SUR UN MODE DE TRANSFORMATION DES SURFACES MINIMA.

(Second Mémoire)

PAR

E. GOURSAT
À PARIS.

1. Le problème traité dans le travail précédent[1] conduit à examiner une question plus générale. Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = f(x, y, z; x_0, y_0, z_0), \\ y_1 = \varphi(x, y, z; x_0, y_0, z_0), \\ z_1 = \psi(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

trois fonctions de six variables indépendantes x, y, z, x_0, y_0, z_0. Supposons que x, y, z désignent les coordonnées d'un point d'une surface minima *quelconque* S, et x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point correspondant de la surface adjointe S_0. Le point de coordonnées x_1, y_1, z_1 décrira une certaine surface S_1. *Quelles sont les fonctions* f, φ, ψ *les plus générales, telles que la surface* S_1 *soit aussi une surface minima, quelle que soit la surface minima* S?

On a vu dans le travail précédent qu'on peut satisfaire à cette condition en prenant pour f, φ, ψ des fonctions linéaires convenablement choisies de x, y, z, x_0, y_0, z_0. Les propriétés connues des surfaces minima conduisent sans difficulté à la forme générale des fonctions f, φ, ψ.

2. Soit m un point quelconque de l'espace de coordonnées a, b, c, m_0 un autre point de coordonnées a_0, b_0, c_0, P et P_0 deux plans paral-

[1] Voir Acta mathematica, t. **11**, p. 135.

lèles passant par ces deux points, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à ce plan. Considérons une surface minima S passant au point m et tangente en ce point au plan P; comme on peut déplacer la surface adjointe S_0 parallèlement à elle-même, nous pouvons supposer que le point correspondant à m sur S_0 est précisément le point m_0. Les formules (1) feront correspondre au point m un point m_1 dont les coordonnées a_1, b_1, c_1 ne dépendront que des coordonnées des deux points m et m_0. Des formules (1) on déduit

$$(2)\qquad \begin{cases} dx_1 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial f}{\partial y_0}dy_0 + \frac{\partial f}{\partial z_0}dz_0, \\ dy_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}dy_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z_0}dz_0, \\ dz_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \psi}{\partial z}dz + \frac{\partial \psi}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial \psi}{\partial y_0}dy_0 + \frac{\partial \psi}{\partial z_0}dz_0; \end{cases}$$

or on a [1]

$$dx_0 = \beta dz - \gamma dy, \qquad dy_0 = \gamma dx - \alpha dz, \qquad dz_0 = \alpha dy - \beta dx,$$

et, si on remplace dx_0, dy_0, dz_0 dans les formules précédentes, on voit que les cosinus directeurs de la normale à la surface décrite par le point x_1, y_1, z_1 ne dépendent que de $x, y, z, x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma$. Par conséquent, si l'on considère toutes les surfaces minima S tangentes à un plan P en un point déterminé m, telles que le point correspondant au point m sur la surface adjointe S_0 soit un point déterminé m_0, toutes les surfaces S_1 définies par les formules (1) sont tangentes à un plan déterminé P_1 en un point fixe m_1.

Cela posé, soit Γ une courbe minima quelconque représentée par les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} X = A(t), \\ Y = B(t), \\ Z = C(t), \end{cases}$$

---

[1] Schwarz, *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen* (Journal für Mathematik, t. **80**, p. 280; 1875).

où $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ désignent trois fonctions d'une même variable t vérifiant la relation

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0;$$

soit Γ_0 une seconde courbe minima représentée par les équations

$$(4) \qquad \begin{cases} X_0 = iA(t) + \lambda, \\ Y_0 = iB(t) + \mu, \\ Z_0 = iC(t) + \nu, \end{cases}$$

où λ, μ, ν sont trois constantes quelconques. Par la courbe Γ faisons passer une surface minima quelconque S et soit Δ la développable circonscrite à S le long de Γ; cette développable se réduit, comme on sait, à un cône ayant son sommet en un point du cercle de l'infini. La surface adjointe S_0 n'est pas complètement définie de position; on peut la transporter parallèlement à elle-même ou la remplacer par sa symétrique relativement à un point de l'espace. On reconnaît aisément qu'on peut, sans restreindre la généralité, la faire passer par la courbe Γ_0, de façon que les points des deux courbes Γ, Γ_0, qui correspondent à une même valeur de t, se correspondent aussi sur les surfaces S, S_0.

A la surface S les formules (1) font correspondre une surface S_1 qui, par hypothèse, doit être une surface minima. A la courbe Γ, ces formules font correspondre une certaine courbe C représentée par les équations

$$(5) \quad \begin{cases} X_1 = f[A(t), B(t), C(t); iA(t) + \lambda, iB(t) + \mu, iC(t) + \nu] = F(X, Y, Z), \\ Y_1 = \varphi[A(t), B(t), C(t); iA(t) + \lambda, iB(t) + \mu, iC(t) + \nu] = \Phi(X, Y, Z), \\ Z_1 = \psi[A(t), B(t), C(t); iA(t) + \lambda, iB(t) + \mu, iC(t) + \nu] = \Psi(X, Y, Z); \end{cases}$$

soit Δ_1 la développable circonscrite à S_1 le long de la courbe C. La courbe C et la développable Δ_1 resteront les mêmes, on vient de le voir, si les courbes Γ, Γ_0 et la développable Δ restent les mêmes. Or il existe une infinité de surfaces minima S inscrites dans la développable Δ le long de la courbe C, et on peut toujours supposer que les surfaces adjointes passent par la courbe Γ_0. On voit donc qu'il doit exister une infinité de surfaces minima S_1 inscrites dans la développable

Δ_1 le long de la courbe C. Or cela ne peut avoir lieu que si cette courbe C est elle-même une courbe minima.[1] Si on remarque maintenant qu'on peut répéter le raisonnement qui précède en partant d'une surface minima quelconque et d'une courbe minima quelconque située sur cette surface, ou est conduit aux conclusions suivantes. Si les formules (1) font correspondre à une surface minima quelconque S une nouvelle surface minima S_1;

1° *toute courbe minima Γ de S a pour transformée une courbe minima Γ_1 de S_1; 2° on peut déduire la courbe Γ_1 de la courbe Γ par des formules de transformation* (5), *qui font correspondre un point à un point et qui changent toute courbe minima en une nouvelle courbe minima.*

3. D'après cela, voici comment on obtiendra la transformation la plus générale satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Soit S une surface minima quelconque, S_1 une surface minima qui lui correspond par une transformation de cette nature. La surface S peut être considérée comme le lieu du milieu d'une corde joignant un point d'une courbe minima Γ à un point d'une autre courbe minima Γ'. La surface S_1 peut être engendrée de la même façon au moyen de deux courbes minima Γ_1, Γ_1'. Soit γ une courbe minima de S homothétique à Γ et γ_1 la courbe minima qui lui correspond sur S_1; cette courbe γ_1 sera homothétique à l'une des courbes Γ_1, Γ_1', à la courbe Γ_1 par exemple. Il résulte alors de ce qui précède que l'on pourra passer de la courbe Γ à la courbe Γ_1 au moyen d'une transformation qui fait correspondre un point à un point et à toute courbe minima une nouvelle courbe minima. La courbe Γ_1' se déduira de Γ' par une transformation de même nature.

Prenons, par conséquent, deux courbes minima quelconques Γ, Γ', représentées par les équations

$$\Gamma \begin{cases} X = A(t), \\ Y = B(t), \\ Z = C(t), \end{cases} \qquad \Gamma' \begin{cases} X' = A'(\tau), \\ Y' = B'(\tau), \\ Z' = C'(\tau), \end{cases}$$

---

[1] DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. **1**, p. 396.

et soient S, S_0 les deux surfaces minima, adjointes l'une de l'autre, données par les équations

$$S \begin{cases} 2x = A(t) + A'(\tau), \\ 2y = B(t) + B'(\tau), \\ 2z = C(t) + C'(\tau), \end{cases}$$

$$S_0 \begin{cases} 2x_0 = i[A(t) - A'(\tau)], \\ 2y_0 = i[B(t) - B'(\tau)], \\ 2z_0 = i[C(t) - C'(\tau)], \end{cases}$$

d'où l'on tire inversement

$$\begin{aligned} A(t) &= x - ix_0, & A'(\tau) &= x + ix_0, \\ B(t) &= y - iy_0, & B'(\tau) &= y + iy_0, \\ C(t) &= z - iz_0, & C'(\tau) &= z + iz_0. \end{aligned}$$

Appliquons à chacune des courbes Γ, Γ' une de ces transformations dont il vient d'être question, qui font correspondre un point à un point et qui changent les courbes minima en courbes minima. On obtient deux autres courbes minima Γ_1, Γ_1':

$$\Gamma_1 \begin{cases} X_1 = F[A(t), B(t), C(t)], \\ Y_1 = \Phi[A(t), B(t), C(t)], \\ Z_1 = \Psi[A(t), B(t), C(t)], \end{cases}$$

$$\Gamma_1' \begin{cases} X_1' = F'[A'(\tau), B'(\tau), C'(\tau)], \\ Y_1' = \Phi'[A'(\tau), B'(\tau), C'(\tau)], \\ Z_1' = \Psi'[A'(\tau), B'(\tau), C'(\tau)], \end{cases}$$

et une surface minima S_1

$$S_1 \begin{cases} 2x_1 = X_1 + X_1', \\ 2y_1 = Y_1 + Y_1', \\ 2z_1 = Z_1 + Z_1'. \end{cases}$$

Si on remplace dans ces formules $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$; $A'(\tau)$, $B'(\tau)$, $C'(\tau)$ par leurs valeurs en fonction de x, y, z; x_0, y_0, z_0 et si on divise par 2 les coordonnées x_1, y_1, z_1, on aboutit aux formules suivantes pour représenter la surface S_1

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 = F[x - ix_0, y - iy_0, z - iz_0] + F'[x + ix_0, y + iy_0, z + iz_0], \\ y_1 = \Phi[x - ix_0, y - iy_0, z - iz_0] + \Phi'[x + ix_0, y + iy_0, z + iz_0], \\ z_1 = \Psi[x - ix_0, y - iy_0, z - iz_0] + \Psi'[x + ix_0, y + iy_0, z + iz_0]. \end{cases}$$

Ces formules sont bien de la forme (1) et, d'après ce qu'on vient de voir, ce sont les plus générales qui satisfassent aux conditions du problème proposé.

4. Nous sommes donc amenés à rechercher les transformations de l'espace qui font correspondre un point à un point et qui changent toute courbe minima en une nouvelle courbe minima. Soient

$$(7) \qquad \begin{cases} X_1 = F(X, Y, Z), \\ Y_1 = \Phi(X, Y, Z), \\ Z_1 = \Psi(X, Y, Z) \end{cases}$$

les formules qui définissent une transformation de cette espèce; la somme $dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2$ est égale à une forme quadratique homogène de dX, dY, dZ dont les coefficients ne dépendent que de X, Y, Z. Mais, puisqu'on doit avoir

$$dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 = 0$$

toutes les fois que l'on a

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0,$$

il faut évidemment que l'on ait identiquement

$$(8) \qquad dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 = \lambda(dX^2 + dY^2 + dZ^2),$$

λ ne dépendant que de X, Y, Z. On connaît toutes les transformations de la forme (7) qui satisfont à cette condition.[1] Elles résultent de la combinaison de transformations par rayons vecteurs réciproques avec un déplacement, et dépendent de dix paramètres arbitraires. Ces transformations peuvent être définies d'une manière élégante, si l'on emploie les coordonnées pentasphériques; elles résultent alors d'une substitution orthogonale à cinq variables effectuée sur ces coordonnées. Il n'y a aucune difficulté à déduire de là l'expression générale des fonctions $F, F', \Phi, \Phi', \Psi, \Psi'$ qui figurent dans les formules (6) et par suite des fonctions f, φ, ψ des formules (1). Il est à remarquer que, si la surface primitive S est réelle, les formules (1) donneront une infinité de nouvelles surfaces qui seront toutes réelles, pourvu qu'on applique aux deux courbes Γ, Γ' des transformations imaginaires conjuguées.

5. Supposons que les transformations appliquées aux deux courbes minima Γ, Γ' se réduisent à une inversion par rapport à une sphère de rayon R ayant pour centre l'origine des coordonnées. Les formules (7) deviennent ici

$$(9)\qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{R^2 X}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ Y_1 = \dfrac{R^2 Y}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ Z_1 = \dfrac{R^2 Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}; \end{cases}$$

et les formules (6) nous donnent

$$(10)\qquad \begin{cases} x_1 = Ux + Vx_0, \\ y_1 = Uy + Vy_0, \\ z_1 = Uz + Vz_0, \end{cases}$$

[1] Liouville, *Journal de Mathématiques pures et appliquées.* 1ère série, t. **13**, p. 220 et t. **15**, p. 103.

Darboux, *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux.* Annales de l'Ecole Normale, t. **7**; 1878.

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$
(11) \qquad \begin{cases} U = \dfrac{R^2(x^2 + y^2 + z^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2)}{(x^2 + y^2 + z^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2)^2 + 4(xx_0 + yy_0 + zz_0)^2}, \\[2ex] V = \dfrac{2R^2(xx_0 + yy_0 + zz_0)}{(x^2 + y^2 + z^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2)^2 + 4(xx_0 + yy_0 + zz_0)^2}. \end{cases}
$$

Ces formules mettent en évidence la propriété suivante: les trois points de coordonnées (x, y, z), (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) sont dans un même plan passant par l'origine. La transformation qui précède a déjà été employée par M. Lie.