UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE NORMEN KOMPLEXER ZAHLEN

VON

K. SCHWERING
in COESFELD.

Wenn $\alpha^\lambda = 1$, λ Primzahl und α nicht reell ist, so heisst der Ausdruck

$$a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$

wo $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{\lambda-1}$ reelle ganze Zahlen bedeuten, *eine aus λ^{ten} Einheitswurzeln gebildete komplexe Zahl.* Unter der *Norm* einer solchen komplexen Zahl versteht man das Produkt

$$\prod_r (a_1\alpha^r + a_2\alpha^{2r} + a_3\alpha^{3r} + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{r(\lambda-1)}). \qquad {\scriptstyle (r=1,2,3,\ldots,\lambda-1)}$$

Die Berechnung einer solchen Norm ist bei zahlentheoretischen Untersuchungen insofern eine Sache von grundlegender Bedeutung, als die Norm allein Auskunft über die wesentlichen Eigenschaften einer komplexen Zahl geben kann. Es war daher unbedingt geboten, in erheblichem Umfange Normenberechnungen durchzuführen und die Ergebnisse in Tafeln zusammen zu stellen. Solche Tafeln hat Herr C. G. Reuschle mit grosser Sorgfalt berechnet, und die Akademie der Wissenschaften in Berlin hat den Druck auf ihre Kosten herstellen lassen. Ist hiermit dem praktischen Bedürfnisse abgeholfen, so bleibt gleichwohl für die Theorie die ebenso interessante als schwierige Aufgabe zu lösen, den wirklichen Ausdruck der Norm näher zu untersuchen. Schon Herr Reuschle selbst hat in dieser Richtung Wege gezeigt. In einer kleinen Gelegenheitsschrift *Entwicklung von Produkten konjugirter Faktoren,* Stuttgart 1874, finden sich beachtenswerte Angaben über die Bildung der Norm. Insbesondere bildet er die von ihm sogenannte *kubische Normform* und verwendet sie für Primzahlen des ersten Tausend. Wenn nun meine eigenen Untersuchungen einen ganz anderen, und wie ich glaube, zweckentsprechenderen Gang genommen haben, so verdanke ich dies dem glücklichen Umstande, dass mir die Aufgabe der Normenberechnung bei einem besonders geeigneten Ausgangspunkte entgegentrat. Ich wurde nämlich durch eine von Herrn KRONECKER gestellte Frage veranlasst, die Normen *trinomischer* komplexer Zahlen zu untersuchen und kam so zu dem Bd. **10** S. 79 (diese Zeitschrift) stehenden Ausdrucke. So blieben meine Rechnungen in ziemlich weitem Umfange wirklich ausführbar und ich sah mich in den Stand gesetzt, für die von wir gewählte Form alle Fragen nach Anzahl und Bildung der auftretenden Glieder vollständig beantworten zu können.

1. Fangen wir mit einem Beispiele an. Wir suchen die Norm

$$N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}); \qquad \alpha^{\lambda} = 1.$$

Zu diesem Zwecke bilden wir

$$(1) \qquad P(z) = (z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}).$$

Dann hat die Gleichung $P(z) = 0$ die λ Wurzeln:

$$z_r = -(a\alpha^r + b\alpha^{\delta r} + c\alpha^{\varepsilon r}). \qquad (r=0, 1, 2, \ldots, \lambda-1)$$

Suchen wir zunächst die Potenzsummen dieser Wurzeln zu bestimmen. Für jede komplexe Zahl

$$\varphi(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$$

erhält man

$$(2) \qquad \varphi(1) + \varphi(\alpha) + \varphi(\alpha^2) + \ldots + \varphi(\alpha^{\lambda-1}) = \lambda a_0.$$

Dies soll künftig durch

$$(3) \qquad \Sigma\varphi(\alpha) = \lambda a_0$$

kurz ausgedrückt werden. Bezeichnen wir nun die Summe der h^{ten} Potenzen kurz durch s_h, so ist:

$$(4) \qquad s_h = z_0^h + z_1^h + \ldots + z_{\lambda-1}^h = \Sigma(-1)^h(a\alpha^r + b\alpha^{\delta r} + c\alpha^{\varepsilon r})^h.$$

Entwickeln wir nun rechts nach dem *polynomischen* Lehrsatze, so haben wir nur diejenigen Glieder zu berücksichtigen, welche wir oben mit a_0 bezeichneten, also die Glieder von der Form

$$(-1)^h \cdot \frac{|\underline{h}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{m}} a^k b^l c^m \cdot \alpha^{k+\delta l+\varepsilon m},$$

wo k, l, m den Bedingungen genügen müssen:

$$(5) \qquad \begin{cases} k + \delta l + \varepsilon m \equiv 0 \pmod{\lambda}, \\ h = k + l + m \overline{\overline{<}} \lambda. \end{cases}$$

Wir sehen hier die verallgemeinerte Form derjenigen Kongruenzen vor uns, welche zuerst E. Kummer bei Zerlegung der ψ-Funktionen in Faktoren bemerkt hat. Ganz allgemein können wir diese Kongruenzen so erklären:

$$(6) \qquad \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m \equiv 0 \pmod{\lambda}, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m \overline{\overline{<}} \lambda. \end{cases}$$

Die $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sind *gegebene* positive oder negative ganze Zahlen, die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ dürfen nur *positive* ganze Zahlen sein. Diese Kongruenzen bilden einen Hauptgegenstand unserer Untersuchungen und mögen kurz als Kummersche Kongruenzen m^{ter} Ordnung bezeichnet werden.

Für alle durch die Kummersche Kongruenz 3^{ter} Ordnung (5) bestimmten Wertegruppen k, l, m finden wir

$$(7) \qquad s_h = \lambda \sum_{k,l,m} (-1)^h \cdot \frac{|\underline{h}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{m}} a^k b^l c^m.$$

Aus diesen s_h sind die Koefficienten p_h durch die Waringsche Formel zu gewinnen. Obwohl diese Formel in der erwähnten Abhandlung S. 62 bereits von uns abgeleitet worden ist, können wir nicht umhin, diese Ableitung hier noch einmal in gedrängter Kürze zu wiederholen. Es soll nämlich eine, wie es scheint, *nicht unwesentliche Erweiterung* dieser bekannten algebraischen Formel angeschlossen werden.

Es ist

$$\log(z - z_r) = \log z - \frac{1}{z} \cdot z_r - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot z_r^2 - \ldots - \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{z^h} \cdot z_r^h - \ldots .$$

Daher

$$\log P = \lambda \log z - \frac{1}{z} \cdot s_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot s_2 - \ldots - \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{z^h} \cdot s_h - \ldots .$$

Nun erscheinen aber unsere s_h, wie Gleichung (7) zeigt, wieder als *Summen* und zwar aus Summanden von der obigen Form. Demnach wird

$$P = z^\lambda \prod e^{\lambda(-1)^{h+1} \cdot \frac{\underline{|h-1}}{\underline{|k}\,\underline{|l}\,\underline{|m}} \frac{a^k b^l c^m}{z^h}} . \tag{8}$$

Für jede Wertgruppe k, l, m, welche der Kummerschen Kongruenz (5) genügt, hat man also die Reihe zu bilden:

$$1 + \ldots + \frac{1}{\underline{|t}}(-1)^{(h+1)t} \left\{ \lambda \frac{\underline{|h-1}}{\underline{|k}\,\underline{|l}\,\underline{|m}} \frac{a^k b^l c^m}{z^h} \right\}^t . \qquad (t = 1, 2, 3, \ldots)$$

Die so entstehenden Reihen sind zu multipliziren und das Produkt noch mit z^λ zu vervielfachen. Alle Potenzen mit negativem Exponenten von z fallen weg. *Bei dieser Entwicklung spielen also die Wertverbindungen, welche den Kummerschen Kongruenzen genügen, dieselbe Rolle, welche bei der gewöhnlichen Waringschen Entwicklung den Potenzsummen zufällt.* Hierin besteht die oben angekündigte Erweiterung der Waringschen Formel. Man ist nun imstande, eine Reihe wichtiger Bemerkungen zu unserer Entwicklung zu machen.

1.) Eine Auflösung der Kummerschen Kongruenz lautet

$$k = 0, \qquad l = 0, \qquad m = \lambda .$$

Für diese Wertverbindung erhält P laut Formel (8) den Beitrag c^λ. Ebenso entstehen aus $k = 0$, $l = \lambda$, $m = 0$ und $k = \lambda$, $l = 0$, $m = 0$ die Beiträge b^λ und a^λ. $k = 0$, $l = 0$, $m = 0$ liefert z^λ.

2.) Ausser den vier Gliedern $z^\lambda, a^\lambda, b^\lambda, c^\lambda$ haben alle in P auftretenden Summanden den Faktor λ.

3.) Man kann die in (5) auftretende Ungleichung ersetzen durch

$$k + l + m < \lambda .$$

Denn für $k + l + m = \lambda$ erhalten wir in P die von z freien Glieder,

$$(a + b + c) N(a\alpha + b\alpha^\delta + c\alpha^\varepsilon),$$

welche als Norm einer *trinomischen* Zahl (einer Zahl niedrigerer Ordnung) für erledigt gelten können.

Die vorstehenden Untersuchungen sind zwar nur für die *viergliedrige* Zahl $z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}$ durchgeführt. Allein es ist klar, dass die gezogenen Schlüsse mit geringer Änderung *allgemeine Geltung* erhalten.

Wir verzichten also darauf, die Faktoren unserer Norm nach *Perioden* zusammenzufassen. Anders wird der praktische Rechner verfahren. Er wird mit Reuschle z. B. für $\lambda = 3m + 1$ zunächst m Faktoren zu einem Produkte $A_0\eta_0 + A_1\eta_1 + A_2\eta_2$ vereinigen und dann die Norm dieser Zahl nehmen. Leider scheinen aber die Gesetze, nach denen sich die Zahlen A_0, A_1, A_2 bilden, durchaus nicht einfach zu sein. Ja, es ist sogar von grossem Vorteil, den Faktor $z + a + b + c$ zur Norm hinzuzufügen. Ist so in P der mit λ multiplicirte Teil berechnet, so weiss man, dass derselbe für jede komplexe *Einheit* von der Form $z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}$ *verschwinden* muss, wenn $a = b = c = z = \pm 1$ ist. *Und statt der Gleichung*

$$\alpha^{\lambda-1} + \alpha^{\lambda-2} + \ldots + \alpha + 1 = 0$$

haben wir die einfachere

$$\alpha^{\lambda} = 1$$

2. Wir stellen uns jetzt die Frage: *Wieviel Glieder enthält der entwickelte Ausdruck:*

$$(9) \qquad (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) N(a_1\alpha + a_2\alpha^{\delta} + \ldots + a_m\alpha^{\mu})?$$

Wir werden diese Frage wieder für die viergliedrige Zahl in (1) beantworten. Die Antwort wird in einer Form gegeben werden, welche sich alsbald verallgemeinern lässt. In dem entwickelten Produkte

$$(z + a + b + c) N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon})$$

kommen soviel wesentlich verschiedene Glieder vor als die Kummersche Kongruenz (5) Lösungen enthält. Darunter befinden sich aber die sämtlichen Glieder des Produkts nächstniedrigerer Ordnung, nämlich diejenigen, für welche $z = 0$, also $k + l + m = \lambda$ ist. Daher finden wir die Zahl, um welche die Gliederzahl des Produkts aus *vier* Elementen die Gliederzahl des Produkts nächstniedrigerer Ordnung übertrifft, wenn wir die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$(10) \qquad k + \delta l + \varepsilon m \equiv 0 \pmod{\lambda}$$

bestimmen, für welche ist

$$k + l + m < \lambda.$$

Wir betrachten die Funktion $\varphi(z, x)$ von der Form:

$$(11) \qquad \varphi(z, x) = \frac{1}{1 - xz} \cdot \frac{1}{1 - x^\delta z} \cdot \frac{1}{1 - x^\varepsilon z}.$$

Dann ist

$$\varphi(z, x) = \sum_{k, l, m} x^{k + \delta l + \varepsilon m} . z^{k + l + m}. \qquad (k, l, m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Die Reihe ist konvergent, wenn die drei Grössen xz, $x^\delta z$, $x^\varepsilon z$ ihrem absoluten Betrage nach jede kleiner als Eins sind. Ersetzen wir x durch $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^\lambda$ und addiren die so entstandenen Reihen, so wird rechts jede Potenz von x in Wegfall kommen, für welche die Kongruenz (10) nicht erfüllt ist. Jede Lösung k, l, m derselben liefert dagegen den Beitrag λ. So erhält man

$$(12) \qquad \sum_\alpha \varphi(z, \alpha) = \lambda \sum a_h . z^h.$$

Hier bezeichnet a_h *die Anzahl der Lösungen der Kongruenz* (10), *welche die Eigenschaft haben, dass ihre Summe h ist;*

$$(13) \qquad k + l + m = h.$$

Setzen wir andererseits

$$(14) \qquad \psi(u) = (u - x)(u - x^\delta)(u - x^\varepsilon),$$

so ist

$$(15) \qquad \varphi(z, x) = \frac{x^2}{\psi'(x)} \cdot \frac{1}{1 - xz} + \frac{x^{2\delta}}{\psi'(x^\delta)} \cdot \frac{1}{1 - x^\delta z} + \frac{x^{2\varepsilon}}{\psi'(x^\varepsilon)} \cdot \frac{1}{1 - x^\varepsilon z}.$$

Als Koefficient von z^h erscheint daher jetzt:

$$(16) \qquad \frac{x^{h+2}}{\psi'(x)} + \frac{x^{(h+2)\delta}}{\psi'(x^\delta)} + \frac{x^{(h+2)\varepsilon}}{\psi'(x^\varepsilon)}.$$

Wenn wir nun h alle Werte von Null bis $\lambda - 1$ durchlaufen lassen und dann über alle Werte $x = \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^\lambda$ summiren, endlich das Resultat durch λ dividiren, so erhalten wir zufolge (12) die Anzahl der Lösungen der Kongruenz (10). Schliessen wir zunächst den Betrag der Summe für $x = \alpha^\lambda = 1$ aus. Dann sind zwei Zahlen h' und h'' immer so wählbar, dass man erhält

$$(h' + 2)\delta \equiv (h'' + 2)\varepsilon \equiv (h + 2) \pmod{\lambda}.$$

Hierdurch aber verwandelt sich der Ausdruck (16) in

$$\alpha^{h+2}\left\{\frac{1}{\psi'(\alpha)} + \frac{1}{\psi'(\alpha^\delta)} + \frac{1}{\psi'(\alpha^\varepsilon)}\right\}.$$

Der Klammerausdruck ist, wie die Entwicklung von $\frac{1}{\psi(u)}$ nach fallenden Potenzen von u zeigt, identisch *Null*. Mithin liefert die Summirung über die *komplexen* α zur *Summe der Koefficienten* a_h keinen Beitrag. Es bleibt also noch der Beitrag, den $x = 1$ liefert, zu bestimmen. Dieser ist zusammengesetzt aus sämtlichen Koefficienten von z^h in $\varphi(z, 1)$. Nun ist

$$\varphi(z, 1) = \frac{1}{(1-z)^3} = \sum \frac{(h+2)(h+1)}{1 \cdot 2} z^h$$

und die Summe aller Zahlen $\frac{(h+2)(h+1)}{1 \cdot 2}$ von $h = 0$ bis $h = \lambda - 1$ beträgt $\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Trennen wir λ ab, so ist die gesuchte Zahl $\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2 \cdot 3}$. Um soviel *übertrifft* die Anzahl der Glieder des entwickelten Produkts P aus *vier* Elementen die Anzahl der Glieder des Produkts nächstniedrigerer Ordnung. Durch ganz analoge Schlüsse findet man, dass das Produkt P für *fünf* Elemente dasjenige für *vier* um

$$\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

übertrifft u. s. w. Hiernach erhalten wir das Endergebnis:

Das aus m Elementen zusammengesetzte Produkt

$$P = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) N(a_1\alpha + a_2\alpha^\delta + \ldots + a_m\alpha^\mu)$$

enthält

$$(17)\quad g = 2 + \frac{\lambda + 1}{2} + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2) \ldots (\lambda + m - 2)}{2 \cdot 3 \ldots (m - 1)}$$

verschiedene Glieder.

So ist für $\lambda = 11$

$$m = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$$

$$g = 2, 8, 34, 125, 398, 1126, 2894, 6872, 15270.$$

3. Im vorhergehenden Paragraphen haben wir die *Anzahl* der verschiedenen Glieder des entwickelten Produkts P kennen gelernt. Wir suchen jetzt die *Beschaffenheit* dieser Glieder näher zu bestimmen. Wenn die komplexe Zahl, deren P gesucht wird, aus *vier* Elementen besteht, also

$$z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon},$$

so kann man fragen: *Wieviel Glieder $a^k b^l c^m z^n$ kommen in P vor, bei denen die Zahlen k, l, m, n sämtlich von Null verschieden sind?* Diese Frage ist nicht ohne Bedeutung. Denn ihre Beantwortung gibt zu erkennen, wieviel Koefficienten in P wirklich neu zu berechnen sind; ist nämlich eine der 4 Zahlen k, l, m, n Null, so kann man den betreffenden Koefficienten durch die Berechnung des P einer trinomischen Zahl finden. Und Gleiches gilt allgemein. Für die Berechnung des P einer aus m Elementen bestehenden Zahl sind nur diejenigen Lösungen der KUMMERschen Kongruenz von Bedeutung, welche von Null verschieden sind.

Wir lösen die Aufgabe zunächst für $m = 4$ und dehnen dann die Lösung durch ein Verfahren weiter aus, welches dem im vorigen Paragraphen analog ist.

Für das P einer vierelementigen komplexen Zahl haben wir die 4 Glieder $z^{\lambda} + a^{\lambda} + b^{\lambda} + c^{\lambda}$. Verschwindet eins der Elemente, so entsteht eine trinomische Zahl, es erscheinen also $\frac{\lambda - 1}{2}$ Glieder von der Form $a^k b^l z^n$. Im ganzen zeigen also $4 \cdot \frac{\lambda - 1}{2}$ Glieder diese Form. Endlich bleiben die Glieder von dem gesuchten Typus, x an der Zahl. Daher mit Rücksicht auf (17)

$$x + 4 \cdot \frac{\lambda - 1}{2} + 4 = 2 + \frac{\lambda + 1}{2} + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2 \cdot 3}.$$

Hieraus folgt durch leichte Rechnung:

$$x = \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{2 \cdot 3} - \frac{\lambda - 1}{2}.$$

Zur Verallgemeinerung unseres Ergebnisses greifen wir auf die Funktion $\varphi(z, x)$ zurück. Für das entwickelte Produkt P der fünfelementigen komplexen Zahl

$$z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon} + d\alpha^{\vartheta}$$

fällt die Frage: »Wie gross ist die Anzahl der Glieder vom Typus $a^k b^l c^m d^n z^\nu$?» genau zusammen mit der folgenden: »Wie gross ist die Anzahl der Lösungen der Kummerschen Kongruenz

$$k + \delta l + \varepsilon m + \vartheta n \equiv 0 \pmod{\lambda},$$
$$k + l + m + n < \lambda,$$

wenn keine der Zahlen k, l, m, n verschwinden darf?»

Bilden wir die Funktion:

$$\frac{xz}{1 - xz} \cdot \frac{x^{\delta} z}{1 - x^{\delta} z} \cdot \frac{x^{\varepsilon} z}{1 - x^{\varepsilon} z} \cdot \frac{x^{\vartheta} z}{1 - x^{\vartheta} z} = \sum x^{k + \delta l + \varepsilon m + \vartheta n} \cdot z^{k + l + m + n},$$

so wird jetzt der Koefficient von z^h, wenn

$$\psi(u) = (u - x)(u - x^{\delta})(u - x^{\varepsilon})(u - x^{\vartheta}),$$

$$x^{1 + \delta + \varepsilon + \vartheta} \left\{ \frac{x^{h-1}}{\psi'(x)} + \frac{x^{(h-1)\delta}}{\psi'(x^{\delta})} + \frac{x^{(h-1)\varepsilon}}{\psi'(x^{\varepsilon})} + \frac{x^{(h-1)\vartheta}}{\psi'(x^{\vartheta})} \right\}.$$

Für $h = 1, 2, 3$ wird der Klammerausdruck identisch *Null*. Lassen wir auch $h = \lambda$ zu, so durchlaufen die Exponenten von x wieder völlige Restsysteme mod λ, können also zur Summe Null zusammengefasst werden, wie früher. Bestimmt man den Beitrag für $x = 1$, so findet man ihn aus

$$\frac{z^4}{(1 - z)^4} = \sum \frac{(h - 1)(h - 2)(h - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^h$$

analog wie früher zu $\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{2.3.4}$. Aber diese Zahl ist noch um diejenige zu vermindern, welche der anfangs ausgeschlossenen Annahme $h=\lambda$ entspricht. Diese Annahme besagt aber, dass a, b, c, d einen von Null verschiedenen, z den Exponenten Null haben soll. Die Anzahl dieser Fälle haben wir oben bestimmt; es ist die Anzahl der *analogen* Glieder in *dem* P, welches ein Element weniger enthält. Die fünfelementige Zahl liefert also in dem entwickelten Produkte eine Anzahl Glieder

$$f=\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{2.3.4}-\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2.3}+\frac{\lambda-1}{2},$$

welche alle 5 Elemente enthalten. So findet man allgemein:

In dem entwickelten Produkte

$$P=(a_1+a_2+\ldots+a_m)N(a_1\alpha+a_2\alpha^\delta+\ldots+a_m\alpha^\mu)$$

kommen f_m *Glieder vor, welche alle* m *Elemente enthalten, wo*

$$(18)\quad f_m=\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-m+2)}{2.3\ldots(m-1)}-\frac{(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+3)}{2\ldots(m-2)}+\ldots\pm\frac{\lambda-1}{2}.$$

Für das Produkt aus $\lambda-1$ Elementen

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{\lambda-1})N(a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1})$$

erhält man daher die bemerkenswerten Beziehungen:

$$f_{\lambda-1}=\frac{\lambda-1}{2}-\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2.3}+\ldots-\frac{\lambda-1}{2}=0.$$

Ebenso findet man

$$f_{\lambda-2}=\frac{\lambda-1}{2}$$

und allgemein

$$(19)\qquad f_{\lambda-\nu}=f_{\nu+1}.$$

Nun sind wir imstande, in einem gegebenen P_m die *Anzahl* und die *Form* der Glieder genauer anzugeben. In P_m finden sich f_m Glieder, in denen kein Element fehlt, $m.f_{m-1}$ Glieder, in denen *ein* Element fehlt,

$$\frac{m(m-1)}{1.2}.f_{m-2}$$

Glieder, in denen *zwei* Elemente fehlen, u. s. w.

So hat man für $\lambda = 7$ in dem Produkte P_6

6.3	Glieder,	welche	5	Elemente	enthalten, =	18
15.2	»	»	4	»	»	30
20.3	»	»	3	»	»	60
6	»	»	1	»	»	6
					Im Ganzen	114

Diese Zahl liefert auch Formel (17).

Für $\lambda = 11$ hat man in dem vollständigen Produkte

$$P_{10} = (a_1 + \ldots + a_{10}) N(a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{10}\alpha^{10})$$

10. 5	Glieder,	welche	9	Elemente	enthalten, =	50
45.10	»	»	8	»	»	450
120.20	»	»	7	»	»	2400
210.22	»	»	6	»	»	4620
252.20	»	»	5	»	»	5040
210.10	»	»	4	»	»	2100
120. 5	»	»	3	»	»	600
10. 1	»	»	1	»	»	10
					Im Ganzen	15270 Glieder.

Stellen wir nun noch die *Lehrsätze* zusammen, welche für die Kummerschen Kongruenzen im vorstehenden als richtig gefunden worden sind.

1.) Sei

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \overline{\overline{<}}\, \lambda,$$

eine Kummersche Kongruenz m^{ter} Ordnung, so erhält man, wenn alle positiven ganzzahligen Lösungen einschliesslich 0 und λ zugelassen werden,

$$g = 2 + \frac{\lambda + 1}{2} + \ldots + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2) \ldots (\lambda + m - 1)}{2 \cdot 3 \ldots m}$$

Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

2.) Werden aber 0 und λ *nicht* zugelassen und soll sein

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m < \lambda,$$

so erhält man nur

$$f = \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-m+1)}{2\,.\,3\ldots m} - \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-m+2)}{2\,.\,3\ldots(m-1)} + \ldots \pm \frac{\lambda-1}{2}$$

Wertsysteme.

3.) Werden Lösungen $x_r = 0$ zugelassen, wird aber die Bedingung gestellt

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m < \lambda,$$

so beträgt die Anzahl der Lösungen

$$\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m-1)}{2\,.\,3\ldots m}.$$

4.) Werden Lösungen $x_r = 0$ *ausgeschlossen,* aber die Summe gleich λ *zugelassen,* so beträgt die Anzahl der Lösungen

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-m+1)}{2\,.\,3\ldots m}.$$

5.) Sind zwei KUMMERsche Kongruenzen gegeben

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m < \lambda,$$
$$b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_ny_n \equiv 0 \pmod{\lambda},$$
$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n < \lambda,$$

unter Ausschluss der Lösungen $x_r = 0$, $y_s = 0$, so ist die Anzahl der Wertgruppen der x genau gleich derjenigen der y, wenn $m + n = \lambda - 1$.

Beispiel, $\lambda = 7$.

$x_1 + 2x_2 \equiv 0 \pmod{7}$; $y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 \equiv 0 \pmod{7}$

$x_1 + x_2 < 7$ $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 < 7$

$x_1 = 5, 3, 1$ $y_1 = 1, 2, 1$

$x_2 = 1, 2, 3$ $y_2 = 1, 1, 3$

$y_3 = 1, 2, 1$

$y_4 = 2, 1, 1$

Die vertikal unter einander stehenden Zahlen gehören zusammen. Lassen wir aber die Nulllösungen und die Summe $= \lambda = 7$ zu, so hat die zweite Kongruenz noch folgende Wertsysteme:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 1, 3, 5, 0, 2, 4, 1, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 0, 0, 1,\\
y_2 &= 3, 2, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 0,\\
y_3 &= 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 0, 0, 1, 1, 3, 5, 0, 2, 4, 1, 3, 1, 0,\\
y_4 &= 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 4, 3, 4, 5,\\
y_1 &= 0, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 1, 2, 1,\\
y_2 &= 4, 2, 1, 0, 0, 0, 2, 4, 2, 1, 0, 0, 0, 2, 5, 3, 1, 5, 3, 1, 3, 1, 1,\\
y_3 &= 2, 3, 4, 4, 3, 2, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 1, 2, 1,\\
y_4 &= 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 1, 1, 2.
\end{aligned}
$$

Dies sind 43 Lösungen, zu denen noch die 5 selbstverständlichen mit 4 bez. 3 Unbekannten $= 0$ treten. Im ganzen 48. Es ist

$$2 + \frac{8}{2} + \frac{8 \cdot 9}{2 \cdot 3} + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 2 + 4 + 12 + 30 = 48.$$

Lassen wir dagegen Nulllösung zu, die Summe $= 7 = \lambda$ aber nicht, so zählen wir 29 und die selbstverständliche $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$, im ganzen $30 = \dfrac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Verbieten wir endlich Nulllösungen, lassen aber die Summe 7 zu, so erhalten wir $5 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$. Diese 5 Lösungen sind

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 1, 3, 1, 2, 1,\\
y_2 &= 1, 2, 3, 1, 1,\\
y_3 &= 2, 1, 1, 2, 1,\\
y_4 &= 3, 1, 1, 1, 2.
\end{aligned}
$$

Unsere Sätze werden also sämtlich bestätigt.

Da KUMMER die Kongruenzen mit *zwei* Unbekannten, welche wir vorhin allgemein untersucht haben (mit m Unbekannten), bei der Faktorenzerlegung der ψ-Funktionen bemerkte, so könnte der Gedanke entstehen, dass durch analoge Schlüsse sich aus der Verallgemeinerung der Kongruenzen eine Verallgemeinerung der ψ-Funktionen ergeben werde. Meine Bemühungen in dieser Richtung haben mich aber nur zu Produkten der ψ gelangen lassen, sind also nicht von Erfolg gewesen.

4. Bisher haben wir Untersuchungen über Form und Zahl der im entwickelten Produkt P auftretenden Glieder angestellt. Wir wenden uns jetzt der Koefficientenbestimmung zu. Wir geben dem Produkte, welches wir auch kurz *Normprodukt* nennen werden, die Form

$$\begin{aligned} P &= (z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}) \\ &= z^{\lambda} + a^{\lambda} + b^{\lambda} + c^{\lambda} + \lambda \Sigma K a^k b^l c^m z^n. \end{aligned} \tag{20}$$

Wenn wir früher von *vierelementigen* Zahlen ausgingen, so verfolgten wir dabei wesentlich äussere Zwecke. Wir hätten mit einiger Einbusse an Durchsichtigkeit des Vortrags gleich die allgemeine Form mit m Elementen wählen können. Jetzt liegt die Sache anders. Die von jetzt ab vorzutragenden Entwicklungen können nur für *vierelementige* Normprodukte Geltung beanspruchen.

Die Zahlform $z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}$ kann im ganzen $\frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{2}$ verschiedene Gestalten aufweisen. Denn δ und ε dürfen alle verschiedenen Paare von 2 Zahlen aus der Reihe $2, 3, \ldots, \lambda - 2$ sein. Aber diese verschiedenen Paare führen nicht immer zu verschiedenen Normen. Bezeichnen wir nach dem Vorgange vieler Mathematiker den *numerus socius* von δ oder diejenige ganze Zahl δ', welche die Eigenschaft hat, dass $\delta\delta' \equiv 1 \pmod{\lambda}$ wird, kurz durch $\frac{1}{\delta}$, so ist:

$$N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}) = N(z + a\alpha^{\frac{1}{\delta}} + b\alpha + c\alpha^{\frac{\varepsilon}{\delta}}) = N(z + a\alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} + b\alpha^{\frac{\delta}{\varepsilon}} + c\alpha).$$

Kennt man also die zum Paare δ, ε gehörige Norm, so erhält man durch Vertauschung von b mit a, a mit b die zum Paare $\frac{1}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\delta}$ gehörende Norm u. s. w.

Es ist aber auch

$$N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\varepsilon}) = N(z\alpha^{-1} + a + b\alpha^{\delta-1} + c\alpha^{\varepsilon-1})$$
$$= N(a + z\alpha + b\alpha^{1-\delta} + c\alpha^{1-\varepsilon}).$$

So sind wir zum Paare $1-\delta$, $1-\varepsilon$ gelangt. Es gelingt, durch Anwendung derselben Schlüsse, im ganzen 12 Paare anzugeben, welche zu 12 Normen führen, die durch die Berechnung einer einzigen aus ihnen gewonnen werden und, wie wir sagen werden, eine *Periode* bilden.

Diese 12 Paare sind die folgenden:

$$(21)\qquad \left|\begin{array}{c} (\delta, \varepsilon); \left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{\delta}{\varepsilon}\right); \left(\frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right); \\ \left(\frac{1}{1-\varepsilon}, \frac{1-\delta}{1-\varepsilon}\right); \left(\frac{1-\varepsilon}{1-\delta}, \frac{1}{1-\delta}\right); (1-\delta, 1-\varepsilon); \\ \left(\frac{1-\varepsilon}{\delta-\varepsilon}, \frac{-\varepsilon}{\delta-\varepsilon}\right); \left(\frac{\varepsilon-\delta}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right); \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}, \frac{\varepsilon-\delta}{\varepsilon-1}\right); \\ \left(1-\frac{\varepsilon}{\delta}, 1-\frac{1}{\delta}\right); \left(\frac{\delta}{\delta-1}, \frac{\delta-\varepsilon}{\delta-1}\right); \left(\frac{\delta-1}{\delta-\varepsilon}, \frac{\delta}{\delta-\varepsilon}\right). \end{array}\right.$$

Die Art dieser Zusammenstellung erhellt aus Folgendem. Wir nennen diejenige *Substitution*, welche das Paar (δ, ε) in $\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{\delta}{\varepsilon}\right)$ überführt ω, ebenso diejenige, welche (δ, ε) in $\left(\frac{1}{1-\varepsilon}, \frac{1-\delta}{1-\varepsilon}\right)$ überführt χ; dann gewinnt das Schema (21) die folgende Gestalt:

$$(22)\qquad \left|\begin{array}{lll} 1, & \omega, & \omega^2, \\ \chi, & \chi\omega, & \chi\omega^2, \\ \chi^2, & \chi^2\omega, & \chi^2\omega^2, \\ \chi^3, & \chi^3\omega, & \chi^3\omega^2. \end{array}\right.$$

Die Zusammenstellung $\chi\omega$ bezeichnet, dass zuerst die Substitution χ und dann ω vorgenommen werden soll. Wir bemerken die Gleichungen:

$$(23)\qquad \omega^3 = 1, \qquad \chi^4 = 1.$$

Ferner bemerken wir, dass durch die Substitution $\omega\chi\omega\chi^2\omega^2$ das Paar (δ, ε) in (ε, δ) umgewandelt wird. Daher sehen wir, dass im ganzen 24 Wertepaare erhalten werden und *mehr können nicht vorhanden sein.* Denn die Zahlform $z + a\alpha + b\alpha^\delta + c\alpha^\varepsilon$ liefert durch Vertauschung der 4 Elemente z, a, b, c überhaupt 24 verschiedene Darstellungen und jede dieser Darstellungen können wir durch Division mit einer geeigneten Potenz von α und nachfolgende Vertauschung von α gegen eine andere geeignete Potenz von α in die Form $z + a\alpha + b\alpha^\delta + c\alpha^\varepsilon$ setzen.

Aber die Perioden der Paare (δ, ε) brauchen nicht 12-gliedrig zu sein. Sie können weniger Glieder enthalten.

1.) Wenden wir uns zunächst der Substitution χ zu und nehmen an, dass sie keine Veränderung bewirkt. Dann erhalten wir zur Bestimmung derjenigen (δ, ε), welche solche Perioden liefern, die Kongruenzen:

$$\delta \equiv \frac{1}{1 - \varepsilon}, \qquad \varepsilon \equiv \frac{1 - \delta}{1 - \varepsilon} \pmod{\lambda}.$$

Hieraus folgt sofort $(1 - \varepsilon)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}$, und wenn wir setzen

$$\vartheta^2 + 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}, \tag{24}$$

dann erhalten wir die *dreigliedrige* Periode:

$$(-\vartheta, 1 - \vartheta); \left(\frac{1 + \vartheta}{2}, \frac{1 - \vartheta}{2}\right); (1 + \vartheta, \vartheta). \tag{25}$$

Wir bemerken, dass die *Summe* der Argumente bei dem zweiten Paare, die *Differenz* bei dem ersten und dritten der Einheit kongruent ist. Also ist die *Differenz* der Argumente bei *zwei* Paaren der Einheit kongruent.

2.) Nehmen wir an, χ bewirke Veränderung, aber χ^2 *nicht.* Dann gelangen wir zu den Kongruenzen

$$\delta \equiv \frac{1 - \varepsilon}{\delta - \varepsilon}, \qquad \varepsilon \equiv \frac{-\varepsilon}{\delta - \varepsilon} \pmod{\lambda},$$

woraus folgt

$$\varepsilon - \delta \equiv 1 \pmod{\lambda}. \tag{26}$$

Hieraus folgt die *sechsgliedrige* Periode:

$$(27)\quad \begin{cases} (\varepsilon - 1, \varepsilon); \left(\frac{1}{\varepsilon}, 1 - \frac{1}{\varepsilon}\right), \left(1 + \frac{1}{\varepsilon - 1}, \frac{1}{\varepsilon - 1}\right); \\ \left(\frac{1}{1-\varepsilon}, 1 + \frac{1}{1-\varepsilon}\right); \left(1 - \frac{1}{2-\varepsilon}, \frac{1}{2-\varepsilon}\right); (2 - \varepsilon, 1 - \varepsilon). \end{cases}$$

Auch hier haben wir, und zwar genau *viermal,* den Fall vor uns, dass die *Differenz* der Argumente die *Einheit* ergibt. Nur *viermal,* denn bei den andern ist die *Summe* der *Einheit* kongruent.

3.) Es bleibt die Annahme zu erledigen, dass ω keine Veränderung bewirken soll. Dann folgt

$$(28)\qquad \delta \equiv \varepsilon^2, \qquad \varepsilon^3 \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Es ergibt sich eine *viergliedrige* Periode, nämlich

$$(29)\qquad \begin{gathered} (\varepsilon, \varepsilon^2); \\ \left(\frac{1}{1-\varepsilon}, -\varepsilon^2\right); \left(-\varepsilon, \frac{1}{1-\varepsilon^2}\right); (1 - \varepsilon^2, 1 - \varepsilon). \end{gathered}$$

Oben fanden wir, dass bei der *dreigliedrigen* Periode stets zwei Argumentenpaare, bei der *sechsgliedrigen* stets *vier* Paare entstehen, deren Differenz die Einheit ist. Umgekehrt lässt sich zeigen, dass aus der Annahme $\varepsilon = \delta + 1$ immer ein *dreigliedriger* oder ein *sechsgliedriger* Cyklus sich ergeben muss. Mithin kommt weder in einem *zwölfgliedrigen* noch in einem *viergliedrigen* Cyklus ein Argumentenpaar von der Form $(\delta, \delta + 1)$ vor.

Nun ist es leicht, die Anzahl der Perioden, d. h. *die Anzahl der wesentlich verschiedenen vierelementigen Normen* anzugeben.

1.) Sei $\lambda = 12n + 1$. Die Kongruenzen $\vartheta^2 + 1 \equiv 0$ und $\varepsilon^3 \equiv 1 \pmod{\lambda}$ können beide erfüllt werden. Die Zahlenpaare $(\delta, \delta + 1)$, deren $\lambda - 3$ vorhanden sind, verteilen sich in den einen *dreigliedrigen* und $3n - 1$ *sechsgliedrige* Cyklen. Da $\frac{(\lambda - 2)(\lambda - 3)}{2} = (6n - 1)(12n - 1)$ Zahlenpaare vorhanden sind, so müssen $3n(2n - 1)$ *zwölfgliedrige* Perioden vorhanden sein. Im ganzen sind $6n^2 + 1$ verschiedene Normen zu berechnen.

2.) Sei $\lambda = 12n + 5$. Der *viergliedrige* Cyklus fehlt, der *dreigliedrige* ist vorhanden. Wir erhalten $n(6n + 1)$ *zwölfgliedrige,* $3n$ *sechsgliedrige* Cyklen, im ganzen $6n^2 + 4n + 1$ *verschiedene Normen.*

3.) $\lambda = 12n + 7$. Der *viergliedrige* Cyklus ist vorhanden, der *dreigliedrige* fehlt. Es existiren $3n(2n + 1)$ *zwölfgliedrige*, $3n + 1$ *sechsgliedrige* Cyklen, $6n^2 + 6n + 2$ *verschiedene Normen.*

4.) $\lambda = 12n + 11$. Die Ausnahmecyklen fehlen, man hat nur $6n^2 + 7n + 2$ *zwölfgliedrige,* $3n + 2$ *sechsgliedrige* Cyklen, im ganzen $6n^2 + 10n + 4$ *verschiedene Normen.*

Versteht man unter $E(a)$ diejenige ganze Zahl, welche nicht grösser als a ist, so ist in den *drei* ersten Fällen die Anzahl der *verschiedenen Normen* $1 + E\frac{(\lambda - 1)^2}{24}$, im Falle $12n + 11$ aber $E\frac{(\lambda - 1)^2}{24}$.

Zahlenbeispiele.

1.) $\lambda = 5$.

Es entsteht nur *ein* Cyklus, der dreigliedrige

$$(2, 3), (2, 4), (4, 3).$$

Es ist nur *eine* Norm zu berechnen.

2.) $\lambda = 7$.

Es entstehen *zwei* Cyklen, darunter noch kein zwölfgliedriger.

1. $(2, 4)$; $(2, 5)$; $(3, 6)$; $(6, 4)$.

2. $(2, 3)$; $(5, 3)$; $(5, 4)$; $(3, 4)$; $(2, 6)$; $(6, 5)$.

Es sind also *zwei* Normen zu berechnen:

$$N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^4) \quad \text{und} \quad N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3).$$

3.) $\lambda = 11$.

Es entstehen 4 Cyklen, 2 sechsgliedrige, 2 zwölfgliedrige.

1. $(2, 3)$; $(4, 8)$; $(7, 6)$; $(5, 6)$; $(2, 10)$; $(10, 9)$.

2. $(3, 4)$; $(3, 9)$; $(5, 4)$; $(7, 8)$; $(7, 5)$; $(9, 8)$.

3. $(2, 4)$; $(3, 6)$; $(2, 6)$; $(7, 4)$; $(3, 10)$; $(10, 8)$; $(7, 2)$; $(6, 9)$; $(5, 8)$; $(10, 6)$; $(2, 9)$; $(5, 10)$;

4. $(2, 8)$; $(7, 3)$; $(4, 6)$; $(3, 8)$; $(7, 10)$; $(10, 4)$; $(3, 5)$; $(9, 5)$; $(9, 4)$; $(8, 6)$; $(2, 5)$; $(9, 7)$.

Es sind 4 Normen zu berechnen. Wir wählen für dieselben die kleinstmöglichen Zahlenpaare, also

$$N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3), \quad N(z + a\alpha + b\alpha^3 + c\alpha^4),$$
$$N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^4), \quad N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^5).$$

4.) $\lambda = 13$.

Hier erhalten wir 7 verschiedene Normen, deren δ, ε wir angeben

$$\delta = 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2,$$
$$\varepsilon = 3, 4, 9, 11, 4, 5, 6.$$

(2, 3) und (3, 4) haben sechsgliedrige, (3, 9) einen viergliedrigen, (3, 11) einen dreigliedrigen, die übrigen haben zwölfgliedrige Cyklen.

5.) $\lambda = 17$.

Wir finden 11 verschiedene Normen, deren δ, ε wir angeben

$$\delta = 2, 3, 5, 4, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4,$$
$$\varepsilon = 3, 4, 6, 5, 4, 5, 6, 7, 5, 7, 6.$$

Die drei ersten geben sechsgliedrige Cyklen, (4, 5) den dreigliedrigen, die andern zwölfgliedrige Cyklen.

5. Schreiten wir jetzt zur Bestimmung der Koefficienten selbst. Betrachten wir zunächst *das Normprodukt mit dreigliedrigem Cyklus.*

Wir haben dem Normprodukte die Form erteilt:

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^{\vartheta} + c\alpha^{\vartheta+1})$$
$$= z^{\lambda} + a^{\lambda} + b^{\lambda} + c^{\lambda} + \lambda\sum K a^k b^l c^m z^n; \qquad \vartheta^2 + 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Ausser dem Faktor $z + a\alpha + b\alpha^{\vartheta} + c\alpha^{\vartheta+1}$ ist vorhanden

$$z + a\alpha^{\vartheta} + b\alpha^{\vartheta^2} + c\alpha^{\vartheta^2+\vartheta} = z + a\alpha^{\vartheta} + b\alpha^{-1} + c\alpha^{\vartheta-1},$$

oder nach Multiplikation mit α $b + z\alpha + c\alpha^{\vartheta} + a\alpha^{\vartheta+1}$. Daher erleidet unsere Norm keine Veränderung, wenn man die Vertauschung anwendet und wiederholt, welche z in b, a in z, b in c und c in a überführt.

Daher haben die Glieder $b^n z^k c^l a^m$ und $a^k b^l c^m z^n$ u. s. w. gleichen Koefficienten. Man kann dies symbolisch so schreiben:

$$\left.\begin{matrix} k & l & m & n \\ m & n & l & k \\ l & k & n & m \\ n & m & k & l \end{matrix}\right\} K,$$

wo der an erster Stelle geschriebene Exponent dem a, der zweite dem b, der dritte dem c, der vierte dem z zukommt.

Es ist

$$k + \vartheta l + (\vartheta + 1)m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$
$$k + l + m \overline{\overline{<}} \lambda.$$

k, l, m *können nicht gleich sein*, da $\vartheta + 1 \equiv 0$ folgen würde; also sind die aufgeschriebenen Exponentengruppen *wesentlich verschieden*. Die im allgemeinen vorhandenen

$$2 + \frac{\lambda + 1}{2} + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2 \cdot 3} - 4 = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 7)}{6}$$

Koefficienten schränken sich auf den 4^{ten} Teil ein, auf $\frac{(\lambda - 1)(\lambda + 7)}{24}$ wesentlich verschiedene.

Beispiel $\lambda = 13$; $\delta = 5$, $\varepsilon = 6$.

$k =$	3,	2,	1,	5,	3,	8,	7,	6,	4,	2,
$l =$	2,	1,	0,	3,	1,	1,	0,	4,	2,	0,
$m =$	0,	1,	2,	1,	3,	0,	1,	0,	2,	4,
$n =$	8,	9,	10,	4,	6,	4,	5,	3,	5,	7,
$K =$	+ 2,	− 3,	+ 1,	− 22,	− 19,	+ 1,	− 1,	+ 5,	+ 32,	+ 4.

Zum besseren Verständnis wollen wir das zugehörige Normprodukt kurz andeuten:

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^5 + c\alpha^6)$$
$$= z^{13} + a^{13} + b^{13} + c^{13} + 13\{2(a^3b^2z^8 + b^8c^2z^3 + a^2b^3c^8 + a^8c^3z^2)$$
$$- 3(a^2bcz^9 + ab^9cz^2 + ab^2c^9z + a^9bc^2z) + \ldots\}.$$

Wenden wir uns jetzt zu den *Normen mit viergliedrigem Cyklus.* Hier haben wir die Form erteilt:

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\delta^2})$$
$$= z^{\lambda} + a^{\lambda} + b^{\lambda} + c^{\lambda} + \lambda \sum K z^n a^k b^l c^m; \qquad \delta^3 \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Ausser dem Faktor $z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\delta^2}$ ist auch vorhanden

$$z + a\alpha^{\delta} + b\alpha^{\delta^2} + c\alpha.$$

Unsere Norm erleidet keine Veränderung, wenn man a, b, c *cyklisch* vertauscht. Oder in unserer symbolischen Schreibweise

$$\left.\begin{matrix} k & l & m & n \\ l & m & k & n \\ m & k & l & n \end{matrix}\right\} K;$$

wo

$$k + \delta l + \delta^2 m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$
$$k + l + m \overline{\overline{<}} \lambda.$$

k, l, m können *gleich* sein, da $1 + \delta + \delta^2 \equiv 0$ zutrifft. Scheiden wir die zugehörigen Exponentengruppen aus

$$\begin{aligned} k &= 1, \quad 2, \quad \ldots, \frac{\lambda - 1}{3}, \\ l &= 1, \quad 2, \quad \ldots, \frac{\lambda - 1}{3}, \\ m &= 1, \quad 2, \quad \ldots, \frac{\lambda - 1}{3}, \\ n &= \lambda - 3, \lambda - 6, \ldots, \quad 1, \end{aligned}$$

so verteilen sich die übrigen in Gruppen von je drei, welche denselben Koefficienten K aufweisen. Im ganzen sind $\frac{(\lambda - 1)(\lambda + 11)}{18}$ verschiedene K zu berechnen.

Beispiel: $\lambda = 19$; $\delta = 7$.

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
12	1	0	6		3	5	0	11		0	6	10	3	
1	0	12	6	1	5	0	3	11	— 7	6	10	0	3	22
0	12	1	6		0	3	5	11		10	0	6	3	
8	0	1	10		13	2	1	3		6	3	1	9	
0	1	8	10	1	2	1	13	3	— 10	3	1	6	9	30
1	8	0	10		1	13	2	3		1	6	3	9	
16	0	2	1		9	8	1	1		8	7	0	4	
0	2	16	1	1	8	1	9	1	— 9	7	0	8	4	30
2	16	0	1		1	9	8	1		0	8	7	4	
1	7	11	0		10	4	0	5		10	2	3	4	
7	11	1	0	— 1	4	0	10	5	14	2	3	10	4	— 50
11	1	7	0		0	10	4	5		3	10	2	4	
14	3	2	0		6	4	9	0		6	1	4	8	
3	2	14	0	2	4	9	6	0	17	1	4	6	8	— 56
2	14	3	0		9	6	4	0		4	6	1	8	
0	5	2	12		9	1	2	7		5	7	2	5	
5	2	0	12	3	1	2	9	7	— 17	7	2	5	5	— 56
2	0	5	12		2	9	1	7		2	5	7	5	
3	4	11	1		8	3	6	2		8	5	3	3	
4	11	3	1	3	3	6	8	2	21	5	3	8	3	61
11	3	4	1		6	8	3	2		3	8	5	3	
13	0	4	2		1	11	5	2		4	2	7	6	
0	4	13	2	7	11	5	1	2	— 21	2	7	4	6	99
4	13	0	2		5	1	11	2		7	4	2	6	
1	1	1	16	2	2	2	2	13	23	3	3	3	10	98
4	4	4	7	86	5	5	5	4	— 101	6	6	6	1	— 83

Zum Verständnis:

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^7 + c\alpha^{11})$$

$$= z^{19} + a^{19} + b^{19} + c^{19} + 19\{61(a^8b^5c^3z^3 + a^5b^3c^8z^3 + a^3b^8c^5z^3) + \ldots\}.$$

Für $a = b = c = z = 1$ finden wir, übereinstimmend mit der Reuschleschen Tafel $N(1 + \alpha + \alpha^7 + \alpha^{11}) = 11^3$.

Untersuchen wir jetzt die Normen mit *sechsgliedrigem Cyklus.* Hier haben wir die Form erteilt:

$$(z + a + b + c) N(z + a\alpha + b\alpha^{\delta} + c\alpha^{\delta+1}) = z^{\lambda} + a^{\lambda} + b^{\lambda} + c^{\lambda} + \lambda \sum K a^k b^l c^m z^n,$$

$$k + \delta l + (\delta + 1) m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$k + l + m \overline{\overline{<}} \lambda.$$

Statt der obigen Kongruenz können wir setzen

(30) $$k + m + \delta(l + m) \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Aus dieser Kongruenz folgt aber, da $k + l + m + n = \lambda$,

(31) $$l + n + \delta(k + n) \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Jeder Exponentengruppe k, l, m, n entspricht also eine andere l, k, n, m oder $a^k b^l c^m z^n$ und $a^l b^k c^n z^m$ haben *gleichen* Koefficienten. Man braucht also nur $\frac{(\lambda - 1)(\lambda + 7)}{12}$ verschiedene K wirklich zu berechnen.

Wenn wir in unserer Norm setzen $z = 1$, $c = ab$, so verwandelt sich das *Normprodukt* in

$$(1 + a)(1 + b) N(1 + a\alpha)(1 + b\alpha^{\delta}) = 1 + a^{\lambda} + b^{\lambda} + a^{\lambda} b^{\lambda}.$$

Die übrigen Glieder fallen fort. Hieraus folgen beachtenswerte Gleichungen. Denn es ist $\sum K a^{k+m} b^{l+m} = 0$. Da zu jedem $k + m$ die Kongruenz (30) das zugehörige $l + m$ eindeutig bestimmt, so haben wir den *Lehrsatz:*

Die Summe der K, für welche $k + m$ einen festen Wert hat, ist Null.

Sind die K unmittelbar auszurechnen, so haben sie den Wert:

$$(-1)^n \frac{\underline{|k + m + l - 1}}{\underline{|k}\,\underline{|m}\,\underline{|l}}.$$

Daher die für beliebige p, q gültige Formel:

(32) $$\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+q-1)}{\underline{|q}} - \frac{p(p+1)\ldots(p+q-2)}{\underline{|q-1}\,\underline{|1}}$$

$$+ \frac{(p-1)p\ldots(p+q-3)}{\underline{|q-2}\,\underline{|2}} - \ldots \pm \frac{(p-q+1)(p-q+2)\ldots(p-1)}{\underline{|q}} = 0.$$

z. B. $p = 10\,, q = 4$:

$$\frac{11\,.\,12\,.\,13}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{10\,.\,11\,.\,12}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,1} + \frac{9\,.\,10\,.\,11}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2} - \frac{8\,.\,9\,.\,10}{1\,.\,1\,.\,2\,.\,3} + \frac{7\,.\,8\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 0.$$

Beispiel eines *Normprodukts.* $\lambda = 13\,, \delta = 3\,, \varepsilon = 4.$

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
0 3	3 0	1 9	9 1	− 1	4 3	3 4	0 6	6 0	+ 5	10 1	1 10	0 2	2 0	+ 1	3 5	5 3	2 3	3 2	− 44
1 0	0 1	3 9	9 3	− 1	5 0	0 5	2 6	6 2	+ 3	0 6	6 0	2 5	5 2	+ 3	4 6	6 4	1 2	2 1	+ 15
1 4	4 1	0 8	8 0	+ 1	6 1	1 6	1 5	5 1	− 7	1 3	3 1	4 5	5 4	− 22	7 5	5 7	1 0	0 1	− 1
2 1	1 2	2 8	8 2	+ 6	7 2	2 7	0 4	4 0	+ 4	1 7	7 1	1 4	4 1	− 5	8 2	2 8	3 0	0 3	+ 2
3 2	2 3	1 7	7 1	− 10	9 0	0 9	1 3	3 1	− 1	2 4	4 2	3 4	4 3	+ 49	0 2	2 0	5 6	6 5	+ 3

Zur Bestätigung unseres *Lehrsatzes* haben wir:

$$\begin{array}{rl}
k + m = 10, & \Sigma K = 1 - 1 = 0, \\
7, & 4 - 7 + 3 = 0, \\
4, & 5 - 10 + 6 - 1 = 0, \\
1, & 1 - 1 = 0, \\
11, & 3 + 2 - 5 = 0, \\
8, & 49 - 22 + 3 - 1 + 15 - 44 = 0.
\end{array}$$

Endlich betrachten wir die *Normen mit zwölfgliedrigem Cyklus.*

Hier müssen wir die allgemeine Form bestehen lassen, dürfen aber annehmen, dass $\varepsilon > \delta$. Die KUMMERsche Kongruenz

$$k + \delta l + \varepsilon m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$k + l + m \overline{\overline{<}}\, \lambda,$$

können wir in eine Reihe *Gleichungen* verwandeln. Diese Gleichungen bilden *zwei* Systeme, wie folgt.

I. System.	II. System.
$k + \delta l + \varepsilon m = \lambda,$	$(\varepsilon - 1)k + (\varepsilon - \delta)l + \varepsilon n = (\varepsilon - 1)\lambda,$
$k + \delta l + \varepsilon m = 2\lambda,$	$(\varepsilon - 1)k + (\varepsilon - \delta)l + \varepsilon n = (\varepsilon - 2)\lambda,$
. . . .	. . . .
$k + \delta l + \varepsilon m = (\varepsilon - 1)\lambda,$	$(\varepsilon - 1)k + (\varepsilon - \delta)l + \varepsilon n = \lambda.$

Diejenigen k, l, m, welche der *ersten* Gleichung des *ersten* Systems angehören, liefern K, welche direkt berechnet werden können. Man findet

$$K = (-1)^{k+l+m-1} \frac{\lfloor k + l + m - 1}{\lfloor k \lfloor l \lfloor m}. \tag{33}$$

Ebenso die k, l, n, welche der *letzten* Gleichung des *zweiten* Systems angehören. Man findet

$$K = (-1)^{k+l+n-1} \frac{\lfloor k + l + n - 1}{\lfloor k \lfloor l \lfloor n}. \tag{33a}$$

Ist ε im Verhältniss zu δ gross, so wird man sich mit Vorteil des *zweiten* Systems bedienen. Denn die letzte Zeile desselben sagt aus, da

$$\varepsilon - \delta \leqq \varepsilon - 1 < \varepsilon, \quad \text{dass}$$

$$(\varepsilon - 1)k + (\varepsilon - \delta)l + \varepsilon n > (k + l + n)(\varepsilon - \delta),$$

also

$$k + l + n < \frac{\lambda}{\varepsilon - \delta}.$$

Mithin gibt eine Gruppe k_r, l_r, m_r der r^{ten} Zeile (von unten) des zweiten Systems mit einer Gruppe der s^{ten} Zeile zusammen $k_r + k_s, l_r + l_s$, $m_r + m_s$ eine Gruppe der $r + s^{\text{ten}}$ Zeile, weil

$$k_r + k_s + l_r + l_s + m_r + m_s < \frac{(r + s)\lambda}{\varepsilon - \delta} < \lambda,$$

so lange $r + s$ *kleiner als* $\varepsilon - \delta$ *ist.*

Im ganzen hat man 4 Kongruenzen, von denen man ausgehen kann, nämlich

$$
(34)\qquad \left.\begin{aligned}
k + \delta l + \varepsilon m &\equiv 0 \\
(\varepsilon - 1)k + (\varepsilon - \delta)l + \varepsilon n &\equiv 0 \\
(\delta - 1)l + (\varepsilon - 1)m + (\lambda - 1)n &\equiv 0 \\
(\lambda - \delta + 1)k + (\varepsilon - \delta)m + (\lambda - \delta)n &\equiv 0
\end{aligned}\right\} \pmod{\lambda}.
$$

Jede derselben kann man mit einer willkürlichen ganzen Zahl multipliciren. Durch diese Operation wird die Anzahl der Gleichungen vermehrt oder vermindert, welche die Kongruenz ersetzen. Eine Vermehrung derselben lässt die Art der Gruppenzusammensetzung aus kleineren k, l, m deutlicher hervortreten, schädigt aber die Übersichtlichkeit. Es ist zweckmässig, zunächst alle 4 Kongruenzen zu bilden und als Gleichungen mit den rechten Seiten λ, 2λ, 3λ bezüglich ihrer nicht zusammengesetzten Lösungen zu untersuchen.

Man kann fragen, in wieviel *Normprodukten,* zur Primzahl λ, die Exponentengruppe k, l, m, n auftritt. Fassen wir in der Kongruenz

$$k + \delta l + \varepsilon m \equiv 0 \pmod{\lambda}$$

die Zahlen k, l, m als gegeben, δ, ε als gesucht auf; zu jedem

$$\delta = 2, 3, \ldots, \lambda - 1$$

gehört ein festbestimmtes ε und nur $\varepsilon = 1$ ist unter diesen zu verwerfen. Also kann man im ganzen $\lambda - 3$ Zahlenpaare ε, δ angeben, welche *Normprodukte* der gesuchten Art liefern. Bilden wir nun alle diese Normprodukte, bilden wir ferner die 24 Vertauschungen der k, l, m, n und berechnen in allen $24(\lambda - 3)$ Normprodukten die zugehörigen K, so können wir den Satz aussprechen:

Alle eben besprochenen K sind mod λ *kongruent.*

Die Zahlen K bestehen gemäss Gleichung (8) aus einem unmittelbar zu berechnenden Teile und aus Teilen, welche dadurch entstehen, dass drei der k, l, m, n aus kleineren Gruppenzahlen durch Addition zusammengesetzt sind. Findet keine Zusammensetzung statt, so fehlen diese

Teile gänzlich. Für unsern Satz sind diese Teile auch völlig gleichgültig. Denn sie haben den Faktor λ mindestens in erster Potenz. Unser Satz ist also bewiesen, wenn die Teile, welche unmittelbar berechnet werden können, kongruent sind. Dies zeigen wir für die Vertauschung k, l, n, m. Die betreffenden Ausdrücke stehen (33) und (33a). Es muss also sein, $(k + l + m + n = \lambda)$,

$$(35) \qquad (-1)^n \cdot \frac{\underline{|\lambda - n - 1}}{\underline{|k}\,\underline{|l}\,\underline{|m}} \equiv (-1)^m \frac{\underline{|\lambda - m - 1}}{\underline{|k}\,\underline{|l}\,\underline{|n}} \pmod{\lambda}.$$

Nun ist:

$$\left.\begin{array}{l} (-1)^n \cdot \underline{|n} \equiv (\lambda - 1)(\lambda - 2) \ldots (\lambda - n) \\ (-1)^m \cdot \underline{|m} \equiv (\lambda - 1)(\lambda - 2) \ldots (\lambda - m) \end{array}\right\} \pmod{\lambda},$$

und daraus folgt die Richtigkeit der Kongruenz (35). Jedes berechnete Normprodukt liefert *Zahlenbeispiele* zu diesem bemerkenswerten Satze. Es ist auffallend, dass die *Kongruenz* oft zur *Gleichheit* wird. Diese Gleichheit ergab sich uns bei den nicht zwölfgliedrigen Cyklen für einige bestimmte Vertauschungen als notwendig.

6. Jetzt wollen wir in einigen besonderen Fällen die Berechnung von Normprodukten vollständig ausführen.

Als erstes Beispiel wählen wir

$$(z + a + b + c)N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3).$$

Hier gelten die Bestimmungen

$$k + 2l + 3m \equiv 0 \pmod{\lambda},$$
$$k + l + m \overline{\overline{<}} \lambda.$$

Die Kongruenz ersetzen wir durch die beiden Gleichungen:

$$k + 2l + 3m = \lambda, \qquad k + 2l + 3m = 2\lambda.$$

Die letztere können wir wieder durch $l + 2k + 3n = \lambda$ ersetzen. Somit haben wir, wie bei den sechsgliedrigen Normen überhaupt, die zulässige Vertauschung k, l und m, n. Das Normprodukt kann ohne Rechnung niedergeschrieben werden. Sei

$$h = k + l + m, \qquad k = \lambda - 2l - 3m, \qquad n = l + 2m.$$

Dann ist:

$$(36) \qquad (z + a + b + c) N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3)$$

$$= z^\lambda + a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda + \lambda \sum (-1)^l \frac{\lfloor h-1}{\lfloor k \lfloor l \lfloor m} (a^k b^l c^m z^n + a^l b^k c^n z^m).$$

Zahlenbeispiel: $\lambda = 13$, $\delta = 2$, $\varepsilon = 3$.

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
1 0	0 1	4 8	8 4	1	1 6	6 1	0 6	6 0	1	4 3	3 4	1 5	5 1	— 35	7 3	3 7	0 3	3 0	— 12
0 2	2 0	3 8	8 3	2	2 4	4 2	1 6	6 1	15	5 1	1 5	2 5	5 2	— 21	8 1	1 8	1 3	3 1	— 9
0 5	5 0	1 7	7 1	— 1	3 2	2 3	2 6	6 2	30	5 4	4 5	0 4	4 0	14	9 2	2 9	0 2	2 0	5
1 3	3 1	2 7	7 2	— 10	4 0	0 4	3 6	6 3	5	6 2	2 6	1 4	4 1	28	10 0	0 10	1 2	2 1	1
2 1	1 2	3 7	7 3	— 10	3 5	5 3	0 5	5 0	— 7	7 0	0 7	2 4	4 2	4	11. 1	1 11	0 1	1 0	— 1

Da $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$ eine *Einheit,* so ist die Summe der K Null. Im vorigen Normprodukte, Seite 288, hatten die Vertauschungen $3, 2, 1, 7$ und $2, 3, 7, 1$ *denselben* Koefficienten -10 wie die hier auftretenden. Man erkennt darin eine Bestätigung unseres im vorigen Paragraphen bewiesenen *Lehrsatzes.*

Als zweites Beispiel wählen wir

$$(z + a + b + c) N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^4).$$

Hier wählen wir die drei Gleichungen:

$$k + 2l + 4m = \lambda,$$

$$3k + 2l + 4n = 2\lambda,$$

$$3k + 2l + 4n = \lambda.$$

Ferner bilden wir

$$A_1 = \lambda \sum (-1)^n \frac{\lfloor \lambda - n - 1}{\lfloor k \lfloor l \lfloor m} z^n a^k b^l c^m$$

für alle k, l, m der ersten Gleichung;

$$A_2 = \lambda \sum (-1)^m \frac{|\underline{\lambda - m - 1}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{n}} z^n a^k b^l c^m$$

für alle k, l, n der zweiten Gleichung;

$$A_3 = \lambda \sum (-1)^m \frac{|\underline{\lambda - m - 1}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{n}} z^n a^k b^l c^m$$

für alle k, l, n der dritten Gleichung.

Dann ist:

$$(37) \qquad (z + a + b + c) N(z + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^4)$$

$$= z^\lambda + a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda + A_1 + A_2 + A_3 + \frac{1}{2} c^{-\lambda} A_3^2.$$

Für $\delta = 2, \varepsilon = 5$ bilden wir

$$A_1 = \lambda \sum (-1)^n \frac{|\underline{\lambda - n - 1}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{m}} a^k b^l c^m z^n$$

mit der Bedingung $k + 2l + 5m = \lambda$.

Ferner die drei Summen B_1, B_2, B_3 nach dem Schema

$$B_r = \lambda \sum (-1)^m \frac{|\underline{\lambda - m - 1}}{|\underline{k}\,|\underline{l}\,|\underline{n}} a^k b^l c^m z^n$$

mit der Bedingung

$$4k + 3l + 5n = r\lambda.$$

Dann wird

$$(38) \qquad (z + a + b + c) N(z + a\alpha + b\alpha^3 + c\alpha^5)$$

$$= z^\lambda + a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda + A_1 + B_1 + B_2 + B_3 + \frac{1}{2} c^{-\lambda} B_1^2 + c^{-2\lambda} B_1 B_2 + \frac{1}{6} c^{-2\lambda} B_1^3.$$

Als Zahlenbeispiele nehmen wir

1.) $\lambda = 13$, $\delta = 2$, $\varepsilon = 4$.

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
11	1	0	1	− 1	1	4	1	7	− 5	0	7	3	3	− 12	2	2	5	4	6
9	2	0	2	5	5	0	2	6	3	2	6	3	2	17	4	1	5	3	4
7	3	0	3	− 12	3	1	2	7	− 10	4	5	3	1	− 9	6	0	5	2	3
5	4	0	4	14	1	2	2	8	6	6	4	3	0	5	2	0	6	5	3
3	5	0	5	− 7	1	0	3	9	− 1	0	5	4	4	14	0	1	6	6	1
1	6	0	6	1	0	11	1	1	− 1	2	4	4	3	− 16	1	5	7	0	− 1
9	0	1	3	− 1	2	10	1	0	1	4	3	4	2	10	3	2	8	0	2
7	1	1	4	8	0	9	2	2	5	6	2	4	1	2	3	0	9	1	− 1
5	2	1	5	− 21	2	8	2	1	− 7	8	1	4	0	1	1	3	8	1	4
3	3	1	6	20	4	7	2	0	4	0	3	5	5	− 7	1	1	9	2	− 3

2.) $\lambda = 13$, $\delta = 2$, $\varepsilon = 5$.

1	6	0	6	1	8	0	1	4	1	3	4	3	3	− 4	1	4	6	2	2
3	5	0	5	− 7	1	1	2	9	− 3	5	3	3	2	− 5	3	3	6	1	7
5	4	0	4	14	3	0	2	8	2	7	2	3	1	3	5	2	6	0	3
7	3	0	3	− 12	1	10	1	1	2	9	1	3	0	− 1	0	2	7	4	4
9	2	0	2	5	3	9	1	0	− 1	0	3	4	6	5	2	1	7	3	3
11	1	0	1	− 1	0	8	2	3	2	4	1	4	4	− 8	4	0	7	2	4
0	4	1	8	1	2	7	2	2	11	6	0	4	3	5	1	3	9	0	− 1
2	3	1	7	− 10	4	6	2	1	− 11	1	0	5	7	− 1	2	0	10	1	1
4	2	1	6	15	6	5	2	0	3	0	7	5	1	− 1	0	1	10	2	1
6	1	1	5	− 7	1	5	3	4	17	2	6	5	0	3	2	2	4	5	6

3.) $\lambda = 13$, $\delta = 2$, $\varepsilon = 6$.

1	6	0	6	1	1	0	2	10	1	4	0	8	1	1	1	2	10	0	1
3	5	0	5	− 7	0	10	1	2	1	2	3	3	5	− 18	3	3	5	2	8
5	4	0	4	14	2	9	1	1	− 3	4	2	3	4	10	5	2	5	1	− 8
7	3	0	3	− 12	4	8	1	0	1	6	1	3	3	− 6	7	1	5	0	− 1
9	2	0	2	5	0	7	2	4	4	8	0	3	2	2	1	1	6	5	6
11	1	0	1	− 1	2	6	2	3	− 9	0	1	4	8	1	3	0	6	4	5
1	3	1	8	4	4	5	2	2	19	2	0	4	7	4	0	5	7	1	− 1
3	2	1	7	− 10	6	4	2	1	− 11	1	7	4	1	− 5	2	4	7	0	4
5	1	1	6	6	8	3	2	0	2	3	6	4	0	5	0	2	8	3	2
7	0	1	5	− 1	0	4	3	6	5	1	4	5	3	− 9	2	1	8	2	6
k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K

Der Vollständigkeit wegen mag noch das letzte der 7 selbständigen vierelementigen Normprodukte zur Primzahl 13 angegeben werden.

k	l	m	n	K	k	l	m	n	K	k	l	m	n	K
0	10	2	1		1	3	0	9		8	3	1	1	
1	4	8	0		3	9	0	1		3	1	1	8	
4	0	8	1	1	9	1	0	3	−1	1	8	1	3	4
0	1	8	4		0	5	1	7		0	7	4	2	
10	1	2	0		5	7	1	0		7	2	4	0	
1	0	2	10		7	0	1	5		2	0	4	7	
2	5	5	1		2	3	2	6		2	8	3	0	
5	1	5	2		3	6	2	2		8	0	3	2	2
1	2	5	5	5	6	2	2	3	17	0	2	3	8	
0	4	6	3		1	5	3	4		5	2	0	6	
4	3	6	0		5	4	3	1		2	6	0	5	3
3	0	6	4		4	1	3	5		6	5	0	2	
1	1	10	1	2	3	3	4	3	22					
2	2	7	2	11	4	4	1	4	18					

Hier ist $\lambda = 13$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 6$. Bei weiterer Ausrechnung ergab sich:

$$N(1 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6) = 3^6, \qquad N(1 - \alpha + \alpha^4 + \alpha^6) = 313,$$
$$N(-1 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6) = N(1 + \alpha - \alpha^4 + \alpha^6) = 131,$$
$$N(1 + \alpha + \alpha^4 - \alpha^6) = 3^3.$$

Vergleicht man die K mit den bei $\lambda = 19$ berechneten, so scheinen dieselben noch manche andere Gesetzmässigkeiten zu befolgen; auf die wir jedoch nur mit dieser Hindeutung verweisen.[1]

Endlich mag der Ausdruck des vollständigen Normproduktes für $\lambda = 7$ hier Platz finden. Wir schreiben denselben in abgekürzter Form folgendermassen:

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)N(a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4 + a_5\alpha^5 + a_6\alpha^6)\\
= a_1^7 + 7\{a_1a_2a_3^3a_4a_5 + 5a_1a_2^2a_3a_4^2a_5 - 2a_1^2a_2a_3a_4a_5^2 - 3a_1^3a_2^3a_3a_4 - 3a_2a_3a_4^2a_5^3\\
- 3a_1a_2a_3^2a_4^3 + 2a_1^4a_2a_3a_4 - a_1a_2^2a_3^2a_4^2 - a_1^3a_2a_3^3 - a_1^3a_2^3a_4 - a_1a_2^5a_3 - a_3a_4^5a_5\\
+ 2a_1^2a_2^3a_3^2 + 2a_3^2a_4^3a_5^2 + a_1^4a_3^2a_4 + a_1^2a_2^4a_4 + a_1a_3^4a_4^2 + a_1^2a_3a_4^4\}.\end{aligned}$$

[1] Zahlreiche Bestätigungen unseres Lehrsatzes (Seite 290) zeigen die vorstehenden Beispiele auf den ersten Blick.

Jedes niedergeschriebene Glied vertritt 6 Glieder, welche aus demselben durch Multiplikation der Indices mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 hervorgehen. So vertritt $a_1 a_2^5 a_3$ die folgende Summe:

$$a_1 a_2^5 a_3 + a_2 a_4^5 a_6 + a_3 a_6^5 a_2 + a_4 a_1^5 a_5 + a_5 a_3^5 a_1 + a_6 a_5^5 a_4.$$

Dieses *vollständige Normprodukt* wurde berechnet aus einem fünfelementigen. Die Rechnung selbst war mit Hülfe unserer Sätze über Anzahl und Bau der Glieder eine überraschend einfache zu nennen.

Coesfeld im Februar 1888.