & u_1 v_1, & u_2 v_2, \\ -\frac{1}{\omega}, & uv, & u_2 v_2, & u_1 v_1, \\ \omega + 1, & e^{-\frac{(n+1)\pi i}{24}} u_1 v_1, & e^{-\frac{(n+1)\pi i}{24}} uv, & e^{\frac{(n+1)\pi i}{12}} u_2 v_2. \end{array}$$

Nimmt man also

$$(3) \qquad n + 1 \equiv 0 \pmod 8$$

an und setzt:

$$(4) \qquad \begin{aligned} 2A &= uv + (-1)^{\frac{n+1}{8}} (u_1 v_1 + u_2 v_2), \\ B &= uv u_1 v_1 + uv u_2 v_2 + (-1)^{\frac{n+1}{8}} u_1 v_1 u_2 v_2 \\ &= \frac{2}{u_2 v_2} + \frac{2}{u_1 v_1} + (-1)^{\frac{n+1}{8}} \frac{2}{uv}, \end{aligned}$$

so gehen aus (2) die Vertauschungen hervor

$$
(5)\qquad
\begin{array}{ccc}
\omega, & A, & B, \\
-\dfrac{1}{\omega}, & A, & B, \\
\omega + 1, & e^{\frac{\pi i(n+1)}{12}} A, & e^{-\frac{\pi i(n+1)}{12}} B.
\end{array}
$$

Unter der Voraussetzung dass n eine Primzahl ist, hat man also nach § 3 aus A, B ganze rationale Functionen zusammenzusetzen, welche unter der Annahme $a = 1$, $d = n$, $c = 0$ für $q = 0$ nicht unendlich werden, welche nur solche Glieder $A^h B^k$ enthalten, in welchen $(n+1)(h-k)$ bei der Division mit 24 einen und denselben Rest lassen, und diese Functionen Constanten gleich zu setzen, deren Wert sich aus $q = 0$ ergiebt. Auf diese Weise erhält man durch sehr einfache Rechnung [1]

$$
(6)\qquad
\begin{array}{ll}
n = 7, & A = 0, \\
n = 23, & A = 1, \\
n = 31, & (A^2 - B)^2 - A = 0, \\
n = 47, & A^2 - A - B = 2, \\
n = 71, & A^3 - 4A^2 + 2A - B = 1.
\end{array}
$$

Ist n eine zusammengesetzte Zahl, so bestehen gleichfalls solche Gleichungen zwischen A und B, zu deren Ableitung aber nicht die Betrachtung des einen Transformationsfalles ($a = 1$) ausreicht; und die demgemäss auch weniger einfach ausfallen. Wir führen nur die Formel an:

$$
(7)\qquad n = 15, \qquad A^3 - AB + 1 = 0.
$$

---

[1] Man benutzt dazu die für $n > 7$ richtigen Entwicklungen

$$
\begin{aligned}
uv &= q^{-\frac{n+1}{24}}(1 + q + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + 2q^8 \ldots) \\
u_1 v_1 &= q^{-\frac{n+1}{24}}(1 - q - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 + 2q^8 \ldots) \\
u_2 v_2 &= 2q^{\frac{n+1}{12}}(1 + q^2 + q^4 + 2q^6 + 2q^8 + \ldots).
\end{aligned}
$$

Für grössere zusammengesetzte Zahlen werden sich weiterhin einfachere Formeln ergeben.

Ist $n \equiv 3 \pmod 8$ so sind den Modulargleichungen die Functionen

$$(8)\qquad \begin{aligned} 4A &= u^2v^2 - u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2, \\ B &= u^2v^2u_1^2v_1^2 + u^2v^2u_2^2v_2^2 - u_1^2v_1^2u_2^2v_2^2 \end{aligned}$$

zu Grunde zu legen, für welche sich die Vertauschungen ergeben

$$(9)\qquad \begin{array}{lll} \omega, & A, & B, \\ -\dfrac{1}{\omega}, & A, & B, \\ \omega + 1, & e^{\frac{(n+1)\pi i}{6}}A, & e^{-\frac{(n+1)\pi i}{6}}B, \end{array}$$

und man findet wie oben

$$(10)\qquad \begin{array}{ll} n = 3, & A = 0, \\ n = 11, & A = 1, \\ n = 19, & A^5 - 7A^2 - B = 0. \end{array}$$

Ist $n \equiv 1 \pmod 4$ so muss man, um zu analogen Resultaten zu kommen

$$\begin{aligned} 8A &= u^4v^4 - u_1^4v_1^4 - u_2^4v_2^4, \\ B &= u^4v^4u_1^4v_1^4 + u^4v^4u_2^4v_2^4 - u_1^4v_1^4u_2^4v_2^4 \end{aligned}$$

setzen, was aber nur für den ersten Fall $n = 5$ zu einer einfachen Formel führt

$$(11)\qquad n = 5, \qquad A = 1.$$ [1]

---

[1] Die in diesem Paragraphen enthaltenen Formeln finden sich teils in der in der Einleitung erwähnten Dissertation von E. FIEDLER, andere, wie die für $n = 47, 71$ lassen sich aus den dortigen, minder einfachen herleiten.

§ 6. *Zusammengesetzte Transformationsgrade.*

Ist n eine zusammengesetzte (ungerade) Zahl und

$$(1)\qquad n = n'n''$$

eine Zerlegung derselben in zwei Factoren n', n'' die zu einander relativ prim sind, so gehört zu jeder Transformation n^{ten} Grades

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix}$$

je eine und nur eine Transformation der Grade n', n''

$$(3)\qquad \begin{pmatrix} a', & 0 \\ c', & d' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a'', & 0 \\ c'', & d'' \end{pmatrix},$$

welche durch folgende Bedingungen bestimmt sind

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} ad = n, \qquad a'd' = n', \qquad a''d'' = n'', \\ \qquad a'a'' = a, \qquad d'd'' = d, \\ d''c' \equiv c \pmod{a'}, \qquad d'c'' \equiv c \pmod{a''}. \end{array}\right.$$

Nach (4) sind d', d'' bestimmt als die grössten gemeinschaftlichen Teiler von d, n' und von d, n''. Bildet man die zusammengesetzten Transformationen

$$(5)\qquad \begin{aligned} \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1, & 0 \\ c_1, & d_1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a', & 0 \\ c', & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'_1, & 0 \\ c'_1, & d'_1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a'', & 0 \\ c'', & d'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha'', & \beta'' \\ \gamma'', & \delta'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a''_1, & 0 \\ c''_1, & d''_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \lambda, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & 0 \\ c_2, & d \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a', & 0 \\ c', & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \lambda', & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a', & 0 \\ c'_2, & d' \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a'', & 0 \\ c'', & d'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \lambda'', & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'', & 0 \\ c''_2, & d'' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so ergiebt sich aus den Formeln (6) bis (11) § 2 leicht, dass auch die Transformationen

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} a_1, & 0 \\ c_1, & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1', & 0 \\ c_1', & d_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1'', & 0 \\ c_1'', & d_1'' \end{pmatrix}$$

und

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c_2, & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a', & 0 \\ c_2', & d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'', & 0 \\ c_2'', & d'' \end{pmatrix}$$

sich nach den Formeln (4) entsprechen,[1] und daraus schliesst man wie in § 2 dass die Invarianten

$$j\left(\frac{c' + d'\omega}{a'}\right), \; j\left(\frac{c'' + d''\omega}{a''}\right)$$

---

[1] Für die Zusammensetzungen (5) ergiebt sich nämlich nach § 2 dass

d_1	der	grösste	gemeinsame	Teiler	von	a	und	c,
d	»	»	»	»	»	a_1	»	c_1,
d_1'	»	»	»	»	»	a'	»	c',
d'	»	»	»	»	»	a_1'	»	c_1',

ferner

$$cc_1 \equiv -dd_1 \pmod{n}, \qquad c'c_1' \equiv -d'd_1' \pmod{n'},$$

$$c\frac{c_1}{d} \equiv -d_1 \pmod{a}$$

und da nach (4)

$$c \equiv d''c' \pmod{a'} \quad \text{und} \quad a = a'a'', \qquad d = d'd'' \quad \text{ist}$$

$$c'\frac{c_1}{d'} \equiv -d_1 \pmod{a'} \quad \text{oder} \quad c'c_1 \equiv -d'd_1 \pmod{n'},$$

also

$$c'(c_1 - d_1''c_1') \equiv 0 \pmod{n'}$$

und

$$a'(c_1 - d_1''c_1') \equiv 0 \pmod{n'},$$

weil c_1 und c_1' durch d' teilbar sind. Da nun d_1' der grösste gemeinschaftliche Teiler von a', c' und $n' = d_1'a_1'$ ist, so folgt hieraus, in Übereinstimmung mit (4)

$$c_1 \equiv d_1''c_1' \pmod{a_1'}.$$

Für die Zusammensetzung (6) ergiebt sich das Gleiche noch einfacher aus den Congruenzen (§ 2, 7)

$$c_2 \equiv c + d \pmod{a}, \qquad c_2' \equiv c' + d' \pmod{a'}, \qquad d''c_2' \equiv c_2 \pmod{a'}.$$

rational ausdrückbar sind durch

$$j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), \; j(\omega).$$

Für die Anwendung auf die Functionen f, f_1, f_2 ist noch eine Bemerkung beizufügen, welche sich auf den Fall bezieht, dass n durch 3 teilbar ist. In diesem Fall ist von den beiden Zahlen n', n'' eine, nehmen wir an n'', durch 3 teilbar. Es kann also dann c' durch 48 teilbar vorausgesetzt werden und die Zusammengehörigkeit zweier Zahlen c, c'' soll noch näher dadurch bestimmt werden, dass an Stelle der letzten Congruenz (4) die folgende tritt:

$$d'c'' \equiv c \pmod{3a''}. \tag{9}$$

Ist diese Congruenz, wie in (4) angenommen ist, für den Modul a'' befriedigt, so kann man dieselbe für den Modul $3a''$ befriedigen, indem man zu c'' ein Vielfaches von a'' hinzufügt.

Unter dieser Voraussetzung ergeben sich für die in den Transformationen (5), (6) vorkommenden Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ nach § 2 (9), (7) noch folgende Congruenzen:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha \equiv \alpha'' d' d_1', & \beta \equiv \beta'' a' d_1' \\ \gamma \equiv \gamma'' a' d_1', & \delta \equiv \delta'' d' d_1' \end{array}\right\} \pmod 3, \qquad \lambda \equiv n'\lambda'' \pmod 3. \tag{10}$$

Wenden wir nun die Bezeichnung u, v in demselben Sinne an wie in (15) § 2 und geben den Buchstaben v', v'' die entsprechende Bedeutung für die Zahlen n', n'', welche v für die Zahl n hat. (wobei jedoch stets die Zusammengehörigkeit nach den Congruenzen (4), (9) aufrecht erhalten bleibt) so erhält man die folgenden einander entsprechenden Vertauschungen:

$$\begin{array}{lllllll}
\omega & ; \; u, & u_1, & u_2; & v, & v_1, & v_2, \\
-\frac{1}{\omega} & ; \; u, & u_2, & u_1; & \rho v, & \rho v_2, & \rho v_1, \\
\omega + 1 & ; \; e^{-\frac{\pi i}{24}} u_1, & e^{-\frac{\pi i}{24}} u, & e^{\frac{\pi i}{12}} u_2; & \sigma e^{-\frac{n\pi i}{24}} v_1, & \sigma e^{-\frac{n\pi i}{24}} v, & \sigma e^{\frac{n\pi i}{12}} v_2, \\
\omega & ; \; v', & v_1', & v_2'; & v'', & v_1'', & v_2''; \\
-\frac{1}{\omega} & ; \; v', & v_2', & v_1'; & \rho^{n''} v'', & \rho^{n'} v_2'', & \rho^{n''} v_1'', \\
\omega + 1 & ; \; e^{-\frac{n'\pi i}{24}} v_1', & e^{-\frac{n'\pi i}{24}} v', & e^{\frac{n'\pi i}{12}} v_2'; & \sigma^{n'} e^{-\frac{n''\pi i}{24}} v_1'', & \sigma^{n'} e^{-\frac{n''\pi i}{24}} v'', & \sigma^{n'} e^{\frac{n''\pi i}{12}} v_2'',
\end{array} \tag{11}$$

worin ρ, σ dritte Einheitswurzeln sind, welche, falls n nicht durch 3 teilbar ist, den Wert 1 haben.

Auf Grund dieser Betrachtungen können wir auf zweierlei Arten zur Bildung von Modulargleichungen für zusammengesetzte Transformationsgrade gelangen.

1.) Ist

$$(n'+1)(n''+1) = 8\mu \equiv 0 \pmod 8, \tag{12}$$

so setzen wir

$$U = uvv'v'', \qquad U_1 = u_1 v_1 v_1' v_1'', \qquad U_2 = u_2 v_2 v_2' v_2'', \tag{13}$$

$$\begin{aligned} 2A &= U + (-1)^n (U_1 + U_2), \\ B &= UU_1 + UU_2 + (-1)^n U_1 U_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Für die letzteren Functionen ergeben sich dann aus (11) die einander entsprechenden Vertauschungen:

$$\begin{array}{ccc} \omega, & A, & B, \\ -\frac{1}{\omega}, & \rho^{n'+1}A, & \rho^{-(n'+1)}B, \\ \omega+1, & \sigma^{n'+1}e^{\frac{2\mu\pi i}{3}}A, & \sigma^{-(n'+1)}e^{-\frac{2\mu\pi i}{3}}B. \end{array} \tag{15}$$

Sind die in (15) vorkommenden dritten Einheitswurzeln $= 1$, was eintritt, wenn n durch 3 nicht teilbar und wenigstens einer seiner Factoren den Rest 2 hat, oder wenn n'' durch 3 teilbar, n' den Rest 2 hat, so ist jede rationale Function von A, B Wurzel einer Invariantengleichung. In den anderen Fällen kommt dieselbe Eigenschaft dem Cubus einer solchen rationalen Function von A, B zu, bei welcher die Differenzen der Exponenten von A und B in allen Gliedern bei der Teilung mit 3 denselben Rest lassen.

Nach § 3 haben wir also solche ganze rationale Functionen von A, B zu bilden, deren sämmtliche Werte für $q = 0$ endlich bleiben, und diese Constanten gleich zu setzen. Sind aber n', n'' zwei Primzahlen, so genügt es auch hier, wenn der erste von diesen Werten, derjenige, für welchen

$$U = f(\omega)f(n'\omega)f(n''\omega)f(n'n''\omega)$$

ist, keine negativen Potenzen von q enthält, weil man aus diesem die übrigen ableiten kann, indem man ω ersetzt durch

$$\frac{\omega}{n},\ \frac{\omega}{n'},\ \frac{\omega}{n''} \tag{16}$$

und dann ω noch um ganze Zahlen vermehrt.

Durch sehr einfache Rechnung ergeben sich die folgenden Beispiele:

$$\begin{aligned} n &= 15, & A &= 1, \\ n &= 21, & (A^2 - B)^2 - A &= 0, \\ n &= 33, & A^2 - B - A &= 4, \\ n &= 35, & A^2 - B - A &= 2, \\ n &= 55, & A^3 - B - 4A^2 - A + 4 &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

2.) Ist

$$(n' - 1)(n'' - 1) = 8\mu \equiv 0 \pmod 8, \tag{18}$$

so setzen wir

$$\begin{aligned} A &= \frac{uv}{v'v''} + (-1)^{\mu}\left(\frac{u_1 v_1}{v_1' v_1''} + \frac{u_2 v_2}{v_2' v_2''}\right), \\ B &= \frac{v'v''}{uv} + (-1)^{\mu}\left(\frac{v_1' v_1''}{u_1 v_1} + \frac{v_2' v_2''}{u_2 v_2}\right), \end{aligned} \tag{19}$$

wofür sich wieder die Vertauschungen ergeben

$$\begin{array}{ccc} \omega, & A, & B, \\ -\dfrac{1}{\omega}, & \rho^{1-n'} A, & \rho^{n'-1} B, \\ \omega + 1, & \sigma^{1-n'} e^{-\frac{2\mu\pi i}{3}} A, & \sigma^{n'-1} e^{\frac{2\mu\pi i}{3}} B. \end{array} \tag{20}$$

Auf diese Functionen lässt sich dasselbe Verfahren anwenden wie auf die in 1.) betrachteten, wenn man noch die Beschränkung hinzufügt, dass man nur symmetrische Functionen von A, B, d. h. rationale Functionen von AB, $A + B$ benutzt, weil nur dann aus dem einen Wert einer solchen

Function die sämmtlichen übrigen durch die Vertauschungen (16) hervorgehen. Hier ergeben sich die folgenden Beispiele

$$
(21)\qquad
\begin{aligned}
n &= 15, & AB + 1 &= 0, \\
n &= 35, & 2(A+B) - AB &= 5, \\
n &= 39, & 2(A+B) - AB &= 3.
\end{aligned}
$$

Auch wenn n mehr als zwei Primfactoren enthält, behalten diese Schlüsse mit den nötigen Modificationen ihre Gültigkeit. Ich führe das Beispiel $n = 105$ an, für welches man zu setzen hat:

$$
A = \frac{f(3\omega)f(5\omega)f(7\omega)f(105\omega)}{f(\omega)f(15\omega)f(21\omega)f(35\omega)} + \frac{f_1(3\omega)f_1(5\omega)f_1(7\omega)f_1(105\omega)}{f_1(\omega)f_1(15\omega)f_1(21\omega)f_1(35\omega)}
$$

$$
+ \frac{f_2(3\omega)f_2(5\omega)f_2(7\omega)f_2(105\omega)}{f_2(\omega)f_2(15\omega)f_2(21\omega)f_2(35\omega)},
$$

$$
B = \frac{f(\omega)f(15\omega)f(21\omega)f(35\omega)}{f(3\omega)f(5\omega)f(7\omega)f(105\omega)} + \frac{f_1(\omega)f_1(15\omega)f_1(21\omega)f_1(35\omega)}{f_1(3\omega)f_1(5\omega)f_1(7\omega)f_1(105\omega)}
$$

$$
+ \frac{f_2(\omega)f_2(15\omega)f_2(21\omega)f_2(35\omega)}{f_2(3\omega)f_2(5\omega)f_2(7\omega)f_2(105\omega)},
$$

$$
n = 105;
$$

$$
A^2B^2 - 4(A+B)^3 + 10AB(A+B) + 4(A+B)^2 + 10AB + 14(A+B) + 5 = 0.
$$

II. ABSCHNITT.

Anwendungen auf die complexe Multiplication.

§ 7. *Die singulären Werte von $f(\omega)$.*

Wir setzen nun in die Function $f(\omega)$ für ω einen der complexen Multiplication entsprechenden singulären Wert, d. h. die Wurzel einer quadratischen ganzzahligen Gleichung mit negativer Determinante

$$
(1)\qquad A\omega^2 + 2B\omega + C = 0,
$$

wenn (A, B, C) eine eigentlich primitive quadratische Form der Determinante $-m$, also $A, 2B, C$ ohne gemeinsamen Teiler und

$$(2) \qquad AC - B^2 = m.$$

Nach der Abhandlung I, § 18, ist alsdann

$$(3) \qquad j(\omega) = \frac{(f(\omega)^{24} - 16)^3}{f(\omega)^{24}}$$

eine ganze algebraische Zahl, welche ungeändert bleibt, wenn die Gleichung (1) durch eine äquivalente ersetzt wird, nämlich die Wurzel einer ganzzahligen Gleichung

$$(4) \qquad H(u) = 0,$$

deren Grad gleich ist der Anzahl h der Classen eigentlich primitiver quadratischer Formen der Determinante $-m$.

Es soll nun nachgewiesen werden, dass bei passender Auswahl des Repräsentanten der Classe (1) *dieselbe Eigenschaft den Grössen* $f(\omega)^{24}$, *und wenn* m *durch* 3 *nicht teilbar ist auch* $f(\omega)^8$ *zukommt.*

Die sämmtlichen einander äquivalenten Gleichungen (1), die einer Formenclasse entsprechen, zerfallen nach folgenden Kennzeichen in drei Unterabteilungen

$$(5) \quad m \equiv 1 \pmod 2. \qquad \begin{array}{llll} \text{I.} & A \equiv 1, & B \equiv 0, & C \equiv 1, \\ \text{II.} & A \equiv 1, & B \equiv 1, & C \equiv 0, \pmod 2 \\ \text{III.} & A \equiv 0, & B \equiv 1, & C \equiv 1; \end{array}$$

$$(6) \quad m \equiv 0 \pmod 2. \qquad \begin{array}{llll} \text{I.} & A \equiv 1, & B \equiv 1, & C \equiv 1, \\ \text{II.} & A \equiv 1, & B \equiv 0, & C \equiv 0, \pmod 2 \\ \text{III.} & A \equiv 0, & B \equiv 0, & C \equiv 1. \end{array}$$

Nehmen wir an, (1) gehöre zur ersten dieser Unterabteilungen, so bleibt diese Eigenschaft erhalten, wenn ω ersetzt wird durch

$$\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega},$$

falls

$$(7)\qquad \begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 0 \\ 0, 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0, 1 \\ -1, 0\end{pmatrix} \pmod 2$$

während falls

$$(8)\qquad \begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 0 \\ 1, 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, 1 \\ 1, 0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0, 1 \\ 1, 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, 1 \\ 0, 1\end{pmatrix} \pmod 2$$

(1) aus der Abteilung I in den beiden ersten Fällen nach II, in den beiden letzten nach III gelangt.

Die Function $f(\omega)^{24}$ bleibt aber gleichfalls ungeändert durch die Substitutionen (7), während sie durch die Substitutionen (8) resp. in $-f_1(\omega)^{24}$, $-f_2(\omega)^{24}$ übergeht.

Es ist nun früher bewiesen (§ 2 und Abh. I, § 16), dass die ν Grössen

$$(9)\qquad f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)^r,$$

wenn r ein Teiler von 24, der, falls $n = ad$ durch 3 teilbar ist, selbst durch 3 teilbar sein muss, (bei variablem ω) die Wurzeln einer Transformationsgleichung ν^{ten} Grades sind

$$(10)\qquad \Phi_n\left[f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)^r, f(\omega)^r\right] = 0,$$

und hierin wollen wir $r = 8$, und wenn n durch 3 teilbar ist $= 24$ annehmen.

Damit

$$x = f(\omega)^r$$

die Gleichung

$$(11)\qquad \Phi_n(x, x) = 0$$

befriedige, ist notwendig und hinreichend, dass wenigstens für eine der ν Grössen (9) die Bedingung erfüllt sei

$$(12)\qquad f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)^r = f(\omega)^r,$$

und dafür ist erforderlich und hinreichend (Abh. I, § 6), dass die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sich so bestimmen lassen, dass

$$\frac{c + d\omega}{a} = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{13}$$

dass (nach § 1, 16)

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \equiv \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix} \pmod 2, \tag{14}$$

dass ferner, wenn $r = 8$ ist,

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta^2\gamma \equiv 0 \pmod 3. \tag{15}$$

Genügt nun ω der quadratischen Gleichung (1) so ergiebt sich durch Vergleichung mit (13), wenn x einen unbestimmten ganzzahligen Factor bedeutet:

$$\beta d = Ax,$$
$$\alpha c - \gamma a = Cx,$$
$$\alpha d + \beta c - \delta a = 2Bx.$$

Setzt man also noch

$$-\alpha d + \beta c - \delta a = 2y,$$

so folgt:

$$\beta d = Ax, \qquad \beta c - \delta a = Bx + y,$$
$$\alpha c - \gamma a = Cx, \qquad \alpha d = Bx - y,$$
$$n = mx^2 + y^2. \tag{16}$$

Nimmt man n, A ohne gemeinsamen Teiler an, so muss $d = 1$ sein, und man erhält

$$\begin{aligned} \alpha &= Bx - y, & \beta &= Ax, \\ n\gamma &= -Cx + c(Bx - y), & n\delta &= cAx - Bx - y \end{aligned} \tag{17}$$

woraus man ersieht, dass x, y ohne gemeinsamen Teiler sind; übrigens können bei gegebenem m die Zahlen n, x, y der Bedingung (16) gemäss beliebig sein.

Wir machen nun, je nach dem Verhalten von m gegen den Modul 6 die folgenden Annahmen, worin sich die Werte von x, y als notwendig ergeben:

$$
\begin{array}{llll}
m \equiv 0, & n = m + 9 \equiv 3 \pmod 6, & x = 1, & y = \pm 3, \\
m \equiv 3, & n = m \equiv 3 \pmod 6, & x = 1, & y = 0, \\
m \equiv 1, & n = m + 16 \equiv -1 \pmod 6, & x = 1, & y = \pm 4, \\
m \equiv 2, & n = m + 9 \equiv -1 \pmod 6, & x = 1, & y = \pm 3, \\
m \equiv 4, & n = m + 1 \equiv -1 \pmod 6, & x = 1, & y = \pm 1, \\
m \equiv 5, & n = m \equiv -1 \pmod 6, & x = 1, & y = 0.
\end{array}
$$

Hieraus erkennt man, dass *nur unter der Voraussetzung* (5), (6) I die Zahlen (17) der Bedingung (14) (und zwar der zweiten) genügen.

Da also hiernach von den drei Wurzeln der Gleichung (3)

$$j(\omega) = \frac{(x-16)^3}{x}$$

eine und nur eine der Gleichung (11) (für $r = 24$) genügt, so folgt, wenn wir des kürzeren Ausdrucks halber den in Abhandlung I, § 18, eingeführten Namen »*Classeninvariante*« von $j(\omega)$ auf jede *rationale Function* von $j(\omega)$ übertragen, durch welche auch $j(\omega)$ rational darstellbar ist:

$f(\omega)^{24}$ *ist eine Classeninvariante.*

Ist m durch 3 unteilbar, so erhält, nachdem (5), (6) I festgesetzt ist, $f(\omega)^8$ durch die lineare Transformation $(\omega, \omega + 2\lambda)$ noch drei verschiedene Werte, welche wenn A durch 3 nicht teilbar vorausgesetzt wird, dadurch unterschieden werden können, dass

$$B \equiv 0, 1, 2 \pmod 3; \tag{18}$$

von diesen genügt aber *nur der der ersten Annahme entsprechende* Wert der Bedingung (11).

Es genügt also von den drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - f(\omega)^{24} = 0$$

eine und nur eine der Gleichung (11) (für $r = 8$), und daraus folgt:

Ist m nicht durch 3 teilbar, so ist $f(\omega)^8$ eine Classeninvariante.

Beispiele, wie sie weiter unten folgen, lehren dass in vielen Fällen dieselbe Eigenschaft noch niedrigeren Potenzen von $f(\omega)$ zukommt.[1]

Die Hauptform der Determinante $-m$, $(1, 0, m)$ gehört nur bei ungeradem m in die Unterabteilung I und daher wird nur in diesem Fall $f(\sqrt{-m})^{24}$ oder $f(\sqrt{-m})^8$ Classeninvariante sein. Bei geradem m gehört $(1, 1, m+1)$ oder $(1, 3, m+9)$ zu I und in diesem Fall sind also die Classeninvarianten

$$f(1 + \sqrt{-m})^{24} = - f_1(\sqrt{-m})^{24},$$

oder

$$f(3 + \sqrt{-m})^8 = - f_1(\sqrt{-m})^8.$$

§ 8. *Die Classeninvariante* $\gamma_2(\omega)$.

Aus den soeben bewiesenen Eigenschaften der Zahlen $f(\omega)$ folgt, dass, wenn m nicht durch 3 teilbar ist, auch

$$(1) \qquad \gamma_2(\omega) = \frac{f(\omega)^{24} - 16}{f(\omega)^8}$$

eine Classeninvariante ist, wenn an der Voraussetzung des vorigen Paragraphen, dass $B \equiv 0 \pmod 3$ sei, festgehalten wird. Es lässt sich dies auch auf demselben Wege direct beweisen, da auch zwischen den Functionen

$$(2) \qquad \gamma_2\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), \ \gamma_2(\omega)$$

falls n durch 3 nicht teilbar und c durch 3 teilbar ist, eine Transformationsgleichung besteht.

Dieser directe Weg ist deshalb wichtig, weil er sich auch auf die Classen der zweiten Art anwenden lässt. Genügt nämlich ω einer Gleichung zweiter Art

$$(3) \qquad A\omega^2 + B\omega + C = 0,$$

---

[1] Es lässt sich ähnlich wie oben zeigen, dass, wenn m nicht durch 8 teilbar ist, $f(\omega)^4$ oder $f(\omega)^{12}$ Classeninvariante ist.

worin B ungerade ist, so wird

$$\gamma_2\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)=\gamma_2(\omega) \tag{4}$$

dann und nur dann erfüllt sein, wenn

$$\frac{c+d\omega}{a}=\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}, \qquad \alpha\delta-\beta\gamma=1, \tag{5}$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\delta-\alpha\beta^2\gamma\equiv 0 \pmod 3. \tag{6}$$

Setzt man also, wie oben

$$\begin{gathered}\alpha=\frac{1}{2}(Bx-y), \qquad \beta=Ax,\\ n\gamma=-Cx+\frac{1}{2}c(Bx-y), \qquad n\delta=cAx-\frac{1}{2}(Bx+y),\\ 4n=mx^2+y^2,\end{gathered} \tag{7}$$

nimmt A durch 3 unteilbar an und setzt

wenn $m\equiv+1 \pmod 3$, $n=m+4\equiv-1 \pmod 3$, $x=2$, $y=\pm 4$,

wenn $m\equiv-1 \pmod 3$, $n=m \equiv-1 \pmod 3$, $x=2$, $y=0$,

so folgt wieder, dass die Bedingung (6) nur unter der Voraussetzung

$$B\equiv 0 \pmod 3$$

befriedigt ist, woraus man wie oben schliesst, dass $\gamma_2(\omega)$ einer ganzzahligen Gleichung genügt, deren Grad h' gleich ist der Anzahl der Formenclassen zweiter Art der Determinante $-m$, da diese Eigenschaft nach Abh. I, § 18, für $\gamma_2(\omega)^3$ feststeht.

Diese Bemerkung führt uns zur Aufstellung von Classengleichungen in einigen interessanten Fällen.

Die Determinanten

$$-11, -19, -43, -67, -163$$

haben die Eigenschaft, dass für jede derselben eine Classe der zweiten und drei Classen der ersten Art existieren, dass also die Classeninvarianten zweiter Art, $\gamma_2(\omega)$, *rationale ganze* Zahlen sind.[1] Indem wir die beiden ersten -11, -19 einer anderen Betrachtung vorbehalten, suchen wir diese ganzen Zahlen für $m = 43, 67, 163$ zu bestimmen. Wir haben also

$$\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-43}}{2}\right), \ \gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-67}}{2}\right), \ \gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-163}}{2}\right)$$

zu berechnen.

Hermite hat in der oben citierten Arbeit »*Sur la théorie des équations modulaires*» dieselbe Betrachtung auf die von ihm mit α bezeichnete Grösse angewandt, welche nach unserer Bezeichnung mit

$$-2^{-8} \cdot \gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-m}}{2}\right)^3$$

übereinstimmt, und aus seinem Resultat für $m = 43$ folgt:

$$(8) \qquad -\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-44}}{2}\right) = 960 = 64 \cdot 15.$$

Für die beiden grösseren Zahlen $m = 67$, $m = 163$ lässt sich die Rechnung in einfachster Weise aus der Entwicklung § 2 (3) führen, indem man mit vollständig hinreichender Genauigkeit

$$-\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-m}}{2}\right) = e^{\frac{\pi\sqrt{m}}{3}}$$

setzen und diese Zahl mit siebenstelligen Logarithmen berechnen kann.[2]

Man erhält

$$(9) \qquad -\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-67}}{2}\right) = 5280 = 32 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11,$$

$$(10) \qquad -\gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-163}}{2}\right) = 640320 = 2^6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 667.$$

Die Einfachheit dieser Resultate zeigt sich aber erst, wenn man zu den Functionen $f(\omega)$ übergeht, wobei es keinen wesentlichen Unterschied macht, ob man Formen erster oder zweiter Art zu Grunde legt.

---

[1] Nach der auf Induction gegründeten Vermuthung von Gauss (Disq. Ar. art. 303) sind diese 5 Determinanten die einzigen, welchen diese Eigenschaft zukommt.

[2] Auch für $m = 43$ ergiebt dies Verfahren den Wert 959, 98... also wie oben 960.

Die cubische Gleichung

$$y^3 - \gamma_2(\omega)y - 16 = 0$$

hat nämlich nach § 1 (11) die Wurzeln

$$f(\omega)^8, \; -f_1(\omega)^8, \; -f_2(\omega)^8.$$

Es ist aber nach § 1, (15), (13)

$$-f_2\left(\frac{-3+\sqrt{-m}}{2}\right)^8 = \frac{16}{f(\sqrt{-m})^8},$$

und wenn daher

$$(11) \qquad x = f(\sqrt{-m})$$

gesetzt wird, so ist x^8 Wurzel der cubischen Gleichung

$$(12) \qquad x^{24} + \gamma_2\left(\frac{-3+\sqrt{-m}}{2}\right)x^{16} - 2^8 = 0$$

und zwar die einzige reelle positive Wurzel dieser Gleichung.

Die Gleichung (12) lässt sich aber nun für die Werte (8), (9), (10) von γ_2 in acht rationale Factoren (in Bezug auf x) spalten und man erhält so:

$$(13) \qquad \begin{array}{lll} m = 43, & x^3 - 2x - 2 = 0, & \text{Discriminante } -4.43, \\ m = 67, & x^3 - 2x^2 - 2x - 2 = 0,^1 & \text{Discriminante } -4.67, \\ m = 163, & x^3 - 6x^2 + 4x - 2 = 0, & \text{Discriminante } -4.163. \end{array}$$

Wir wollen die Resultate der beiden letzten Paragraphen noch auf ein anderes Beispiel anwenden, welches ebenfalls eine gewisse allgemeinere Bedeutung hat, auf die Determinante -58. Für diese Determinante existiren zwei Geschlechter quadratischer Formen und in jedem Geschlecht eine Classe. Nach Abhandlung I, § 21 lässt sich also jede Classeninvariante für diese Determinante rational durch $\sqrt{29}$ ausdrücken.[2]

[1] Diese Gleichung lässt sich auch leicht auf algebraischem Wege aus der Modulargleichung für den Transformationsgrad 71 herleiten.

[2] Dass $\sqrt{29}$, nicht $\sqrt{2}$ zu adjungieren ist, zeigt die dortige Formel (17), in welcher $m' = 2$, $m'' = 29$ zu setzen ist. Da in der Teilgleichung i nicht vorkommen kann, so muss zugleich $\sqrt{2}$ heraus fallen.

Nimmt man als Repräsentanten der beiden Classen (1, 0, 58), (2, 0, 29), so kommen diese in den Gruppen II, III (§ 7, 6) vor so dass

$$f_1(\sqrt{-58})^8\,,\quad f_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-58}\right)^8$$

als die beiden Classeninvarianten zu betrachten sind. Es ist daher

$$f_1(\sqrt{-58})^8 = a + b\sqrt{29},$$

(14)
$$f_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-58}\right)^8 = a - b\sqrt{29},$$

(15)
$$a^2 - 29b^2 = 16 \qquad (\S\ 1,\ 15)$$

und a, b sind ganze (positive [1]) Zahlen.

Aus (14) folgt aber

$$2a = f_1(\sqrt{-58})^8 + f_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-58}\right)^8$$

wonach der Wert von $2a$ mit hinlänglicher Genauigkeit durch das erste Glied der Entwicklung

$$e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{58}}$$

dargestellt ist. Es ergiebt sich so

$$a = 2\,.\,727, \qquad b = 2\,.\,135$$

also

$$f_1(\sqrt{-58})^8 = 2(727 + 135\sqrt{29})$$

[1] Aus der Formel (I, § 7, 2)

$$dk^2 = \pi i \vartheta_{00}^4 k^2 k'^2 d\omega$$

folgt, dass wenn $-i\omega$ reell ist, k^2 mit wachsendem $-i\omega$ abnimmt. Es ist also

$$f_1(\omega)^{24} - f_2(\omega)^{24} = \frac{(1-2k^2)(1-k^2k'^2)}{k^2k'^2}$$

positiv, also $f_1(\omega) > f_2(\omega)$ sobald $-i\omega > 1$ und da $f_1(\omega)^{24} = 2^4k'^4 : k^2$ mit wachsendem $-i\omega$ wächst während $f_2(\omega)^{24} = 2^4k^4 : k'^2$ abnimmt, so ist $f_1(\omega) > f_2\left(\frac{1}{2}\omega\right)$ sobald $-i\omega$ den Wert überschritten hat, für welchen $f_1(\omega) = f_2\left(\frac{1}{2}\omega\right)$ ist, d. h. den Wert $\sqrt{2}$.

woraus sich die vierte Wurzel ziehen lässt:

$$(16)\qquad \sqrt{2}f_1(\sqrt{-58})^2 = 5 + \sqrt{29}.$$

§ 9. *Berechnung von Classeninvarianten aus der Transformation erster und zweiter Ordnung.*

Wir benutzen nun die Principien des ersten Abschnitts zur Berechnung von Classeninvarianten, und gehen dabei aus von den Formeln des § 1.

Man erhält zunächst für $m = 1$ und $m = 3$ die beiden Gleichungen

$$\omega = -\frac{1}{\omega}, \qquad \omega = -\frac{1}{\omega + 1}$$

woraus nach (13), (14), (9), (10) § 1 folgt

$$(1)\qquad m = 1, \qquad f(i) = \sqrt[4]{2}, \qquad f_1(i) = f_2(i) = \sqrt[8]{2},$$

$$(2)\qquad m = 3, \qquad f\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) = f_1\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)e^{-\frac{\pi i}{24}}$$

$$= f_2\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)e^{\frac{\pi i}{24}} = \sqrt[6]{2},$$

und nach § 1 (15)

$$(3)\qquad f(\sqrt{-3}) = \sqrt[3]{2}.$$

Aus der Transformation 2^{ter} Ordnung erhält man die Fälle $m = 2$, $m = 7$:

$$\omega = -\frac{2}{\omega}, \qquad \omega = -\frac{2}{\omega + 1},$$

$$(4)\qquad m = 2, \qquad f_1(\sqrt{-2}) = \sqrt[4]{2},$$

$$(5)\qquad m = 7, \qquad f(\sqrt{-7}) = \sqrt{2}, \qquad f\left(\frac{3+\sqrt{-7}}{4}\right) = 1;$$

und durch eine zweimalige Anwendung $m = 15$. Setzt man nämlich

$$\omega = \frac{1+\sqrt{-15}}{2}, \qquad \frac{\omega - 1}{2} = -\frac{2}{\omega},$$

$$(6)\qquad f(\sqrt{-15})f_2(\omega)e^{-\frac{\pi i}{24}} = \sqrt{2}$$

so folgt

$$f\left(\frac{\omega-1}{2}\right)=f\left(\frac{\omega}{2}\right),\qquad f(\omega)f_1\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi i}{24}},$$

$$f_1\left(\frac{\omega-1}{2}\right)=f_2\left(\frac{\omega}{2}\right),\qquad f_1(\omega)f_2\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{2},$$

$$f_2\left(\frac{\omega-1}{2}\right)=f_1\left(\frac{\omega}{2}\right),\qquad f_2(\omega)f\left(\frac{\omega}{2}\right)=e^{\frac{\pi i}{24}}.$$

Eliminiert man aus letzterem System $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $f_1\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $f_2\left(\frac{\omega}{2}\right)$ mittels § 1, (9), (10), so ergiebt sich

$$f_2^{48}+47f_2^{24}+1=0$$

und daraus nach (6)

(7) $\qquad m=15;\qquad f(\sqrt{-15})^3=\sqrt{2}(1+\sqrt{5}).$

Beachtet man, dass von den drei Functionen f^8, f_1^8, f_2^8 nach § 1, (9), (10), zwei durch die dritte mit Hilfe einer quadratischen Gleichung ausgedrückt werden, so lässt sich aus einer bekannten Classeninvariante für die Determinante $-m$ die für die Determinante $-4m$ herleiten, indem man sich, je nachdem m gerade oder ungerade ist, einer der beiden Formeln bedient:

(8) $\qquad 2f_1(2\omega)^8=f_1(\omega)^4[f_1(\omega)^{12}+\sqrt{f_1(\omega)^{24}+64}],$

(9) $\qquad 2f_1(2\omega)^8=f(\omega)^4[f(\omega)^{12}+\sqrt{f(\omega)^{24}-64}].$

Auf diese Weise findet man aus (1), (4), (5), (7) die folgenden Resultate:

(10) $\qquad m=4,\qquad f_1(\sqrt{-4})^8=8.$

(11) $\qquad m=16,\qquad f_1(\sqrt{-16})^8=8\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^2.$

(12) $\qquad m=8,\qquad f_1(\sqrt{-8})^8=8(1+\sqrt{2}).$

(13) $\qquad m=32,\qquad f_1(\sqrt{-32})^8=8x,$

$$x^2-8(1+\sqrt{2})^2x-2(1+\sqrt{2})=0.$$

$$(14) \qquad m = 12, \qquad f_1(\sqrt{-12})^4 = 2\sqrt[6]{2}(1 + \sqrt{3}).$$

$$(15) \qquad m = 28, \qquad f_1(\sqrt{-28})^4 = 2\sqrt{2}(3 + \sqrt{7}).$$

$$(16) \qquad m = 60, \qquad f_1(\sqrt{-60})^4 = \sqrt{2}\sqrt[3]{2(1 + \sqrt{5})^2}(2 + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}).$$

§ 10. *Anwendung der Schläfli'schen Modulargleichungen zur Berechnung von Classeninvarianten.*

Die SCHLÄFLI'schen Modulargleichungen lassen sich in verschiedener Weise zur Aufstellung von Classeninvarianten benutzen. Das nächstliegende ist, dass man einen der bereits bekannten Werte von $f(\sqrt{-m})$ oder $f_1(\sqrt{-m})$ für u oder u_1 in diese Gleichungen einsetzt, wodurch man eine Gleichung für $f(\sqrt{-mn^2})$ oder $f_1(\sqrt{-mn^2})$ erhält, die man noch von überflüssigen Factoren, die sich leicht finden lassen, zu befreien hat.

Auf diese Weise ergiebt sich

$$(1) \qquad m = 9, \qquad f(\sqrt{-9})^3 = \sqrt[4]{2}(1 + \sqrt{3}).$$

$$(2) \qquad m = 25, \qquad f(\sqrt{-25}) = \sqrt[4]{2}^3(1 + \sqrt{5}).$$

$$(3) \qquad m = 49, \qquad \sqrt[4]{2}f(\sqrt{-49}) = x,$$

$$x^2 - (1 + \sqrt{7})x + 1 = 0.$$

$$(4) \qquad m = 18, \qquad f_1(\sqrt{-18})^3 = \sqrt[4]{2}(2 + \sqrt{6}).$$

$$(5) \qquad m = 50, \qquad \sqrt[4]{2}^3 f_1(\sqrt{-50}) = x + \frac{2\sqrt{5}}{x^2 - 1},$$

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0. \qquad \text{Discr.} - 4 \cdot 50.$$ [1]

[1] Die Classengleichung ist hier vom 6ten Grade und lässt sich durch Adjunction von $\sqrt{5}$ in zwei cubische Factoren zerlegen, die man aus obiger Formel leicht durch Elimination ableiten kann. Dass hier, wie in mehreren der folgenden Beispiele die Classeninvariante rational dargestellt ist durch $\sqrt{5}$ und die (einzige reelle) Wurzel einer rationalen cubischen Gleichung ist eine Eigentümlichkeit, die mit der ABEL'schen Natur der Classengleichungen zusammenhängt, worauf ich bei einer nächsten Gelegenheit zurückzukommen hoffe. Diese rationalen cubischen Gleichungen entsprechen den GAUSS'schen Perioden-Gleichungen in der Kreisteilung.

(6) $$m = 27, \qquad f(\sqrt{-27})^3 = 2x,$$
$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0. \qquad \text{Discr.}\ -4.27.$$

(7) $$m = 75, \qquad \sqrt[3]{2}\,f(\sqrt{-75}) = x,$$
$$x^3 - 2x^2 - 2x - 4 = 4\sqrt{5}\,x.$$

(8) $$m = 36, \qquad f_1(\sqrt{-36})^3 = \sqrt[8]{8}\,x,$$
$$x^2 - 4x - 2 = 2\sqrt{3}\,(x + 1).$$

(9) $$m = 100, \qquad x = \sqrt[8]{2}\,f_1(\sqrt{-100}),$$
$$x^2 - x - 1 = \sqrt{5}\,(x + 1).$$

(10) $$m = 63, \qquad f(\sqrt{-63})^3 = \sqrt{2}^3 x,$$
$$x^4 - 8x^3 + x + 1 = 0,$$
$$\sqrt{7}\,(x^2 - x + 1) = \sqrt{3}\,(x^2 + 3x - 1).$$

(11) $$m = 175, \qquad f(\sqrt{-175}) = \sqrt{2}\,x,$$
$$x^6 - 4x^5 + x + 1,$$
$$2x^3 - 4x^2 + x - 3 = \sqrt{5}\,(2x^2 - x + 1).$$

Wenn man sodann in den SCHLÄFLI'schen Modulargleichungen für den n^{ten} Transformationsgrad $\omega = \sqrt{-n}$ setzt, so wird

$$f(\omega) = f\left(\frac{\omega'}{n}\right) = f(\sqrt{-n})$$

und man hat $u = v$ und mithin $A = 2$ zu setzen. Auch hier findet man leicht die abzusondernden Factoren.

(12) $$m = 5, \qquad f(\sqrt{-5})^4 = 1 + \sqrt{5}.$$

(13) $$m = 11, \qquad f(\sqrt{-11}) = x,$$
$$x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0. \qquad \text{Discr.}\ -4.11.$$

(14) $$m = 13, \qquad f(\sqrt{-13})^4 = 3 + \sqrt{13}.$$

(15) $\qquad m = 17, \qquad f(\sqrt{-17})^2 = \sqrt{2}x,$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

(16) $\qquad m = 19, \qquad f(\sqrt{-19}) = x,$

$$x^3 - 2x - 2 = 0. \qquad \text{Discr.} - 4 . 19.$$

Ein drittes Verfahren, die SCHLÄFLI'schen Gleichungen unserer Aufgabe nutzbar zu machen, ist das folgende:

Setzen wir in der zum Transformationsgrad n gehörigen Modulargleichung für ω die Wurzel der quadratischen Gleichung

(17) $$2\omega^2 + 2r\omega + n = 0,$$

worin r eine ganze Zahl bedeutet, also

(18) $$2\omega + 2r = -\frac{n}{\omega},$$

$$\omega = \frac{-r + \sqrt{-m}}{2},$$

(19) $$m = 2n - r^2,$$

so ist (nach § 1, 15)

(20) $$f_2(\omega) f_1(2\omega + 2r) = e^{-\frac{r\pi i}{12}} \sqrt{2},$$

also nach (18)

(21) $$f_2(\omega) f_2\left(\frac{\omega}{n}\right) = \sqrt{2}\, e^{-\frac{r\pi i}{12}}.$$

(22) $$f_2(\omega) = \frac{\sqrt{2}\, e^{-\frac{r\pi i}{24}}}{f(\sqrt{-m})}, \quad r \text{ ungerade},$$

$$= \frac{\sqrt{2}\, e^{-\frac{r\pi i}{24}}}{f_1(\sqrt{-m})}, \quad r \text{ gerade}.$$

Demnach hat man in dem zweiten System § 4 zu setzen

$$(23) \qquad u_1 v_1 = \sqrt{2}\, e^{-\frac{r\pi i}{12}},$$

$$(24) \qquad u_1 = \frac{\sqrt{2}\, e^{-\frac{r\pi i}{24}}}{x}, \qquad v_1 = e^{-\frac{r\pi i}{24}} x,$$

$$x = f(\sqrt{-m}),\ f_1(\sqrt{-m})$$

je nachdem r und damit zugleich m ungerade oder gerade ist.

Nach (19) ergeben sich für m folgende Werte

$n = 3, \qquad m = 6,\ 5,\ 2,$

$n = 5, \qquad m = 10,\ 9,\ 6,\ 1,$

$n = 7, \qquad m = 14,\ 13,\ 10,\ 5,$

$n = 11, \qquad m = 22,\ 21,\ 18,\ 13,\ 6,$

$n = 13, \qquad m = 26,\ 25,\ 22,\ 17,\ 10,\ 1,$

$n = 17, \qquad m = 34,\ 33,\ 30,\ 25,\ 18,\ 9,$

$n = 19, \qquad m = 38,\ 37,\ 34,\ 29,\ 22,\ 13,\ 2.$

Wir leiten aus dieser Quelle nur die Formeln für die in dem Obigen noch nicht enthaltenen Fälle her, wobei die schon bekannten oder mehrfach auftretenden Werte zur Erleichterung der Auffindung der Factoren dienen.

$$(25) \qquad m = 6, \qquad f_1(\sqrt{-6})^6 = 4 + 2\sqrt{2},$$

$$(26) \qquad m = 10, \qquad \sqrt{2}\, f_1(\sqrt{-10})^2 = 1 + \sqrt{5}.$$

$$(27) \qquad m = 14, \qquad f_1(\sqrt{-14})^2 = \sqrt{2}\, x,$$

$$x + \frac{1}{x} = 1 + \sqrt{2}.$$

$$(28) \qquad m = 21, \qquad 2 f(\sqrt{-21})^{12} = (\sqrt{3} + \sqrt{7})^3 (3 + \sqrt{7})^2.$$

$$(29) \qquad m = 22, \qquad f_1(\sqrt{-22})^2 = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}).$$

(30) $$m = 26, \qquad f_1(\sqrt{-26})^2 = x + \frac{2\sqrt{13}}{x^2 - 3},$$

$$x^3 - 2x^2 + x - 4 = 0. \qquad \text{Discr.} - 16.26.$$

(31) $$m = 30, \qquad f_1(\sqrt{-30})^6 = 2\sqrt{2}(3 + \sqrt{10})(2 + \sqrt{5}).$$

(32) $$m = 33, \qquad \sqrt{2}f(\sqrt{-33})^6 = (3 + \sqrt{11})(1 + \sqrt{3})^3.$$

(33) $$m = 34, \qquad f_1(\sqrt{-34})^2 = \sqrt{2}x,$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}.$$

(34) $$m = 29, \qquad f(\sqrt{-29})^4 = 2x,$$

$$2x^3 - 9x^2 - 8x - 5 = \sqrt{29}(x + 1)^2.$$

(35) $$m = 37, \qquad f(\sqrt{-37})^4 = 12 + 2\sqrt{37}.$$

(36) $$m = 38, \qquad f_1(\sqrt{-38})^4 = \sqrt{2}x,$$

$$(x^3 - 8x^2 + 16x - 8) = \sqrt{2}(8x^2 - 8x + 6).$$

Die gefundenen Resultate lassen sich wieder mit der Transformation zweiter Ordnung verbinden, und man erhält so z. B. noch aus (12), (14), (25)

(37) $$m = 20, \qquad f_1(\sqrt{-20})^4 = 2\sqrt{2}x,$$

$$x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}(2x + 1).$$

(38) $$m = 52, \qquad f_1(\sqrt{-52})^4 = 2\sqrt{2}x,$$

$$x^2 - 2(4 + \sqrt{13})x - \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 0.$$

(39) $$m = 24, \qquad f_1(\sqrt{-24})^{24} = 2^9(1 + \sqrt{2})^2(2 + \sqrt{3})^3(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3.$$

Endlich lassen sich auch noch zwei der Schläfli'schen Modulargleichungen mit einander combinieren und durch Elimination neue Resultate herleiten. Wir geben zwei verschiedene Beispiele der Combination der Modulargleichungen für den 5^{ten} und den 11^{ten} Transformationsgrad mit sich selbst, wodurch wir die Classeninvarianten für die Determinanten -41, -105 erhalten, von denen die erste zwei Geschlechter mit je vier Classen, die zweite acht Geschlechter mit je einer Classe hat, und welche beide als erste ihrer Art von Interesse sind.

Nehmen wir zunächst

$$(40)\qquad 10\omega^2 + 6\omega + 5 = 0, \qquad 10\omega = -3 + \sqrt{-41},$$

$$f_2\left(\frac{\omega}{5}\right) = f_1[2(5\omega + 3)] = e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{\sqrt{2}}{f_2(5\omega)},$$

$$f_2\left(\frac{\omega}{5}\right) = f_1(10\omega + 6) = e^{-\frac{\pi i}{8}} f(\sqrt{-41}), \qquad f_2(5\omega) = e^{-\frac{\pi i}{8}} \frac{\sqrt{2}}{f(\sqrt{-41})}.$$

Hiernach ergeben sich aus der Modulargleichung für den 5^{ten} Grad (§ 4, II) zwei Gleichungen, die sich mit Benutzung der Bezeichnung

$$f(\sqrt{-41}) = f(\omega) e^{\frac{5\pi i}{8}} \eta, \qquad f(\sqrt{-41}) f(\omega) e^{\frac{5\pi i}{8}} = \sqrt{2}\,\xi,$$

so schreiben lassen:

$$\xi^3 + \frac{1}{\xi^3} + 2\left(\eta^2 - \frac{1}{\eta^2}\right) = 0,$$

$$\eta^3 + \frac{1}{\eta^3} + 2\left(\xi^2 - \frac{1}{\xi^2}\right) = 0.$$

Durch Addition und Subtraction erhält man hieraus zwei Gleichungen, welche nach Beseitigung des Factors $\xi - \eta$ (der zu den Determinanten -1, -25 gehört) nur noch von $\xi + \eta$ und $\xi\eta$ abhängen.

Die Elimination von $\xi + \eta$ liefert, wenn wir

$$\sqrt{2}\,\xi\eta = \sqrt{2}\,x = f(\sqrt{-41})^2, \qquad x + \frac{1}{x} = z$$

setzen, die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= z^6 - 9z^5 + 20z^4 + 6z^3 - 19z^2 - 17z - 6 \\ &= (z^2 - 4z - 3)(z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 3z + 2). \end{aligned}$$

Der erste Factor, der als zur Determinante -49 gehörig, von vorn herein bekannt ist, wird abgeworfen, und der zweite liefert die gesuchte Gleichung, welche in Bezug auf x vom 8^{ten} Grade ist, und sich durch Adjunction von $\sqrt{41}$ zerlegen lässt. Man erhält so

$$(41) \qquad m = 41, \qquad 2z^2 - 5z + 7 = \sqrt{41}(z - 1).$$

Es genüge zweitens ω der Gleichung

$$(42) \qquad 11\omega^2 + 8\omega + 11 = 0,$$

also

$$11\omega + 8 = -\frac{11}{\omega}, \qquad 11\omega = -4 + \sqrt{-105}.$$

Demnach, wenn

$$f(\sqrt{-105}) = x$$

gesetzt wird

$$f(11\omega) = e^{\frac{\pi i}{6}} x, \qquad f\left(\frac{\omega}{11}\right) = e^{-\frac{\pi i}{6}} x,$$

und diese beiden Grössen sind, wenn $u = f(\omega)$ ist, Wurzeln der Modulargleichung für den 11^{ten} Transformationsgrad. (§ 4, I.)

Setzt man $ux = \xi$, $x:u = \eta$ so folgt

$$A = -\left(\eta^6 + \frac{1}{\eta^6}\right), \qquad B = e^{\pm\frac{\pi i}{6}}\xi - \frac{2e^{\mp\frac{\pi i}{6}}}{\xi},$$

so dass man durch Benutzung beider Zeichen für ξ, η zwei Gleichungen erhält. Durch Elimination von A und Fortheben des Factors

$$\xi + \frac{2}{\xi}$$

findet sich

$$\xi^4 + \frac{16}{\xi^4} - 24\left(\xi^2 + \frac{4}{\xi^2}\right) + 92 = 0,$$

woraus

$$\xi^2 = (2 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{5}) = \frac{(1 + \sqrt{3})^2(1 + \sqrt{5})^2}{4}.$$

Für η findet man sodann

$$\eta^6 + \frac{1}{\eta^6} = 660 + 168\sqrt{15},$$

woraus leicht folgt:

$$(43)\quad m = 105, \quad 64\sqrt{2}f(\sqrt{-105})^6 = (1+\sqrt{3})^3(1+\sqrt{5})^3(\sqrt{3}+\sqrt{7})^3(\sqrt{5}+\sqrt{7}).$$

Die Richtigkeit der Vorzeichen ergiebt sich durch die Vergleichung der numerischen Werte.

§ 11. *Anwendung der irrationalen Modulargleichungen zur Berechnung von Classeninvarianten.*

Genau in derselben Weise lassen sich die in § 5, § 6 abgeleiteten irrationalen Formen der Modulargleichungen anwenden und führen zum Teil in ausserordentlich einfacher Weise zum Ziele. Wenn wir zunächst in den Formeln (4) § 5 $\omega = \sqrt{-n}$ setzen, so wird

$$2A = f(\omega)^2 + (-1)^{\frac{n+1}{8}} \frac{2\sqrt{2}}{f(\omega)}, \qquad B = 2\sqrt{2}f(\omega) + (-1)^{\frac{n+1}{8}} \frac{2}{f(\omega)^2}$$

oder für

$$f(\omega) = \sqrt{2}x,$$

$$A = \frac{x^3 + (-1)^{\frac{n+1}{8}}}{x}, \qquad B = \frac{4x^3 + (-1)^{\frac{n+1}{8}}}{x^2},$$

und dies ist in die Formeln (6) § 5 einzusetzen. Für $n = 31$ erhält man zunächst eine Gleichung 3^{ten} Grades in x^3, aus der sich durch Factorenzerfällung eine einfachere für x selbst herleiten lässt. Bei $n = 47$, $n = 71$ hat man bezügl. die Factoren x, $(x+1)^2$ abzusondern und findet so:

$$(1)\quad n = 23, \quad f(\sqrt{-23}) = \sqrt{2}x, \quad x^3 - x - 1 = 0.$$

$$(2)\quad n = 31, \quad f(\sqrt{-31}) = \sqrt{2}x, \quad x^3 - x^2 - 1 = 0.$$

$$(3)\quad n = 47, \quad f(\sqrt{-47}) = \sqrt{2}x, \quad x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0.$$

$$(4)\quad n = 71, \quad f(\sqrt{-71}) = \sqrt{2}x, \quad x^7 - 2x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0.$$

Ebenso lässt sich auch das dritte Verfahren des vorigen Paragraphen hier anwenden, indem man von den Formeln (17), (18), (19) Gebrauch macht. Man erhält aber dann nicht unmittelbar Gleichungen für eine der Functionen f selbst, sondern Relationen zwischen mehreren derselben, aus denen die einfachen Gleichungen erst durch Elimination herzustellen sind. Aus der für $n = 23$ gültigen Modulargleichung erhält man so z. B., wenn ω der Gleichung genügt:

$$2\omega^2 + 2r\omega + 23 = 0,$$

$$f(\omega)f(2\omega + 2r) - f_1(\omega)f_2(2\omega + 2r) = 2 + \sqrt{2}e^{-\frac{r\pi i}{12}},$$

und die Rechnung für $r = 0$, $r = 1$, $r = 2$ ergiebt

(5) $\quad m = 42, \qquad 2\sqrt{2}f_1(\sqrt{-42})^6 = (2\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{7})^3.$

(6) $\quad m = 45, \qquad f(\sqrt{-45})^{12} = 8(2 + \sqrt{5})^3(4 + \sqrt{15})^2.$

(7) $\quad m = 46, \qquad f_1(\sqrt{-46})^2 = \sqrt{2}x,$

$$x + \frac{1}{x} = 3 + \sqrt{2}.$$

In ähnlicher Weise findet man aus der Modulargleichung für $n = 19$ (§ 5, 10) eine einfachere Form der Darstellung für $m = 38$. Setzt man

$$4x = f(\sqrt{-38})^2 f\left(\sqrt{\frac{-19}{2}}\right)^2 - f_2(\sqrt{-38})^2 f_1\left(\sqrt{\frac{-19}{2}}\right)^2 - 2$$

so ergiebt sich

$$A = x, \qquad B = 8x + 6$$

und, nach Absonderung des Factors $x^2 + x + 3$:

(8) $\quad x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0, \qquad$ Discr. $-4 \cdot 38,$

während $f_1(\sqrt{-38})^2$ sich so durch x ausdrücken lässt:

(9) $\quad \sqrt{2}f_1(\sqrt{-38})^2 = x + 1 - \sqrt{2}\frac{x-3}{x-2}.$ [1]

Es sollen endlich noch für $m = 35, 39, 55$ die Modulargleichungen (17), (21), § 6, verwendet werden. Setzen wir

$$x = f(\sqrt{-35}), \qquad x' = f\left(\sqrt{\frac{-7}{5}}\right), \qquad xx' = y, \qquad \frac{x^2 + x'^2}{xx'} = z,$$

[1] Man vgl. die Anmerkung zu § 10 (5).

so ergiebt sich aus (17), (21)

(10) $$y^3 - 2y^2 - 4 = 0. \qquad \text{Discr.} \; -16.35.$$

(11) $$z^3 + z^2 - 5z - 7 = 0. \qquad \text{Discr.} \; -4.35.$$

Die zweite dieser Gleichungen geht in die erste über durch die Substitution

(12) $$y = z^2 - 3,$$

wodurch, da die Gleichungen beide nur eine reelle Wurzel haben, y rational durch z ausgedrückt ist.

Ebenso ist

(13) $$2(z + 1) = y^2,$$

wonach man nach Adjunction von $\sqrt{5}$ auch x rational durch y ausdrücken kann:

$$4f(\sqrt{-35}) = y^2 + \frac{4\sqrt{5}}{y + 2}.$$ [1]

Für $m = 39$ ergiebt die Gleichung (21) § 6, wenn

$$x = f(\sqrt{-39}), \qquad x' = f\left(\sqrt{\frac{-3}{13}}\right), \qquad \frac{x^2 + x'^2}{xx'} = z, \qquad x^3 x'^3 = y$$

gesetzt wird, nach Abwerfung des Factors $z + 2$

(15) $$z^2 - z - 3 = 0, \qquad z = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Die Gleichung für xx' erhält man aus der Transformation 3^{ter} Ordnung: (§ 4, I, mit Benutzung von 15)

$$\frac{x^{12} + x'^{12}}{x^6 x'^6} + \frac{8}{y} - y = 0,$$

woraus

$$y = 4(3 + \sqrt{13}).$$

---

[1] Aus dem 71^{ten} Transformationsgrad erhält man direct für $x = f(\sqrt{-35})$ die Gleichung $x^3 - 2 = (1 + \sqrt{5})(x^2 - x)$.

Setzt man schliesslich

(16) $$f(\sqrt{-39})^3 = \sqrt{2}^3 x$$

so ergiebt sich für x die quadratische Gleichung:

(17) $$x^2 - \frac{3+\sqrt{13}}{2}(x+1) = 0.$$

Für $m = 55$ setzen wir

$$f(\sqrt{-55})f\left(\sqrt{\frac{-11}{5}}\right) = z$$

und erhalten aus (17), § 6

$$A = \frac{z^3-4}{2z}, \qquad B = \frac{4(z^3-4)}{z^2},$$

$$0 = z^9 - 8z^7 - 12z^6 - 4z^5 + 32z^4 + 80z^3 + 16z^2 - 96z - 64$$
$$= (z^2 - 2z - 4)(z^2 - 2)^2(z^3 + 2z^2 + 4z + 4).$$

Der letzte Factor (der zur Determinante -11 gehört) hat hier keine positive Wurzel, und da z^2 nicht $= 2$ ist, so muss

$$z^2 - 2z - 4 = 0, \qquad z = 1 + \sqrt{5}$$

sein. Setzt man

(18) $$\sqrt{2}x = f(\sqrt{-55}), \qquad \sqrt{2}x' = f\left(\sqrt{\frac{-11}{5}}\right)$$

so liefert noch die Transformation fünfter Ordnung

$$x^6 + x'^6 = \frac{43 + 19\sqrt{5}}{2}$$

und daraus

$$x^2 + x'^2 = 2 + \sqrt{5}, \qquad x - x' = 1,$$

also

(19) $$x^2 - x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

§ 12. *Die Multiplicatorgleichungen.*

In der Abhandlung I, § 15, sind aus dem Teilungsproblem der elliptischen Functionen zwei Arten von Transformationsgleichungen abgeleitet, die sich dadurch unterscheiden, dass die Wurzeln der einen aus geraden, die der anderen aus ungeraden elliptischen Functionen der Periodenteile zusammengesetzt sind. Die ersten heissen *Modulargleichungen,* die anderen *Multiplicatorgleichungen.*

Die letzteren gestatten eine wesentliche Vereinfachung im Falle eines quadratischen Transformationsgrades.[1] Diese Multiplicatorgleichungen, welche in umfassender Weise von Kiepert studiert sind,[2] zeigen in ihren Zahlencoëfficienten nicht die Einfachheit wie die Schläfli'schen oder die irrationalen Modulargleichungen, so dass diese für die practischen Rechnungen, die sich auf die complexe Multiplication beziehen, geeigneter sind. Nur in dem Fall eines quadratischen Transformationsgrades ist in Vergleich zur Höhe des Transformationsgrades die Einfachheit der Multiplicatorgleichung eine genügende um mit Vorteil hier verwandt zu werden. Ich gehe hier um so lieber auf das Beispiel des 25^{ten} Transformationsgrades ein, weil dasselbe eine unmittelbare Anwendung der allgemeinen Methode liefert, durch welche ich im § 21 der Abhandlung I die Zerfällung der Classengleichungen in Factoren nachgewiesen habe.

Nach § 16 der Abhandlung I sind die ν Grössen

$$(1) \qquad \left(\frac{c}{e}\right) i^{\frac{a-1}{2}} \sqrt{d}\, \frac{\eta\left(\dfrac{c+d\omega}{a}\right)}{\eta(\omega)} = t,$$

falls $ad = n$ eine durch 2 und 3 nicht teilbare Quadratzahl, $c \equiv 0 \pmod{24}$ und e der grösste gemeinschaftliche Teiler von a, d ist, die Wurzeln

---

[1] Diese Vereinfachung der Multiplicatorgleichung im Falle eines quadratischen Transformationsgrades hat zuerst Joubert nachgewiesen: *Sur les équations, qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques*, Paris 1876.

[2] Besonders in der Abhandlung *Über die Transformation der elliptischen Functionen,* Mathematische Annalen, Bd. 26.

einer Gleichung ν^{ten} Grades, welche rational von $j(\omega)$ abhängt. Ist $n = 25$ so lässt sich dieser Gleichung die folgende einfache Form geben[1]

$$j(\omega) = \frac{(\chi^2 + 10\chi + 5)^3}{\chi}, \tag{2}$$

wenn zur Abkürzung

$$\chi = t^5 + 5t^4 + 15t^3 + 25t^2 + 25 \tag{3}$$

$$= t^3 \left\{ \left(t + \frac{5}{t}\right)^2 + 5\left(t + \frac{5}{t}\right) + 5 \right\}$$

gesetzt wird.

Es sei nun r eine ungerade Zahl und ω Wurzel der quadratischen Gleichung (zweiter Art)

$$\omega^2 + r\omega + 25 = 0, \tag{4}$$

$$\omega = \frac{-r + \sqrt{-m}}{2}, \qquad m = 100 - r^2, \tag{5}$$

so ist, wenn c aus der Congruenz

$$c \equiv r \pmod{25}, \qquad c - r \equiv -25r \pmod{24} \tag{6}$$

bestimmt wird,

$$\frac{c + \omega}{25} = \frac{c - r}{25} - \frac{1}{\omega} \tag{7}$$

und es wird daher für den Wert (5) von ω eine Wurzel der Gleichung (2)

$$t = \frac{\eta\left(\frac{c - r}{25} - \frac{1}{\omega}\right)}{\eta(\omega)} = e^{-\frac{\pi i}{12} r} \sqrt{-i\omega} \tag{8}$$

worin die $\sqrt{-i\omega}$ mit positivem reellen Teil zu nehmen ist. (Abh. I, § 5.)

---

[1] Vgl. T. Gierster, *Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad,* Math. Annalen, Bd. **14** und Kiepert l. c.

Wir betrachten die Werte $r = 1, 3, 7$ und erhalten

$$r = 1, \qquad m = 99, \qquad t = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi i}{3}} (3 + i\sqrt{11}),$$

$$r = 3, \qquad m = 91, \qquad t = \frac{1}{2} (\sqrt{13} - i\sqrt{7}),$$

$$r = 7, \qquad m = 51, \qquad t = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi i}{3}} (\sqrt{17} - i\sqrt{3})$$

und hiernach lässt sich aus (2) $j(\omega)$ berechnen, welches für $r = 3$ ein Cubus wird.

Auf diese Weise berechnet man ziemlich einfach die folgenden Zahlen

$$\gamma_2\left(\frac{-3 + \sqrt{-91}}{2}\right) = -48(227 + 63\sqrt{13}),$$

$$(9) \qquad j\left(\frac{-7 + \sqrt{-51}}{2}\right) = -2^{14}.27(6263 + 1519\sqrt{17}),$$

$$j\left(\frac{-1 + \sqrt{-99}}{2}\right) = -2^{12}(4591804316 + 799330532\sqrt{33}).$$

Von diesen Werten gelangt man zu den viel einfacheren Gleichungen für die Grössen $f(\sqrt{-m})$ in derselben Weise wie in § 8.

Es ist nämlich nach § 1

$$f_2\left(\frac{-r + \sqrt{-m}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{r\pi i}{24}}}{f(\sqrt{-m})},$$

$$\gamma_2\left(\frac{-r + \sqrt{-m}}{2}\right) e^{-\frac{r\pi i}{3}} = \frac{f(\sqrt{-m})^{24} - 16^2}{f(\sqrt{-m})^{16}}.$$

Setzt man also für $r = 3$

$$f(\sqrt{-m}) = x$$

so ergiebt sich für x die Gleichung

$$(10) \qquad x^{24} + \gamma_2(\omega) x^{16} - 16^2 = 0;$$

und wenn man für $r = 7, 1$

$$f(\sqrt{-m})^3 = 2x$$

setzt, so folgt für diese beiden Fälle:

$$x^{24} - [3 - 2^{-8}j(\omega)]x^{16} + 3x^8 - 1 = 0 \tag{11}$$

und in (10) und (11) hat man für $\gamma_2(\omega)$ und $j(\omega)$ die Werte (9) einzusetzen. Jede dieser Gleichungen lässt sich aber successive in zwei in Bezug auf x^4, x^2, x rationale cubische Gleichungen zerfällen wie man leicht findet und noch leichter nachträglich verificiert. Man erhält so die Classengleichungen:

$$m = 51, \qquad f(\sqrt{-51})^3 = 2x,$$
$$x^3 - (4 + \sqrt{17})x^2 - x - 1 = 0.$$

$$m = 91, \qquad f(\sqrt{-91}) = x,$$
$$x^3 - 2x^2 - (1 + \sqrt{13})x - 2 = 0.$$

$$m = 99, \qquad f(\sqrt{-99})^3 = 2x,$$
$$x^3 - (13 + 2\sqrt{33})x^2 - (4 + \sqrt{33})x - 1 = 0.$$

§ 12. *Zusammenstellung.*

Zur bequemeren Übersicht sollen hier noch einmal die die complexe Multiplication betreffenden Resultate zusammengestellt werden, und zwar geordnet nach der von GAUSS gegebenen Einteilung (Disq. ar. art. 303; vgl. auch die in Bd. 2 von GAUSS Werken aus dem Nachlass herausgegebene Tafel der Classenzahlen), so dass die römische Ziffer die Anzahl der Genera, die arabische Ziffer die Anzahl der in einem Genus enthaltenen Classen quadratischer Formen von der Determinante $-m$ angiebt. Die Fälle $m = 40, 48, 72, 88, 112, 232$, die nach den Formeln (8), (9), § 9, aus den Fällen $m = 10, 12, 18, 22, 28, 58$ leicht zu berechnen sind, welchen die Classification IV, 1 zukommt, sind hier noch beigefügt. Es ist bemerkenswert, dass die Fälle I, 1; I, 3; II, 1 erschöpft sind, wenigstens wenn die von GAUSS (Disq. ar. l. c.) auf eine weitgehende Induction gegründete Vermuthung richtig ist.[1]

[1] Vgl. auch JOUBERT, Comptes rendus, t. 50, 1860.

$$\text{I, 1.}\qquad f(\sqrt{-1}) = \sqrt[4]{2},$$
$$f_1(\sqrt{-2}) = \sqrt[4]{2},$$
$$f(\sqrt{-3}) = \sqrt[3]{2},$$
$$f_1(\sqrt{-4}) = \sqrt[8]{8},$$
$$f(\sqrt{-7}) = \sqrt{2}.$$

$$\text{I, 3.}\qquad f(\sqrt{-11}) = x, \qquad x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0,$$
$$f(\sqrt{-19}) = x, \qquad x^3 - 2x - 2 = 0,$$
$$f(\sqrt{-23}) = \sqrt{2}x, \qquad x^3 - x - 1 = 0,$$
$$f(\sqrt{-27})^3 = 2x, \qquad x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0,$$
$$f(\sqrt{-31}) = \sqrt{2}x, \qquad x^3 - x^2 - 1 = 0,$$
$$f(\sqrt{-43}) = x, \qquad x^3 - 2x - 2 = 0,$$
$$f(\sqrt{-67}) = x, \qquad x^3 - 2x^2 - 2x - 2 = 0,$$
$$f(\sqrt{-163}) = x, \qquad x^3 - 6x^2 + 4x - 2 = 0.$$

$$\text{I, 5.}\qquad f(\sqrt{-47}) = \sqrt{2}x, \qquad x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0.$$

$$\text{I, 7.}\qquad f(\sqrt{-71}) = \sqrt{2}x, \qquad x^7 - 2x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0.$$

$$\text{II, 1.}\qquad f(\sqrt{-5})^4 = 1 + \sqrt{5},$$
$$f_1(\sqrt{-6})^6 = 4 + 2\sqrt{2},$$
$$f_1(\sqrt{-8})^8 = 8(1 + \sqrt{2}),$$
$$f(\sqrt{-9})^3 = \sqrt[4]{2}(1 + \sqrt{3}),$$
$$\sqrt{2}f_1(\sqrt{-10})^2 = 1 + \sqrt{5},$$
$$f_1(\sqrt{-12})^4 = 2\sqrt[6]{2}(1 + \sqrt{3}),$$
$$f(\sqrt{-13})^4 = 3 + \sqrt{13},$$
$$f(\sqrt{-15})^3 = \sqrt{2}(1 + \sqrt{5}),$$
$$f_1(\sqrt{-16})^4 = 2\sqrt[4]{8}(1 + \sqrt{2}),$$

$$f_1(\sqrt{-18})^3 = \sqrt[4]{2}(2 + \sqrt{6}),$$
$$f_1(\sqrt{-22})^2 = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}),$$
$$\sqrt[4]{8}f(\sqrt{-25}) = (1 + \sqrt{5}),$$
$$f_1(\sqrt{-28})^4 = 2\sqrt{2}(3 + \sqrt{7}),$$
$$f(\sqrt{-37})^4 = 2(6 + \sqrt{37}),$$
$$\sqrt{2}f_1(\sqrt{-58})^2 = 5 + \sqrt{29}.$$

II, 2.

$$f_1(\sqrt{-14})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x + \frac{1}{x} = 1 + \sqrt{2},$$
$$f(\sqrt{-17})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x + \frac{1}{x} = \frac{1 + \sqrt{17}}{2},$$
$$f_1(\sqrt{-20})^4 = 2\sqrt{2}x, \qquad x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}(2x + 1),$$
$$f_1(\sqrt{-32})^8 = 8x, \qquad x^2 - 8(1 + \sqrt{2})^2 x - 2(1 + \sqrt{2}) = 0,$$
$$f_1(\sqrt{-34})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x + \frac{1}{x} = \frac{3 + \sqrt{17}}{2},$$
$$f_1(\sqrt{-36})^3 = \sqrt[8]{8}x, \qquad x^2 - 4x - 2 = 2\sqrt{3}(x + 1),$$
$$f(\sqrt{-39})^3 = \sqrt{8}x, \qquad x^2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}(x + 1),$$
$$f_1(\sqrt{-46})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x + \frac{1}{x} = 3 + \sqrt{2},$$
$$f(\sqrt{-49})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x + \frac{1}{x} = 2 + \sqrt{7}$$

oder

$$\sqrt[4]{2}f(\sqrt{-49}) = x, \qquad x + \frac{2}{x} = 1 + \sqrt{7},$$
$$f_1(\sqrt{-52})^4 = 2\sqrt{2}x, \qquad x^2 - 2(4 + \sqrt{13})x - \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 0,$$
$$f(\sqrt{-55}) = \sqrt{2}x, \qquad x^2 - x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$
$$f(\sqrt{-63})^3 = \sqrt{8}x, \qquad \sqrt{7}(x^2 - x + 1) = \sqrt{3}(x^2 + 3x - 1),$$
$$\sqrt[8]{2}f_1(\sqrt{-100}) = x, \qquad x^2 - x - 1 = \sqrt{5}(x + 1).$$

II, 3. $\sqrt{2}f_1(\sqrt{-26})^2 = x + \frac{2\sqrt{13}}{x^2-3}$, $x^3 - 2x^2 + x - 4 = 0$,

oder

$$f_1(\sqrt{-26})^2 = \sqrt{2}x, \qquad x^3 - x^2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}(x+1),$$

$$f(\sqrt{-29})^4 = 2x, \qquad 2x^3 - 9x^2 - 8x - 5 = \sqrt{29}(x+1)^2,$$

$$4f(\sqrt{-35}) = x^2 + \frac{4\sqrt{5}}{x+2}, \qquad x^3 - 2x^2 - 4 = 0,$$

oder

$$f(\sqrt{-35}) = x, \qquad x^3 - 2 = (1+\sqrt{5})(x^2 - x),$$

$$f_1(\sqrt{-38})^4 = \sqrt{2}x, \qquad x^3 - 8x^2 + 16x - 8 = \sqrt{2}(8x^2 - 8x + 6),$$

oder

$$\sqrt{2}f_1(\sqrt{-38})^2 = x + 1 - \sqrt{2}\frac{x-3}{x-2}, \qquad x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0,$$

$$\sqrt[4]{8}f_1(\sqrt{-50}) = x + \frac{2\sqrt{5}}{x^2-1}, \qquad x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0,$$

oder

$$f_1(\sqrt{-50}) = \sqrt[4]{2}x, \qquad x^3 - x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(x+1),$$

$$f(\sqrt{-51})^3 = 2x, \qquad x^3 - 4x^2 - x - 1 = \sqrt{17}x^2,$$

$$\sqrt[3]{2}f(\sqrt{-75}) = x, \qquad x^3 - 2x^2 - 2x - 4 = 4\sqrt{5}x,$$

$$f(\sqrt{-91}) = x, \qquad x^3 - 2x^2 - x - 2 = \sqrt{13}x,$$

$$f(\sqrt{-99})^3 = 2x, \qquad x^3 - 13x^2 - 4x - 1 = \sqrt{33}(2x^2 + x),$$

$$f(\sqrt{-175}) = \sqrt{2}x, \qquad 2x^3 - 4x^2 + x - 3 = \sqrt{5}(2x^2 - x + 1).$$

II, 4. $f(\sqrt{-41})^2 = \sqrt{2}x$, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{5+\sqrt{41}}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{7+\sqrt{41}}{2} = 0.$

IV, 1.

$$2f(\sqrt{-21})^{12} = (\sqrt{3} + \sqrt{7})^3(3 + \sqrt{7})^2,$$

$$f_1(\sqrt{-24})^{24} = 2^9(1+\sqrt{2})^2(2+\sqrt{3})^3(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3,$$

$$f_1(\sqrt{-30})^6 = 2\sqrt{2}(3+\sqrt{10})(2+\sqrt{5}),$$

$$\sqrt{2}f(\sqrt{-33})^6 = (3+\sqrt{11})(1+\sqrt{3})^3,$$

$$f_1(\sqrt{-40})^8 = \sqrt{2}(1+\sqrt{5})^2(1+\sqrt{2})^2(3\sqrt{2}+2\sqrt{5}),$$

$$2\sqrt{2}f_1(\sqrt{-42})^6 = (2\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{7})^3,$$

$$f(\sqrt{-45})^{12} = 2(2+\sqrt{5})^3(\sqrt{3}+\sqrt{5})^4,$$

$$f_1(\sqrt{-48})^8 = 8\sqrt[6]{2}(1+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2(1+\sqrt{2})^2,$$

$$f_1(\sqrt{-60})^{12} = 4\sqrt{2}(1+\sqrt{5})^2(2+\sqrt{3})^3(\sqrt{3}+\sqrt{5})^3,$$

$$f_1(\sqrt{-72})^{24} = 128(2+\sqrt{6})^4(1+\sqrt{2})^9(2+\sqrt{3})^6.$$

IV, 1. $f_1(\sqrt{-88})^8 = 4(1+\sqrt{2})^2(3+\sqrt{11})^2(7\sqrt{2}+3\sqrt{11}),$

$$f_1(\sqrt{-112})^8 = 8\sqrt{2}(3+\sqrt{7})(1+\sqrt{2})^4(2\sqrt{2}+\sqrt{7})^2,$$

$$f_1(\sqrt{-232})^8 = 2(5+\sqrt{29})^2(1+\sqrt{2})^6(99+13\sqrt{58}).$$

VIII, 1. $\sqrt{2}^{13}f(\sqrt{-105})^6 = (1+\sqrt{3})^3(1+\sqrt{5})^3(\sqrt{3}+\sqrt{7})^3(\sqrt{5}+\sqrt{7}).$

Marburg in April 1888.

Berichtigungen.

Das Theorem 2.) Seite 339 muss als unrichtig wegfallen. Auf die Resultate ist dieser Irrtum ohne Einfluss. Aus der Tafel (16) Seite 342 schliesst man, allein auf das Theorem 1.) § 1 gestützt, dass die Grössen $v:u^n$, oder wenn n durch 3 teilbar ist, deren Cuben, Wurzeln einer Transformationsgleichung sind, deren Coëfficienten rational aus u^{24} abhängen. Die Schlüsse auf Seite 347 werden nur in soweit berührt, als $r_1 = 1$

und r und s daher so bestimmt werden müssen, dass $(n-1)r$, $(n+1)s$ durch 12 teilbar sind, wie es auf Seite 348 ff. wirklich geschehen ist.

Seite 371. Formel (2) ist zu lesen

$$\sqrt[4]{8} f(\sqrt{-25}) = 1 + \sqrt{5},$$

Formel (3) zweite Zeile

$$x^2 - (1 + \sqrt{7})x + 2 = 0.$$

Seite 375. Formel (30)

$$\sqrt{2} f_1(\sqrt{-26})^2 = x + \frac{2\sqrt{13}}{x^2 - 3}.$$