SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES

PAR

P. APPELL
à PARIS.

Je me propose, dans ce travail, d'étendre à une classe particulière de fonctions de deux variables *indépendantes* x et y les théorèmes de MM. WEIERSTRASS et MITTAG-LEFFLER sur les fonctions d'une variable. J'applique ensuite les théorêmes généraux ainsi obtenus à la formation de certaines fonctions simplement périodiques de deux variables.

J'emploie le mot de *point* pour désigner un système de valeurs attribuées aux deux variables x et y; ainsi je dis qu'une fonction de x et y s'annule au point (x_1, y_1) si elle s'annule pour $x = x_1$, $y = y_1$; etc. ....

Nous renvoyons pour la classification des points singuliers des fonctions de deux variables indépendantes au Mémoire de M. WEIERSTRASS: »*Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze*».

1. Soient

$$(1) \qquad f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots f_\nu(x, y), \ldots$$

une suite de fonctions analytiques uniformes des deux variables *indépendantes* x et y possédant la propriété suivante: pour toutes les valeurs de ν supérieures à un entier positif μ, l'on peut assigner un nombre positif a_ν tel que la fonction $f_\nu(x, y)$ reste holomorphe tant que les modules de x et y restent inférieurs à a_ν; de plus ce nombre a_ν augmente indéfiniment avec ν. L'on peut alors former une fonction uniforme $F(x, y)$ des variables indépendantes x et y n'ayant à distance finie d'autres points singuliers que ceux des fonctions (1) et telle que la différence

$$F(x, y) - f_\nu(x, y)$$

soit régulière en tous les points singuliers de $f_\nu(x, y)$ à l'exception de ceux de ces points singuliers qui peuvent appartenir à certaines autres des fonctions (1).

Pour démontrer ce théorème il suffit d'employer la démonstration indiquée par M. WEIERSTRASS pour le théorème de M. MITTAG-LEFFLER. C'est ce que je vais montrer rapidement. Désignons par ε un nombre positif moindre que l'unité et par

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots \varepsilon_\nu, \ldots$$

des nombres positifs dont la somme est finie. Formons d'abord la somme des fonctions $f_\nu(x, y)$ dans lesquels $\nu \leqq \mu$;

$$F_1(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} f_\nu(x, y). \tag{2}$$

Considérons maintenant les fonctions $f_\nu(x, y)$ dans lesquelles $\nu > \mu$; pour les valeurs de x et y telles que

$$\operatorname{mod} x \leqq \varepsilon a_\nu, \quad \operatorname{mod} y \leqq \varepsilon a_\nu \tag{3}$$

la fonction $f_\nu(x, y)$ est développable en une série convergente de la forme

$$f_\nu(x, y) = \sum_{m=0,\ n=0}^{m=\infty,\ n=\infty} A_{m,n}^{(\nu)} x^m y^n,$$

et l'on peut assigner un entier positif p_ν tel que, pour toutes les valeurs de x et y satisfaisant aux conditions (3), l'on ait

$$\operatorname{mod.} \sum_{m=p_\nu,\ n=p_\nu}^{m=\infty,\ n=\infty} A_{m,n}^{(\nu)} x^m y^n \leqq \varepsilon_\nu;$$

si donc l'on désigne par $\varphi_\nu(x, y)$ le polynôme

$$\varphi_\nu(x, y) = \sum_{m=0,\ n=0}^{m=p_\nu-1,\ n=p_\nu-1} A_{m,n}^{(\nu)} x^m y^n,$$

la série

$$(4) \qquad F_2(x, y) = \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu=\infty} [f_\nu(x, y) - \varphi_\nu(x, y)]$$

est convergente en tous les points qui ne sont pas des points singuliers des fonctions $f_\nu(x, y)$. La fonction

$$F(x, y) = F_1(x, y) + F_2(x, y)$$

possède les propriétés indiquées dans l'énoncé. La fonction la plus générale possédant ces propriétés est $F(x, y) + G(x, y)$, $G(x, y)$ étant une fonction entière de x et y.

2. L'on conclut de ce qui précède le théorème suivant:

Soient

$$(5) \qquad g_1(x, y),\ g_2(x, y),\ \ldots\ g_\nu(x, y),\ \ldots$$

une suite de fonctions entières de x et y possédant la propriété suivante: pour toutes les valeurs de ν supérieures à un entier positif μ, l'on peut assigner un nombre positif a_ν tel que la fonction $g_\nu(x, y)$ ne s'annule pour aucun système de valeurs de x et y dont les modules restent inférieurs à a_ν; de plus ce nombre a_ν augmente indéfiniment avec ν. Alors, en désignant par

$$k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_\nu,\ \ldots$$

une suite d'entiers positifs, l'on peut former une fonction entière $G(x, y)$ de x et y s'annulant pour toutes les valeurs de x et y qui annulent la fonction $g_\nu(x, y)$ de telle façon que le quotient

$$\frac{G(x, y)}{[g_\nu(x, y)]^{k_\nu}}$$

reste fini et différent de zéro pour toutes ces valeurs, sauf pour celles d'entre elles qui annulent en même temps certaines autres des fonctions entières (5).

Cette fonction $G(x, y)$ est donnée par la formule

$$G(x, y) = G_1(x, y) \,.\, G_2(x, y)$$

avec

$$G_1(x,\ y) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\mu} [g_\nu(x,\ y)]^{k_\nu}$$

et

$$G_2(x,\ y) = \prod_{\nu=\mu+1}^{\nu=\infty} [g_\nu(x,\ y)]^{k_\nu} e^{\gamma_\nu(x,\ y)}$$

où $\gamma_\nu(x,\ y)$ désigne un polynôme convenablement déterminé.

Pour démontrer ces propositions, il suffit d'appliquer le théorème du § 1 à la fonction

$$\frac{\partial \log G(x,\ y)}{\partial x}$$

en prenant

$$f_\nu(x,\ y) = k_\nu \frac{\partial \log g_\nu(x,\ y)}{\partial x}$$

3. Pour appliquer le théorème du § 1 à un exemple, prenons

$$(6) \qquad f_\nu(x,\ y) = \frac{1}{[(x+m)^2 + (y+n)^2 + a^2]^s}$$

s étant un entier positif, et les différentes fonctions f_ν étant obtenues en donnant à m et à n toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. Cette fonction satisfait bien aux conditions imposées à $f_\nu(x,\ y)$. En effet soit c un nombre positif quelconque; mettons à part les fonctions (6) en nombre fini correspondant à des valeurs de m et n pour lesquelles la quantité

$$(7) \qquad \sqrt{m^2 + n^2} - \text{mod.}\, a - c$$

est négative ou nulle. Les fonctions (6) correspondant à toutes les autres valeurs de m et n sont holomorphes pour toutes les valeurs de x et y dont les modules sont moindres que le nombre positif

$$(8) \qquad a_\nu = \frac{1}{2}\left[\sqrt{m^2 + n^2} - \text{mod.}\, a - c\right];$$

l'on voit de plus que a_ν croît indéfiniment avec ν. En effet, si les modules de x et y sont moindres que la quantité positive (8) on a

$$\text{mod.}\,(x + yi + m + ni) > \text{mod.}\,(m + ni) - \text{mod.}\,(x + yi)$$

$$\text{mod.}\,(x - yi + m - ni) > \text{mod.}\,(m - ni) - \text{mod.}\,(x - yi)$$

et comme

$$\text{mod.}\,(x + yi) < \text{mod.}\,x + \text{mod.}\,y$$

$$\text{mod.}\,(x - yi) < \text{mod.}\,x + \text{mod.}\,y$$

et que

$$\text{mod.}\,x + \text{mod.}\,y \leqq \sqrt{m^2 + n^2} - \text{mod.}\,a - c,$$

on a

$$\text{mod.}\,(x + yi + m + ni) > \text{mod.}\,a + c$$

$$\text{mod.}\,(x - yi + m - ni) > \text{mod.}\,a + c\,;$$

donc en multipliant membre à membre

$$\text{mod.}\,[(x + m)^2 + (y + n)^2] - \text{mod.}\,a^2 > 2c\,\text{mod.}\,a + c^2\,;$$

d'où enfin puisque

$$\text{mod.}\,[(x + m)^2 + (y + n)^2 + a^2] > \text{mod.}\,[(x + m)^2 + (y + n)^2] - \text{mod.}\,a^2,$$

$$\text{mod.}\,[(x + m)^2 + (y + n)^2 + a^2] > 2c\,\text{mod.}\,a + c^2$$

Donc pour toutes les valeurs de x et y dont le module est inférieur à la quantité (8) le module du dénominateur de $f_\nu(x, y)$ reste supérieur à un nombre fixe et par suite $f_\nu(x, y)$ est holomorphe pour ces valeurs.

Si l'entier s est plus grand que 1, la fonction $F(x, y)$ est facile à former; en effet dans ce cas la série

$$F_s(x, y \mid a) = \sum_{m,\,n=-\infty}^{m,\,n=+\infty} \frac{1}{[(x + m)^2 + (y + n)^2 + a^2]^s} \tag{9}$$

est absolument convergente et les polynômes désignés dans la théorie générale par $\varphi_\nu(x, y)$ sont nuls identiquement. (Voir à ce sujet un Mémoire d'EISENSTEIN, Journal de Crelle tome 35, page 155). La fonction (9) ainsi définie est simplement périodique. On a, en effet,

$$F_s(x + 1, y \mid a) = F_s(x, y + 1 \mid a) = F_s(x, y \mid a)$$

On remarquera l'analogie de la fonction (9) avec la fonction

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{[(x+m)^2+a^2]^s}$$

qui s'exprime à l'aide des fonctions circulaires. La fonction (9) satisfait à l'identité

$$k^{2s}F_s(kx,\ ky \mid ka) = \sum_{\mu,\ \nu=0}^{\mu,\ \nu=k-1} F_s\left(x+\frac{\mu}{k},\ y+\frac{\nu}{k} \,\middle|\, a\right)$$

où k est un entier positif. Cette formule est analogue à celle de la multiplication dans les fonctions circulaires.

Lorsque l'exposant s est égal à 1, la série (9) n'est plus convergente. Alors

$$f_\nu(x,\ y) = \frac{1}{(x+m)^2+(y+n)^2+a^2}; \tag{10}$$

développons cette fonction en série en supposant que la quantité (7) soit positive et que les modules de x et y soient moindres que la quantité (8); nous avons

$$f_\nu(x,\ y) = \frac{1}{m^2+n^2+a^2} - \frac{2mx+2ny}{(m^2+n^2+a^2)^2} + \dots$$

Dans le cas actuel il suffit de prendre

$$\varphi_\nu(x,\ y) = \frac{1}{m^2+n^2+a^2};$$

alors considérant les deux fonctions

$$F'(x,\ y) = \sum \frac{1}{(x+m)^2+(y+n)^2+a^2}$$

la somme étant étendue aux valeurs de m et n en nombre fini qui rendent la quantité (7) négative ou nulle, et

$$F''(x,\ y) = \sum \left[\frac{1}{(x+m)^2+(y+n)^2+a^2} - \frac{1}{m^2+n^2+a^2}\right]$$

cette somme étant étendue aux valeurs de m et n qui rendent la quantité (7) positive, la fonction cherchée sera

$$F(x, y) = F'(x, y) + F''(x, y).$$

4. Les résultats précédents conduisent à considérer une classe nouvelle de fonctions simplement périodiques de deux variables indépendantes. Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle de x et y; prenons

$$f_\nu(x, y) = R(x + m, y + n)$$

et supposons que cette fonction f_ν satisfasse aux conditions imposées par l'énoncé du § 1. Alors, si les polynômes désignés dans la théorie générale par $\varphi_\nu(x, y)$ sont nuls identiquement, la série

$$\sum_{m,\, n=-\infty}^{m,\, n=+\infty} R(x + m, y + n)$$

est absolument convergente et définit une fonction uniforme ayant par rapport à chacune des variables la période 1.

Si les polynômes $\varphi_\nu(x, y)$ ne sont pas nuls et si leurs degrés respectifs restent inférieurs à un nombre fixe, la fonction $F(x, y)$ correspondante satisfera à deux relations de la forme

$$F(x + 1, y) - F(x, y) = \psi(x, y)$$
$$F(x, y + 1) - F(x, y) = \omega(x, y)$$

ψ et ω désignant des polynômes en x et y satisfaisant à la relation

$$\psi(x, y + 1) - \psi(x, y) = \omega(x + 1, y) - \omega(x, y) \tag{11}$$

Soit k le degré des polynômes ψ et ω; l'on pourra former un polynôme $\chi(x, y)$ de degré $k + 1$ tel que

$$\begin{cases} \chi(x + 1, y) - \chi(x, y) = \psi(x, y) \\ \chi(x, y + 1) - \chi(x, y) = \omega(x, y); \end{cases} \tag{12}$$

alors la fonction

$$F(x, y) - \chi(x, y)$$

admettra pour x et y les deux périodes 1.

Dans certains cas particuliers, ces fonctions peuvent se réduire à des transcendantes déjà connues. Ainsi, si l'on suppose, dans ce qui précède,

$$R(x,\ y) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x + yi} + \frac{1}{x - yi}\right],$$

la fonction $F(x,\ y)$ formée avec $R(x,\ y)$ comme il vient d'être indiqué s'exprimera à l'aide de la fonction

$$\frac{d \log \theta_1(u)}{du}$$

5. Voici encore une application à un exemple du théorème du § 2. Supposons, dans ce théorème,

$$g_\nu(x,\ y) = (x + m)^2 + (y + n)^2 + a^2 \tag{13}$$

m et n variant comme précédemment de $-\infty$ à $+\infty$. Posons

$$G_1(x,\ y) = \prod[(x + m)^2 + (y + n)^2 + a^2]$$

le produit étant étendu aux valeurs de m et n qui rendent la quantité (7) négative ou nulle, et

$$G_2(x,\ y) = \prod{}' \frac{(x + m)^2 + (y + n)^2 + a^2}{m^2 + n^2 + a^2} e^{\gamma_\nu(x,\ y)}$$

où

$$\gamma_\nu(x,\ y) = -\frac{2mx + 2ny + x^2 + y^2}{m^2 + n^2 + a^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2mx + 2ny + x^2 + y^2}{m^2 + n^2 + a^2}\right)^2$$

le produit $\prod'$ étant étendu aux valeurs de m et n qui rendent cette quantité (7) positive; alors la fonction $G(x,\ y)$ cherchée sera

$$G(x,\ y) = G_1(x,\ y)\,.\,G_2(x,\ y)$$

Cette fonction n'admet pas les périodes 1 pour x et y; elle vérifie des équations de la forme

$$G(x + 1,\ y) = e^{\psi(x,\ y)} G(x,\ y)$$

$$G(x,\ y + 1) = e^{\omega(x,\ y)} G(x,\ y)$$

où ψ et ω sont des polynômes du troisième degré vérifiant l'équation (11). On pourra alors former un polynôme $\chi(x, y)$ du quatrième degré vérifiant les relation (12) et la fonction

$$e^{-\chi(x,\, y)} G(x, y)$$

admettra la période 1 pour chacune des variables.

On est ainsi conduit à une classe de fonctions entières admettant la période 1 pour chacune des variables x et y. Pour les former on prendra d'après les notations du § 2

$$g_\nu(x, y) = P(x + m, y + n),$$

$P(x, y)$ désignant un polynôme en x et y. Lorsque ce polynôme $P(x, y)$ est homogène, la fonction correspondante s'exprime à l'aide des fonction θ.

6. Soit, par exemple,

$$g_\nu(x, y) = (x + m)^2 + (y + n)^2;$$

la fonction $G'(x, y)$ correspondante se déduira de celle qui a été formée dans le § 5 en supposant dans (13) $\alpha = 0$. Cette fonction $G'(x, y)$ sera

$$G'(x, y) = (x^2 + y^2) \prod{}' \frac{(x + m)^2 + (y + n)^2}{m^2 + n^2} e^{\gamma_\nu(x,\, y)} \tag{14}$$

avec

$$\gamma_\nu(x, y) = -\frac{2mx + 2ny + x^2 + y^2}{m^2 + n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2mx + 2ny + x^2 + y^2}{m^2 + n^2}\right)^2,$$

le produit $\prod'$ étant étendu aux valeurs entières de m et n de $-\infty$ à $+\infty$, la combinaison $m = n = 0$ étant exceptée. Cette fonction (14) s'exprime à l'aide des fonctions θ ou de la fonction σ de M. Weierstrass:

$$\sigma(u \mid \omega, \omega') = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{m\omega + n\omega'}\right) e^{\frac{u}{m\omega + n\omega'} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{(m\omega + n\omega')^2}}$$

En effet en posant

$$x + yi = z, \qquad x - yi = t,$$

on a

$$\frac{(x + m)^2 + (y + n)^2}{m^2 + n^2} = \frac{z + m + ni}{m + ni} \cdot \frac{t + m - ni}{m - ni}$$

$$\gamma_\nu(x,\ y) = -\frac{z}{m+ni} - \frac{t}{m-ni} - \frac{zt}{m^2+n^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{z}{m+ni} + \frac{t}{m-ni} + \frac{zt}{m^2+n^2}\right]^2$$

d'où

$$\gamma_\nu(x,\ y) = -\frac{z}{m+ni} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{(m+ni)^2} - \frac{t}{m-ni} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{(m-ni)^2} +$$

$$+ \frac{z^2 t}{(m+ni)(m^2+n^2)} + \frac{zt^2}{(m-ni)(m^2+n^2)} + \frac{1}{2}\frac{z^2t^2}{(m^2+n^2)^2}$$

Alors en posant

$$a = \sum{}' \frac{1}{(m+ni)(m^2+n^2)} = \sum{}' \frac{1}{(m-ni)(m^2+n^2)}$$

$$b = \sum{}' \frac{1}{(m^2+n^2)^2}$$

les sommes $\sum{}'$ étant étendues aux valeurs entières de m et n de $-\infty$ à $+\infty$, la combinaison $m = n = 0$ exceptée, on a

$$G'(x,\ y) = e^{azt(z+t)+\frac{1}{2}bz^2t^2}\sigma(z \mid 1,\ i)\sigma(t \mid 1,\ i);$$

et la fonction (14) est ainsi exprimée à l'aide de la fonction σ.

7. De même que nous venons de former des fonctions de deux variables simplement périodiques, l'on pourrait se proposer de former des fonctions de deux variables à quatre paires de périodes en prenant dans le théorême du § 1

$$f_\nu(x,\ y) = R(x + m' + m\alpha + n\gamma,\ y + n' + m\gamma + n\beta)$$

où $R(x,\ y)$ désigne une fonction rationnelle de x et y, les différentes fonctions f_ν étant obtenues en faisant varier les quatre nombres entiers

$$m,\ m',\ n,\ n'$$

de $-\infty$ à $+\infty$. Mais il y a lieu de penser qu'il est impossible de former par cette voie des fonctions de deux variables à quatre paires de périodes; c'est ce que je me propose d'examiner dans une autre occasion.