DÉMONSTRATION D'UN
THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LES FONCTIONS UNIFORMES
LIÉES PAR UNE RELATION ALGÉBRIQUE.

Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler

PAR

EMILE PICARD
À PARIS.

Le théorème que je me propose de démontrer peut être énoncé de la manière suivante.

Si entre deux fonctions analytiques uniformes d'une variable existe une relation algébrique de genre supérieur à l'unité, ces fonctions ne pourront avoir de point singulier essentiel isolé.

Je possède de cette proposition deux démonstrations essentiellement différentes. La première, qui s'appuie sur la théorie des fonctions fuchsiennes, ne sera à très peu près que la reproduction de celle que j'ai donnée, il y a quelques années, dans le Bulletin des sciences mathématiques **7**$_2$ (1883), p. 107—116, pour une proposition moins générale en apparence, mais identique au fond à celle que je viens d'énoncer. Quant à la seconde, j'en ai seulement autrefois indiqué le principe dans un cas particulier, et c'est à une ingénieuse remarque de M. Hurwitz que je dois d'avoir pu la pousser jusqu'au bout.

Première démonstration.

1. Mon point de départ est dans la proposition suivante qui résulte des recherches de M. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes (*Mémoire* *sur les groupes des équations linéaires,* Acta Mathematica tome 4). x et y étant liés par la relation algébrique

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

de genre au moins égal à *deux,* on peut trouver une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \varphi(x, y) . z$$

(où φ est rationnelle en x et y) n'ayant d'autres points singuliers que les points analytiques ($x = a$, $y = b$), points singuliers de l'équation (1), et jouissant des propriétés suivantes. Si l'on prend deux intégrales convenables ω_1 et ω_2, l'équation

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u$$

donne pour x une fonction fuchsienne de u, fonction qui n'est définie que pour les valeurs de u, dans lesquelles le coefficient de i est positif. *De plus,* dans le voisinage d'un point analytique ($x = a$, $y = b$) (b faisant partie d'un système circulaire de p racines), le quotient $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ sera fonction uniforme de $(x - a)^{\frac{1}{p}}$, et *enfin,* aucune des substitutions du groupe de l'équation linéaire n'est parabolique.

La fonction u de x, que nous venons de définir, a pour chaque valeur de x une infinité de déterminations; quel que soit x, toutes ces déterminations ont des valeurs finies, et, dans ces expressions mises sous la forme ordinaire des quantités complexes, le coefficient de i est toujours positif et différent de zéro. u désignant l'une d'entre elles, toutes les autres sont données par la formule

$$\frac{Au + B}{Cu + D}$$

où A, B, C et D sont réels, avec $AD - BC = 1$.

La substitution (A, B, C, D) est une substitution du groupe fuchsien défini plus haut. Ce groupe, comme je l'ai dit, ne renferme pas de substitutions paraboliques.

2. Ces résultats étant admis, soient

$$x = P(z), \qquad y = Q(z)$$

deux fonctions analytiques, uniformes dans le voisinage d'un point a, que nous allons supposer être, pour ces fonctions, un point singulier essentiel *isolé*. Je suppose qu'entre x et y existe une relation algébrique

$$f(x, y) = 0$$

de genre égal ou supérieur à deux.

J'envisage la fonction u de x, définie plus haut; je remplace dans cette fonction x par $P(z)$; u devient une fonction de z, dont nous allons faire l'étude, dans le voisinage de a, c'est-à-dire à l'intérieur d'un certain cercle C décrit du point a comme centre, cercle à l'intérieur duquel les fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ sont uniformes et ont le seul point singulier essentiel a.

Dans le voisinage de toute valeur de z, à laquelle ne correspond pas un système de valeurs de x et y qui donnent un point singulier de la relation algébrique, la fonction u est évidemment uniforme. Soit maintenant $z = z_1$ une valeur de z pour laquelle on ait $x = a'$, $y = b'$, cette dernière faisant partie d'un système circulaire de p racines; l'équation $P(z) = a'$ admettra la racine $z = z_1$ à un degré de multiplicité multiple de p, puisque la valeur de y tirée de l'équation (1) doit être une fonction uniforme de z. Or $u(x)$ étant dans le voisinage de $x = a'$ fonction uniforme de $(x - a')^{\frac{1}{p}}$, sera par suite une fonction uniforme de z dans le voisinage de z_1. Nous concluons de là que u est une fonction uniforme de z, dans tout contour simple, situé à l'intérieur de C et ne comprenant pas le point a.

Nous allons maintenant rechercher la forme de u dans le voisinage du point a. Soit pour un point du cercle C une détermination u de la fonction $u(z)$; quand z fait un tour complet autour du point a dans le sens positif, $x = P(z)$ décrit dans son plan une courbe également fermée, et par conséquent la nouvelle détermination de u a la forme

$$\frac{Au + B}{Cu + D},$$

cette substitution étant une des substitutions du groupe dont il a été parlé précédemment, et deux cas vont être à distinguer, suivant que cette substitution est hyperbolique ou elliptique.

3. Supposons d'abord que la substitution (A, B, C, D) soit hyperbolique. On a alors $(A + D)^2 > 4$. On peut alors, comme il est bien connu, trouver cinq quantités réelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et k, telles que $\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u}$ se reproduise multiplié par k après un tour complet de z autour du point a.

k est d'ailleurs une constante positive différente de l'unité; designons par μ son logarithme arithmétique. Le quotient

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} : (z - a)^{\frac{\mu}{2\pi i}}$$

reprend par suite la même valeur après un tour complet, et l'on peut écrire

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} = (z - a)^{\frac{\mu}{2\pi i}} \varphi(z),$$

la fonction $\varphi(z)$ étant uniforme dans le cercle C; $\varphi(z)$ n'aura dans ce domaine d'autre point singulier que le point a, car le dénominateur $\gamma + \delta u$ ne peut jamais devenir nul, puisque γ et δ sont réels. De plus $\varphi(z)$ ne s'annulera jamais, puisque $\alpha + \beta u$ ne peut s'annuler; par suite, le quotient $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ est uniforme et continu dans C à l'exception de a. On peut alors écrire

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \ldots + \frac{A_2}{(z - a)^2} + \frac{A_1}{z - a} + A + B(z - a) + \ldots,$$

série double procédant suivant les puissances croissantes de $z - a$. En intégrant, on voit de suite que A_1 doit être un entier m positif ou négatif, puisque $\varphi(z)$ est uniforme; on a donc

$$\varphi(z) = (z - a)^m e^{f(z)},$$

$f(z)$ étant uniforme dans C et continue à l'exception du point a. En résumé, nous obtenons

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} = (z - a)^{\frac{\mu}{2\pi i} + m} e^{f(z)}.$$

Or le coefficient de i dans le premier membre a un signe invariable, puisque dans u le coefficient de i est toujours positif; nous allons montrer que le coefficient de i dans le second membre ne peut avoir un signe constant; écrivons à cet effet

$$(z - a)^{\frac{\mu}{2\pi i} + m} e^{f(z)} = e^{\left(\frac{\mu}{2\pi i} + m\right)\log(z-a) + f(z)}$$

Si dans cette expression le coefficient de i a toujours le même signe, le signe $+$ pour fixer les idées, le coefficient de i dans

$$\left(\frac{\mu}{2\pi i} + m\right)\log(z - a) + f(z)$$

devra rester compris entre $2k\pi$ et $(2k + 1)\pi$, c'est-à-dire entre deux limites fixes.

Posons

$$\left(\frac{\mu}{2\pi i} + m\right)\log(z - a) + f(z) = U + iV.$$

Il est tout d'abord évident que, si m n'est pas nul, V ne peut rester entre deux limites fixes, car une rotation autour du point a augmente V de $2m\pi$.

Supposons donc $m = 0$; l'égalité précédente pourra s'écrire

$$\log(z - a) + \frac{2\pi i}{\mu} f(z) = -\frac{2\pi V}{\mu} + \frac{2\pi i U}{\mu},$$

ou

$$(z - a)e^{\frac{2\pi i}{\mu} f(z)} = e^{-\frac{2\pi V}{\mu}} e^{\frac{2\pi i U}{\mu}}.$$

Mais le module du second membre reste compris entre deux limites déterminées, tandis que le premier peut devenir aussi petit que l'on veut, que $f(z)$ soit continue ou non au point $z = a$.

Il résulte de la contradiction que nous venons de rencontrer que la substitution (A, B, C, D) ne peut être hyperbolique.

4. Supposons maintenant que la substitution soit elliptique. Nous avons dans ce cas

$$(A + D)^2 < 4$$

On pourra encore trouver quatre quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et k telles que $\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u}$ se reproduise multiplé par k après un tour de z autour de a; mais ici ces quantités ne sont plus réelles. On a pour déterminer le rapport de γ à δ l'équation du second degré

$$B\delta^2 + (D - A)\delta\gamma - C\gamma^2 = 0,$$

et pareillement

$$B\beta^2 + (D - A)\beta\alpha - C\alpha^2 = 0;$$

$\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\gamma}{\delta}$ sont donc racines de l'équation du second degré

$$B + (D - A)x - Cx^2 = 0,$$

dont les racines sont imaginaires, puisque

$$(A + D)^2 < 4 \quad \text{et} \quad AD - BC = 1.$$

Nous prendrons pour $\frac{\alpha}{\beta}$ la racine dans laquelle le coefficient de i est négatif, et par suite dans $\frac{\gamma}{\delta}$ le coefficient de i sera positif.

Quant au multiplicateur k, il est nécessairement une racine de l'unité, sans quoi le groupe dont fait partie la substitution (A, B, C, D) ne serait pas un groupe discontinu; nous poserons donc $k = e^{\frac{2m\pi i}{n}}$, m et n étant positifs et premiers entre eux.

Ceci posé, considérons le quotient

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} : (z - a)^{\frac{m}{n}};$$

ce quotient sera une fonction uniforme dans le domaine C.

Ecrivons donc

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} = (z - a)^{\frac{m}{n}} \varphi(z).$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, le coefficient de i dans $-\frac{\gamma}{\delta}$ est négatif, tandis qu'il est positif dans $-\frac{\alpha}{\beta}$. Le dénominateur $\gamma + \delta u$ ne peut donc s'annuler, puisque dans u le coefficient de i est toujours positif; il y a plus, le module du premier membre reste toujours inférieur à une limite qu'il serait facile d'assigner. On en conclut que le point $z = a$ ne peut être un point singulier essentiel pour $\varphi(z)$. Ce point est donc un pôle ou un point ordinaire pour la fonction φ; dans ces conditions, l'expression

$$(z - a)^{\frac{m}{n}} \varphi(z),$$

n étant plus grand que 1 et m étant premier à n, ne peut que tendre vers zéro ou augmenter indéfiniment quand z tend vers a; la seconde supposition étant, d'après ce qui précède, inadmissible, cette expression a la valeur zéro pour $z = a$. Nous arrivons donc à cette conclusion:

De quelque manière que z tende vers le point a, la fonction u tend vers $-\frac{\alpha}{\beta}$. Or, pour $u = -\frac{\alpha}{\beta}$, la fonction fuchsienne x de u, définie par la relation (n° 1)

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u,$$

possède une valeur parfaitement déterminée; donc, de quelque manière que z tende vers a, la fonction $x = P(z)$ tend vers une valeur déterminée, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que le point a est un point singulier essentiel de $P(z)$.

La substitution (A, B, C, D) ne peut donc être elliptique; or, comme le groupe ne renferme que des substitutions elliptiques et hyperboliques, il ne nous reste plus qu'à supposer que la fonction u de z est uniforme dans le voisinage de a.

5. L'examen de ce cas sera bien facile. On aurait alors

$$u = A(z) + B(z),$$

où

$$A(z) = A_0 + A_1(z - a) + \ldots,$$

$$B(z) = \frac{B_1}{z - a} + \frac{B_2}{(z - a)^2} + \ldots.$$

$B(z)$ doit être nulle, sinon le coefficient de i dans la fonction u aurait un signe variable. On a donc

$$u = A_0 + A_1(z - a) + A_2(z - a)^2 + \ldots.$$

Dans la constante A_0, le coefficient de i doit être différent de zéro et positif; il ne peut, en effet, être nul, car alors le coefficient de i dans u serait le même que dans

$$A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\ldots,$$

et ce dernier dans le voisinage de $z=a$ n'a évidemment pas un signe constant.

On voit donc que, quand z tend vers a, u tend vers une valeur A_0 dans laquelle le coefficient de i est différent de zéro et positif. En raisonnant comme plus haut, nous en concluons que, pour $z=a$, la fonction $P(z)$ a une valeur parfaitement déterminée.

Il est maintenant bien aisé de conclure. Nous sommes en effet, par ce qui précède, conduit à cette conclusion que le point *a ne peut être* un point singulier *essentiel* de $P(z)$ et $Q(z)$. C'est donc bien, comme on voit, le théorème énoncé au début qui se trouve ainsi démontré d'une manière complétement rigoureuse. On peut encore dire, ce qui reviendra au même, que:

Si entre deux fonctions analytiques uniformes ayant un point singulier essentiel isolé, existe une relation algébrique, le genre de cette relation ne peut dépasser un.

Seconde démonstration.

6. Nous allons maintenant donner une seconde démonstration du même théorème, sans rien emprunter à la théorie des fonctions fuchsiennes. A cet effet, nous supposerons d'abord que la relation $f(x, y)=0$ soit hyperelliptique; nous pourrons alors nous placer dans l'hypothèse où cette relation a précisément la forme

$$y^2=(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n);$$

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont n constantes différentes et n est supérieur à quatre.

Nous supposons, comme plus haut, que l'on puisse poser

$$x=P(z), \qquad y=Q(z)$$

P et Q étant des fonctions analytiques, uniformes dans le voisinage d'un point a, qui sera pour ces fonctions un point singulier essentiel isolé.

Il est clair que les équations

$$P(z) = b_1, \qquad P(z) = b_2, \quad . \; . \; . \; , \quad P(z) = b_n,$$

n'auront dans le cercle C que des racines d'un degré pair de multiplicité.

Ceci posé, formons le quotient

$$\frac{\frac{dP}{dz}}{\sqrt{(P-b_1)(P-b_2)(P-b_3)(P-b_4)}}$$

ce sera une fonction $R(z)$, uniforme dans le cercle C, et continue sauf au point a qui pourra être pour elle un point singulier essentiel. Nous pouvons donc écrire

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{\sqrt{(P-b_1)\ldots(P-b_4)}} = \int_{z_0}^{z} R(z)dz = S(z) + A\log(z-a)$$

$S(z)$ désignant une fonction uniforme dans C, et continue sauf au point a, qui pourra être pour elle un point singulier essentiel; A représente une constante, et $2\pi i A$ est évidemment une somme de multiples de périodes de l'intégrale elliptique.

On conclut de là que $P(z)$ est une fonction doublement périodique φ de $S(z) + A\log(z-a)$, soit

$$P(z) = \varphi[S(z) + A\log(z-a)].$$

Je vais maintenant montrer que $P(z)$ ayant cette forme, l'équation

$$(1) \qquad P(z) = b$$

où b est différent de b_1, b_2, b_3, b_4 ne peut avoir dans C toutes ses racines d'un degré pair de multiplicité. Remarquons d'abord que la dérivée de $\varphi(u)$ considérée comme fonction de u ne s'annule que quand φ prend une des valeurs b_1, b_2, b_3 ou b_4; il en résulte que si $z = z_1$ est une racine d'un certain degré de multiplicité de l'équation (1), elle sera racine du même degré de multiplicité de l'équation:

$$S(z) + A\log(z-a) = S(z_1) + A\log(z_1-a).$$

Si donc nous désignons par u_1 et u_2 les racines de l'équation $\varphi(u) = b$ dans un parallélogramme de périodes (ω, ω'), toutes les équations

$$(2)\qquad \begin{aligned} S(z) + A \log(z - a) &= u_1 + m\omega + m'\omega' \\ S(z) + A \log(z - a) &= u_2 + m\omega + m'\omega' \end{aligned}$$

où m et m' sont des entiers quelconques, devront avoir dans C toutes leurs racines d'un degré pair de multiplicité.

Considérons maintenant la fonction

$$\mathfrak{G}(z) = (z - a) e^{\frac{S(z)}{A}}$$

c'est une fonction uniforme dans C, et continue sauf au point a qui est pour elle un point singulier essentiel. Les équations

$$\mathfrak{G}(z) = e^{\frac{u_1 + m\omega + m'\omega'}{A}}, \qquad \mathfrak{G}(z) = e^{\frac{u_2 + m\omega + m'\omega'}{A}}$$

n'auront dans C que des racines d'un degré pair de multiplicité, car ces équations sont identiques aux équations (2), puisque, comme nous l'avons dit, on a

$$2\pi i A = \alpha\omega + \beta\omega'$$

α et β étant des entiers. De plus, ces équations sont en nombre infini; nous avons donc une fonction $\mathfrak{G}(z)$ uniforme dans C, continue sauf au point singulier essentiel a, *et telle que pour une infinité de valeurs de* h, l'équation

$$\mathfrak{G}(z) = h$$

a dans C toutes ses racines de degré pair de multiplicité. C'est à la démonstration de l'impossibilité de ce fait que nous sommes ramené.

En considérant quatre des valeurs possibles de h, et en raisonnant sur $\mathfrak{G}$, comme nous avons raisonné plus haut sur P, on montrera que φ_1 désignant une fonction doublement périodique, on a:

$$(3)\qquad \mathfrak{G}(z) = \varphi_1[S_1(z) + A_1 \log(z - a)]$$

$S_1(z)$ étant une fonction de même nature que S et $\mathfrak{G}$.

Or *l'identité* (3) *est inadmissible.* Car soit $\lambda + m\omega_1 + m'\omega_1'$ une série de pôles de la fonction φ_1, dont ω' et ω_1' désignent les périodes; les équations

$$(4)\qquad S_1(z) + A_1 \log(z - a) = \lambda + m\omega_1 + m'\omega_1'$$

auront certainement des racines dans le cercle C, car ces équations reviennent aux équations:

$$(z-a)e^{\frac{S_1(z)}{A_1}} = e^{\frac{\lambda + m\omega_1 + m'\omega'_1}{A_1}}$$

(en se rappelant la relation nécessaire $2\pi i A_1 = \alpha_1\omega_1 + \beta_1\omega'_1$).

Le second membre a une infinité de valeurs quand on donne aux entiers m et m' toutes les valeurs entières possibles. Or si l'on considère la fonction:

$$(z-a)e^{\frac{S_1(z)}{A_1}}$$

elle prend une infinité de fois dans le voisinage de a toute valeur donnée, *deux* exceptions seulement étant possibles, d'après une proposition générale que j'ai donnée autrefois sur les valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel.[1] Pour une racine de l'équation (4), $\mathcal{G}(z)$ sera infini, ce qui est en contradiction avec le fait que $\mathcal{G}(z)$ doit être continue pour tous les points de C à l'exception seulement de a.

Le théorème est ainsi complétement démontré pour les courbes hyperelliptiques.

7. Il a été supposé, dans ce qui précède, que la relation entre x et y était hyperelliptique. Mes tentatives, pour passer au cas général, n'avaient pas été couronnées de succès, mais on peut cependant achever la démonstration, en restant dans le même ordre d'idées, grâce à une remarque fort intéressante que m'a communiquée M. A. Hurwitz dans une lettre déjà ancienne.

Soit $f(x, y) = 0$, la relation que l'on ne suppose pas hyperelliptique, et pour laquelle on a par conséquent $p > 2$. A l'équation précédente, le savant géomètre associe une relation

$$f_1(x, y_1) = 0 \qquad \text{de genre } p = 2$$

jouissant des propriétés suivantes: les points de ramification de la fonction algébrique y_1 de x sont tous compris parmi les points de ramification de la fonction algébrique y de x (on suppose, pour plus de simplicité, et comme il est permis, que tous les points de ramification de la

[1] *Mémoire sur les fonctions entières* (Annales de l'école normale supérieure de Paris, 1880).

fonction donnent seulement des cycles de deux racines), et dans le voisinage de tout point analytique (x, y) la fonction y_1 peut être considérée comme une fonction uniforme du point (x, y). L'équation $f_1(x, y_1)$ peut d'ailleurs être déterminée d'une infinité de manières, comme le montre la considération de la surface de RIEMANN correspondant à $f(x, y) = 0$.

Substituons maintenant dans cette fonction y_1 de x

$$x = P(z).$$

y_1 va devenir une fonction de z, uniforme et continue dans le voisinage de tout point du cercle C, autre que le point a; quand z fera un tour autour du point a, y_1 pourra ne pas retrouver la même valeur, mais comme y_1 n'a qu'un nombre limité de valeurs, on est assuré qu'après un certain nombre de tours, soit m, y_1 reprendra sa valeur initiale. Or posons

$$z - a = z'^m$$

x sera une fonction uniforme de z' dans le voisinage de $z' = 0$, et y_1 sera pareillement une fonction uniforme de cette même variable; nous avons donc deux fonctions x et y_1 de z', uniformes dans le voisinage de $z' = 0$ qui est pour elles un point singulier essentiel isolé, et liées par la relation

$$f_1(x, y_1) = 0$$

dont le genre est égal à deux. Cette conclusion est inadmissible d'après ce que nous avons dit d'une manière générale des relations hyperelliptiques. Le théorème est donc, cette fois, établi sans aucune restriction.

8. Des deux démonstrations précédentes, la seconde ne faisant pas appel à la théorie des fonctions fuchsiennes a évidemment un caractère plus élémentaire. Elle est cependant beaucoup plus artificielle, et il me paraît plus naturel, pour démontrer l'impossibilité en question, de s'adresser précisément aux fonctions uniformes réalisant cette expression des coordonnées d'une courbe algébrique à l'aide d'un paramètre. Les fonctions fuchsiennes se justifient en quelque sorte ainsi elles mêmes; je veux dire qu'on peut tenir pour certain, d'après le théorème qui fait l'objet de cet article, qu'il est impossible d'obtenir des fonctions uniformes plus simples que celles de M. POINCARÉ pour exprimer les coordonnées d'une courbe algébrique de genre quelconque.

Paris, le 11 Octobre 1887.