ÜBER DIE BEWEGUNG EINES SCHWEREN PUNCTES AUF EINER ROTATIONSFLÄCHE

VON

OTTO STAUDE

in DORPAT.

Einleitung.

Für eine Gruppe von Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems materieller Puncte hat JACOBI[1] die Integrale in der allgemeinen Form:

$$\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial k}dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial k}dq_2\right) = \alpha,$$

$$\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial h}dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial h}dq_2\right) = \beta + t$$

angegeben. Hier bedeuten q_1, q_2 die beiden unabhängigen Variabeln, durch welche Ort und Lage des Punctsystems bestimmbar sein sollen, bedeuten h, k, α, β Integrationsconstanten, p_1, p_2 gewisse Functionen von q_1, q_2, h, k und endlich t die Zeit. Wenn mit der Auffindung dieser Gleichungen die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung als solche vollständig erledigt ist, so bleibt das *Umkehrproblem der Integrale* übrig, d. h. die Darstellung der Variabeln q_1, q_2, beziehungsweise gegebener Functionen derselben, durch die Zeit t. Diese Aufgabe scheint selbst für die einfachen Fälle noch nicht allgemein behandelt worden zu sein, wo die Integralgleichungen die Variabeln q_1, q_2 separirt enthalten, also α und $\beta + t$ je einer Summe zweier einfacher Integrale gleich werden.

[1] Vgl. *Vorlesungen über Dynamik*, herausgegeben von CLEBSCH, S. 175, S 515.

Acta mathematica. 11 Imprimé le 2 Mai 1888.

Auf Integralgleichungen, bei denen eine solche Vereinfachung eintritt, führt *die Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche mit verticaler Symmetrieaxe.* Das Umkehrproblem der Integrale der Bewegungsdifferentialgleichungen kann in diesem Falle nur bei einer beschränkten[1] Zahl von Rotationsflächen als Beispiel für die Anwendung der *elliptischen* Functionen behandelt werden;[2] für andere führt es zwar auf *hyperelliptische* Integrale,[3] aber nicht auf ein JACOBI'sches Umkehrproblem, welches mittels der hyperelliptischen Functionen lösbar wäre. Es darf daher die

---

[1] Es giebt 5 Rotationsflächen, darunter die Kugel, den Kegel und das Rotationsparaboloid, bei denen das Umkehrproblem nur *elliptische* Integrale enthält, nach KOBB, *Sur le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution*, Acta mathematica, Bd. **10**, S. 89, 1887.

[2] Bei der *Kugel* hat das Problem wiederholt ausführliche Behandlung mittels der elliptischen Functionen erfahren, zuerst wohl durch TISSOT, *Mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère,* LIOUVILLE's Journal de mathématiques, 1. Serie, Bd. **17**, S. 88, 1852; vgl. die späteren Darstellungen bei SCHELLBACH, *Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen*, Berlin, 1864; DURÈGE, *Theorie der elliptischen Functionen,* Leipzig, 1878; GEELMUYDEN, *Den koniske Pendelbevægelse,* Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. **5**, S. 307, 1881; u. a. Die eine Coordinate (z in der Bezeichnung des § 3 des obigen Textes) des bewegten Punctes auf der Kugel wird unmittelbar eine elliptische Function der Zeit. Die Darstellung der anderen Coordinate (φ in der Bezeichnung d. a. O.) durch die Zeit kommt auf die Darstellung der elliptischen Integrale 3. Gattung durch Thetafunctionen zurück. Auf wesentlich anderem Wege als die genannten Autoren, nämlich unter Vermittlung der LAMÉ'schen Differentialgleichung, gelangt HERMITE, *Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques,* Comptes rendus, Bd. **93**, S. 922, Paris, 1881, zur Entwicklung der 2. Coordinate, bezüglich einer Exponentialfunction derselben. Die gleiche Vermittlung nimmt die Methode von DILLNER, *Sur l'intégration des équations différentielles du pendule conique,* Nova acta societatis scientiarum Upsaliensis, 3. Serie, Bd. **12**, 1883, in Anspruch.

Über *Kegel* und *Paraboloid* liegen verschiedene Bearbeitungen im Sinne der TISSOT'schen Entwicklungen auf Grund der Theorie der elliptischen Functionen vor, vgl. BERTRAM, *Beitrag zur Kenntniss von der Bewegung eines schweren Punctes auf Rotationsflächen mit verticaler Axe,* Archiv der Mathematik und Physik, Th. **59**, S. 193, 1876; E. VOSS, *Bewegung eines schweren Punctes auf der Fläche eines geraden Kegels und eines Rotationsparaboloids,* Schwerin, 1878 (1872); ZÜGE, *Bewegung eines schweren Punctes auf einem Rotationsparaboloid*, Archiv der Mathematik und Physik, Th. **70**, S. 58, 1884.

[3] Vom Geschlecht $p = 2$ für das *Rotationsellipsoid,* vgl. SCHLEIERMACHER, *Über die Bewegung eines schweren Punctes auf dem verlängerten Rotationsellipsoid,* Erlangen, o. J.; vom Geschlecht $p = 3$ für den *Kreisring,* vgl. § 10 des vorliegenden Textes.

Frage nach *der allgemeinen Lösung des Umkehrproblems für alle Rotationsflächen* gerechtfertigt erscheinen, zu welcher die vorliegende Abhandlung einen Beitrag zu geben beabsichtigt.

Die Untersuchung umfasst alle Rotationsflächen, die von einer Horizontalebene in nicht mehr als 2 Parallelkreisen geschnitten werden, unter näher angegebenen Voraussetzungen (§ 3, § 8) und führt zu zwei Hauptresultaten. Das erste derselben besteht in dem Nachweis *einer von der gegebenen Rotationsfläche unabhängigen Rotationsfläche* 3. *Ordnung* (§ 5), *welche in der Vertheilung ihrer Schnittcurven mit der gegebenen Rotationsfläche den Charakter der Bewegung eines schweren Punctes auf dieser bestimmt* und im Besonderen die Stabilität oder Instabilität der Bewegung entscheidet.[1] Dem anderen Hauptresultate zufolge *sind für die beiden Normalformen* (§ 4, § 9) *jeder stabilen Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche die Coordinaten des Punctes bedingt periodische Functionen der Zeit,* welche durch zweifach unendliche trigonometrische Reihen darstellbar sind. Hierbei ist noch hervorzuheben, dass eine durch ihre Differentialgleichungen 1. Ordnung definirte Bewegung der betrachteten Art, ähnlich wie eine algebraische Curve, *aus mehreren Zweigen* bestehen kann, von denen zwei benachbarte unter Vermittlung von *singulären Bewegungsformen* (§ 6) — etwa einer Curve mit Doppelpunct oder isolirtem Punct entsprechend — auch in einen einzigen Zweig verschmelzen können. Auf specielle Beispiele zur Erläuterung dieser allgemeinen Resultate ist nur in Kürze (§ 7, § 10) eingegangen worden.

Was die analytische Darstellung der Coordinaten des bewegten Punctes angeht, so ist dieselbe eine Anwendung einer allgemeinen, früher[2] von mir betrachteten Gattung von Umkehrfunctionen, auf welche ich hier nur verweise, um bei einer anderen Gelegenheit den analytischen Charakter dieser bedingt periodischen Functionen für alle reellen und auch für einen beschränkten Bereich complexer Werthe der Zeit t darzuthun. Die Hauptsätze über jene Umkehrfunctionen sind in einer für den vorliegenden Zweck erforderlichen Form ihren Anwendungen vorausgeschickt (§ 1, § 2).

---

[1] Vgl. die hiermit verwandten Gesichtspuncte der Untersuchungen von Bohlin, *Über die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme,* Acta mathematica, Bd. **10**, S. 109, 1887.

[2] Vgl. Mathematische Annalen, Bd. **29**, S. 468.

§ 1. *Über eine Gattung bedingt periodischer Functionen.*

Die anzuwendenden Sätze beziehen sich alle auf das Umkehrproblem:

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{a_1}^{x_1} \frac{g_{11}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{11}(x_1)}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{g_{12}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{12}(x_2)}} = 0 \\ \displaystyle\int_{a_1}^{x_1} \frac{g_{21}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{21}(x_1)}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{g_{22}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{22}(x_2)}} = t \end{cases}$$

unter verschiedenen Voraussetzungen über die darin auftretenden Functionen.

I. Unter $F_{\alpha\beta}(x_\beta)$, $(\alpha, \beta = 1, 2)$, sind zuerst gegebene Functionen von x_β zu verstehen, welche für je zwei Werthe $x_\beta = a_\beta$ und $x_\beta = b_\beta$ verschwinden. Setzt man mit Rücksicht darauf:

$$(2)\qquad F_{\alpha\beta}(x_\beta) = (x_\beta - a_\beta)(b_\beta - x_\beta) f_{\alpha\beta}(x_\beta),$$

so sollen $f_{\alpha\beta}(x_\beta)$ in den Intervallen

$$(3)\qquad a_\beta \leqq x_\beta \leqq b_\beta$$

eindeutige und stetige Functionen von x_β (eventuell von x_β und

$$w_\beta = \sqrt{\frac{x_\beta - a_\beta}{b_\beta - x_\beta}})$$

sein, daselbst einen beständig positiven reellen Werth besitzen und weder 0 noch ∞ werden. Ferner sollen die Functionen $g_{\alpha\beta}(x_\beta)$ in den Intervallen (3) eindeutige und stetige Functionen von x_β (ev. von x_β und $w_\beta = \sqrt{\frac{x_\beta - a_\beta}{b_\beta - x_\beta}}$) sein, die daselbst ihr Vorzeichen niemals wechseln und niemals ∞ werden. Endlich soll die Determinante:

$$(4)\qquad D(x_1, x_2) = \frac{g_{11}(x_1)}{\sqrt{f_{11}(x_1)}} \frac{g_{22}(x_2)}{\sqrt{f_{22}(x_2)}} - \frac{g_{21}(x_1)}{\sqrt{f_{21}(x_1)}} \frac{g_{12}(x_2)}{\sqrt{f_{12}(x_2)}}$$

für alle den Ungleichungen (3) genügenden Werthepaare x_β beständig positiv und von o verschieden sein. Die doppeltgestrichenen Wurzelzeichen bedeuten die positiven Werthe der Quadratwurzeln.

Alsdann ist eine gegebene eindeutige Function $E(x_1, x_2)$ der oberen Integralgrenzen x_1, x_2 und der Wurzelfunctionen $\sqrt{x_\beta - a_\beta}$, $\sqrt{b_\beta - x_\beta}$, welche für alle den Ungleichungen (3) genügenden Werthepaare x_1, x_2 endlich und stetig ist, eine für alle reellen Werthe von t eindeutige, endliche und stetige, sowie bedingt periodische Function von t. Dieselbe kann durch eine für alle reellen Werthe t gleichmässig convergente Reihe, die zweifach unendliche Fourier'sche Reihe, dargestellt werden.

Die Periodicitätseigenschaft bezieht sich auf die Constanten:

$$\omega_{\alpha\beta} = \int_{a_\beta}^{b_\beta} \frac{g_{\alpha\beta}(x_\beta)\, dx_\beta}{\sqrt{F_{\alpha\beta}(x_\beta)}} \tag{5}$$

$$\left(\text{ev. } \omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int_{a_\beta}^{b_\beta} \frac{g_{\alpha\beta}(x_\beta, \sqrt{w_\beta^2})\, dx_\beta}{\sqrt{F_{\alpha\beta}(x_\beta, \sqrt{w_\beta^2})}} + \frac{1}{2}\int_{a_\beta}^{b_\beta} \frac{g_{\alpha\beta}(x_\beta, -\sqrt{w_\beta^2})\, dx_\beta}{\sqrt{F_{\alpha\beta}(x_\beta, -\sqrt{w_\beta^2})}}\right).$$

Während nämlich die Function $E(x_1, x_2)$ im Allgemeinen nicht periodisch ist, wird sie,[1] falls mit irgend zwei positiven oder negativen, von o verschiedenen ganzen Zahlen m_1, m_2 die Bedingung

$$0 = 4m_1\omega_{11} + 4m_2\omega_{12} \tag{6}$$

erfüllt ist, eine periodische Function von t mit der Periode

$$T = 4m_1\omega_{21} + 4m_2\omega_{22}. \tag{7}$$

Enthält $E(x_1, x_2)$ die Wurzelfunctionen $\sqrt{x_\beta - a_\beta}$, $\sqrt{b_\beta - x_\beta}$ nur theilweise oder nur in gewissen Verbindungen oder gar nicht, so tritt in (6) und (7) $2m_1$ an Stelle von $4m_1$ oder $2m_2$ an Stelle von $4m_2$ oder beides zugleich.

Der Beweis dieses Satzes ist a. a. O. von mir gegeben worden; der

---

[1] Auf die *bedingte Periodicität der hyperelliptischen Functionen zweier Variabler,* wenn beide Variable lineare Functionen einer dritten sind, hat C. Neumann aufmerksam gemacht, *De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur,* Journal für Mathematik, Bd. **56**, S. 46.

Satz kommt im Folgenden zur Anwendung ohne die in Klammern beigefügten Eventualitäten, welche nur zur Ableitung des unter II folgenden Resultates dienen sollen.

II. Über die Functionen $F_{\alpha 1}(x_1)$, $g_{\alpha 1}(x_1)$ bleiben die Voraussetzungen unter I bestehen; dagegen sollen die Functionen $F_{\alpha 2}(x_2)$ nicht, wie dort, 2 Nullpuncte haben, sondern vielmehr für keinen reellen Werth von x_2 verschwinden. Setzt man im Besonderen:

$$F_{\alpha 2}(x_2) = \left(\frac{1 + x_2^2}{2}\right)^2 f_{\alpha 2}(x_2), \tag{8}$$

so sollen $f_{\alpha 2}(x_2)$ für alle reellen Werthe von x_2, einschliesslich $x_2 = \pm\infty$, eindeutige und stetige Functionen von x_2 sein, einen beständig positiven reellen Werth besitzen und weder o noch ∞ werden. Ferner sollen in gleichem Umfange die Functionen $g_{\alpha 2}(x_2)$ eindeutig und stetig sein, niemals ihr Vorzeichen wechseln und niemals ∞ werden. Die Voraussetzung über $D(x_1, x_2)$ in (4) bleibt entsprechend beibehalten. Die untere Grenze a_2 in dem Ansatz (1) soll jetzt durch o ersetzt werden.

Unter diesen Voraussetzungen ist ebenfalls eine gegebene eindeutige Function $E(x_1, x_2)$ der oberen Integralgrenzen x_1, x_2 in (1) und der Wurzelfunctionen $\sqrt{x_1 - a_1}$, $\sqrt{b_1 - x_1}$, welche für alle den Ungleichungen $a_1 \leqq x_1 \leqq b_1$, $-\infty \leqq x_2 \leqq +\infty$ genügende Werthepaare x_1, x_2 endlich und stetig ist, eine für alle reellen Werthe von t eindeutige, endliche und stetige, sowie bedingt periodische Function von t, die wie oben dargestellt werden kann.

Auch die Periodicitätseigenschaften drücken sich wieder durch die Formeln (6) und (7) aus, nur hat $\omega_{\alpha 2}$ jetzt den Werth:

$$\omega_{\alpha 2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{\alpha 2}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{\alpha 2}(x_2)}}. \tag{9}$$

Der Beweis dieses Satzes II, der a. a. O. noch nicht angegeben wurde, kann dadurch geführt werden, dass man die Voraussetzungen des Satzes auf die dem Satze I zu Grunde liegenden reducirt. Dies geschieht durch die Substitution:

$$x_2^2 = \frac{y_2 - a_2}{b_2 - y_2}, \qquad y_2 = \frac{a_2 + b_2 x_2^2}{1 + x_2^2}, \qquad a_2 < b_2.$$

Es wird dann:

$$\int_0^{x_2} \frac{g_{a2}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{a2}(x_2)}} = \int_0^{x_2} \frac{2g_{a2}(x_2)\,dx_2}{(1+x_2^2)\sqrt{f_{a2}(x_2)}} = \int_{a_2}^{y_2} \frac{g_{a2}(x_2)\,dy_2}{\sqrt{(y_2-a_2)(b_2-y_2)}\sqrt{f_{a2}(x_2)}},$$

wo das Vorzeichen der Wurzel aus $f_{a2}(x_2)$ ohne Beschränkung positiv genommen werden kann. Da nun, während x_2 alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, y_2 immer zwischen a_2 und b_2 oscillirt, und da somit nach den Voraussetzungen unter II die Functionen $g_{a2}(x_2)$ und $f_{a2}(x_2)$ mit $x_2 = \sqrt{\frac{y_2 - a_2}{b_2 - y_2}}$ für alle der Ungleichung $a_2 \leqq y_2 \leqq b_2$ entsprechenden Werthe von y_2 eindeutige, endliche und stetige Functionen von $\sqrt{\frac{y_2 - a_2}{b_2 - y_2}}$ sind, die letztere überdies positiv und von 0 verschieden, die erstere von einerlei Vorzeichen bleiben, so liegt nach der geschehenen Substitution wieder der Fall I mit y_2 für x_2 vor, und zwar treten hierbei die dort in Klammern beigefügten Eventualitäten ein.

III. Die beiden Sätze I und II gelten auch dann noch, wenn identisch $g_{21}(x_1) = 0$ ist, unter den entsprechend specialisirten Bedingungen ihrer allgemeinen Formen. Jedoch ist dann die Function $E(x_2)$, wenn sie von x_2 allein abhängt, eine unbedingt periodische Function von t mit der Periode

$$T = 2\omega_{22}, \tag{10}$$

die durch eine einfach unendliche trigonometrische Reihe von gleichmässiger Convergenz dargestellt wird.[1]

§ 2. *Über Grenzfälle bedingt periodischer Functionen.*

IV. Ist unter sonst gleichen Voraussetzungen, wie unter I, $a_2 = b_2$, so ergiebt eine einfache Grenzbetrachtung mit Benutzung der eben ci-

[1] Nach Weierstrass, *Über eine Gattung reell periodischer Functionen,* Monatsberichte der Berliner Akademie, 1866.

tirten Untersuchung von WEIERSTRASS, dass $x_2 = a_2$, und $E(x_1, a_2)$ eine unbedingt periodische Function von t wird, mit der Periode:

$$2\omega = 2\frac{A_1\omega_{21} - A_2\omega_{11}}{A_1}; \tag{11}$$

bezüglich 4ω, wenn in $E(x_1, a_2)$ auch die Wurzelfunctionen $\sqrt{x_1 - a_1}$, $\sqrt{b_1 - x_1}$ vorkommen; hierin ist:

$$A_1 = \frac{g_{12}(a_2)}{\sqrt{f_{12}(a_2)}}, \qquad A_2 = \frac{g_{22}(a_2)}{\sqrt{f_{22}(a_2)}}. \tag{12}$$

V. Wenn die Function $F_{a2}(x_2)$ nicht nur ein, sondern zwei Paare aufeinander folgender Nullpuncte $x_2 = a_2, b_2$ und $x_2 = a'_2, b'_2$ besitzt $(a_2 < b_2 < a'_2 < b'_2)$, so können die Bedingungen des Satzes I für die beiden Intervalle $a_2 \leqq x_2 \leqq b_2$ und $a'_2 \leqq x_2 \leqq b'_2$ unabhängig von einander erfüllt sein. Wenn man daher die untere Grenze a_2 in den Integralen (1) einmal belässt und einmal durch a'_2 ersetzt, erhält man entsprechend 2 verschiedene Gruppen bedingt periodischer Functionen $E(x_1, x_2)$.

VI. Wird nun aber unter den Voraussetzungen des Satzes V: $b_2 = a'_2$, so nehmen die Umkehrfunctionen einen wesentlich neuen Charakter an, da die Integrale mit der Variablen x_2 in (1) für $x_2 = b_2$ logarithmisch ∞ werden. Dann bleiben zwar die Functionen $E(x_1, x_2)$ für alle reellen Werthe von t eindeutige, endliche und stetige Functionen von t, verlieren aber ihre früheren Periodicitätseigenschaften. Im Besonderen kann die Function x_2 den Werth b_2 für keinen endlichen Werth von t erreichen. Unter der ferneren Voraussetzung $g_{21}(x_1) = 0$ (wie unter III) nähert sich x_2 dem Werthe b_2 mit unbegrenzt wachsendem t asymptotisch.

§ 3. *Gleichungen der Bewegung auf einer Rotationsfläche mit einfachen Horizontalschnitten.*

Die Gleichung einer Rotationsfläche, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit vertical abwärts laufender z-Axe sei:

$$x^2 + y^2 = f^2(z). \tag{1}$$

Die Function $f(z)$ soll innerhalb eines gewissen Intervalles

$$A < z < B \tag{2}$$

mit näher zu bestimmenden Grenzen A, B eine eindeutige und stetige Function der reellen Variabeln z, sowie von positivem reellen, von o und ∞ verschiedenen Werthe sein; sie soll ferner innerhalb desselben Umfanges einen bestimmten, nicht ∞ werdenden 1. Differentialquotienten $f'(z)$ besitzen.

Indem mit φ der Winkel zwischen der Meridianebene eines Punctes der Rotationsfläche und der zx-Ebene des Coordinatensystems bezeichnet wird, können die Coordinaten x, y, z des Punctes durch die Formeln:

$$x = f(z).\cos\varphi, \qquad y = f(z).\sin\varphi, \qquad z = z \tag{3}$$

als Functionen von z und φ dargestellt werden. Da der Winkel φ in seiner Veränderlichkeit unbeschränkt bleibt, brauchen nur positive Werthe von $f(z)$ in Betracht gezogen zu werden. Durch die Formeln (3) wird die Lage des Punctes x, y, z der Fläche innerhalb des Raumes zwischen den beiden Horizontalebenen $z = A$ und $z = B$ eindeutig bestimmt. In demselben Raume wird die Rotationsfläche von jeder Horizontalebene in einem und nur einem Parallelkreise geschnitten (*einfache Horizontalschnitte*) und hat sie auch mit der z-Axe keinen Punct gemein; in den Grenzen $z = A$ und $z = B$ können die über $f(z)$ und $f'(z)$ gemachten Voraussetzungen durchbrochen werden; es kann hier auch $f(z) = 0$ sowie $f'(z) = \infty$ sein, also die Fläche sich um die z-Axe in einer Spitze oder mit horizontaler Tangentialebene zusammenschliessen.

An Stelle von φ wird fernerhin noch die Variable

$$v = \sin^2\varphi \tag{4}$$

eingeführt.

Die Differentialgleichungen 1. Ordnung der Bewegung eines schweren Punctes m von der Masse 1 auf der Rotationsfläche lauten bekanntlich:

$$d\varphi = \frac{k\sqrt{1 + f'^2(z)}.dz}{f(z)\sqrt{2(gz + h)f^2(z) - k^2}}, \qquad dt = \frac{f(z)\sqrt{1 + f'^2(z)}.dz}{\sqrt{2(gz + h)f^2(z) - k^2}}. \tag{5}$$

Dabei ist g die Beschleunigung der Schwere, h die Constante der lebendigen Kraft und k die doppelte Flächengeschwindigkeit der auf die Horizontalebene projicirten Bewegung; k wird von o verschieden vorausgesetzt und kann ohne Beschränkung als positiv angenommen werden.

Die Abhängigkeit der Coordinaten x, y, z des Punctes m von der Zeit t findet hiernach ihren Ausdruck in den 5 Gleichungen:

$$x = f(z)\cdot\sqrt{1-v}, \qquad y = f(z)\cdot\sqrt{v}, \qquad z = z, \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned} -\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_{z_0}^z \frac{k\sqrt{\overline{\overline{1+f'^2(z)}}}\,.\,dz}{f(z)\sqrt{2(gz+h)f^2(z)-k^2}} &= 0,\\ \int_{z_0}^z \frac{f(z)\sqrt{\overline{\overline{1+f'^2(z)}}}\,.\,dz}{\sqrt{2(gz+h)f^2(z)-k^2}} &= t, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

welche nur eine andere Form der Gleichungen (3) und (5) sind und die Form des allgemeinen Umkehrproblems der obigen Einleitung haben. Bei der über $f'(z)$ gemachten Voraussetzung ist es, so lange z in dem Intervalle (2) bleibt, keine Beschränkung, wenn die Quadratwurzel aus $1 + f'^2(z)$ positiv angenommen wird, was durch die doppelten Striche bezeichnet ist. Die Werthe $z = z_0$ und $v = 0$, $\sqrt{1-v} = 1$ sollen die dem Zeitpunct $t = 0$ entsprechenden Anfangswerthe sein (vgl. § 5).

§ 4. *Normalform der stabilen Bewegung auf einer Rotationsfläche mit einfachen Horizontalschnitten.*

Innerhalb des in (2) bezeichneten Intervalles sind die Functionen

$$g_{12} = \frac{k\sqrt{\overline{\overline{1+f'^2(z)}}}}{f(z)}, \qquad g_{22} = f(z)\sqrt{\overline{\overline{1+f'^2(z)}}}$$

eindeutig und stetig, positiv und von o und ∞ verschieden. Setzt man daher voraus — eine Voraussetzung, die in § 5 näher zu erörtern ist —, dass die Function:

$$R(z) = 2(gz+h)f^2(z) - k^2 \tag{8}$$

die Form habe:

$$R(z) = (z - z_0)(z_1 - z)r(z), \tag{9}$$

wo mit Ausschluss der Gleichheit:

$$A < z_0 < z_1 < B, \tag{10}$$

und wo $r(z)$ für das Intervall:

$$z_0 \leqq z \leqq z_1 \tag{11}$$

positiv und von 0 verschieden ist, so erfüllen die Gleichungen (6) und (7) alle Bedingungen des Satzes § 2, I in der besonderen Form § 2, III. Man hat in die allgemeinen Sätze des § 2 neben den bereits angegebenen Functionen g_{12} und g_{22} die Functionen:

$$g_{11} = -\frac{1}{2}, \quad g_{21} = 0, \quad F_{11} = F_{21} = v(1 - v), \quad F_{12} = F_{22} = R(z)$$

$$E(x_1, x_2) = f(z) . \sqrt{1 - v}; \quad f(z) . \sqrt{v}; \quad z$$

und die Constanten:

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = z_0, \quad b_2 = z_1$$

einzuführen. Die Periodicitätsconstanten erhalten die Werthe:

$$\left\{\begin{aligned} \omega_{11} &= -\int_0^1 \frac{dv}{2\sqrt{v(1 - v)}} = \frac{\pi}{2}, & \omega_{12} &= \int_{z_0}^{z_1} \frac{k\sqrt{1 + f'^2(z)} . dz}{f(z)\sqrt{R(z)}}, \\ \omega_{21} &= 0, & \omega_{22} &= \int_{z_0}^{z_1} \frac{f(z)\sqrt{1 + f'^2(z)} dz}{\sqrt{R(z)}}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Während daher z eine eindeutige, unbedingt periodische Function von t ist mit der Periode:

$$T = 2\omega_{22},$$

sind x, y eindeutige, bedingt periodische Functionen von t, welche unter der Bedingung:[1]

$$4m_1 \frac{\pi}{2} + 2m_2\omega_{12} = 0$$

die Periode

$$T = 2m_2\omega_{22}$$

erhalten. Die Function z ist durch eine einfach, die Functionen x, y durch zweifach unendliche trigonometrische Reihen darzustellen, die für alle reellen Werthe von t gleichmässig convergiren.

Die Bewegung des Punctes m ist auf die zwischen den beiden Parallelkreisen $z = z_0$ und $z = z_1$ gelegene Zone beschränkt und schreitet in der Längsdimension derselben immer in gleichem Sinne fort, indem die Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}k$ der auf die Horizontalebene projicirten Bewegung constant bleibt. Dabei berührt die Bahncurve des Punctes m periodisch abwechselnd den obern und untern die Zone begrenzenden Parallelkreis, weshalb diese letzteren *Wendekreise* der betrachteten Bewegung genannt werden mögen.

Die Wendekreise $z = z_0$ und $z = z_1$ sind durch die beiden in (9) vorausgesetzten Nullpuncte der Function $R(z)$ bestimmt, über deren Existenzfrage der § 5 weiteren Aufschluss geben soll.

§ 5. *Die Rotationsfläche der Wendekreise der Bewegung.*

Denkt man sich die Constanten h und $\frac{1}{2}k$ der lebendigen Kraft und der Flächengeschwindigkeit in der Horizontalebene gegeben, so bleibt, für die durch die Differentialgleichungen (5) definirte Bewegung, noch der Anfangsort $z = z_0$, $\varphi = \varphi_0$ des bewegten Punctes m willkürlich. Bei der Symmetrie der Rotationsfläche kann, wie in (7) geschehen, ohne Einschränkung der Allgemeinkeit $\varphi_0 = 0$ gesetzt werden, während für z_0

[1] Vgl. die Untersuchungen von Darboux über die Bedingung geschlossener Bahnen eines Punctes auf einer Rotationsfläche in der Abhandlung: *Etude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution*, Bulletin de la société mathématique de France, Bd. 5, S. 100, 1877.

entweder, wie in (7) mit Rücksicht auf (9), ein Nullpunct von $R(z)$ oder auch ein anderer Werth gesetzt werden darf, der einem von der Bewegung überhaupt getroffenen Parallelkreis entspricht.

Da nämlich nach (5) von den Coordinaten des Anfangsortes z_0, φ_0 und den Constanten h, k die Coordinaten $z' = z'_0$, $\varphi' = \varphi'_0$ der Anfangsgeschwindigkeit mittels der Gleichungen:

$$z_0'^2 = \frac{R(z_0)}{[1 + f'^2(z_0)]f^2(z_0)}, \qquad \varphi_0' = \frac{k}{f^2(z_0)} \tag{13}$$

abhängen, so muss $z = z_0$ der Bedingung:

$$R(z) \geqq 0 \tag{14}$$

genügen. Diese Bedingung bestimmt innerhalb der Grenzen $A < z < B$ die bei gegebenem h und k für den Punct m erreichbaren Parallelkreise der Rotationsfläche, während alle der Bedingung nicht entsprechende Stellen unerreichbar bleiben.

In einer Halbmeridianebene nehme man ein Coordinatensystem mit den Axen r, z an, wo z die bereits eingeführte, der Richtung der Schwere folgende z-Axe und r die Durchschnittslinie der Halbmeridianebene mit der horizontalen xy-Ebene des bisherigen Coordinatensystems sei. Die Gleichung der Durchschnittslinie der Rotationsfläche mit der Halbmeridianebene ist:

$$r = f(z), \tag{15}$$

wo r nur positive Werthe annimmt. Man kann nun die Gleichung:

$$R(z) = 0, \tag{16}$$

auf deren Wurzeln es ankommt, als Resultat der Elimination von r aus der Gleichung (15) und der Gleichung

$$r = \frac{k}{\sqrt{2(gz + h)}} \tag{17}$$

ansehen, wo nach Voraussetzung $k > 0$ ist. Demnach sind die Nullpuncte der Function $R(z)$ die z-Coordinaten der Durchschnittspuncte der beiden Curven (15) und (17). Dies von der Halbmeridianebene mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ auf den Raum übertragen, giebt den Satz:

Die Wendekreise der Bewegung des Punctes m auf der Rotationsfläche § 3, 1 sind die Schnittkreise der letzteren mit der Rotationsfläche 3. Ordnung:

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{2(gz + h)}. \tag{18}$$

Zur Discussion dieser Rotationsfläche (h, k), welche durch die Parameter h, k charakterisirt ist, bedarf es nur der Betrachtung der Halbmeridiancurve (17), die einen Zweig einer Curve 3. Ordnung darstellt. Der andere, den negativen Werthen der Quadratwurzel entsprechend, ist für den vorliegenden Zweck ersichtlich ohne Belang. Die Curve (17) befindet sich in der Halbebene r, z ganz unterhalb der horizontalen Geraden $z = -\frac{h}{g}$, welche eine Asymptote der Curve ist. Eine zweite Asymptote der Curve ist die verticale z-Axe. Die Curve besteht aus einem einzigen, horizontal vom Unendlichen her und vertical in's Unendliche hinablaufenden Zuge, der jede unterhalb des Niveau's $z = -\frac{h}{g}$ die Halbebene r, z durchziehende horizontale oder verticale Gerade einmal und nur einmal trifft. Da ferner in dem betrachteten Umfange $\frac{dr}{dz} < 0$ und $\frac{d^2r}{dz^2} > 0$, so nimmt bei wachsendem z die horizontale Coordinate der Curve von ∞ bis 0 beständig ab, und bewegt sich der Winkel α der abwärts laufenden Curventangente gegen die horizontale r-Axe (vgl. Fig. 1) beständig abnehmend von π bis $\frac{\pi}{2}$. Es ist überdies für alle unterhalb der Curve (auf der concaven Seite derselben) gelegenen Puncte r, z der Halbmeridianebene:

$$r > \frac{k}{\sqrt{2(gz + h)}},$$

für alle oberhalb der Curve und unterhalb der Geraden $z = -\frac{h}{g}$ gelegenen umgekehrt.

Die Systeme von Curven, welche bei veränderlichem k und constantem h oder bei veränderlichem h und constantem k entstehen, sind leicht zu übersehen. Denn der Veränderung von h bei festem k entspricht eine blose Verschiebung der Curve in der Richtung der z-Axe. Will man dagegen aus der Curve (h, k) die Curve (h, k') erhalten, so braucht man nur die horizontalen Coordinaten r der ersteren mit $k' : k$ zu multipliciren (Systeme der letzteren Art vgl. Fig. 2 und Fig. 3).

Lässt man jetzt die Curve (h, k) um die z-Axe rotiren, so beschreibt sie die Rotationsfläche (h, k), welche sich trichterförmig nach oben gegen die Ebene $z = -\frac{h}{g}$ öffnet und nach unten immer enger um die z-Axe zusammenschliesst. Für alle Puncte unterhalb dieser Fläche ist

$$2(gz + h)(x^2 + y^2) - k^2 > 0$$

und für alle Puncte oberhalb derselben diesseits und jenseits der Ebene $z = -\frac{h}{g}$ umgekehrt. Daraus folgt aber weiter:

Für einen Parallelkreis der gegebenen Rotationsfläche

$$x^2 + y^2 = f^2(z)$$

ist

$$R(z) > 0, = 0 \quad \text{oder} \quad < 0,$$

jenachdem derselbe unterhalb, auf oder oberhalb der Rotationsfläche (h, k) *liegt.*

Die Rotationsfläche (h, k), welche, unabhängig von der gegebenen Rotationsfläche, nur von den Constanten der Schwerkraft (g), der lebendigen Kraft (h) und der horizontalen Flächengeschwindigkeit $\left(\frac{1}{2}k\right)$ abhängt, trennt also einerseits die für die Bewegung erreichbaren und unerreichbaren Puncte der gegebenen Rotationsfläche und bestimmt andererseits in ihren innerhalb des Raumes $A < z < B$ gelegenen Schnittcurven mit dieser die möglichen Wendekreise der Bewegung.

Mit $g = 0$ geht sie in einen verticalen Kreiscylinder, verbunden mit der Ebene $z = \infty$ über; mit $k = 0$ in die z-Axe und die Ebene $z = -\frac{h}{g}$.

§ 6. *Formen der Bewegung auf einer Rotationsfläche mit einfachen Horizontalschnitten.*

Verbindet man dieses Resultat mit der in § 4 über $R(z)$ gemachten Voraussetzung (9), so übersieht man, wenn dieselbe mit ihren Folgen besteht und wenn nicht. Soll nämlich eine den Differentialgleichungen (5) entsprechende Bewegung innerhalb des Intervalles (2) überhaupt möglich sein, so darf die gegebene Rotationsfläche in dem letzteren nicht ganz oberhalb der Rotationsfläche (h, k) liegen, ohne dieselbe zu treffen. Dagegen:

I. *Ragt die gegebene Rotationsfläche innerhalb des Intervalles* $A < z < B$ *mit einer Zone in den Raum unterhalb der Rotationsfläche* (h, k) *hinein, und ist diese Zone von 2 Parallelkreisen,* $z = z_0$ *nach oben und* $z = z_1$ *nach unten, begrenzt, in denen sich beide Rotationsflächen schneiden, ohne sich zu berühren, so findet in dieser Zone eine den Differentialgleichungen* (5) *entsprechende, bedingt periodische Bewegung des Punctes* m *mit den Wendekreisen* $z = z_0$ *und* $z = z_1$ *statt.*

Es liegt die in § 4 behandelte Normalform der Bewegung vor; denn den einfachen Schnittkreisen der beiden Flächen entsprechen einfache Nullpuncte $z = z_0, z_1$ der Function $R(z)$, zwischen denen nach § 5 die Function $R(z)$ positiv und von 0 verschieden ist, während $r(z)$ (vgl. § 4, 9) zwischen und in den Grenzen $z = z_0, z_1$ diese Eigenschaften besitzt.

II. *Reicht die gegebene Rotationsfläche innerhalb der Grenzen* $A < z < B$ *mit mehreren solchen Zonen unter die Rotationsfläche* (h, k) *herab, so besteht die den Differentialgleichungen* (5) *entsprechende Bewegung aus mehreren bedingt periodischen Zweigen.*

Jeder dieser Zweige ist von der erwähnten Normalform des § 4, wie aus § 2, V unmittelbar hervorgeht.

III. *Fallen die beiden Wendekreise eines solchen bedingt periodischen Zweiges der Bewegung zusammen, so geht die entsprechende bedingt periodische Bewegung in eine unbedingt periodische Bewegung über.*

Dieselbe erfolgt dem Satze § 2, IV entsprechend, auf einem Parallelkreise $z = z_0$ der Rotationsfläche mit constanter Geschwindigkeit. Diese periodische Bewegung ist *stabil*, da ihre Bahn beiderseits von unerreichbaren Theilen der Rotationsfläche begrenzt ist. Für die Periode der Bewegung ergiebt die allgemeine Formel § 2, 11:

$$T = \frac{2\pi}{k} f^2(z_0). \tag{19}$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch anders darstellen. Denn die Annahme $z = z_0$, $z' = 0$ reducirt die Gleichungen § 5, 13 auf:

$$(20) \qquad R(z_0) = 0, \qquad k = f^2(z_0) \cdot \varphi_0'.$$

Da aber bei dem Zusammenfall der beiden Wendekreise z_0 und z_1 nach § 4, 9 auch

$$(20) \qquad R'(z_0) = 0,$$

so können mittels dieser 3 Gleichungen (20) h, k und φ_0' durch z_0 ausgedrückt werden. Man erhält dabei für k den Werth:

$$k = f(z_0)\sqrt{-g\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}}.$$

Es wird daher nach (19) *die Umlaufszeit der längs des Parallelkreises $z = z_0$ stattfindenden periodischen Bewegung:*

$$(21) \qquad T = 2\pi\sqrt{-\frac{f(z_0)f'(z_0)}{g}}.$$

Mit $f(z) = \sqrt{a^2 - z^2}$ und $f(z) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - z^2}$ liefert diese Formel die bekannten Perioden der Bewegung längs eines Parallelkreises $z = z_0$ der Kugel und des Rotationsellipsoides:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{z_0}{g}},\text{[1]} \qquad T = 2\pi\frac{b}{a}\sqrt{\frac{z_0}{g}}.\text{[2]}$$

IV. *Fallen zwei nächstfolgende Wendekreise zweier verschiedener bedingt periodischer Zweige der Bewegung zusammen, so entsteht durch das Zusammenfliessen der letzteren eine asymptotische Bewegung.*

Die Bahncurve des Punctes m flacht sich nach § 2, VI bei Annäherung an den kritischen Parallelkreis, der aus dem Zusammenfall der beiden Wendekreise hervorgeht, derart ab, dass sie, während sie der

---

[1] Vgl. Schell, *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, Bd. **1**, S. 425. (2. Aufl.)

[2] Vgl. Foucault, *Remarques concernant le mouvement d'un point oscillant circulairement sur une surface de révolution du second ordre*, Comptes rendus, Bd. **61**, S. 515, Paris 1865; und *Sur une modification du modérateur de* Watt, ebd. S. 278.

Richtung des letzteren folgend, in immer neuen Windungen die Rotationsfläche umkreist, sich dem kritischen Parallelkreis asymptotisch nähert. Auf diese Weise wird die im kritischen Parallelkreis mögliche Verzweigung der Bahncurve umgangen.[1] Bringt man aber den Punct m zu Anfang der Bewegung in diesen Parallelkreis hinein, so wird er ihn umgekehrt nach keiner endlichen Zeit verlassen können, sondern ihn mit constanter Geschwindigkeit umkreisen. Die so entstehende unbedingt periodische Bewegung unterscheidet sich aber von der vorhin als stabil bezeichneten dadurch, dass sie nur im *labilen* Gleichgewicht steht. Ihre Periode ist dieselbe, wie die vorhin unter (21) angegebene. Die Grenzfälle III und IV der bedingt periodischen Bewegung setzen eine *Berührung zwischen der gegebenen Rotationsfläche und der Rotationsfläche* (h, k) *längs eines Parallelkreises* voraus. Solche Berührungen können, da die Fläche (h, k) sich nach unten zu beständig gegen die z-Axe *verengt,* nur auf solchen Zonen der gegebenen Fläche auftreten, wo das gleiche stattfindet; dem entsprechend giebt die Formel (21), da $f(z)$ allgemein positiv vorausgesetzt wurde, nur *für negatives* $f'(z_0)$ einen reellen Werth. Ist längs einer solchen Zone mit negativem $f'(z)$ die gegebene Rotationsfläche positiv gekrümmt, so kann sie die Rotationsfläche (h, k) niemals von unten berühren, also nur der Grenzfall der stabil periodischen Bewegung eintreten. Ist sie dagegen negativ gekrümmt, wie die Rotationsfläche (h, k) selbst, so sind beide Grenzfälle, die stabil und die labil periodische Bewegung möglich (vgl. § 10).

V. Analoge Grenzfälle bedingt periodischer Bewegungen, wie die eben unter III und IV beschriebenen, finden sich bei der Coincidenz von mehr als zwei Schnittkreisen der gegebenen Rotationsfläche mit der Rotationsfläche (h, k) ein, deren Discussion kein weiteres Interesse beanspruchen dürfte. Jedoch soll noch des *vollständigen Zusammenfalles der beiden Rotationsflächen,* also der Voraussetzung

$$f(z) = \frac{k}{\sqrt{2(gz + h)}} \tag{22}$$

gedacht werden. Wenn der Punct m an einer beliebigen Stelle dieser

---

[1] Denn nach KIRCHHOFF, *Vorlesungen über mathematische Physik,* 1. Vorl., § 2, sind die Coordinaten x, y, z des bewegten Punctes für die Dauer der Bewegung einwerthige Functionen der Zeit.

Rotationsfläche in horizontaler Richtung mit der Flächengeschwindigkeit k seine Bewegung beginnt, so verbleibt er immer in dem anfänglichen Parallelkreis. Es liegt eine periodische Bewegung vor, deren Gleichgewichtszustand ein indifferenter ist.

Diese Eigenschaft führt auf folgende *mechanische Definition* des einem gegebenen h und einem veränderlichen k entsprechenden Systems von Rotationsflächen (h, k), wie es bereits im § 5 erwähnt wurde:

Wenn von einer beliebigen Stelle irgend eines Parallelkreises $z = z_0$ einer Rotationsfläche des Systems ein schwerer Punct in der Richtung der Tangente des Parallelkreises mit derjenigen Geschwindigkeit ausgeht, die er durch den freien Fall vom Niveau $z = -\frac{h}{g}$ bis zum Niveau des Parallelkreises $z = z_0$ erhalten haben würde, so bewegt er sich beständig in diesem Parallelkreis.

Denn die Differentialgleichung der in die yz-Ebene fallenden Meridiancurve einer Rotationsfläche, auf welcher ein schwerer Punct immer einen Parallelkreis beschreibt, wenn er in einem beliebigen Niveau z von einer beliebigen Stelle der Fläche mit der als Function von z gegebenen und in die Richtung des Parallelkreises z fallenden Geschwindigkeit $\nu = \nu(z)$ ausgeht, ist:[1]

$$gy + \nu^2(z) \cdot \frac{dy}{dz} = 0.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung mit $\nu^2(z) = 2(gz + h)$, giebt aber, unter k die Integrationsconstante verstanden, das in Rede stehende System:

$$y = \frac{k}{\sqrt{2(gz + h)}}.$$

VI. Neben den unter I—V betrachteten und in verschiedenem Sinne stabilen Bewegungszweigen können auch *instabile Zweige* vorhanden sein, wenn nämlich eine Zone der gegebenen Rotationsfläche, die unter die

[1] Vgl. JULLIEN, *Problèmes de mécanique rationnelle,* Bd. **1**, S. 401, Paris 1855; über die Tendenz dieser Frage auch DE ST.-GERMAIN, *Des surfaces sur lesquelles un point peut se mouvoir suivant une certaine loi,* LIOUVILLE's Journal de mathématiques, 3. Serie, Bd. **2**, S. 325, 1876.

Fläche (h, k) herabreicht, innerhalb des Intervalles $A < z < B$ nur einseitig begrenzt ist. Auf diese Zweige soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

Mit $g = 0$ ergeben sich aus den Sätzen I—VI *die verschiedenen Formen der geodätischen Bewegung* eines Punctes auf einer Rotationsfläche, mit Ausschluss der Bewegung in einem Meridiane.

Wie die Bestimmung des Intervalles $A < z < B$ für eine gegebene Rotationsfläche gedacht ist, wird aus den folgenden Beispielen leicht ersichtlich sein.

§ 7. *Beispiele von Bewegungen auf Rotationsflächen mit einfachen Horizontalschnitten.*

Um die bekannten Beispiele von Bewegungen eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche unter die allgemeine Theorie unterzuordnen, mag zuerst die *Kugelfläche* erwähnt werden. Es ist hier:

$$f(z) = \sqrt{a^2 - z^2},$$

wo unter a der Radius der Kugel verstanden wird. Die Grenzen A und B des § 3, 2 können $A = -a$ und $B = +a$ genommen werden, worauf $f(z)$ allen Bedingungen des § 3 entspricht. Die Rotationsfläche (h, k) schneidet, wenn überhaupt eine Bewegung stattfindet, die Kugel in 2 Parallelkreisen $z = z_0, z_1$ (vgl. Fig. 1), die auch zu einer Berührungscurve beider Flächen zusammenrücken können, jedoch nach § 6 nur auf der unteren Halbkugel. Während daher im Allgemeinen die Bewegung aus einem einzigen bedingt periodischen Zweige besteht, wird sie im Grenzfalle stabil periodisch.

Im Wesentlichen dieselben Verhältnisse wiederholen sich bei allen *geschlossenen Rotationsflächen mit einfachen Horizontalschnitten,* wenn sie zwischen ihren beiden Schnittpuncten mit der Rotationsaxe überall den Bedingungen des § 3 entsprechen und, in der verticalen Halbebene yz, der Winkel der absteigenden Tangente der Halbmeridiancurve der Rotationsfläche gegen die Richtung der Halbaxe y, beständig wachsend von 0 bis π sich bewegt. Da nämlich der Winkel der absteigenden Tangente der Halbmeridiancurve der Rotationsfläche (h, k) gegen die Richtung der

Halbaxe y beständig abnehmend von π bis $\frac{\pi}{2}$ sich bewegt (nach § 5), so können die beiden Meridiancurven sich nicht mehr als zweimal schneiden; sie müssen sich aber, wenn überhaupt, auch wenigstens in 2 getrennten oder zusammenfallenden Puncten treffen.

Bei dem *Rotationskegel* mit verticaler Axe ist für den oberen Halbkegel, dessen aufsteigende Seitenlinie mit der z-Axe den stumpfen Winkel γ bildet:

$$f(z) = \operatorname{tg}\gamma . z.$$

Man kann $A = -\frac{h}{g}$, $B = 0$ nehmen, indem man h als positiv voraussetzt. Kleinere Werthe von z sind unerreichbar, sodass die Annahme $A = -\frac{h}{g}$ keine Beschränkung enthält. Der obere Halbkegel wird von der Rotationsfläche (h, k), wenn überhaupt, in 2 Parallelkreisen $z = z_0', z_1'$ (vgl. Fig. 1) geschnitten, die eventuell auch zusammenfallen. Auf den unteren Halbkegel übergehend, hätte man

$$f(z) = -\operatorname{tg}\gamma . z$$

und $A = 0$, $B = \infty$ zu nehmen. Es findet sich dann nur ein Schnittkreis $z = z_2'$ zwischen Halbkegel und Rotationsfläche (h, k) und liegt daher ein instabiler Zweig der Bewegung vor (vgl. § 6, VI).

Im Wesentlichen ebenso, wie der nach oben offene Halbkegel, verhalten sich alle *unten geschlossenen und oben offenen Rotationsflächen mit einfachen Horizontalschnitten,* wenn sie zwischen dem Niveau $z = -\frac{h}{g}$ und ihrem tiefer liegenden Schnittpunct mit der Rotationsaxe überall den Bedingungen des § 3 genügen und der Winkel der absteigenden Tangente der Halbmeridiancurve gegen die Richtung der Halbaxe y beständig wachsend von einem zwischen 0 und π gelegenen Anfangswerthe bis π sich bewegt. Sie werden, wenn überhaupt, von der Rotationsfläche (h, k) unterhalb des Niveau's $z = -\frac{h}{g}$ in zwei getrennten oder zusammenfallenden Puncten geschnitten.

Ein Beispiel für den Fall, wo *zwei bedingt periodische Zweige* der Bewegung möglich sind, bietet die durch Rotation der Fusspunctcurve einer Ellipse

$$(y^2 + z^2)^2 - (a^2y^2 + b^2z^2) = 0$$

entstehende Fläche unter der Voraussetzung:

$$2a^2 < b^2.$$

Die Gleichung der Halbmeridiancurve ist:

$$y = f(z) = \sqrt{(a^2 - 2z^2) + \sqrt{a^4 + 4(b^2 - a^2)z^2}}.$$

Die Function erfüllt innerhalb der Grenzen $A = -b$ und $A = +b$ alle Bedingungen des § 3. Bei geeigneter Wahl der Constanten h werden dann mit stetiger Abnahme der Constanten k der Reihe nach folgende Formen der Bewegung auftreten.

Solange die Fläche (h, k) die gegebene Fläche in 2 Parallelkreisen $z = z_0$ und $z = z_3$ schneidet, die respective in der Nähe von $z = -b$ und $z = +b$ liegen (vgl. Fig. 2, 1) besteht die Bewegung aus einem einzigen bedingt periodischen Zweige (Normalform des § 4). Sobald zu den beiden Schnittkreisen $z = z_0$ und $z = z_3$ noch eine Berührung beider Flächen in einem zwischen jenen liegenden Parallelkreis $z = z_1 = z_2$ tritt, liegt die in § 6, IV betrachtete asymptotische Bewegung vor, die auch als labil periodische Bewegung längs des letztgenannten Parallelkreises betrachtet werden kann. Indem weiterhin die beiden Flächen in 4 Parallelkreisen $z = z_0$, $z = z_1$, $z = z_2$, $z = z_3$ sich schneiden (vgl. Fig. 2, 2) zerfällt die Bewegung in 2 bedingt periodische Zweige auf den Zonen $z_0 < z < z_1$ und $z_2 < z < z_3$. Beim Zusammenfall von z_0 und z_1 wird sodann der obere Zweig stabil periodisch. Weiterhin verschwindet er ganz, und es bleibt (vgl. Fig. 2, 3) nur mehr ein bedingt periodischer Zweig mit den Wendekreisen $z = z_2$ und $z = z_3$ übrig, der seinerseits in eine stabil periodische Bewegung übergeht, wenn die beiden Wendekreise zusammenrücken.

§ 8. *Gleichungen der Bewegung auf einer Rotationsfläche mit zweifachen Horizontalschnitten.*

Die Gleichung einer Rotationsfläche sei mit Bezug auf dasselbe Coordinatensystem, wie in § 3, wiederum:

$$x^2 + y^2 = f^2(z), \tag{1}$$

jedoch soll die Function $f(z)$ die Form haben:

$$(23) \qquad f(z) = p(z) + \sqrt{q(z)},$$

und soll für jeden Werth von z in dem Intervalle

$$(24) \qquad a \leqq z \leqq b$$

2 im Allgemeinen verschiedene positive reelle Werthe haben, die nur an den beiden Grenzen $z = a$ und $z = b$ des Intervalles zusammenfallen. Diese Eigenschaft von $f(z)$ soll dadurch bedingt sein, dass die Function $q(z)$ die Form hat:

$$(25) \qquad q(z) = (z - a)(b - z)\,r(z),$$

und dass die Functionen $p(z)$ und $r(z)$ für alle der Ungleichung (24) entsprechenden Werthe von z eindeutige und stetige Functionen der reellen Variabeln z sind und einen positiven reellen, von 0 und ∞ verschiedenen Werth besitzen. Auch sollen diese Functionen in demselben Umfange einen bestimmten, nicht ∞ werdenden 1. Differentialquotienten $p'(z)$ und $q'(z)$ besitzen. Endlich soll in dem betrachteten Intervalle:

$$(26) \qquad p(z) > \sqrt{q(z)}$$

sein. Die Rotationsfläche ist dann eine *geschlossene Ringfläche*, welche von jeder Horizontalebene zwischen $z = a$ und $z = b$ in 2 getrennten Parallelkreisen geschnitten und von den Ebenen $z = a$ und $z = b$ selbst längs eines solchen berührt wird.

Die Differentialgleichungen (5) für die Bewegung eines schweren Punctes m auf der Fläche haben jetzt in dem Intervalle $a \leqq z \leqq b$ insofern einen andern Charakter wie früher in dem Intervall § 3, 2, als $f^2(z)$ nicht mehr eindeutig und $f'(z)$ nicht mehr überall von ∞ verschieden ist. Sie können aber auf eine der früheren analoge Form gebracht werden durch die Substitution

$$(27) \qquad z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos u;$$

es wird dann:

$$\sqrt{q(z)} = \sqrt{(z-a)(b-z)}\sqrt{r(z)} = -\frac{a-b}{2}\sin u\,.\sqrt{r(z)}, \quad dz = -\frac{a-b}{2}\sin u\,du.$$

Dieses Abhängigkeitsverhältniss zwischen den Variabeln z und u ist derart, dass, während u alle möglichen reellen Werthe durchläuft, z immer zwischen a und b oscillirt. Es ist daher bei den gemachten Voraussetzungen:

$$(28)\quad f(z) = p\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos u\right) - \frac{a-b}{2}\sin u \sqrt{r\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos u\right)} = F(u)$$

eine eindeutige und stetige Function von u, die immer positiv und von 0 und ∞ verschieden ist. Ferner wird:

$$(29)\qquad 1 + f'^2(z) = \frac{q(z) + \left(p'(z)\sqrt{q(z)} + \frac{1}{2}q'(z)\right)^2}{(z-a)(b-z)r(z)} = \frac{G(u)}{(z-a)(b-z)},$$

wo $G(u)$ für alle reellen Werthe von u nicht nur eindeutig und stetig, sondern auch positiv und von 0 und ∞ verschieden ist. Da nämlich

$$(30)\qquad G(u) = [1 + f'^2(z)](z-a)(b-z),$$

so ist für alle Werthe von u, für die $a < z < b$, $G(u)$ positiv und von 0 verschieden; für solche Werthe von u aber, für die $z = a, b$ wird, ist

$$G(u) = \frac{1}{4}\frac{q'^2(z)}{r(z)}$$

ebenfalls positiv und von 0 verschieden. Da ferner für $a \leqq z \leqq b$ weder $r(z)$ verschwindet noch $q(z), p'(z), q'(z)$ ∞ werden können, so ist nach (29) $G(u)$ für alle reellen Werthe von u endlich.

Wenn aber $G(u)$ diese Eigenschaften hat, so wird in dem Differential:

$$\sqrt{1 + f'^2(z)}\,dz = \sqrt{G(u)}\,du$$

der Coefficient von du bei stetiger Bewegung von u niemals sein Vorzeichen wechseln und kann daher ohne Beschränkung demselben sein positiver Werth beigelegt werden.

Hiernach nehmen die analytischen Gleichungen der Bewegung des Punctes m auf der Ringfläche zunächst folgende unentwickelte Form an:

$$(31) \quad x = F(u)\cdot\sqrt{1-v}, \qquad y = F(u)\cdot\sqrt{v}, \qquad z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos u,$$

$$(32) \quad \begin{cases} -\int\limits_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int\limits_{u_0}^u \frac{k\sqrt{G(u)}\,du}{F(u)\sqrt{R(u)}} = 0, \\ \int\limits_{u_0}^u \frac{F(u)\sqrt{G(u)}\cdot du}{\sqrt{R(u)}} = t, \end{cases}$$

worin:

$$(33) \quad R(u) = 2(gz+h)f^2(z) - k^2 = 2\left[g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos u\right) + h\right]F^2(u) - k^2.$$

Man kann überdies für u in den Gleichungen (31) und (32) auch die Variable w einführen, indem man setzt:

$$(34) \qquad \cos u = \frac{1-w^2}{1+w^2}, \qquad \sin u = \frac{2w}{1+w^2}, \qquad du = \frac{2dw}{1+w^2},$$

worauf $F(u)$, $G(u)$, $R(u)$ eindeutige Functionen von w werden, etwa $F_1(w)$, $G_1(w)$, $R_1(w)$ und die Gleichungen (31) und (32) die Gestalt annehmen:

$$(31') \quad x = F_1(w)\cdot\sqrt{1-v}, \qquad y = F_1(w)\cdot\sqrt{v}, \qquad z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\,\frac{1-w^2}{1+w^2},$$

$$(32') \quad \begin{cases} -\int\limits_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int\limits_{w_0}^w \frac{2k\sqrt{G_1(w)}\,dw}{(1+w^2)F_1(w)\sqrt{R_1(w)}} = 0, \\ \int\limits_{w_0}^w \frac{2F_1(w)\sqrt{G_1(w)}\,dw}{(1+w^2)\sqrt{R_1(w)}} = t; \end{cases}$$

u_0 und w_0 sind die der Zeit $t = 0$ entsprechenden Anfangswerthe von u und w.

Auf analoge Form würden sich die Bewegungsgleichungen für die nach oben offenen und nach unten geschlossenen Ringflächen mit theils zweifachen theils einfachen Horizontalschnitten bringen lassen; jedoch bietet diese Untersuchung nichts wesentlich verschiedenes von der eben geführten dar.

§ 9. *Die beiden Normalformen der stabilen Bewegung auf einer Rotationsfläche mit zweifachen Horizontalschnitten.*

In den Formeln (31) sind x, y, z für alle reellen Werthe von u und alle v zwischen 0 und 1 eindeutige Functionen von $u, \sqrt{v}, \sqrt{1-v}$; ferner gilt in demselben Umfange von den Functionen:

$$g_{11} = -\frac{1}{2}, \qquad g_{12} = \frac{k\sqrt{G(u)}}{F(u)},$$

$$g_{21} = 0, \qquad g_{22} = F(u)\sqrt{G(u)}$$

in (32), dass sie eindeutig und endlich sind und ihr Vorzeichen niemals wechseln. Hat nun die Function $R(u)$ zwei Nullpuncte u_0 und u_1, sodass $R(u) = (u - u_0)(u_1 - u)r(u)$ in dem Intervalle zwischen u_0 und u_1 positiv und von 0 verschieden ist, so ist auch die Determinante:

$$D = -\frac{1}{2}\frac{F(u)\sqrt{G(u)}}{\sqrt{r(u)}}$$

in diesem Intervalle von 0 verschieden und constanten Vorzeichens. Es sind daher, wie früher, x, y eindeutige, bedingt periodische Functionen und z eine eindeutige periodische Function von t. Die Bewegung entspricht der Normalform des § 4.

Wird dagegen $R(u) = R_1(w)$ für keinen reellen Werth von w gleich 0 und ist für alle Werthe von w positiv und endlich, so bieten die Formeln (31′) und (32′) den Fall des Umkehrproblems § 1, II dar mit:

$$f_{a2} = R_1(w), \qquad D = -\frac{1}{2}\frac{F_1(w)\sqrt{G_1(w)}}{\sqrt{R_1(w)}},$$

$$\omega_{11} = \frac{\pi}{2}, \qquad \omega_{12} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2k\sqrt{G_1(w)}\,dw}{(1+w^2)F_1(w)\sqrt{R_1(w)}},$$

$$\omega_{21} = 0, \qquad \omega_{22} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2F_1(w)\sqrt{G_1(w)}\,dw}{(1+w^2)\sqrt{R_1(w)}}.$$

Es wird daher wieder z eine periodische Function von t mit der Periode $T = 2\omega_{22}$ und x, y bedingt periodische Functionen, die unter der Bedingung:

$$4m_1 \frac{\pi}{2} + 2m_2\omega_{12} = 0$$

die Periode $T = 2m_2\omega_{22}$ bekommen. Geometrisch kann indessen die entsprechende Bewegung als eine zweite Normalform der Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche betrachtet werden, welche sich von jener des § 4 durch das Fehlen der Wendekreise unterscheidet. Der Punct macht volle Umläufe um die Ringfläche sowohl im Sinne der Parallel- als im Sinne der geschlossenen Halbmeridiancurven.

Die Untersuchung der Form der Bewegung des Punctes reducirt sich nach dem Vorstehenden wiederum auf die Aufsuchung der Nullpuncte der Function:

$$R(u) = R_1(w) = 2(gz + h)f^2(z) - k^2,$$

also der Schnittkreise der gegebenen Rotationsfläche mit der Rotationsfläche (h, k) des § 5. Es gelten also unmittelbar die Sätze.

I. *Ragt die gegebene ringförmige Rotationsfläche mit einer Zone in den Raum unterhalb der Rotationsfläche* (h, k) *hinein und ist diese Zone von zwei Parallelkreisen begrenzt, in denen sich die beiden Rotationsflächen schneiden, ohne sich zu berühren, so findet in dieser Zone eine den Differentialgleichungen* (5) *entsprechende bedingt periodische Bewegung des Punctes m statt.*

Auch hier können mehrere bedingt periodische Zweige der Bewegung vorhanden sein und die früher (§ 6) erwähnten Grenzfälle der stabil und labil periodischen Bewegung auftreten.

II. *Liegt die gegebene ringförmige Rotationsfläche ganz unterhalb der Rotationsfläche* (h, k) *ohne mit ihr einen Punct gemein zu haben, so ist die den Differentialgleichungen* (5) *entsprechende Bewegung eine bedingt periodische Bewegung ohne Wendekreise mit zweierlei vollen Umläufen.*

In diesem Falle besteht die Bewegung naturgemäss nur aus einem Zweige. Der *Übergang von dieser Form der bedingt periodischen Bewegung zu einer solchen mit Wendekreisen* findet unter Vermittlung einer *asymptotischen* Bewegung statt, wenn die Ringfläche ganz unterhalb der Fläche (h, k) liegt, aber dieselbe in einem Parallelkreis berührt.

§ 10. *Beispiel des Kreisringes.*

Für die Ringfläche:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

sind die in § 8 mit $f(z)$, $p(z)$, $q(z)$, $r(z)$ bezeichneten Functionen

$$f(z) = a + \sqrt{b^2 - z^2}, \qquad p(z) = a, \qquad q(z) = (z + b)(b - z), \qquad r(z) = 1$$

und die dortigen Constanten a, b durch $-b, b$ zu ersetzen. Die Bedingung (26) wird:

$$a > b.$$

Die Gleichungen der Bewegung lauten, wenn man statt des in § 8 eingeführten u noch $\pi - u$ setzt:

$$x = (a + b \sin u)\sqrt{1 - v}, \qquad y = (a + b \sin u)\sqrt{v}, \qquad z = b \cos u;$$

$$-\int\limits_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1 - v)}} + \int\limits_{u_0}^u \frac{kb\,du}{(a + b \sin u)\sqrt{R(u)}} = 0,$$

$$\int\limits_{u_0}^u \frac{b(a + b \sin u)\,du}{\sqrt{R(u)}} = t;$$

$$R(u) = 2(bg \cos u + h)(a + b \sin u)^2 - k^2.$$

Die Werthe $u = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ entsprechen bezüglich dem tiefsten, dem äussersten, dem höchsten und dem innersten Parallelkreis der Ringfläche, sodass der 1. und 2. *Quadrant in Bezug auf* u die positiv, der 3. und 4. die negativ gekrümmten Theile der Fläche umfasst.

Durch die Substitution (34) werden die Integrale mit der Variabeln u auf die algebraische Form gebracht; sie sind *hyperelliptisch vom Geschlecht* $p = 3$.

Die Discussion der Schnittcurven der Ringfläche mit der Rotationsfläche (h, k) ergiebt nun ohne Schwierigkeit: Wenn die Ringfläche von der Rotationsfläche (h, k) geschnitten wird, was für $-bg < h < bg$ immer stattfindet und auch für $h > bg$ (dem Falle $h < -bg$ entspricht keine Bewegung) noch stattfinden kann, so giebt es jedenfalls unerreichbare Theile der Ringfläche. Es sind entweder 2 oder 4 Wendekreise vorhanden und besteht daher die Bewegung aus einem oder zwei Zweigen, welche bedingt periodische Bewegungen von der Normalform des § 4 sind.

Wenn dagegen die Ringfläche ganz unterhalb der Rotationsfläche (h, k) verläuft, so liegt die zweite Normalform der bedingt periodischen Bewegungen vor und macht der Punct m volle Umläufe im Sinne der Parallelkreise sowohl, wie im Sinne der Meridiankreise der Ringfläche.

Wenn das Zerfallen der Bewegung in 2 Zweige möglich ist (wie z. B. für die der Fig. 3 zu Grunde gelegte Annahme $a = b\sqrt{2}$, $h = \frac{3}{2}\frac{bg}{\sqrt{2}}$), so gestaltet sich der Ubergang der einzelnen Formen ineinander folgendermaassen:

Zuerst wenn die Ringfläche ganz unterhalb der Rotationsfläche (h, k) liegt, (vgl. Fig. 3, 1) findet die *bedingt periodische Bewegung ohne Wendekreise* statt. Sobald alsdann die letztere Fläche die unter ihr liegende Ringfläche in einem Parallelkreise des 3. Quadranten berührt, löst sich die Bewegung in eine *asymptotische Form* auf, die dem fraglichen Parallelkreis immer näher kommt, ohne ihn je zu erreichen. Bei weiterer Abnahme von k schneidet die Fläche (h, k) bereits eine Zone unerreichbarer Puncte aus der Ringfläche aus, während die Bewegung auf der andern, unterhalb der Fläche (h, k) gelegenen Zone *bedingt periodisch mit 2 Wendekreisen* ist. Weiterhin berührt die Fläche (h, k), während sie noch immer den Ring in 2 Parallelkreisen schneidet, denselben gleichzeitig in einem 3. Parallelkreis der bisher der Bewegung zugänglichen Zone, sodass die Bewegung sich abermals in eine *asymptotische* auflöst. Bei 4 Schnittkreisen der beiden Flächen zerfällt hierauf die Bewegung in *zwei bedingt periodische Zweige* mit je 2 Wendekreisen. Die Zone des einen Zweiges liegt ganz im 3. Quadranten, die des anderen greift über den 1. Quadranten herum und nähert sich beiderseits der ersteren Zone. Bei abnehmendem k fallen die beiden Wendekreise der ganz im 3. Quadranten belegenen Zone zusammen (vgl. Fig. 3, 2) und die Bewegung besteht aus *einem stabil periodischen und einem bedingt periodischen Zweige.* Der erstere verschwindet alsdann und es bleibt, indem nur mehr zwei

Schnittkreise der beiden Flächen vorliegen nur *ein bedingt periodischer Zweig* (vgl. Fig. 3, 3), dessen beide Wendekreise sich mehr und mehr von verschiedenen Seiten her gegen den 1. Quadranten hinziehen. In diesem fallen sie schliesslich zusammen und eine *stabil periodische Durchlaufung* des betreffenden Parallelkreises, in welchem die Rotationsfläche (h, k) den ganz oberhalb liegenden Ring berührt, erscheint als letzte Grenzform der Bewegung.

Dorpat, im Februar 1888.

Staude, Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche.

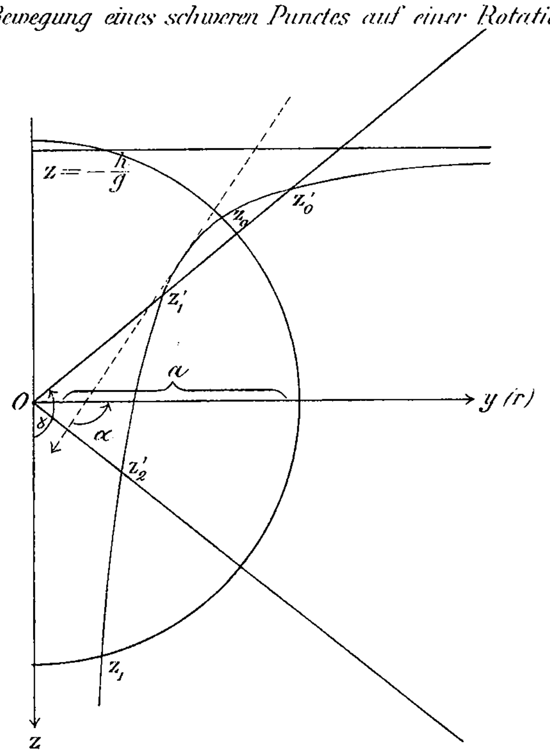

Fig. 1.

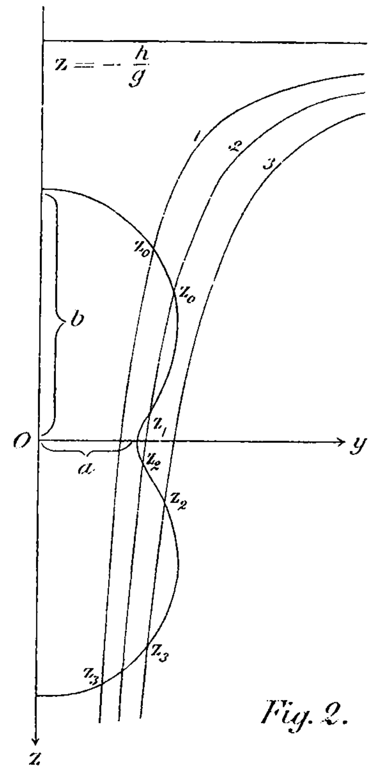

Fig. 2.

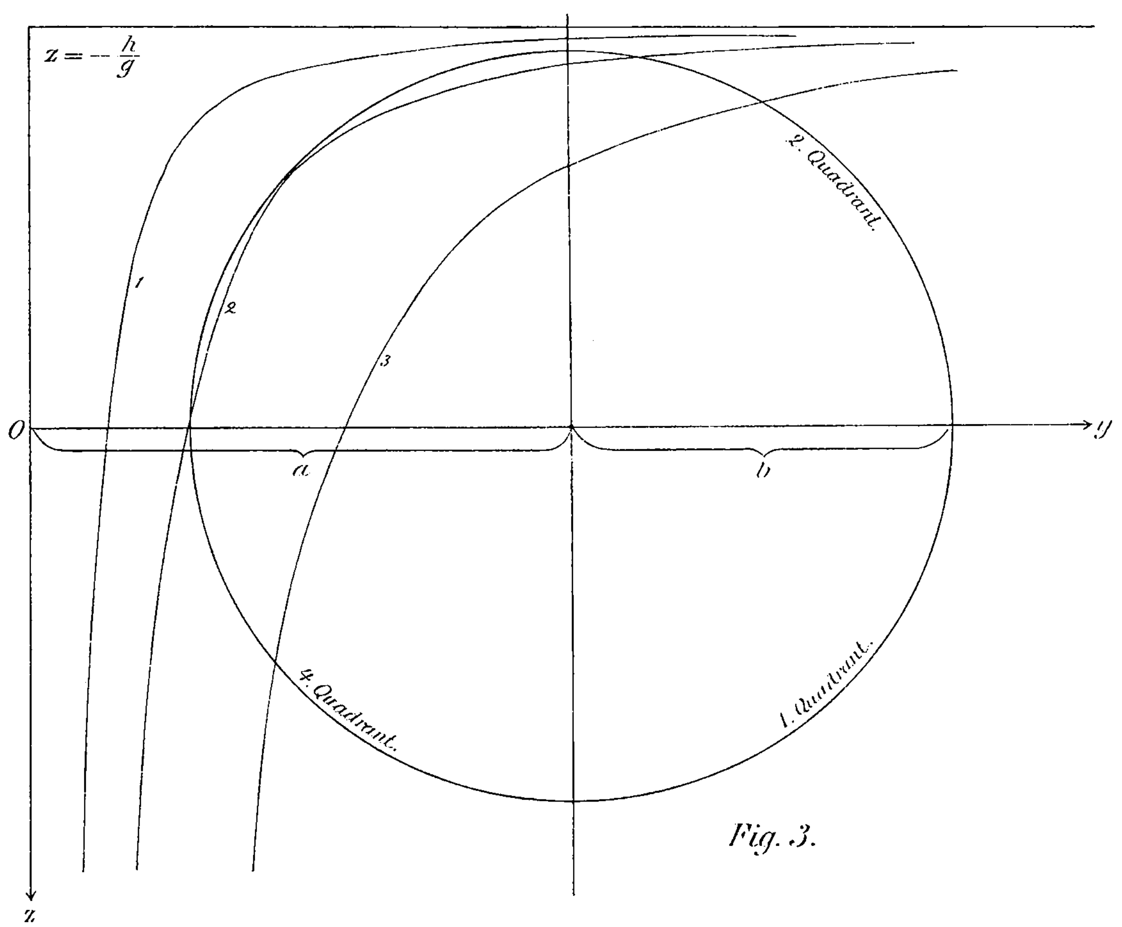

Fig. 3.