SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

PAR

E. GOURSAT

à TOULOUSE.

L'expression de la série hypergéométrique au moyen d'une intégrale définie où figure un paramètre variable est connue depuis longtemps. Ce mode de représentation permet de trouver très-simplement les relations linéaires entre les vingt-quatre séries qui appartiennent à une même équation, comme je l'ai montré dans une Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris (Juillet 1881). En cherchant à généraliser ce résultat, j'ai été conduit à étudier une classe de fonctions représentées par des intégrales définies, dont j'expose dans ce travail les propriétés caractéristiques.

Dans une lettre adressée à M^r^ MITTAG-LEFFLER, (1) M^r^ HERMITE a montré comment la notion de coupure s'offrait tout naturellement, au début du calcul intégral, par l'étude d'une intégrale définie où figure un paramètre variable. Les coupures jouent également un rôle essentiel dans cette étude; mais les fonctions sous le signe d'intégration ne sont plus, comme dans la lettre de M^r^ HERMITE, des fonctions uniformes.

La première partie de ce Mémoire est consacrée à la définition des fonctions qui font l'objet de ces recherches, et à la démonstration du théorème fondamental. La seconde partie contient quelques applications. Enfin, dans la troisième, je généralise, à un certain point de vue, les résultats

(1) Acta Societatis Fennicæ tome XII. Journal de Borchardt tome 91.

contenus dans la première partie, et j'étudie en particulier certaines intégrales doubles qui se présentent dans la théorie des fonctions hypergéométriques de deux variables.

I.

(1). Soit $z = f(x, u)$ une fonction des deux variables indépendantes x et u, jouissant des propriétés suivantes. Tout d'abord, elle admet, pour chaque système de valeurs des variables, un nombre fini ou infini de déterminations, mais qui sont telles que le rapport de deux quelconques d'entre elles est une constante. Si x est supposé constant, z considéré comme fonction de la seule variable u admet pour cette variable un nombre *limité* m de valeurs singulières. Ces valeurs singulières sont de deux sortes; les unes sont indépendantes de la valeur particulière attribuée à x, les autres varient en même temps que x. Lorsqu'il y aura lieu de distinguer ces deux sortes de points critiques, je désignerai les premiers par $a_1, a_2, \ldots a_n$, les seconds par $u_1, u_2, \ldots u_p$, avec la condition $n + p = m$. Mais lorsqu'il n'y aura aucun inconvénient à le faire, je les désignerai d'une manière uniforme par $v_1, v_2, \ldots v_m$. Soit $\Phi(x, u) = 0$ l'équation qui nous donne les p valeurs $u_1, u_2, \ldots u_p$ variables avec x. Lorsqu'on attribue à u une valeur particulière constante, z devient une fonction de la seule variable x; nous supposerons qu'elle n'admet pas d'autres points critiques que ceux que l'on fait correspondre à cette valeur de u au moyen de l'équation $\Phi(x, u) = 0$.

Il est bien aisé de donner des exemples de pareilles fonctions. Telle est la fonction

$$z = u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha};$$

x étant supposé constant, elle admet les trois points critiques $u = 0$, $u = 1$, $u = \frac{1}{x}$, dont le dernier seul dépend de la valeur attribuée à x. Telle est encore la fonction

$$z = (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1},$$

qui admet n points critiques $a_1, a_2, \ldots a_n$, indépendants de x, et en outre le point $u = x$. Cette fonction se présente, comme on sait, dans la théorie des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur, étudiées par M[r] POCHAMMER (*Journal de Crelle tome 71*). Les exemples déjà cités ne sont que des cas particuliers du suivant:

$$z=(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}[\varphi_1(x,u)]^{\lambda_1-1}[\varphi_2(x,u)]^{\lambda_2-1}\dots[\varphi_q(x,u)]^{\lambda_q-1}\Psi(x,u);$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_q$ sont des polynômes entiers en u, de degré $m_1, m_2, \dots m_q$, dont les coëfficients sont des fonctions holomorphes de x, et $\Psi(x, u)$ désigne une fonction holomorphe de x et de u. Les valeurs singulières pour u qui dépendent de x sont données par l'équation

$$\Phi(x, u) = \varphi_1(x, u)\,\varphi_2(x, u)\dots\varphi_q(x, u) = 0,$$

de degré p en u, en posant $p = m_1 + m_2 + \dots + m_q$.

Dans ce qui va suivre, je représenterai, pour abréger, l'intégrale définie $\int z\,du$, prise entre deux limites quelconques C, D par l'indication du chemin entre parenthèses,

$$\int_C^D z\,du = (CD);$$

et il sera convenu, à moins de mention expresse, que cette intégrale est prise suivant le chemin rectiligne joignant les deux points C, D, et que l'on a choisi pour l'intégration une valeur de z bien déterminée.

(2). Soit donc $f(x, u)$ une fonction jouissant des propriétés précédentes; soient a_i, a_h deux des valeurs singulières pour u dont il vient d'être question, choisies de telle sorte que le chemin rectiligne qui joint les deux points a_i, a_h ne contienne aucun autre des points a. Supposons que l'intégrale $(a_i a_h)$ ait un sens tant que ce chemin rectiligne ne contient aucun autre des points pour lequel la fonction $f(x, u)$ cesse d'être holomorphe. L'ensemble des valeurs de x telles que parmi les p valeurs de u, déduites de l'équation $\Phi(x, u) = 0$, il y en ait une ou plusieurs situées sur la ligne droite $a_i a_h$, forme en général sur le plan des x un nombre fini ou infini de portions de courbes ou de courbes complètes dont chacune joue le rôle de coupure pour l'intégrale considérée. Si, pour une valeur donnée de x non située sur les coupures, on choisit la valeur de la fonction z que l'on prend dans l'intégration, l'intégrale $(a_i a_h)$ définit, quand on fait varier x à partir de cette valeur et quand on associe les valeurs de z de façon qu'elles se suivent d'une manière continue, une fonction analytique de la variable x, que l'on peut continuer tant que le chemin suivi ne rencontre aucune des coupures. Je suppose connus les principes élémentaires de la théorie des fonctions représentées par des intégrales définies, où figure un paramètre variable. Il peut arriver que le système de coupures partage le plan en plusieurs régions distinctes; ce qui précède s'applique alors à chacune d'elles. Considérons en particulier l'une de ces régions, et faisons décrire à la variable x un contour fermé, compris dans son intérieur; la valeur de z, correspondant à une valeur de u comprise entre a_i et a_h peut revenir à sa valeur initiale, ou reprendre cette valeur initiale multipliée par un facteur constant, différent de l'unité. De sorte que l'intégrale elle-même $(a_i a_h)$ peut revenir à sa valeur initiale, ou reprendre cette valeur, multipliée par une constante. Il importe de distinguer ces deux cas.

Désignons par c une valeur de u figurée par un point du chemin rectiligne $a_i a_h$, et cherchons la variation de l'élément de l'intégrale qui correspond à cette valeur de u, quand on fait décrire à la variable x un chemin fermé, compris tout entier à l'intérieur de la région considérée. Supposons que ce contour ne renferme à son intérieur aucune des coupures; la fonction $f(x, c)$ sera holomorphe à l'intérieur de ce contour, puisque les valeurs de x qui, associées à la valeur c, forment un couple de valeurs singulières sont précisément situées sur les coupures. L'élément de l'intégrale qui correspond à cette valeur de u reprendra donc sa valeur initiale; et par suite il en sera de même de l'intégrale $(a_i a_h)$. Si, au contraire, le contour décrit par la variable renferme à son intérieur une ou plusieurs coupures, la fonction $f(x, c)$ cessera d'être holomorphe pour une ou plusieurs valeurs de x situées à l'intérieur de ce contour, et l'élément d'intégrale ne reviendra pas en général à sa valeur primitive. Chaque élément d'intégrale sera multiplié par un même facteur constant facile à calculer, et l'intégrale $(a_i a_h)$ se reproduira multipliée par le même facteur. Remarquons que cette circonstance ne pourra se présenter que si toutes les coupures ne s'étendent pas jusqu'à l'infini dans le plan des x. Pour rendre uniforme la fonction représentée par l'intégrale définie $(a_i a_h)$, il suffira d'ajouter de nouvelles coupures, choisies de telle façon que, dans chaque région, un chemin fermé suivi par la variable x ne puisse comprendre à son intérieur aucune des coupures de la première catégorie. Lorsque x franchit l'une de ces nouvelles coupures, la fonction représentée par l'intégrale définie $(a_i a_h)$ se reproduit, multipliée par une constante, qu'il est facile de calculer lorsqu'on connaît $f(x, u)$.

(3). Je vais éclaircir ce qui précède par quelques exemples.

Exemple I. Soit

$$z = u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha};$$

si les parties réelles de β et de $\gamma-\beta$ sont positives, l'intégrale définie

$$y = \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}$$

aura un sens, pourvu que x n'ait pas une valeur réelle et positive, supérieure à l'unité. La ligne indéfinie $1 —— +\infty$ sera une coupure pour cette intégrale; cette coupure s'étendant jusqu'à l'infini, d'après une remarque faite tout-à-l'heure, y sera une fonction uniforme de x dans toute l'étendue du plan. On achèvera de fixer la valeur de l'intégrale en choisissant les arguments des quantités u, $1-u$, $1-xu$ que l'on prend dans l'intégration; la convention la plus naturelle consiste évidemment à prendre 0 pour argument de u et de $1-u$, et pour argument de $1-xu$ celui qui est nul pour $u=0$.

Exemple II. Soit

$$z = (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1};$$

soient a_i, a_h deux points tels que la ligne droite qui joint ces deux points ne contienne aucun autre des points a, et supposons que les parties réelles de b_i et de b_h soient positives. L'intégrale définie $(a_i a_h)$ admettra comme coupure cette ligne droite $a_i a_h$ elle-même dans le plan des x. Si l'on fait décrire à la variable x un contour fermé entourant une seule fois cette ligne, on voit facilement que chaque élément de l'intégrale est multiplié par $e^{\pm 2\pi\lambda i}$; l'intégrale n'est donc pas une fonction uniforme de x, à moins que λ ne soit un nombre entier. Pour la rendre uniforme, nous introduirons une nouvelle coupure, par exemple une ligne droite indéfinie $a_i L$ partant du point a_i. Si on assujettit le chemin suivi par la variable à ne couper aucune des deux lignes $a_i a_h$, $a_i L$, le symbole $(a_i a_h)$ représente une fonction uniforme de x dans toute l'étendue du plan; on voit de plus que, lorsque la variable x traverse la ligne $a_i L$, cette fonction se reproduit, multipliée par le facteur constant $e^{\pm 2i\pi\lambda}$.

Exemple III. Prenons encore

$$z = u^{\beta-1}(u-1)^{\gamma-\beta-1}(u^2-2ux-x-1)^{-\alpha}.$$

L'intégrale définie $(01) = \int_0^1 z\,du$, en supposant positives les parties réelles de β et de $\gamma-\beta$, aura un sens tant que l'équation $u^2-2ux-x-1=0$ ne donnera pas pour u une valeur réelle comprise entre zéro et l'unité. Si l'on écrit cette équation

$$x = \frac{u^2-1}{2u+1},$$

on voit immédiatement qu'elle fait correspondre à la série des valeurs réelles de u comprises entre zéro et l'unité la série des valeurs réelles de x comprises entre -1 et 0; l'intégrale (01) admet donc comme coupure le segment de l'axe des x réel -1 —— 0. Comme dans l'exemple précédent, faisons décrire à la variable x un contour fermé entourant cette coupure; il est aisé de voir que le facteur $(u^2-2ux-x-1)^{-\alpha}$ correspondant à une valeur de u comprise entre zéro et l'unité est multiplié par $e^{\pm 2\pi\alpha i}$, car ce facteur s'annulle pour une valeur de x comprise entre -1 et 0, tandis que les facteurs $u^{\beta-1}$, $(u-1)^{\gamma-\beta-1}$ ne changent pas. La fonction représentée par l'intégrale (01) reprend donc sa valeur initiale multipliée par $e^{\pm 2\pi\alpha i}$. Pour que ce symbole représente une fonction uniforme, il suffira d'ajouter une nouvelle coupure, par exemple la ligne indéfinie $-\infty$ —— -1; et lorsque la variable franchit cette dernière ligne, la fonction est multipliée par $e^{\pm 2\pi\alpha i}$.

Dans les deux derniers exemples, nous avons eu à considérer deux sortes de coupures, d'une nature essentiellement différente. Les unes, comme la ligne -1 —— 0 dans le dernier exemple, sont introduites par l'impossibilité même où l'on se trouve, au moins pour le moment, de continuer la fonction au delà, le symbole qui la représente cessant d'avoir un sens bien précis pour un point de cette ligne. Il en est tout autrement des secondes. L'intégrale définie ne cesse pas d'avoir un sens, et nous n'ajoutons ces nouvelles coupures que pour rendre la fonction uniforme; mais nous savons ce que devient cette fonction lorsque la variable franchit l'une de ces courbes. On peut encore remarquer que, une fois qu'on a choisi le chemin d'intégration, les premières coupures sont complètement fixées, tandis que la façon dont on peut prendre les secondes comporte une grande indétermination, comme pour les coupures de RIEMANN proprement dites. Pour toutes ces raisons et pour la clarté de ce qui va suivre, je distinguerai constamment ces deux sortes de lignes: j'appellerai les premières *coupures de première espèce* et je les désignerai par la lettre C. Les autres seront des *coupures de seconde espèce,* et désignées par la lettre C'.

(4). Revenons maintenant à la fonction $f(x, u)$, et soit $\Phi(x, u) = 0$ la relation entre les valeurs de x et de u qui sont pour cette fonction des couples de valeurs singulières. On suppose qu'à une valeur donnée de x cette relation ne fait correspondre qu'un nombre limité p de valeurs pour u. Marquons dans le plan des x les points où une ou plusieurs des racines de l'équation $\Phi(x, u) = 0$ cessent d'être holomorphes, et traçons un système de coupures C_1 partant de ces points et s'étendant jusqu'à l'infini dans le plan sans se croiser entre elles. Grâce à ces coupures, les p racines de l'équation $\Phi(x, u) = 0$ deviennent des fonctions holomorphes de x dans toute l'étendue du plan, que nous désignerons par $u_1, u_2, \ldots. u_p$. Soit u_h l'une de ces racines et a_i l'une des valeurs critiques pour u qui ne dépendent pas de x; admettons que la droite qui joint ces deux points ne contient aucune autre des valeurs singulières de u, correspondant à la valeur initiale attribuée à x, et en outre que l'intégrale $(a_i u_h)$ a un sens. La variable décrivant un chemin quelconque assujetti seulement à ne pas rencontrer les lignes C_1, on pourra continuer la fonction représentée par l'intégrale définie $(a_i u_h)$ tant que ce segment de droite ne contiendra aucun autre des points a_k ou u_k. L'ensemble des valeurs de x telles que l'un de ces points soit situé sur la ligne droite $a_i u_h$ formera sur le plan des x un système de courbes ou de portions de courbes dont chacune sera une coupure de première espèce pour l'intégrale $(a_i u_h)$; ces nouvelles coupures peuvent d'ailleurs coïncider en tout ou en partie avec les lignes C_1, diviser avec elles le plan en un nombre fini ou infini de régions distinctes. Dans chacune de ces régions, l'intégrale précédente représente une fonction analytique de la variable x. Nous avons encore à rechercher si, dans cette région, elle est uniforme ou non; ce qui peut se faire de la même manière que plus haut. Posons

$$u = a_i + t(u_h - a_i),$$

t étant une nouvelle variable réelle qui croît dans l'intégration de zéro à l'unité. L'integrale $(a_i u_h)$ devient

$$(a_i u_h) = \int_0^1 f_1(x,\ t)\,(u_h - a_i)\,dt,$$

en posant $f_1(x,\ t) = f(x,\ a_i + t(u_h - a_i))$. Donnant à t une valeur particulière comprise entre zéro et l'unité, on cherchera la variation de l'élément de l'intégrale provenant de cette valeur de t, quand on fait décrire à x un contour fermé ne rencontrant pas les coupures. Comme u_h revient à sa valeur initiale, l'élément d'intégrale ne pourra que reprendre sa valeur initiale, ou revenir à cette valeur multipliée par un facteur constant. D'une manière générale, la valeur finale de $(a_i u_h)$ sera égale à la valeur initiale, multipliée par une constante qui peut être différente de l'unité. Dans ce dernier cas, il sera nécessaire d'introduire de nouvelles coupures de seconde espèce C', de façon à rendre uniforme la fonction représentée par le symbole $(a_i u_h)$.

Si au point a_i on associe successivement chacune des racines de l'équation $\Phi(x,\ u) = 0$, on formera p intégrales analogues à la précédente. A chacune d'elles correspondra, outre les lignes C_1, un système de coupures de première espèce C et de seconde espèce C', ces lignes pouvant coïncider en tout ou en partie pour plusieurs des racines, ou être à la fois des coupures de première espèce pour certaines intégrales, et de seconde espèce pour d'autres. Nous savons déjà que, lorsque la variable franchit une des lignes C', l'intégrale correspondante se reproduit à un facteur constant près. Les lignes C_1 se comportent en réalité comme des coupures de seconde espèce; la variable x franchissant l'une de ces lignes, ne coïncidant pas avec une coupure de première espèce, la racine u_h se change en une racine u_k de sorte que l'intégrale $(a_i u_h)$ se change en l'intégrale $(a_i u_k)$. Nous verrons dans la suite ce que deviennent ces diverses intégrales lorsqu'on fait franchir à la variable une des lignes C.

(5). *Exemple I.* Soit

$$y = \int_0^{\frac{1}{x}} u^{\beta-1}\,(1-u)^{\gamma-\beta-1}\,(1-xu)^{-\alpha}\,du.$$

La ligne droite 0 —— 1 est une coupure de première espèce pour cette intégrale; si on la met sous la forme

$$y = x^{-\beta} \int_0^1 t^{\beta-1}\,(1-t)^{-\alpha} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\gamma-\beta-1} dt,$$

par le changement de variable $u = \frac{t}{x}$, on reconnaît immédiatement que cette intégrale est multipliée par le facteur $e^{\pm 2\pi\beta i}$ lorsque x décrit un contour fermé entourant la droite $0 —— 1$; pour rendre cette intégrale uniforme, il suffira d'introduire la ligne $1 —— +\infty$ comme coupure de seconde espèce.

Exemple II. Soit

$$y = \int_{a_i}^{x} (u - a_1)^{b_1 - 1} (u - a_2)^{b_2 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - 1} \, du = (a_i x)$$

Si nous joignons le point a_i aux autres points $a_1, a_2, \dots a_n$ par des lignes droites, les prolongements de ces diverses lignes jusqu'à l'infini constitueront pour l'intégrale $(a_i x)$ des coupures de première espèce. Posons dans cette intégrale

$$u = a_i + t(x - a_i),$$

elle devient:

$$y = \int_0^1 [a_i - a_1 + t(x - a_i)]^{b_1 - 1} \dots [a_i - a_n + t(x - a_i)]^{b_n - 1} t^{b_i - 1} (x - a_i)^{b_i + \lambda - 1} (t - 1)^{\lambda - 1} \, dt;$$

lorsque x décrit une petite circonférence autour du point a_i, il est aisé de reconnaître que la valeur finale de y est égale à sa valeur initiale multipliée par $e^{\pm 2\pi i(\lambda + b_i)}$. Pour rendre la fonction uniforme, on ajoutera une coupure de seconde espèce C', partant du sommet a_i et s'étendant jusqu'à l'infini.

Exemple III. Soit

$$f(x, u) = u^{\beta - 1} (u - 1)^{\gamma - \beta - 1} (u^2 - 2ux - x - 1)^{-\alpha}$$

Dans ce nouvel exemple il y a deux points critiques variables avec x, donnés par l'équation du second degré

$$(1) \qquad u^2 - 2ux - x - 1 = 0;$$

d'où l'on tire

$$u = x \pm \sqrt{x^2 + x + 1}$$

Les points où ces deux racines cessent d'être distinctes sont les deux points $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$; lorsque x tourne autour d'un de ces points, les deux racines de l'équation (1) s'échangent entre elles. Soient u_1, u_2 ces deux racines; les deux intégrales

$$\int_0^{u_1} f(x, u)\,du, \qquad \int_0^{u_2} f(x, u)\,du,$$

en supposant positives les parties réelles de β et de $1-\alpha$, auront un sens tant que l'une des quantités u_1, u_2, n'aura pas une valeur réelle supérieure à l'unité et que l'une d'elles ne sera pas située sur la ligne droite qui joint l'origine à la seconde. La relation $u^2 - 2ux - x - 1 = 0$ fait correspondre aux valeurs réelles de u supérieures à l'unité la série des valeurs réelles de x comprises entre 0 et $+\infty$; la ligne $0 —— +\infty$ est donc une coupure de première espèce pour l'une au moins de ces intégrales. Cherchons maintenant les valeurs de x telles que l'une des racines u_1, u_2, soit sur la ligne droite qui joint l'origine à la seconde: cela revient à chercher les valeurs de x telles que le rapport $\frac{u_1}{u_2}$ ait une valeur réelle et positive. Or l'équation qui nous donne le rapport des deux racines de l'équation (1) est la suivante:

$$r^2 + 2r\left(\frac{2x^2 + x + 1}{x + 1}\right) + 1 = 0, \tag{2}$$

ou, en ordonnant par rapport à x,

$$x^2 + \frac{(r+1)^2}{4r}\,x + \frac{(r+1)^2}{4r} = 0;$$

on en déduit

$$x = \frac{-(r+1)^2 \pm (r+1)\sqrt{r^2 - 14r + 1}}{8r}$$

Soient r_1, r_2 les deux racines de l'équation $r^2 - 14r + 1 = 0$; $r_1 = 7 - \sqrt{48}$, $r_2 = 7 + \sqrt{48}$. Quand on fait croître r de 0 à r_1, puis de r_2 à $+\infty$, le point x décrit la ligne $-\infty —— -1$; puis si on attribue à r les valeurs réelles comprises entre r_1 et r_2, le point qui figure la valeur de x décrit deux arcs de courbe symétriques par rapport à l'axe réel, partant du point $B = -\frac{(r_1+1)^2}{8r_1}$ et aboutissant aux deux points de ramification A, A' (fig. 1).

$$A = \frac{-1+\sqrt{-1}\sqrt{3}}{2}, \qquad A' = \frac{-1-\sqrt{-1}\sqrt{3}}{2}.$$

Chacune des racines u_1, u_2 est une fonction uniforme de x dans toute l'étendue du plan, quand on assujettit le chemin suivi par la variable à ne couper aucune des lignes $0 \text{——} +\infty$, $-\infty \text{——} -1$, ABA'; nous prendrons par exemple pour u_1 la racine qui se réduit à $+1$ pour $x=0$, et pour u_2 celle qui est égale à -1.

Considérons en particulier l'intégrale $(0u_1)$; lorsqu'on attribue à x une valeur réelle positive, la racine u_1 qui part de l'unité pour $x=0$ aura une valeur supérieure à l'unité. La ligne $0 \text{——} +\infty$ est donc une coupure de première espèce pour cette intégrale. Si on fait le changement de variables $u = tu_1$, elle devient

$$(0u_1) = \int_0^1 t^{\beta-1} u_1{}^{\beta} (tu_1-1)^{\gamma-\beta-1} (t^2u_1^2 - 2xtu_1 - x - 1)^{-\alpha}\, dt$$

Donnons à t une valeur particulière comprise dans les limites de l'intégration, et cherchons la variation de l'élément de l'intégrale qui correspond à cette valeur de t quand on fait décrire à la variable x un chemin fermé ne coupant aucune des lignes précédentes. Il est aisé de reconnaître qu'aucun des facteurs u_1, tu_1-1, $t^2u_1^2 - 2tu_1x - x - 1$, ne s'annulle pour aucune valeur de x comprise à l'intérieur de ce contour; la relation

$$x = \frac{u_1^2-1}{2u_1+1}$$

montre en effet que pour $u_1 = 0$, on a $x = -1$; pour $u_1 = \frac{1}{t}$, t étant inférieur à l'unité, x aura une valeur réelle et positive. Enfin pour que la facteur $t^2u_1^2 - 2tu_1x - x - 1$ fût nul, il faudrait que l'on eût

$$x = \frac{u_1^2-1}{2u_1+1} = \frac{t^2u_1^2-1}{2tu_1+1};$$

ce qui montre que les deux racines de l'équation (1) seraient u_1 et tu_1 dont le rapport est t. Le point x serait donc sur l'une des coupures.

Il en résulte que, après un pareil chemin, l'élément de l'intégrale reviendra à sa valeur primitive; l'intégrale $(0u_1)$ est donc, grâce aux coupures établies, une fonction uniforme de x dans toute l'étendue du plan. La même démonstration s'applique évidemment à la seconde intégrale $(0u_2)$, mais il est à remarquer que la ligne $0 —— + \infty$ n'est pas une coupure pour cette nouvelle intégrale, car la racine $u_2 = x - \sqrt{x^2 + x + 1}$ a une valeur réelle et négative lorsque x est positif.

On peut encore se demander ce que deviennent les fonctions représentées par $(0u_1)$ et $(0u_2)$ lorsque la variable franchit l'une des lignes $-\infty —— -1$, ABA'. Supposons, par exemple, que les racines soient disposés avec le point $u = 0$, dans l'ordre suivant $0, u_1, u_2$. L'intégrale $(0u_2)$ cesse d'avoir un sens, mais l'intégrale $(0u_1)$ continue à avoir un sens et représente une fonction analytique bien définie dans le voisinage de cette valeur de x. Supposons, par exemple, que la variable franchisse la coupure $-\infty —— -1$, en passant du point m au point m'; la racine u_1 reste égale à u_1, car le contour décrit par la variable entoure les deux points critiques A, A'; et la fonction représentée par $(0u_1)$ dans le voisinage du point m sera représentée par la même intégrale dans le voisinage du point m', abstraction faite d'un facteur constant.

Si la variable franchissait la coupure ABA' en passant du point n au point n' (fig. 1), u_1 se changerait en u_2 et la continuation analytique de la fonction $(0u_1)$ serait représentée par $(0u_2)$.

Exemple IV. On étudierait de la même façon les deux intégrales $(1u_1)$, $(1u_2)$ relatives à la même fonction $f(x, u)$. Les coupures seront données par les valeurs de x telles que l'une des racines u_1, u_2 soit réelle et négative, ou par les valeurs de x telles que les trois points 1, u_1, u_2 soient en lignes droite, l'un des points u_1 ou u_2 étant entre les deux autres. L'équation (1) fait correspondre aux valeurs négatives de u la série des valeurs réelles de u; on a donc une première coupure avec l'axe des x réels.

Pour avoir les autres, posons $u = 1 - v$; l'équation (1) devient

$$v^2 - 2v(1 - x) - 3x = 0 \tag{3}$$

Le rapport des deux racines v_1, v_2 de cette équation est donné par l'équation suivante

$$3x(r^2 + 1) + r(4x^2 - 2x + 4) = 0, \tag{4}$$

ou

$$x^2 + x\left(\frac{3r^2 - 2r + 3}{4r}\right) + 1 = 0$$

On en tire

$$x = \frac{-(3r^2 - 2r + 3) \pm (r + 1)\sqrt{3(3r^2 - 10r + 3)}}{8r}$$

Les nouvelles coupures correspondent aux valeurs de x telles que le rapport r soit réel et positif. Quand on fait varier r de 0 à $\frac{1}{3}$ ou de 3 à $+\infty$, x prend toutes les valeurs réelles et négatives. Si on donne ensuite à r toutes les valeurs comprises entre $\frac{1}{3}$ et 3, le point qui figure la valeur de x décrit deux branches de courbe, symétriques par rapport à l'axe réel, partant du point $x = -1$ et aboutissant aux deux points A, A' (fig. 2).

Grâce aux coupures $-\infty$ —— -1, $AB'A'$, les deux racines u_1, u_2 deviennent des fonctions uniformes de x dans toute l'étendue du plan. Appelons u_1 celle de ces racines qui est égale à $+1$ pour $x = 0$; il est aisé de reconnaître que cette racine reste réelle et positive tant que x reste supérieur à -1. La ligne -1 —— $+\infty$ n'est donc pas une coupure pour l'intégrale $(1u_1)$; en posant, comme tout-à-l'heure

$$u = 1 + t(u_1 - 1)$$

où t est une variable réelle croissant de zéro à l'unité, on reconnaîtra qu'il est nécessaire, pour la rendre uniforme, d'introduire la ligne 0 —— $+\infty$ comme coupure de seconde espèce.

Quant à l'intégrale $(1u_2)$, l'axe des x réels partage le plan en deux régions distinctes; dans chacune d'elles, l'intégrale $(1u_2)$ représente une fonction uniforme de x, pourvu, bien entendu que le chemin suivi par la variable ne rencontre pas l'autre ligne $AB'A'$.

(6). Il reste peu de choses à dire sur les intégrales définies de la forme $(u_i u_h)$, où l'on suppose les deux limites u_i, u_h, variables avec x. On aura, comme plus haut, un premier système de coupures, formé par des lignes indéfinies partant des points où les racines de l'équation $\Phi(x, u) = 0$ cessent d'être holomorphes. Grâce à ces coupures, u_i, u_h deviennent des fonctions uniformes de x dans toute l'étendue du plan; l'ensemble des valeurs de x telles que le chemin rectiligne joignant ces deux points passe par un autre des points a_i ou des points u_i constitue pour la même intégrale un système de coupures de première espèce. Pour étudier l'intégrale dans une région du plan limitée par ces lignes, on posera

$$u = u_i + t(u_h - u_i);$$

elle devient:

$$(u_i u_h) = \int_0^1 f_1(x, t)\, dt,$$

en posant $f_1(x, t) = f(x, u_1 + t(u_h - u_i))(u_h - u_i)$. On cherchera ensuite la variation de l'élément de l'intégrale correspondant à une valeur de t quand on fait décrire à x un contour fermé, et on ajoutera, s'il y a lieu, des coupures de seconde espèce pour rendre uniforme, dans chaque partie du plan, la fonction représentée par cette intégrale définie.

Considérons, pour donner un exemple, l'intégrale

$$y = \int_{u_1}^{u_2} u^{\beta-1} (u-1)^{\gamma-\beta-1} (u^2 - 2ux - x - 1)^{-\alpha}\, du,$$

où u_1, u_2 sont les deux racines de l'équation $u^2 - 2ux - x - 1 = 0$; intégrale qui a un sens, si la partie réelle de $1 - \alpha$ est positive, et si la ligne droite qui joint les deux points u_1, u_2 ne contient ni le point $u = 0$, ni le point $u = 1$. Cette ligne droite contiendra le point $u = 0$, si le rapport $\frac{u_1}{u_2}$ est réel et négatif; l'équation (2) montre qu'il en sera ainsi lorsque x aura une valeur réelle supérieure à -1. De même, cette ligne droite passera par le point $u = 1$, si le rapport des racines de l'équation (3) est réel et négatif; pour qu'il en soit ainsi, nous voyons, d'après l'équation (4), qu'il faudra que x soit réel et positif. La ligne -1 ——— $+\infty$ est donc une coupure de première espèce pour cette intégrale, et il n'y en a pas d'autre. Pour que u_1, u_2 soient des fonctions uniformes de x, nous ajouterons une nouvelle coupure, par exemple la ligne $AB'A'$ (fig. 2). L'intégrale $(u_1 u_2)$ représente une fonction uniforme de x, tant que le chemin suivi par la variable ne franchit aucune des lignes précédentes. Si on y pose, en effet

$$u = u_1 + t(u_2 - u_1),$$

elle devient

$$y = \int_0^1 \{u_1 + t(u_2 - u_1)\}^{\beta-1} \{u_1 - 1 + t(u_2 - u_1)\}^{\gamma-\beta-1} \{[u_1 + t(u_2 - u_1)]^2 -$$
$$- 2x[u_1 + t(u_2 - u_1)] - x - 1\}^{-\alpha} (u_2 - u_1)\, du;$$

Les deux premiers facteurs ne peuvent s'annuller, en supposant t compris entre zéro et l'unité, tant que x n'a pas une valeur positive. Pour que le dernier s'annulle, il faudrait que l'on eut $u_2 = u_1 + t(u_2 - u_1)$, c'est-à-dire $u_2 = u_1$; cela n'aura lieu que pour les points de ramification A, A'. Lorsque x décrira un contour fermé, on voit que chaque élément de l'intégrale reviendra à sa valeur initiale.

Lorsque la variable traverse l'arc de courbe $AB'A'$, les deux racines u_1, u_2 s'échangent entre elles; la forme précédente nous montre que l'intégrale se reproduit multipliée par $e^{\pm\pi(\alpha+1)i}$.

(7). Les exemples précédents suffisent, je crois, pour bien montrer la nature et les propriétés déjà obtenues des fonctions que j'étudie, propriétés qui résultent uniquement de l'étude attentive de la manière même dont ces fonctions sont définies. Revenons maintenant au cas général, et considérons une fonction $f(x, u)$ jouissant des propriétés énoncées; admettons que, sauf pour des valeurs de x formant une ou plusieurs courbes dans le plan des x, parmi les m points critiques $v_1, v_2, \ldots . v_m$ il n'y en ait pas trois en ligne droite, et que chacune des intégrales $(v_i v_h)$, en nombre $\frac{m(m-1)}{2}$, a un sens. Nous verrons plus loin comment on peut écarter ces restrictions. L'ensemble des valeurs de x telles que, parmi les m points v_1, $v_2 \ldots . v_m$ il y en ait plus de deux en ligne droite formera dans le plan des x un nombre fini ou infini d'arcs de courbes ou de courbes complètes, dont chacune jouera le rôle de coupure de première espèce pour une ou plusieurs des intégrales. Prenant l'une de ces intégrales, nous ajouterons, s'il y a lieu, des coupures de seconde espèce, de façon qu'elle représente une fonction uniforme de x dans toute l'étendue du plan ou dans les diverses parties du plan. Après avoir opéré ainsi avec chacune des intégrales, nous aurons, au moyen des coupures C, C', divisé le plan en un nombre fini ou infini de régions distinctes. Dans chacune de ces régions, toutes les intégrales $(v_i v_h)$ ont un sens et représentent des fonctions uniformes de x, qui seront bien déterminées quand on aura choisi, dans chaque région, la valeur de la fonction $f(x, u)$ que l'on prend dans l'intégration.

Le but final de ce travail est de rechercher ce que deviennent ces fonctions lorsque, partant d'un point de l'une de ces régions, on fait décrire à la variable un chemin quelconque. Au moyen de ce qui précède, la réponse est facile, quand le chemin suivi par la variable ne traverse que des coupures de seconde espèce. Prenons une intégrale telle que $(a_i a_h)$, dont les deux limites sont indépendantes de x; tant que la variable ne franchit pas une ligne pour laquelle cette intégrale cesse d'avoir un sens, la continuation de la fonction sera représentée par le même symbole; mais on pourra arriver dans une nouvelle partie du plan avec une valeur pour $f(x, u)$ différente de celle qui a été choisie dans cette partie. On pourra donc la représenter par $K(a_i a_h)$, K étant une constante convenable. De même, tant que x ne franchit pas une coupure de première espèce pour des intégrales telles que $(a_i u_h)$ ou $(u_i u_h)$, ces intégrales continuent à avoir un sens; mais il peut se faire que u_i, u_h se changent en d'autres racines u'_i, u'_h, et que l'on arrive avec une valeur de $f(x, u)$ différente de celle qui a été adoptée. La continuation analytique de nos fonctions sera donc représentée par des intégrales telles que $K_1(a_i u'_h)$, $K_2(u'_i u'_h)$, K_1, K_2 étant des constantes convenables. En résumé:

Si la variable x, partant d'une région du plan, décrit un chemin quelconque, terminé à un point d'une autre région, sans franchir aucune coupure de première espèce, les fonctions représentées par les intégrales définies dans la région initiale peuvent être continuées tout le long du chemin, et on arrive dans la nouvelle partie du plan avec des fonctions qui s'expriment par des formules linéaires et homogènes à coefficients constants au moyen des mêmes intégrales.

(8). Nous démontrerons plus loin que la propriété subsiste, quel que soit le chemin suivi par la variable; mais auparavant, il est indispensable de remarquer que les $\frac{m(m-1)}{2}$ intégrales considérées peuvent s'exprimer au moyen de quelques-unes d'entre elles. Supposons x constant et pris dans l'une des régions que nous venons de définir; soient v_i, v_h, v_g trois des valeurs singulières pour la fonction $f(x, u)$ correspondant à cette valeur de x, telles qu'il n'y ait aucune autre valeur singulière à l'intérieur du triangle ayant ces trois points pour sommets (fig. 3). Entourons ces trois points de circonférences d'un rayon infiniment petit; nous formons ainsi un contour fermé *ablb'cmc'a'na* à l'intérieur duquel $f(x, u)$ est holomorphe. On peut par conséquent lui appliquer le théorème de CAUCHY, et on obtient la relation

$$(ab) + (blb') + (b'c) + (cmc') + (c'a') + (a'na) = 0$$

Si on fait ensuite décroître indéfiniment les rayons des petites circonférences, les intégrales (ab), $(b'c)$, $(c'a')$ tendent respectivement vers $(v_i v_h)$, $(v_h v_g)$, $(v_g v_i)$ tandis que les modules des intégrales (blb'), (cmc'), (ana') deviennent plus petits que toute quantité donnée. On en conclut la relation

$$(v_i v_h) + (v_h v_g) + (v_g v_i) = 0$$

Si on a choisi la valeur de la fonction z que l'on adopte le long du chemin ab, après avoir décrit l'arc blb', on arrivera au point b' avec une valeur parfaitement déterminée pour z, ainsi qu'au point c'. Il suffit donc de fixer la valeur de z le long d'un des côtés du contour, pour que la valeur soit connue sans ambiguité le long des autres côtés, et la relation précédente ne contient en réalité rien d'arbitraire. Chaque fois qu'on sera conduit à une égalité de cette forme, il sera entendu que les valeurs de z que l'on prend dans l'intégration sont fixées comme il vient d'être expliqué pour le cas précédent. Cela posé, si l'on considère tous les polygones ayant pour sommets des points v, à l'intérieur desquels $f(x, u)$ est holomorphe, l'application du théorème de CAUCHY conduira à une relation de la forme précédente. Un même côté appartenant à plusieurs polygones, les valeurs de l'intégrale provenant de ce côté ne seront pas en général les mêmes dans les différentes relations; mais on sait que ces valeurs ne peuvent différer que par un facteur constant et, en définitive, on obtiendra entre les $\frac{m(m-1)}{2}$ intégrales un certain nombre d'équations linéaires et homogènes à coefficients constants. Il est aisé de s'assurer, en prenant des cas particuliers, que ces équations peuvent ne pas être toutes distinctes. Mais on peut toujours exprimer les $\frac{m(m-1)}{2}$ intégrales au moyen de $m-1$ d'entre elles convenablement choisies, qui forment un *système fondamental*. On pourrait former un système fondamental de bien des manières; voici celle que j'adopterai.

Les m points critiques de la fonction $f(x, u)$ étant distribués d'une manière quelconque dans le plan, pour une valeur de x supposée constante de telle façon cependant qu'il n'y en ait pas trois en ligne droite, choisissons deux de ces points de telle sorte que la ligne droite qui les joint laisse tous les autres points critiques d'un même côté; appelons v_1, v_2 ces deux points. Imaginons une ligne droite indéfinie à partir du point v_1, appliquée d'abord sur v_1v_2, que l'on fait ensuite tourner autour de v_1 dans un sens convenable, jusqu'à ce qu'elle vienne à rencontrer successivement tous les autres points critiques, et numérotons-les dans l'ordre même où ils se présentent, $v_3, v_4, \ldots . v_m$. Si l'on joint ensuite chacun de ces points au suivant, on forme une ligne polygonale $v_1v_2v_3 \ldots . v_m$, jouissant des propriétés suivantes: 1° elle ne se coupe pas elle-même; 2° v_i étant un sommet de cette ligne, la ligne indéfinie v_1v_i laisse d'un même côté tous les points d'indice inférieur à i, et de l'autre côté tous les points d'indice supérieur à i (fig. 4).

Supposons que toutes les intégrales prises entre deux des sommets $v_1, v_2, \ldots . v_{i-1}, v_i$ puissent s'exprimer linéairement au moyen des $(i - 1)$ intégrales

$$(v_1v_2),\ (v_2v_3),\ \ldots .\ (v_{i-1}v_i);$$

je dis que la même propriété subsiste lorsqu'on augmente l'indice i d'une unité. Joignons en effet le point v_{i+1} aux i points $v_1, v_2, v_3, \ldots . v_i$; nous formerons ainsi i triangles à l'intérieur desquels $f(x, u)$ est holomorphe. Soit par exemple v_g $(g < i)$ un point tel que la fonction $f(x, u)$ soit holomorphe à l'intérieur du triangle $v_gv_iv_{i+1}$; l'application du théorème de Cauchy au contour de ce triangle nous donne la relation

$$(v_gv_{i+1}) = (v_gv_i) + (v_iv_{i+1}),$$

qui montre que (v_gv_{i+1}) s'exprime linéairement au moyen des intégrales précédentes et de la nouvelle (v_iv_{i+1}). En continuant de proche en proche, on verrait de même que chacune des intégrales (v_hv_{i+1}) où $h < i$, s'exprime au moyen des intégrales

$$(v_1v_2),\ (v_2v_3),\ \ldots .\ (v_{i-1}v_i),\ (v_iv_{i+1})$$

La loi est évidemment vraie pour $i = 3$, car le triangle $v_1v_2v_3$ donne immédiatement $v_2v_3 = (v_1v_2) + (v_2v_3)$; donc elle est générale. En particulier, si l'on prend $i = m$, on voit que toutes les intégrales s'expriment au moyen des $m - 1$

$$(v_1 v_2), (v_2 v_3), \ldots (v_{m-1} v_m)$$

On pourrait encore former un système fondamental en considérant toutes les intégrales prises suivant les lignes issues d'un même sommet. La démonstration ne présente aucune difficulté.

Les relations précédentes dépendent des positions respectives des points $v_1, v_2, \ldots v_m$; elles resteront les mêmes tant que ces positions respectives resteront les mêmes, c'est-à-dire tant que la variable x restera comprise dans une région du plan limitée par des coupures. Mais elles seront variables en général d'une région à l'autre. C'est une remarque qui résulte bien clairement des développements antérieurs, et sur laquelle il me paraît inutile d'insister.

(9). J'arrive maintenant à l'objet essentiel de ce travail, qui est de rechercher ce que deviennent les intégrales précédentes, lorsque la variable x arrive à une coupure de première espèce. Soit C une coupure pour $(v_i v_h)$; lorsque x vient à coïncider avec un point x_0, de cette ligne, un troisième point critique v_k se trouve situé sur la ligne droite $v_i v_h$. Soient ξ, ξ' deux points situés à des distances très-petites du point x_0 de part et d'autre de la courbe C (fig. 5). Figurons les positions respectives des points v_i, v_h, v_k pour $x = \xi$, et pour $x = \xi'$ (fig. 6).

Lorsque x est venu en ξ' les trois points critiques que, pour plus de généralité, je suppose variables avec x, seront venus respectivement en v'_i, v'_h, v'_k. Prenons les points ξ et ξ' assez rapprochés du point x_0 pour que le triangle $v_i v_k v_h$ ne contienne aucun autre point critique v et que les intégrales $v_i v_k$, $v_h v_k$ conservent un sens quand x va de ξ en ξ'; ce qui pourra toujours se faire si l'on suppose qu'un seul point v_k traverse la ligne $v_i v_h$ pour $x = x_0$. La fonction $f(\xi, u)$ étant holomorphe à l'intérieur du triangle $v_i v_k v_h$, on a

$$(v_i v_h) = (v_i v_k) + (v_k v_h)$$

On pourra donc remplacer le symbole $(v_i v_h)$ par la somme $(v_i v_k) + (v_k v_h)$ avant que x n'ait franchi la coupure; mais lorsque x va de ξ en ξ', les intégrales $(v_i v_k)$, $(v_k v_h)$ ne cessent pas d'avoir un sens et, lorsqu'on arrive au point ξ' la continuation analytique de la fonction $(v_i v_h)$ se trouve encore représentée par la somme $(v'_i v'_k) + (v'_k v'_h)$, où la valeur de $f(x, u)$ que l'on prend dans l'intégration est fixée sans ambiguité. La fonction qui, aux environs du point ξ, était égale à $(v_i v_h)$ est donc égale, aux environs du point ξ', *à une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des intégrales se rapportant à la même fonction* $f(x, u)$.

Il est à remarquer que la somme $(v'_i v'_k) + (v'_k v'_h)$ ne sera pas égale en général à $(v'_i v'_h)$. Imaginons un cercle de rayon infiniment petit entourant le point v_k. Dans le triangle $v_k v_i v_h$, on a

$$(v_i v_h) = (v_i l) + (lm) + (m v_h);$$

la somme contenue dans le second membre devient, pour $x = \xi'$,

$$(v'_i l') + (l'm') + (m'v'_h)$$

et si v'_k est véritablement un point de ramification pour $f(\xi', u)$, cette dernière somme ne sera pas égale à $(v'_i v'_h)$.

Le raisonnement se fait à peu près de la même manière quel que soit le nombre des points critiques qui viennent à traverser la ligne droite $v_i v_h$ pour $x = x_0$. Supposons, par exemple, qu'il y en ait deux v_g, v_k comme l'indique la figure (7).

On a d'abord

$$(v_i v_g) = (v_i v_k) + (v_k v_g),$$

puis

$$(v_i v_h) = (v_i v_g) + (v_g v_h);$$

d'où on déduit

$$(v_i v_h) = (v_i v_k) + (v_k v_g) + (v_g v_h).$$

Le reste de la démonstration s'achève comme plus haut, et l'on voit bien aisément que la méthode est générale.

Faisons maintenant décrire à la variable un chemin quelconque; chaque fois que ce chemin traverse une coupure de première espèce pour l'une des intégrales, cette intégrale se trouvera remplacée par une somme d'intégrales analogues multipliées par des facteurs constants, et on en conclut que:

1° On peut continuer la fonction représentée par chacune des intégrales définies, quel que soit le chemin suivi par la variable, et cela sans aucune ambiguité, tant que les points v_1, v_2, ... v_m restent à distance finie et distincts les uns des autres. Les seules valeurs critiques sont donc les valeurs telles que v_1, v_2, ... v_m ne soient pas tous différents ou cessent d'être holomorphes.

2° On arrive dans chaque région du plan avec des fonctions qui s'expriment par des formules linéaires et homogènes à coefficients constants au moyen des mêmes intégrales dans cette région du plan.

Si donc on fait décrire à la variable x un contour fermé quelconque ne passant par aucun des points critiques, les valeurs finales de nos fonctions seront liées aux valeurs initiales par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants. Cette propriété est caractéristique des intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène à coefficients uniformes. (TANNERY, *Annales de l'Ecole Normale, tome IV 2ème Série p. 130.*)

On sait d'ailleurs que toutes ces intégrales s'expriment linéairement au moyen de $(m - 1)$ d'entre elles, et on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème I. Toutes les intégrales définies $(v_i v_h)$ *provenant d'une même fonction* $f(x, u)$, *considérées comme fonctions de* x, *satisfont à une même équation différentielle linéaire d'ordre* $m - 1$ *à coefficients uniformes.*

Les points critiques de cette équation différentielle sont, d'après ce qui précède, les points où l'une des racines de l'équation $\Phi(x, u) = 0$ cesse d'être holomorphe, ou les points où deux des points critiques v_1, v_2, ... v_m viennent se confondre. Ces derniers points sont des points de croisement pour les coupures de première espèce. Par exemple, si pour $x = x_1$ les deux points v_i et v_h viennent se confondre, le point x_1 appartiendra à toutes les coupures de première espèce pour les intégrales telles que $(v_i v_g)$, $(v_h v_g)$.

(10). Il importe maintenant de nous débarrasser de certaines restrictions qui ont été introduites pour faciliter la démonstration, mais qui ne sont nullement nécessaires.

En premier lieu, on a supposé les intégrales prises suivant les lignes droites joignant deux points critiques; le théorème subsiste, quel que soit le chemin suivant lequel on prend l'intégrale. Soient v_i, v_h deux des points critiques; considérons un chemin de forme arbitraire $v_i m v_h$ joignant ces deux points et ne passant par aucun autre point critique (fig. 8). Si le contour $v_i m v_h v_i$ formé du chemin $v_i m v_h$ et de la ligne droite $v_i v_h$ ne renferme à son intérieur aucun autre des points v, on a $(v_i m v_h) = (v_i v_h)$; mais si ce contour renferme un autre point critique v_k, on considérera le contour formé du chemin $v_i m v_h$ et des deux lignes droites $v_i v_k$, $v_h v_k$ et on aura encore

$$(v_i m v_h) = (v_i v_k) + (v_k v_h);$$

dans les deux cas, on voit que l'intégrale curviligne satisfait à la même équation différentielle que les intégrales rectilignes.

Nous avons admis en outre que, parmi les m points $v_1, v_2, \ldots. v_m$, il n'y en avait pas en général trois en ligne droite. Mais il est bien aisé de voir comment on doit modifier la démonstration quand cette condition n'est pas remplie. Supposons par exemple que les trois points a_i, a_h, a_k soient en ligne droite, le point a_h entre les deux autres; on prendra l'intégrale entre les limites a_i et a_k en suivant un chemin $a_i lmna_k$ formé des deux lignes droites $a_i l$ et na_k et d'une demi-circonférence lmn d'un très-petit rayon décrite autour du point a_h. De même, si deux des points u_i, u_h sont constamment en ligne droite avec un des points a, tel que a_i, le point u_h entre les deux autres, on prendra l'intégrale $(a_i u_i)$ suivant un chemin déterminé ne passant en général par aucun autre des points critiques, par exemple une demi-circonférence ou un arc de cercle joignant ces deux points. On opérerait d'une façon identique si trois des points u_i étaient constamment en ligne droite.

Enfin on a supposé que chacune des intégrales $(v_i v_h)$ avait un sens. La fonction $f(x, u)$ contenant un certain nombre de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ etc., si l'on peut disposer de ces paramètres de façon que toutes les intégrales aient un sens, pour les valeurs de ces paramètres comprises entre certaines limites, chacune des intégrales vérifiera une équation différentielle d'ordre $m - 1$ dont les coefficients dépendent de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots. \lambda_p$. Prenons maintenant une de ces intégrales en particulier; on peut chercher à vérifier directement qu'elle satisfait à l'équation différentielle, par exemple en développant cette intégrale suivant les puissances croissantes de x et en substituant dans l'équation. Il est clair que les grandeurs respectives des quantités λ n'interviennent nullement dans le calcul; la vérification devant se faire pour toutes les valeurs de ces quantités comprises entre certaines limites, elle aura lieu dans tous les cas, pourvu que l'intégrale considérée conserve un sens.

(11). Il n'a été question jusqu'ici que de valeurs finies pour u; la considération du point ∞ va nous conduire à d'autres conséquences. Attribuons à x une valeur fixe, en dehors des coupures, et soient $v_1, v_2, \ldots. v_m$

les m points critiques, joints dans l'ordre qui a été fixé plus haut (n° 8). Soit C une courbe fermée comprenant à son intérieur tous ces points critiques; $f(x, u)$ sera en général une fonction multiforme de u à l'extérieur de C. Comme cas particulier, il pourra arriver que le point $u = \infty$ soit un pôle ou même un point ordinaire pour cette fonction. Nous examinerons successivement ces trois hypothèses.

Considérons le polygone $v_1 v_2 \ldots . v_m v_1$ ayant pour sommets tous les points critiques; à partir de chacun des sommets, tirons une ligne droite extérieure à ce polygone et s'étendant jusqu'à l'infini dans le plan. Si la fonction $f(x, u)$ n'est pas uniforme à l'extérieur de ce polygone, ce qui est le cas général, et si chacune des intégrales $\int_{v_i}^{\infty} f(x, u)\, du$, prise suivant la ligne droite dont il vient d'être question, a un sens, ces nouvelles intégrales représentent des fonctions de x qui vérifient la même équation différentielle que les précédentes. On pourrait étudier ces intégrales définies par des procédés analogues à ceux qui ont été employées plus haut; mais il nous suffit de démontrer qu'elles s'expriment linéairement au moyen des premières. Attribuons toujours à x une valeur constante; $f(x, u)$ devient une fonction de la seule variable u qui sera uniforme à l'extérieur du polygone $v_1 v_2 \ldots . v_m$ (fig. 9) pourvu qu'on regarde la ligne indéfinie $v_1 L$ comme une coupure.

En des points u', u'' infiniment voisins de cette coupure, la fonction $f(x, u)$ prend des valeurs $f(x, u')$, $f(x, u'')$ dont le quotient K est une constante différente de l'unité. Du point v_1 comme centre avec un très-grand rayon R décrivons une circonférence; l'application du théorème de Cauchy au contour $v_1 L' M_1 L_2 v_2 v_1$ donne la relation

$$(v_1 L') = (v_1 v_2) + (v_2 L_2) + (L_2 M_1 L')$$

qui devient, quand on y fait croître indéfiniment le rayon R

$$\int_{v_1}^{\infty} f(x, u)\, du - \int_{v_2}^{\infty} f(x, u)\, du = \int_{v_1}^{v_2} f(x, u)\, du,$$

l'intégrale $\int_{v_1}^{\infty} f(x, u)\, du$ étant prise suivant la ligne $v_1 L'$ infiniment voisine de la coupure $v_1 L$. On établira pareillement une suite d'équations analogues

$$\int_{v_2}^{\infty} f(x, u)\, du - \int_{v_3}^{\infty} f(x, u)\, du = \int_{v_2}^{v_3} f(x, u)\, du,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\int_{v_m}^{\infty} f(x, u)\, du - \left[\int_{v_1}^{\infty} f(x, u)\, du\right] = \int_{v_m}^{v_1} f(x, u)\, du,$$

dans cette dernière égalité, $\left[\int_{v_1}^{\infty} f(x, u)\, du\right]$ représente l'intégrale $\int f(x, u)\, du$, prise suivant une ligne $v_1 L''$ infiniment rapprochée de la coupure $v_1 L$, mais du côté opposé à $v_1 L'$; or, aux deux bords de la ligne $v_1 L$, $f(x, u)$ prend des valeurs dont le rapport est K. On aura donc

$$\left[\int_{v_1}^{\infty} f(x, u)\, du\right] = K \int_{v_1}^{\infty} f(x, u)\, du;$$

en ajoutant alors membre à membre toutes les égalités précédentes, on en déduit

$$(1 - K) \int_{v_1}^{\infty} f(x, u)\, du = \sum_{i=1}^{i=m-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} f(x, u)\, du + \int_{v_m}^{v_1} f(x, u)\, du$$

Puisqu'on suppose K différent de l'unité, on tirera de cette dernière équation $\int_{v_1}^{\infty} f(x, u)\, du$, et au moyen des égalités précédentes, on calculera de proche en proche $\int_{v_2}^{\infty} f(x, u)\, du$, $\int_{v_3}^{\infty} f(x, u)\, du \ldots$ etc.

(12). Le raisonnement ne s'applique plus lorsque la fonction $f(x, u)$ est une fonction uniforme de u en dehors du polygone ayant pour sommets les points $v_1, v_2, \ldots v_m$. Supposons d'abord que les intégrales $\int_{v_i}^{\infty} f(x, u)$

aient un sens, de telle sorte que l'intégrale $\int f(x, u)\,du$ prise le long d'un contour fermé C entourant tous les points critiques soit nulle. Nous considérerons un contour formé de la manière suivante; les points v_1, v_2, ... v_m étant joints dans le même ordre que précédemment, entourons chacun d'eux d'un cercle de rayon infiniment petit et joignons ces cercles entre eux par des lignes droites parallèles et infiniment rapprochées des droites qui joignent les points critiques eux-mêmes. Nous formons ainsi une figure telle que la figure (10); l'intégrale $\int f(x, u)\,du$ prise le long du contour $abnc \ldots . dpeflf'e'p'd' \ldots . c'n'b'a'ma$ est nulle par hypothèse.

On a donc la relation

$$(ab) + \ldots . + (ef) + (f'e') + \ldots . + (b'a') + (bnc) + \ldots . + (flf') + \ldots . + (a'ma) = 0$$

Admettons, pour fixer les idées, que le dernier point v_m est véritablement un point de ramification pour la fonction $f(x, u)$ de telle sorte qu'en deux points infiniment voisins sur les lignes ef, $e'f'$ cette fonction ait des valeurs différentes. On aura alors $(ef) + (f'e') = C(ef)$, C étant différent de zéro. Si maintenant on fait tendre vers zéro tous les rayons des petites circonférences, on aboutit à une relation entre les $m - 1$ intégrales

$$(v_1 v_2),\ (v_2 v_3),\ \ldots .\ (v_{m-1} v_m),$$

où le coëfficient de $(v_{m-1} v_m)$ est différent de zéro. On pourra donc en tirer $(v_{m-1} v_m)$ exprimé linéairement au moyen des $m - 2$ intégrales

$$(v_1 v_2),\ (v_2 v_3),\ \ldots .\ (v_{m-2} v_{m-1})$$

et, d'après ce qu'on a vu plus haut, toutes les intégrales $(v_i v_h)$ s'exprimeront de la même manière au moyen de ces $m - 2$ fonctions. Toutes ces intégrales définies satisfont par conséquent à une *équation différentielle linéaire d'ordre $m - 2$ à coefficients uniformes.*

En se reportant au précédent paragraphe, on voit que les intégrales telles que $\int_{v_i}^{\infty} f(x, u)\,du$ pourront s'exprimer linéairement au moyen des intégrales $(v_i v_h)$ et d'une nouvelle intégrale, par exemple $\int_{v_1}^{\infty} f(x, u)\,du$. Comme les fonctions $(v_i v_h)$ se réduisent a $m - 2$ d'entre elles, il en résulte que toutes les intégrales se rapportant à la fonction $f(x, u)$ s'expriment linéairement au moyen de $m-1$ d'entre elles, et, par suite, qu'elles vérifient encore une équation différentielle linéaire d'ordre $m-1$ à coefficients uniformes. Mais cette équation ne sera pas *irréductible,* puisqu'elle admet toutes les intégrales d'une équation d'ordre $m-2$, ayant aussi ses coefficients uniformes.

Enfin il peut arriver que la fonction $f(x, u)$ soit une fonction uniforme de u à l'extérieur d'un contour renfermant tous les points v_i sans que les intégrales $\int_{v_i}^{\infty} f(x, u)\,du$ aient un sens. Dans ce cas l'intégrale $\int f(x, u)\,du$, prise le long d'un contour entourant tous les points critiques ne sera plus nulle, en général; mais on pourra, comme tout-à-l'heure l'exprimer linéairement au moyen des intégrales $(v_1 v_2)$, $(v_2 v_3)$, ... $(v_{m-1} v_m)$, de sorte qu'elle définit une fonction de x qui satisfait à la même équation différentielle. Il est facile de trouver la valeur de cette intégrale; imaginons qu'on ait pris comme contour d'intégration une circonférence ayant pour centre le point $u = 0$, et contenant à son intérieur tous les points v. Par la transformation $u = \frac{1}{t}$, elle devient

$$\int f\left(x, \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2},$$

cette dernière étant prise le long d'un petit cercle entourant le point $t = 0$, et ne contenant d'autre point singulier que l'origine. La valeur de cette intégrale est précisément $2i\pi R(x)$, $R(x)$ désignant le résidu de la fonction $f\left(x, \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2}$, relatif au point singulier $t = 0$. D'après ce qui a été dit sur la fonction $f(x, u)$, ce résidu doit vérifier une équation différentielle de la forme

$$\frac{dR(x)}{dx} = R(x) \times G(x)$$

$G(x)$ étant une fonction uniforme de x.

En résumé, on voit que lorsque la fonction $f(x, u)$ est uniforme dans le voisinage du point $u = \infty$, l'équation différentielle d'ordre $m-1$ n'est pas *irréductible.*

(13). Etant donnée une fonction $f(x, u)$ de la forme de celles que j'étudie, appelons E l'équation d'ordre $m - 1$ qui est vérifiée par toutes les intégrales définies $(v_i v_h)$. Supposons que l'on ait reconnu, par un moyen quelconque, que l'une de ces intégrales satisfait à une certaine équation différentielle linéaire à coefficients uniformes E', d'ordre $m - 1$. Admettons en outre que cette équation est irréductible. Elle devra forcément être identique avec E; sans quoi on pourrait former une équation d'ordre moindre admettant une intégrale de E'. On pourra donc en conclure que toutes les intégrales définies $(v_i v_h)$ relatives à $f(x, u)$ satisfont à la même équation. Ainsi, on sait depuis EULER que l'intégrale définie

$$y = \int_0^1 u^{\beta-1} (1 - u)^{\gamma-\beta-1} (1 - xu)^{-\alpha} du,$$

pourvu qu'elle ait un sens, satisfait à l'équation différentielle

$$x(1 - x) \frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

D'après ce qui précède, on peut en conclure immédiatement qu'il en est de même de chacune des intégrales $\int_g^h u^{\beta-1} (1 - u)^{\gamma-\beta-1} (1 - xu)^{-\alpha} du$, g et h désignant l'une des quantités $0, 1, \frac{1}{x}, \infty$. (JACOBI, *Journal de Crelle tome LVI)*. Nous verrons plus loin d'autres applications de cette remarque.

(14). Nous avons défini les points $v_1, v_2, \ldots . v_m$ comme les points singuliers de la fonction $f(x, u)$, où l'on suppose x constant. Mais, au fond, le raisonnement n'exige pas que ces valeurs soient véritablement des valeurs singulières; la seule condition nécessaire est que $f(x, u)$ soit holomorphe pour toute valeur de u différente de $v_1, v_2 \ldots . v_m, \infty$. On peut admettre que certains des points v sont des points ordinaires pour la fonction et les conclusions précédentes ne cessent pas de s'appliquer; mais il faut remarquer que l'équation E ne sera plus irréductible. Je suppose, pour fixer les idées, que $f(x, u)$ admette les trois points critiques v_1, v_2, v_3 et n'en admette pas d'autre, abstraction faite du point $v = \infty$. D'après le théorème général, les intégrales définies $(v_1 v_2)$, $(v_2 v_3)$, $(v_1 v_3)$ satisfont à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients uniformes; soit E' cette équation. Soit maintenant v_4 un point ordinaire pour $f(x, u)$; le théorème I s'applique encore aux six intégrales définies

$$(v_1 v_2),\ (v_1 v_3),\ (v_1 v_4),\ (v_2 v_3),\ (v_2 v_4),\ (v_3 v_4),$$

et ces six intégrales doivent vérifier une équation linéaire du 3ème ordre E. Mais cette équation E n'est pas irréductible, puisqu'elle admet toutes les intégrales de l'équation E'.

(15). Je terminerai ce chapitre par l'étude d'un cas particulier intéressant, où les intégrales présentent une grande analogie avec les intégrales étudiées par Mr Hermite. La fonction $f(x, u)$, quand on y regarde x comme constant, admet toujours m points singuliers, qui se partagent en deux catégories: les uns sont des points de ramification, les autres des pôles ou même des points singuliers essentiels, mais $f(x, u)$ reste uniforme dans le voisinage. Soient $v_1, v_2, \ldots . v_r$ les premiers, et $w_1, w_2, \ldots . w_s$ les seconds; $r + s = m$. Je conserve les hypothèses précédemment admises relativement à la fonction $f(x, u)$, à la disposition des points singuliers et aux intégrales définies telles que $(v_i v_h)$. Supposons que l'on ait établi, comme plus haut, un ou plusieurs systèmes de coupures partageant le plan en un certain nombre de régions. A l'intérieur de l'une quelconque de ces régions, toutes les intégrales $(v_i v_h)$ peuvent s'exprimer linéairement au moyen de $r - 1$ d'entre elles et des résidus de $f(x, u)$ relatifs aux points singuliers $w_1, w_2, \ldots . w_s$, résidus que j'appellerai $R_1(x), R_2(x), \ldots . R_s(x)$. Imaginons, en effet, que l'on ait numéroté les points $v_1, v_2, v_3, \ldots . v_r$ dans un ordre tel que la ligne droite $v_1 v_i$ laisse d'un même côté tous les points v d'indice inférieur à i et de l'autre côté tous les points d'indice supérieur. On pourra alors reprendre la démonstration du n° 8; la seule différence est qu'à l'intérieur de l'un des triangles tels que $v_h v_{i+1} v_g$ il pourra se trouver un ou plusieurs des points w. Si, par exemple, à l'intérieur de ce triangle se trouve le point w_k, la fonction $f(x, u)$ ne cesse pas d'être uniforme à l'intérieur de ce triangle et le théorème de Cauchy donne la relation

$$(v_h v_{i+1}) + (v_{i+1} v_g) + (v_g v_h) = \pm\ 2 i\pi R_k(x),$$

où $R_k(x)$ a le sens qui lui a été attribué tout-à-l'heure. Le reste de la démonstration s'achève comme au n° 8 et on voit que les intégrales telle que $(v_i w_h)$, $(w_i w_h)$, qui n'ont plus de sens dans ce cas, se trouvent tout naturellement remplacées par les résidus $R_1(x), R_2(x), \ldots . R_s(x)$.

Ces résidus définissent s fonctions de la variable x, qu'il est facile de caractériser. Si, en effet, on fait décrire à la variable x un contour fermé quelconque, le point singulier w_i, qui peut être variable avec x, reviendra à sa valeur initiale ou sa valeur finale sera égale à la valeur initiale d'un autre point singulier w_h. Comme $f(x, u)$ reprend, à une constante près, sa valeur initiale, lorsque x et u reprennent leurs valeurs initiales, la valeur finale du résidu $R_i(x)$ sera égale, a un facteur constant près, à la valeur initiale de $R_i(x)$ ou d'un autre résidu $R_h(x)$. Ces propriétés suffisent pour montrer que $R_1(x)$, $R_2(x)$, ... $R_s(x)$ sont des intégrales d'une équation linéaire d'ordre s à coefficient uniformes. Cette équation ne sera pas irréductible, si l'équation $\Phi_1(x, w) = 0$ qui définit w comme fonction de x n'est pas indécomposable.

Voyons maintenant ce que deviennent les intégrales $(v_i v_h)$ lorsqu'on fait décrire à la variable x un chemin quelconque. Il n'y a rien à ajouter à ce qui a déjà été dit pour le cas où un ou plusieurs des points v viennent à se trouver situés sur le chemin $(v_i v_h)$. Il ne nous reste qu'à examiner ce qui se passe lorsqu'un ou plusieurs des points w viennent à être situés sur cette ligne. J'emploierai pour cela une méthode que j'ai déjà appliquée aux intégrales de M^r^ Hermite. [1] Soit C une ligne telle que, pour une valeur de x figurée par un point de cette ligne, un des points w traverse la ligne droite $v_i v_h$. Soit x_0 un point de cette courbe et ξ, ξ' deux points situés de part et d'autre de la courbe, très-voisins du point x_0. Figurons les positions respectives des points v_i, v_h, w_k lorsque x coïncide successivement avec les points ξ et ξ' et supposons, pour plus de géneralité, les trois points v_i, v_h, w_k variables avec x. Je suppose de plus que, lorsque x vient en x_0, un seul point w traverse la ligne $v_i v_h$; on pourra alors prendre un point l assez rapproché de cette ligne pour que le triangle $l v_i v_h$ ne contienne à son intérieur aucun des points critiques de $f(\xi, u)$ et que le triangle $l v'_i v'_h$ ne contienne pas d'autre point singulier que w'_k de la fonction $f(\xi', u)$ (fig. 11).

La fonction $f(\xi, u)$ étant holomorphe à l'intérieur du triangle $l v_i v_h$, on aura

$$(v_i v_h) = (v_i l) + (l v_h)$$

On pourra donc remplacer l'intégrale $(v_i v_h)$ par la somme des deux intégrales $(v_i l)$, $(l v_h)$. Lorsque x va de ξ en ξ', v_i et v_h viennent respective-

[1] Voir le premier volume des Acta, page 190.

ment en v'_i, v'_h, mais chacune des intégrales définies (lv_i), (lv_h) reste une fonction uniforme et continue de x; de sorte qu'aux environs du point ξ' la continuation analytique de la fonction sera encore représentée par la somme

$$(v'_i l) + (l v'_h);$$

$f(\xi', u)$ n'est plus holomorphe à l'intérieur du triangle $l v'_i v'_h$, mais elle est encore uniforme et, en appliquant de nouveau le théorème de CAUCHY, on aboutit a la relation

$$(v'_i l) + (l v'_h) = (v'_i v'_h) - 2 i\pi R_k(\xi'),$$

$R_k(\xi')$ représentant le résidu de $f(\xi', u)$ relatif au point singulier w'_k. La fonction qui était représentée par $(v_i v_h)$ avant que la variable n'ait franchi la coupure se trouve donc représentée, après le passage, par le symbole

$$(v_i v_h) - 2 i\pi R_k(x)$$

La démonstration s'applique évidemment, quel que soit le nombre des points w qui traversent la ligne $v_i v_h$. Comme on peut répéter le raisonnement chaque fois que la variable franchit une coupure, on est conduit aux conclusions suivantes: si l'on considère toutes les intégrales définies $(v_i v_h)$ et les résidus $R_1(x)$, $R_2(x)$, ... $R_s(x)$, quand on fait décrire à la variable x un chemin fermé quelconque ne passant par aucun des points pour lesquels les valeurs v ou w ne soient pas toutes distinctes ou cessent d'être holomorphes, les valeurs finales de ces fonctions sont liées aux valeurs initiales par des formules linéaires et homogènes à coefficients constants.

Donc:

Théorème II. Toutes les intégrales $(v_i v_h)$ satisfont à une équation différentielle linéaire d'ordre $m - 1$ à coefficients uniformes, et cette équation admet comme solutions les s résidus $R_1(x)$, $R_2(x)$ .... $R_s(x)$.

En rapprochant ce résultat de celui qui a été établi au n° 14, on voit que l'équation générale d'ordre $m - 1$ admettra des intégrales appartenant à une équation d'ordre moins élevé à coefficients uniformes, toutes les fois que la fonction $f(x, u)$ sera uniforme dans le voisinage de l'un des points que nous avons considérés comme les points singuliers de cette fonction.

(16). Les intégrales de M^r HERMITE peuvent, dans certains cas particuliers, se ramener aux précédentes. Soit $F(x, u)$ une fonction holomorphe de x et de u et $G(x, u)$ un polynôme de degré $m - 2$ en u dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de x. Le quotient $\frac{F(x, u)}{G(x, u)}$ admet $m - 2$ pôles variables avec x, qui sont donnés par l'équation $G(x, u) = 0$. Désignons par $u_1, u_2, \ldots u_{m-2}$ ces racines et par $R_1(x)$, $R_2(x), \ldots R_{m-2}(x)$ les résidus correspondants de la fonction $\frac{F(x, u)}{G(x, u)}$. Soient maintenant t_0, t_1 deux constantes quelconques, l'intégrale définie

$$\Phi(x) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(x, u)}{G(x, u)} du$$

représente une fonction bien déterminée de x sauf pour les points situés sur certaines courbes, formant des coupures pour cette intégrale. D'après ce qui précède la fonction $\Phi(x)$ constitue avec $R_1(x), R_2(x), \ldots R_{m-2}(x)$ un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire d'ordre $m - 1$ à coefficients uniformes. La fonction représentée dans une certaine partie du plan par $\Phi(x)$ sera représentée, après que la variable aura franchi un nombre quelconque de coupures, par

$$\Phi(x) + 2M_1 i\pi R_1(x) + 2M_2 i\pi R_2(x) + \ldots$$

$M_1, M_2, \ldots$ étant des nombres entiers qu'il serait facile de calculer.

La théorie précédente exige essentiellement que certains des points critiques de la fonction $f(x, u)$ soient variables avec x. Dans le cas contraire, elle nous apprend seulement que les intégrales considérées représentent des fonctions uniformes Telle est par exemple l'intégrale

$$y = \int_0 (u^2 - 1)^m \cos ux\, du,$$

qui se présente dans l'étude des transcendantes de BESSEL. De même l'intégrale

$$y = \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \ldots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - 1} du,$$

lorsque $\lambda - 1$ est un nombre entier positif, représente une fonction uniforme de x, qui n'est autre qu'un polynôme.

II.

(17). L'application de la théorie précédente à la fonction

$$f(x,\ u) = u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}$$

se fait immédiatement, et conduit d'une façon presque intuitive aux résultats connus. En particulier, on peut en déduire tous les cas où l'équation de la série hypergéométrique admet une intégrale dont la dérivée logarithmique est une fonction rationnelle de x. Si l'on se reporte, en effet, aux paragraphes 12, 13, 14 et 15, on voit qu'il suffit pour cela que $f(x,\ u)$ soit uniforme dans le voisinage de l'une des valeurs 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞, c'est-à-dire que l'un des nombres α, β, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ soit un nombre entier. Ces cas sont du reste les seuls où l'équation de la série hypergéométrique admette une intégrale de cette forme.

Supposons, par exemple, que $\alpha+1-\gamma$ soit égal à un nombre entier négatif, de telle sorte que la fonction $f(x,\ u)$ soit uniforme dans le voisinage du point $u=\infty$. L'équation différentielle devra admettre comme intégrale le résidu de la fonction $f\left(x,\ \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}$, relatif au pôle $t=0$.

$$f\left(x,\ \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2} = t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(t-x)^{-\alpha} = x^{-\alpha}\,t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{-\alpha};$$

posons $\alpha+1-\gamma=-m$;

$$f\left(x,\ \frac{1}{t}\right)t^2 = x^{-\alpha}\,t^{-1-m}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{-\alpha}$$

Ce résidu sera égal au produit de $x^{-\alpha}$ par le coëfficient de t^m dans le développement du produit $(1-t)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{-\alpha}$ suivant les puissances croissantes de t. Or on a

$$(1-t)^{\gamma-\beta-1} = 1+\frac{\beta+1-\gamma}{1}t+\frac{(\beta+1-\gamma)(\beta+2-\gamma)}{1\,.\,2}t^2+\ldots.$$

$$+\frac{(\beta+1-\gamma)\ldots.(\beta+m-\gamma)}{1\,.\,2\ldots.m}t^m+\ldots.$$

$$\left(1-\frac{t}{x}\right)^{-\alpha}=1+\frac{\alpha}{1}\,\frac{t}{x}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2}\,\frac{t^2}{x^2}+\ldots\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots\ldots(\alpha+m-1)}{1\,.\,2\ldots\ldots m}\,\frac{t^m}{x^m}+\ldots\ldots$$

Le coefficient de t^m dans le produit sera donc

$$\frac{(\beta+1-\gamma)\ldots\ldots(\beta+m-\gamma)}{1\,.\,2\ldots\ldots m}+\frac{\alpha(\beta+1-\gamma)\ldots\ldots(\beta+m-1-\gamma)}{1\,.\,1\,.\,2\ldots\ldots(m-1)}\,\frac{1}{x}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots\ldots(\alpha+m-1)}{1\,.\,2\ldots\ldots m}\,\frac{1}{x^m},$$

ce qui peut encore s'écrire:

$$\frac{(\beta+1-\gamma)\ldots\ldots(\beta+m-\gamma)}{1\,.\,2\ldots\ldots m}\left\{1+\frac{\alpha(-m)}{1.(\gamma-\beta-m)}\,\frac{1}{x}+\frac{\alpha(-m)(-m+1)}{1\,.\,2\,.(\gamma-\beta-m)(\gamma-\beta-m+1)}\,\frac{1}{x^2}+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots\ldots(\alpha+m-1)(-m)(-m+1)\ldots\ldots(-m+m-1)}{1\,.\,2\ldots\ldots m(\gamma-\beta-m)\ldots\ldots(\gamma-\beta-1)}\,\frac{1}{x^m}\right\}$$

Le polynôme entre parenthèses n'est autre que $F\left(\alpha,\,-m,\,\gamma-\beta-m,\,\frac{1}{x}\right)$ ou $F\left(\alpha,\,\alpha+1-\gamma,\,\alpha+1-\beta,\,\frac{1}{x}\right)$. Le résidu cherché est donc égal, à un facteur constant près, au produit

$$x^{-\alpha}\,F\left(\alpha,\,\alpha+1-\gamma,\,\alpha+1-\beta,\,\frac{1}{x}\right)$$

Si β est nul ou égal à un nombre entier négatif, on trouve de même que le résidu de $f(x, u)$ relatif au pôle $u=0$ est égal à

$$\frac{(\beta+1-\gamma)\ldots\ldots(\beta+m-\gamma)}{1\,.\,2\ldots\ldots m}\,F(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,x).$$

(18). Prenons encore l'exemple traité par M. Pochammer;

$$f(x,\,u)=(u-a_1)^{b_1-1}\,(u-a_2)^{b_2-1}\ldots\ldots(u-a_n)^{b_n-1}\,(u-x)^{\lambda-1}$$

Le théorème général nous apprend que chacune des intégrales définies

$$y=\int_g^h(u-a_1)^{b_1-1}\ldots\ldots(u-a_n)^{b_n-1}\,(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent deux des quantités $a_1, a_2, \ldots . a_n, x, \infty$, pourvu qu'elle ait un sens, doit satisfaire à une équation linéaire d'ordre n à coefficients uniformes, dont les points singuliers à distance finie sont précisément les n points, $a_1, a_2, \ldots . a_n$. Rappelons d'abord en quelques mots comment on peut former cette équation et supposons que λ n'est pas un nombre entier, condition nécessaire pour que l'équation obtenue soit irréductible. D'après une remarque faite antérieurement (n° 13), il suffit de former l'équation à laquelle satisfait l'intégrale définie

$$y = \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \ldots . (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - 1} \, du,$$

où les deux limites a_i, a_h sont finies et indépendantes de x, et où l'on suppose que les parties réelles de b_i et de b_h soient positives, de façon que cette intégrale ait un sens. On aura:

$$\frac{dy}{dx} = -(\lambda - 1) \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \ldots . (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - 2} \, du,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \ldots . (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - 3} \, du,$$

. . . .

$$\frac{d^py}{dx^p} = (-1)^p (\lambda - 1)(\lambda - 2) \ldots . (\lambda - p) \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \ldots . (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - p - 1} \, du$$

. . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^n (\lambda - 1) \ldots . (\lambda - n) \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \ldots . (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - n - 1} \, du$$

Soient maintenant $P_0, P_1, P_2, \ldots . P_n$, $(n + 1)$ fonctions de x; posons

$$\varphi(y) = P_0 \frac{d^ny}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots . + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y$$

En remplaçant y et ses dérivées par les expressions précédentes, il vient:

$$\varphi(y) = \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - n - 1} F(u)\, du,$$

$F(u)$ ayant la valeur suivante,

$$F(u) = (-1)^n (\lambda - 1) \dots (\lambda - n) P_0 + (-1)^{n-1} (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1)(u - x) P_1 \pm \dots$$

$$\dots - (\lambda - 1)(u - x)^{n-1} P_{n-1} + (u - x)^n P_n$$

Posons encore

$$f_1(u) = (u - a_1)^{b_1} (u - a_2)^{b_2} \dots (u - a_n)^{b_n} (u - x)^{\lambda - n};$$

on aura

$$\frac{df_1(u)}{du} = (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - n - 1} \Psi(u),$$

où

$$\Psi(u) = \sum_{i=1}^{i=n} b_i (u - a_1) \dots (u - a_{i-1})(u - a_{i+1}) \dots (u - a_n)(u - x) + (\lambda - n)(u - a_1) \dots (u - a_n);$$

$F(u)$ et $\Psi(u)$ sont deux fonctions entières de u de degré n; si on peut disposer des $n + 1$ coefficients P_0, P_1, ... P_n de façon que ces deux polynômes soient identiques, on aura

$$\varphi(y) = f_1(a_h) - f_1(a_i) = 0$$

Il est aisé de voir que l'identification est toujours possible. Pour plus de commodité posons $u = x + z$. On aura

$$F(x + z) = (-1)^n (\lambda - 1) \dots (\lambda - n) P_0 + (-1)^{n-1} (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) P_1 z \pm \dots$$

$$\dots - (\lambda - 1) P_{n-1} z^{n-1} + P_n z^n,$$

$$\Psi(x + z) = \Psi(x) + \frac{z}{1} \Psi'(x) + \frac{z^2}{1 \cdot 2} \Psi''(x) + \dots + \frac{z^n}{1 \cdot 2 \dots n} \Psi^n(x).$$

Si l'on écrit que ces deux polynômes en z sont identiques, on obtient immédiatement pour les fonctions inconnues P_0, P_1, ... P_n les valeurs suivantes:

$$P_0 = (-1)^n \frac{\Psi(x)}{(\lambda-1)\dots(\lambda-n)},$$

$$P_1 = (-1)^{n-1} \frac{\Psi'(x)}{(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_{n-1} = (-1) \frac{\Psi^{n-1}(x)}{(\lambda-1)\,1\,.\,2\dots(n-1)},$$

$$P_n = \frac{\Psi^n(x)}{1\,.\,2\dots n}.$$

P_0 sera une fonction entière de x de degré n; P_1 une fonction entière de degré $n-1$ .... etc., et P_n une constante. En particulier, on aura

$$P_0 = (-1)^n \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)};$$

ce qui montre bien que les seuls points singuliers à distance finie pour l'équation

$$\varphi(y) = 0$$

sont les points a_1, a_2, ... a_n.

(19). La représentation des solutions de l'équation $\varphi(y) = 0$ par des intégrales définies permet aussi de trouver très-simplement la forme d'un système fondamental d'intégrales dans le voisinage d'un point singulier. Dans le voisinage du point singulier a_1 par exemple, les $n-1$ intégrales définies

$$\int_{a_2}^{\infty} f(x,\ u)\,du, \qquad \int_{a_3}^{\infty} f(x,\ u)\,du, \ \dots \ \int_{a_n}^{\infty} f(x,\ u)\,du,$$

représentent $n-1$ fonctions linéairement indépendantes qui sont holomorphes pour $x = a_1$, tandis que l'intégrale

$$\int_{a_1}^{x} f(x,\ u)\,du$$

définit une fonction de x qui est multipliée par $e^{\pm 2\pi i(\lambda+b_1)}$ lorsque x tourne autour du point a_1. En effet, par le changement de variable

$$u = a_1 + t(x - a_1),$$

elle prend la forme

$$(x-a_1)^{\lambda+b_1-1}\int_0^1 \{a_2-a_1-t(x-a_1)\}^{b_2-1}\ldots\{a_n-a_1-t(x-a_1)\}^{b_n-1}t^{b_1-1}(1-t)^{\lambda-1}\,dt,$$

et la nouvelle intégrale représente une fonction holomorphe de x pour $x=a_1$.

Pour étudier la forme des intégrales de l'équation $\varphi(y)=0$ dans le voisinage du point $x=\frac{1}{x'}=\infty$, imaginons un contour fermé C entourant tous les points critiques, par exemple une circonférence d'un très-grand rayon et faisons décrire à la variable x cette circonférence. Les $n-1$ intégrales définies

$$\int_{a_1}^{a_i} f(x,\ u)\,du \qquad (i=2,\ 3,\ \ldots.\ n)$$

représentent $n-1$ fonctions linéairement indépendantes dont chacune se reproduit multipliée par le facteur $e^{\pm 2\pi\lambda i}$ lorsque la variable x décrit cette circonférence. Par exemple l'intégrale

$$\int_{a_1}^{a_2}(u-a_1)^{b_1-1}\ldots.(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du$$

peut s'écrire

$$x^{\lambda-1}\int_{a_i}^{a_2}(u-a_1)^{b_1-1}\ldots.(u-a_n)^{b_n-1}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{\lambda-1}du,$$

et la nouvelle intégrale représente évidemment une fonction holomorphe de x pour $x=\frac{1}{x'}=\infty$. L'équation $\varphi(y)=0$ admet donc, dans le domaine de ce point, $n-1$ solutions linéairement indépendantes telles que

$$x'^{1-\lambda}P(x')$$

$P(x')$ étant holomorphe pour $x'=0$.

On reconnaît d'une façon analogue que l'intégrale définie

$$\int_x^{\infty} f(x,\ u)\,du$$

représente dans le voisinage du point $x = \frac{1}{x'} = \infty$ une fonction que l'on peut mettre sous la forme

$$x'^{n-\lambda-(b_1+b_2+\ldots\ldots+b_n)}\, Q(x')$$

$Q(x')$ étant holomorphe pour $x' = 0$.

(20). L'équation $\varphi(y) = 0$ admettra des intégrales appartenant à une équation à coefficients uniformes d'ordre inférieur à n toutes les fois que la fonction $f(x, u)$ sera uniforme dans le voisinage de l'un des points singuliers $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, x, \infty$. Supposons, par exemple, que b_i soit un nombre entier; si $b_i - 1$ est positif, de façon que le point $u = a_i$ ne soit pas un point singulier, toutes les intégrales

$$\int_g^h f(x, u)\, du,$$

où g et h désignent l'une des quantités $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots\ldots a_n, x, \infty$, vérifient une même équation linéaire d'ordre $n - 1$ à coefficients uniformes. Mais si $b_i - 1$ est un nombre entier négatif, le point $u = a_i$ sera un pôle et les intégrales précédentes vérifieront une équation d'ordre n admettant comme intégrale particulière le résidu de la fonction $f(x, u)$, relatif au pôle $u = a_i$.

Dans le premier cas, on peut se proposer de former l'équation d'ordre $n - 1$; je suppose pour cela le point autour duquel $f(x; u)$ est uniforme rejeté à l'infini; (ce qu'il est toujours possible de faire par une transformation linéaire, sans changer la forme de l'expression). Cela revient à supposer que la somme $b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n + \lambda$ est un nombre entier, et de plus que cette somme est inférieure ou au plus égale à $n - 1$, afin que l'intégrale $\int f(x, u)\, du$, prise le long d'une circonférence entourant tous les points critiques, soit nulle.

Il résulte de ce qui précède que toutes les intégrales définies $(a_i a_h)$ ou $(a_i x)$ doivent satisfaire à une même équation linéaire d'ordre $n - 1$ à coefficients uniformes. Il est aisé de former cette équation. Admettons, comme plus haut, que λ n'est pas un nombre entier et en outre que l'on a

$$b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n + \lambda = n - 1$$

Soit

$$y = \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - 1}\, du;$$

on aura, comme tout à l'heure,

$$\frac{dy}{dx} = -(\lambda - 1) \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - 2}\, du,$$

. . . .

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1} (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - n}\, du;$$

P_0, P_1, ... P_{n-1} désignant n fonctions de x, posons encore

$$\varphi_1(y) = P_0 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_1 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + P_{n-2} \frac{dy}{dx} + P_{n-1} y$$

On aura

$$\varphi_1(y) = \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - n} F_1(u)\, du,$$

$$F_1(u) = (-1)^{n-1} (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) P_0 + (-1)^{n-2} (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 2) P_1 (u - x) \pm \dots$$
$$\dots - (\lambda - 1) P_{n-2} (u - x)^{n-2} + P_{n-1} (u - x)^{n-1}$$

Soit encore

$$f_1(u) = (u - a_1)^{b_1} \dots (u - a_n)^{b_n} (u - x)^{\lambda - n + 1};$$

$$\frac{df_1(u)}{du} = (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda - n} \Psi_1(u),$$

$$\Psi_1(u) = \sum_{i=1}^{i=n} b_i (u - a_1) \dots (u - a_n)(u - x) + (\lambda - n + 1)(u - a_1) \dots (u - a_n)$$

Si, en choisissant convenablement les fonctions P_0, P_1, ... P_{n-1}, $F_1(u)$ est identique à $\Psi_1(u)$, on aura

$$\varphi_1(y) = f_1(a_h) - f_1(a_i) = 0$$

L'identification est toujours possible; car, à cause de la relation

$$b_1 + b_2 + \ldots . + b_n + \lambda = n - 1,$$

$\Psi_1(u)$ est comme $F_1(u)$ une fonction entière de u de degré $n - 1$. Les coefficients P_0, P_1, ... P_{n-1} seront déterminés comme tout-à-l'heure.

De l'équation $\varphi_1(y) = 0$ d'ordre $n - 1$ on déduira par la différentiation une équation de même forme d'ordre $n - 1$

$$\varphi_2\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

qui est vérifiée par l'intégrale définie

$$\int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \ldots . (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda' - 1} du$$

où l'on a $\lambda' = \lambda - 1$, de la même forme que la précédente, et qui n'en diffère que par le changement de λ en $\lambda - 1$. Pour cette nouvelle intégrale, on a

$$b_1 + b_2 + \ldots . + b_n + \lambda' = n - 2$$

Par r différentiations successives on formerait de même l'équation d'ordre $n - 1$ qui est vérifiée par l'intégrale définie

$$\int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \ldots . (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x)^{\lambda' - 1} du,$$

où l'on a

$$b_1 + b_2 + \ldots . + b_n + \lambda' = n - 1 - r$$

(21). Je considère enfin la fonction très-générale

$$f(x, u) = (u - a_1)^{b_1 - 1} (u - a_2)^{b_2 - 1} \ldots . (u - a_n)^{b_n - 1} [\varphi_1(x, u)]^{\lambda_1 - 1} \ldots . [\varphi_q(x, u)]^{\lambda_q - 1},$$

où φ_1, φ_2, ... φ_q sont des polynômes entiers en u, de degré m_1, m_2, ... m_q dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de x, et je me borne au cas général où aucun des nombres b ou λ n'est égal à un nombre entier.

Soit

$$\Phi(x, u) = \varphi_1(x, u) \varphi_2(x, u) \ldots . \varphi_q(x, u);$$

$\Phi(x, u)$ est un polynôme entier en u de degré $p = m_1 + m_2 + \ldots + m_q$. D'après le théorème général, chacune des intégrales définies

$$\int_{a_i}^{a_h} f(x, u)\, du, \qquad \int_{a_i}^{u_i} f(x, u)\, du, \qquad \int_{u_i}^{u_h} f(x, u)\, du,$$

où u_i, u_h désignent deux racines de l'équation $\Phi(x, u) = 0$, pourvu qu'elle ait un sens, doit satisfaire à une équation linéaire d'ordre $n + p - 1$ à coefficients uniformes. Il suffit, d'après ce qu'on a vu plus haut, de former une telle équation pour l'une des intégrales définies

$$y = \int_{a_i}^{a_h} f(x, u)\, du$$

On peut toujours, en désignant par $u_1, u_2, \ldots u_p$ les p racines de l'équation

$$\Phi(x, u) = 0$$

et en faisant abstraction d'un facteur ne dépendant que de x, écrire

$$y = \int_{a_i}^{a_h} (u - a_1)^{b_1 - 1} \ldots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - u_1)^{\lambda_1 - 1} \ldots (u - u_p)^{\lambda_p - 1}\, du,$$

les nombres λ ayant la même valeur pour les racines d'un même groupe, tel que le groupe formé par les racines de l'équation $\varphi_i(x, u) = 0$.

Supposons que les parties réelles de b_i et de b_h soient positives, afin que l'intégrale considérée ait un sens, et considérons pour un moment $u_1, u_2, \ldots u_p$ comme p variables indépendantes. Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p$ p nombres entiers positifs tels que

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_p = n + p - 1$$

Entre la fonction y et les dérivées partielles, au nombre de $n+p-1$,

$$\begin{array}{l}
\dfrac{\partial y}{\partial u_1}, \dfrac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}, \ldots \dfrac{\partial^{\mu_1} y}{\partial u_1^{\mu_1}}, \\[2ex]
\dfrac{\partial y}{\partial u_2}, \dfrac{\partial^2 y}{\partial u_2^2}, \ldots \dfrac{\partial^{\mu_2} y}{\partial u_2^{\mu_2}}, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots \\[1ex]
\dfrac{\partial y}{\partial u_p}, \dfrac{\partial^2 y}{\partial u_p^2}, \ldots \dfrac{\partial^{\mu_p} y}{\partial u_p^{\mu_p}},
\end{array}$$

il existe une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $u_1, u_2, \dots u_p$.

On a

$$\frac{\partial y}{\partial u_1} = -(\lambda_1 - 1)\int_{a_i}^{a_h} (u-a_1)^{b_1-1} \dots (u-a_n)^{b_n-1} (u-u_1)^{\lambda_1-2} \dots (u-u_p)^{\lambda_p-1}\, du,$$

. . . .

$$\frac{\partial^{\mu_1} y}{\partial u_1^{\mu_1}} = (-1)^{\mu_1}(\lambda_1-1)\dots(\lambda_1-\mu_1)\int_{a_i}^{a_h} (u-a_1)^{b_1-1} \dots (u-a_n)^{b_n-1} (u-u_1)^{\lambda_1-\mu_1-1} \dots$$

$$\dots (u-u_p)^{\lambda_p-1}\, du,$$

et les autres dérivées partielles s'expriment d'une façon analogue. Soient maintenant

$$\begin{array}{l} A_1, A_2, \dots A_{\mu_1}, \\ B_1, B_2, \dots B_{\mu_2}, \\ \dots\dots\dots \\ L_1, L_2, \dots L_{\mu_p}, M, \end{array}$$

$n+p$ fonctions de $u_1, u_2, \dots u_p$. Posons:

$$\Pi(y) = \left| \begin{array}{l} A_1 \dfrac{\partial^{\mu_1} y}{\partial u_1^{\mu_1}} + A_2 \dfrac{\partial^{\mu_1-1} y}{\partial u_1^{\mu_1-1}} + \dots + A_{\mu_1} \dfrac{\partial y}{\partial u_1} \\ + B_1 \dfrac{\partial^{\mu_2} y}{\partial u_2^{\mu_2}} + \dots\dots\dots + B_{\mu_2} \dfrac{\partial y}{\partial u_2} \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + L_1 \dfrac{\partial^{\mu_p} y}{\partial u_p^{\mu_p}} + \dots\dots\dots + L_{\mu_p} \dfrac{\partial y}{\partial u_p} \\ + My \end{array} \right|$$

En remplaçant y et ses dérivées partielles par leurs expressions au moyen d'intégrales définies, on trouve:

$$\Pi(y) = \int_{a_i}^{a_h} (u-a_1)^{b_1-1} \dots (u-a_n)^{b_n-1} (u-u_1)^{\lambda_1-\mu_1-1} \dots (u-u_p)^{\lambda_p-\mu_p-1} F(u)\, du,$$

$F(u)$ ayant la valeur suivante:

$$F(u)=\left\{\begin{array}{l}(u-u_2)^{\mu_2}\dots(u-u_p)^{\mu_p}\{(-1)^{\mu_1}(\lambda_1-1)\dots(\lambda_1-\mu_1)A_1+(-1)^{\mu_1-1}(\lambda_1-1)\dots\\ \qquad\dots(\lambda_1-\mu_1+1)A_2(u-u_1)\pm\dots-(\lambda_1-1)A_{\mu_1}(u-u_1)^{\mu_1-1}\}\\ +(u-u_1)^{\mu_1}(u-u_3)^{\mu_3}\dots(u-u_p)^{\mu_p}\{(-1)^{\mu_2}(\lambda_2-1)\dots(\lambda_2-\mu_2)B_1+(-1)^{\mu_2-1}(\lambda_2-1)\dots\\ \qquad\dots(\lambda_2-\mu_2+1)B_2(u-u_2)\pm\dots-(\lambda_2-1)B_{\mu_2}(u-u_2)^{\mu_2-1}\}\\ +\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ +(u-u_1)^{\mu_1}\dots(u-u_{p-1})^{\mu_{p-1}}\{(-1)^{\mu_p}(\lambda_p-1)\dots(\lambda_p-\mu_p)L_1\pm\dots\\ \qquad\dots-(\lambda_p-1)L_{\mu_p}(u-u_p)^{\mu_p-1}\}\\ +M(u-u_1)^{\mu_1}(u-u_2)^{\mu_2}\dots(u-u_p)^{\mu_p};\end{array}\right.$$

$F(u)$ est une fonction entière de u de degré $n+p-1$, contenant $n+p$ coefficients indéterminés.

Posons encore

$$f_1(u)=(u-a_1)^{b_1}\dots(u-a_n)^{b_n}(u-u_1)^{\lambda_1-\mu_1}\dots(u-u_p)^{\lambda_p-\mu_p};$$

on aura

$$\frac{df_1(u)}{du}=(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-u_1)^{\lambda_1-\mu_1-1}\dots(u-u_p)^{\lambda_p-\mu_p-1}\Psi_1(u),$$

où

$$\Psi_1(u)=\sum_{i=1}^{i=n}b_i(u-a_1)\dots(u-a_{i-1})(u-a_{i+1})\dots(u-a_n)(u-u_1)\dots(u-u_p)$$

$$+\sum_{h=1}^{h=p}(\lambda_h-\mu_h)(u-a_1)\dots(u-a_n)(u-u_1)\dots(u-u_{h-1})(u-u_{h+1})\dots(u-u_p);$$

$\Psi_1(u)$ est comme $F(u)$ une fonction entière de u de degré $n+p-1$. Si l'on peut disposer des $n+p$ coefficients A_i, B_i, ... L_i, M de façon que ces polynômes soient identiques, on aura

$$\Pi(y)=f_1(a_h)-f_1(a_i)=0,$$

et la proposition sera démontrée.

Pour le calcul des coefficients A_i, je remarque que $F(u)$ peut s'écrire

$$F(u) = (u-u_2)^{\mu_2}\dots(u-u_p)^{\mu_p}\{(-1)^{\mu_1}(\lambda_1-1)\dots(\lambda_1-\mu_1)A_1+(-1)^{\mu_1-1}(\lambda_1-1)\dots$$
$$\dots(\lambda_1-\mu_1+1)A_2(u-u_1)\dots-(\lambda_1-1)A_{\mu_1}(u-u_1)^{\mu_1-1}\}$$
$$+(u-u_1)^{\mu_1}G(u),$$

$G(u)$ désignant une fonction entière de u. Si l'on fait $u=u_1$, $F(u)$ se réduit à

$$(u_1-u_2)^{\mu_2}\dots(u_1-u_p)^{\mu_p}(-1)^{\mu_1}(\lambda_1-1)\dots(\lambda_1-\mu_1)A_1,$$

et $\Psi_1(u)$ devient égal à $(\lambda_1-\mu_1)(u_1-a_1)\dots(u_1-a_n)(u_1-u_2)\dots(u_1-u_p)$; on aura donc immédiatement la valeur de A_1; A_1 étant déterminé de cette façon, si dans l'égalité

$$F(u) = \Psi_1(u)$$

on fait passer dans le second membre le terme tout connu en A_1, on pourra supprimer le facteur commun $u-u_1$; puis, faisant de nouveau $u=u_1$, on aura une équation qui donnera A_2, et ainsi de suite. On déterminera de la même manière les coefficients B_i, C_i, ... L_i. Puisqu'on suppose que les nombres λ ne sont pas des nombres entiers, le calcul pourra toujours être continué et donnera pour ces coefficients des valeurs finies. Quant à M, on l'obtiendra, en donnant à u une valeur particulière différente de a_1, a_2 .... a_n, u_1, ... u_p et en égalant les deux membres, par exemple en égalant les coefficients du terme en u^{n+p-1} dans $F(u)$ et dans $\Psi_1(u)$. On trouvera bien ainsi pour ces coefficients des fonctions rationnelles de u_1, u_2, ... u_p. Remarquons de plus que A_1, B_1, C_1, ... L_1 seront toujours différents de zéro.

Au moyen de relations de la forme précédente, on pourra exprimer toutes les dérivées partielles de y au moyen de la fonction elle-même et de $n+p-2$ de ses dérivées par des formules linéaires et homogènes, où les coefficients sont des fonctions rationnelles de u_1, u_2, ... u_p. Je prendrai par exemple les $n+p-2$ dérivées

$$\frac{\partial y}{\partial u_1},\ \frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2},\ \dots\ \frac{\partial^{n-1} y}{\partial u_1^{n-1}},\ \frac{\partial y}{\partial u_2},\ \dots\ \frac{\partial y}{\partial u_p}.$$

Les nombres positifs $\mu_1, \mu_2, \ldots. \mu_p$ qui figurent dans la relation

$$\Pi(y) = 0$$

sont assujettis à la seule condition

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots. + \mu_p = n + p - 1$$

Si l'on prend $\mu_1 = n$, $\mu_2 = \mu_3 = \ldots. = \mu_p = 1$, on aura une égalité d'où l'on pourra tirer $\frac{\partial^n y}{\partial u_1^n}$ en fonction des dérivées précédentes. Prenons ensuite

$$\mu_1 = n + 1, \qquad \mu_2 = \mu_3 = \ldots. = \mu_{p-1} = 1, \qquad \mu_p = 0,$$

on aura une relation d'où l'on pourra tirer $\frac{\partial^{n+1} y}{\partial u_1^{n+1}}$ exprimé au moyen de $\frac{\partial^n y}{\partial u_1^n}$ et des dérivées choisies. En se servant de la relation précédente, on pourra l'amener à ne contenir que les dérivées choisies. En continuant de proche en proche, on exprimera de la façon annoncée les dérivées successives

$$\frac{\partial^n y}{\partial u_1^n}, \ldots. \frac{\partial^{n+p-1} y}{\partial u_1^{n+p-1}}.$$

Faisons d'autre part

$$\mu_1 = n - 1, \qquad \mu_2 = 2, \qquad \mu_3 = \mu_4 = \ldots. = \mu_p = 1;$$

on obtient $\frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}$; si l'on fait ensuite

$$\mu_1 = n - 2, \qquad \mu_2 = 3, \qquad \mu_3 = \mu_4 = \ldots. = \mu_p = 1,$$

on aura $\frac{\partial^3 y}{\partial u_1^3}$, que l'on pourra ramener, au moyen de la formule obtenue auparavant, à ne contenir que les dérivées choisies. En continuant de la sorte et en opérant de la même manière pour les autres dérivées partielles, on voit qu'on pourra exprimer comme il a été dit toutes les dérivées partielles jusqu'à celles d'ordre $n + p - 1$, où les dérivations sont effectuées par rapport à la même variable. La propriété s'étend immédiatement aux dérivées d'un ordre quelconque, mais cela n'est pas essentiel pour notre objet.

Considérons maintenant les dérivées partielles du second ordre telles que $\frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_2}$; on a

$$\frac{\partial y}{\partial u_1} = -(\lambda_1 - 1)\int_{a_i}^{a_h}(u - a_1)^{b_1-1}\ldots\ldots(u - a_n)^{b_n-1}(u - u_1)^{\lambda_1-2}\ldots\ldots(u - u_p)^{\lambda_p-1}du,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u_2} = -(\lambda_2 - 1)\int_{a_i}^{a_h}(u - a_1)^{b_1-1}\ldots(u - a_n)^{b_n-1}(u - u_1)^{\lambda_1-1}(u - u_2)^{\lambda_2-2}\ldots(u - u_p)^{\lambda_p-1}du,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_2} = (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)\int_{a_i}^{a_h}(u - a_1)^{b_1-1}\ldots\ldots(u - a_n)^{b_n-1}(u - u_1)^{\lambda_1-2}(u - u_2)^{\lambda_2-2}\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots(u - u_p)^{\lambda_p-1}du.$$

Si P, Q désignent deux fonctions de u_1, u_2, ... u_p, on aura

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_2} - P\frac{\partial y}{\partial u_1} - Q\frac{\partial y}{\partial u_2} = \int_{a_i}^{a_h}(u - a_1)^{b_1-1}\ldots(u - a_n)^{b_n-1}(u - u_1)^{\lambda_1-2}(u - u_2)^{\lambda_2-2}\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots(u - u_p)^{\lambda_p-1}F(u)\,du,$$

où

$$F(u) = (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1) + (\lambda_1 - 1)(u - u_2)P + (\lambda_2 - 1)(u - u_1)Q;$$

$F(u)$ est une fonction entière et du premier degré de u, qui sera identiquement nulle si l'on prend

$$P = \frac{\lambda_2 - 1}{u_2 - u_1}, \quad Q = \frac{\lambda_1 - 1}{u_1 - u_2}.$$

On a donc la relation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\lambda_2 - 1}{u_2 - u_1}\frac{\partial y}{\partial u_1} + \frac{\lambda_1 - 1}{u_1 - u_2}\frac{\partial y}{\partial u_2},$$

et d'un manière générale

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_h} = \frac{\lambda_h - 1}{u_h - u_i}\frac{\partial y}{\partial u_i} + \frac{\lambda_i - 1}{u_i - u_h}\frac{\partial y}{\partial u_h}.$$

Chaque dérivée partielle de y étant une fonction de même nature que la fonction y elle-même, en général une dérivée partielle telle que

$$\frac{\partial^m y}{\partial u_1^{a_1} \dots \partial u_i^{a_i}\, \partial u_h^{a_h} \dots}$$

s'exprimera au moyen des deux dérivées partielles d'ordre moindre

$$\frac{\partial^{m-1} y}{\partial u_1^{a_1} \dots \partial u_i^{a_i-1}\, \partial u_h^{a_h} \dots}, \qquad \frac{\partial^{m-1} y}{\partial u_1^{a_1} \dots \partial u_i^{a_i}\, \partial u_h^{a_h-1} \dots}$$

En appliquant la formule de réduction autant de fois qu'il est nécessaire, on voit que chaque dérivée partielle où figurent des dérivations par rapport à des variables différentes s'exprime linéairement au moyen des dérivées partielles où les dérivations sont prises par rapport à la même variable. Finalement, toutes les dérivées partielles de la fonction y s'expriment au moyen de

$$y, \frac{\partial y}{\partial u_1}, \dots \frac{\partial^{n-1} y}{\partial u_1^{n-1}}, \frac{\partial y}{\partial u_2}, \dots \frac{\partial y}{\partial u_p},$$

par des formules linéaires et homogènes, où les coefficients sont des fonctions rationnelles de $u_1, u_2, \dots u_p$.

(22). Regardons maintenant y comme fonction de la seule variable x; on aura

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial y}{\partial u_i} \frac{du_i}{dx},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial^2 y}{\partial u_i^2} \left(\frac{du_i}{dx}\right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{h=1}^{h=p} \frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_h} \frac{du_i}{dx} \frac{du_h}{dx} + \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial y}{\partial u_i} \frac{d^2 u_i}{dx^2};$$

. . . .

En général $\frac{d^m y}{dx^m}$ s'exprime par des formules linéaires et homogènes au moyen des dérivées partielles de y par rapport à $u_1, u_2, \dots u_p$, les coefficients étant des fonctions rationnelles des racines u_i et de leurs dérivées.

En se servant des relations établies précédemment, on pourra amener les seconds membres à ne contenir que

$$\frac{\partial y}{\partial u_1}, \ldots \frac{\partial^{n-1} y}{\partial u_1^{n-1}}, \frac{\partial y}{\partial u_2}, \ldots \frac{\partial y}{\partial u_p},$$

et les formules ne cesseront pas d'être linéaires et homogènes. Si l'on suppose les dérivées

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n+p-1} y}{dx^{n+p-1}},$$

exprimées de cette façon, on pourra entre ces $n+p-1$ équations éliminer les $n+p-2$ dérivées partielles intermédiaires, et on sera conduit à une relation linéaire et homogène entre

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n+p-1} y}{dx^{n+p-1}}.$$

C'est l'équation que l'on voulait obtenir.

Les coefficients de cette équation seront des fonctions rationnelles de $u_1, u_2, \ldots u_p$ et des dérivées de ces fonctions jusqu'à celles d'ordre $n+p-1$. Ces racines se partagent en un certain nombre de groupes, chaque groupe comprenant les racines qui sont données par une même équation à coefficients uniformes, telle que $\varphi_i(x, u) = 0$. L'exposant λ étant le même pour toutes les racines d'un même groupe, il est clair que les coefficients de l'équation obtenue seront des fonctions symétriques de ces racines et de leurs dérivées; ce seront par conséquent des fonctions uniformes de la variable x, que l'on pourra former connaissant les diverses équations,

$$\varphi_1(x, u) = 0, \qquad \varphi_2(x, u) = 0, \ldots \varphi_q(x, u) = 0.$$

Si les coefficients de ces diverses équations sont des fonctions rationnelles, on voit, d'après la manière même dont on forme l'équation différentielle, que ses coefficients seront aussi des fonctions rationnelles de la variable.

III.

(23). Les résultats obtenus dans la première partie de ce travail peuvent être généralisés de différentes manières. Une extension qui s'offre d'elle-même est la suivante. Supposons que z soit une fonction de la variable u, contenant en outre deux paramètres arbitraires x et y, et conservons les autres hypothèses que nous avons admises relativement à cette fonction. Quand on attribue à x et à y des valeurs particulières x_1, y_1, z devient une fonction de la seule variable u, admettant les m points singuliers $v_1, v_2, \ldots v_m$. Si l'intégrale $\int_{v_i}^{v_h} z\,du$ a un sens, elle définit une fonction des deux variables indépendantes x et y, que l'on pourra continuer tant que ces variables resteront comprises à l'intérieur de certains contours. Admettons que toutes les intégrales de la même forme aient un sens tant que, parmi les m points $v_1, v_2, \ldots v_m$, il n'y en a pas trois en ligne droite. L'intégrale $(v_i v_h)$ par exemple définit une fonction de x et de y qui est représentée par le même symbole tant que ces variables ne prennent pas un couple de valeurs telles qu'un troisième des points v soit situé sur la ligne $v_i v_h$. Par un procédé absolument identique à celui qui a été employé dans la première partie, on reconnaît que, lorsque cette circonstance se présente, la continuation analytique de la fonction se trouve représentée par une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des intégrales de la même forme se rapportant à la même fonction.

Les conséquences sont analogues à celles qui ont été exposées plus haut. Les fonctions représentées par ces intégrales définies vérifient un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, analogues à ceux qui ont été considérés par M^r^ Appell dans son intéressant mémoire sur les fonctions hypergéométriques de deux variables (*Journal de Résal, tome VIII 3^ème^ Série*). Entre une de ces intégrales et $m - 1$ de ses dérivées partielles, il existe une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions uniformes de x et de y.

Les intégrales définies telles que

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{b_3-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent l'une des quantités 0, 1, x, y, ∞, intégrales qui ont été étudiées par M^r Picard (*Annales de l'Ecole Normale. 1881*), fournissent un exemple intéressant. On voit aussi comment les résultats peuvent être étendus indéfiniment en augmentant le nombre des variables indépendantes.

(24). Mais c'est en me plaçant à un autre point de vue que je me propose de généraliser le théorème fondamental. Soit $z = f_1(x, u)$ une fonction analytique multiforme des deux variables indépendantes x et u, jouissant des propriétés suivantes. Entre $n+1$ déterminations de la fonction il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Si on attribue à x une valeur particulière x_1, $f_1(x_1, u)$ devient une fonction de la seule variable u, holomorphe pour toute valeur de u, sauf pour m valeurs particulières $v_1, v_2, \ldots v_m$. Supposons que toutes les intégrales définies

$$\int_{v_i}^{v_h} f_1(x, u)\,du$$

prises suivant une des lignes droites joignant deux points critiques, et où l'on adopte pour $f_1(x, u)$ une quelconque de ses déterminations, ait un sens tant que, parmi les points v, il n'y en a pas trois en ligne droite. L'intégrale $(v_i v_h)$ par exemple, quand on aura choisi la valeur de z que l'on prend dans l'intégration, représentera une fonction de la variable x que l'on pourra continuer sans aucune ambiguïté tant qu'aucun des autres points v ne viendra à traverser la ligne droite $v_i v_h$. On pourra donc établir un système de coupures divisant le plan en un nombre fini ou infini de régions distinctes, de telle sorte qu'à l'intérieur de l'une quelconque de ces régions toutes les intégrales précédentes aient un sens et représentent des fonctions analytiques de la variable x.

Je remarque d'autre part qu'à cause des hypothèses faites sur $f_1(x, u)$, toutes les intégrales prises suivant une même ligne droite se réduisent à n d'entre elles. Si l'on applique ensuite le théorème de Cauchy au contour de tous les polygones, ayant les points v pour sommets, à l'intérieur desquels $f(x, u)$ est holomorphe, on obtient un certain nombre de nouvelles équations linéaires entre ces intégrales. En se reportant au procédé développé au n° 8, on reconnaît tout de suite que toutes ces intégrales s'expriment par des formules linéaires et homogènes à coefficients constants au moyen de $n(m - 1)$ d'entre elles.

Faisons décrire à la variable x un chemin quelconque, assujetti à la seule condition que les m valeurs $v_1, v_2, \ldots v_m$ restent distinctes et finies. Les intégrales conservent un sens tant que trois des points v ne sont pas en ligne droite. Lorsque une ligne droite, telle que $v_i v_h$, viendra à être traversée par un autre des points v, v_k par exemple, l'intégrale définie $(v_i v_h)$ cessera d'avoir un sens, mais si on la remplace par la somme $(v_i v_k) + (v_k v_h)$, chacune de ces intégrales conserve un sens et la continuation de $(v_i v_h)$ se trouve représentée par une combinaison linéaire d'intégrales de la même nature.

En définitive, on est conduit à un système de fonctions analytiques telles que les intégrales $(v_i v_h)$ suffisent à les exprimer complètement dans une partie quelconque du plan. Si donc on fait décrire à la variable un contour fermé, ne passant par aucun des points pour lesquels les valeurs $v_1, v_2, \ldots v_m$ cessent d'être distinctes ou finies, les valeurs finales de nos fonctions seront liées aux valeurs initiales par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants. Comme elles se réduisent à $n(m - 1)$ d'entre elles, on a le théorème suivant:

Théorème III. Toutes les intégrales définies $(v_i v_h)$, considérées comme fonctions de x, satisfont à une équation différentielle linéaire d'ordre $n(m - 1)$ à coefficients uniformes.

Ce théorème donnerait lieu à une série de remarques, analogues à celles qui ont été développées dans la première partie. Le lecteur y suppléera bien aisément, ainsi qu'aux détails de la démonstration que je n'ai fait qu'indiquer, pour éviter de trop nombreuses répétitions.

Cette démonstration serait illusoire si toutes les intégrales définies, qui interviennent dans le raisonnement, ne pouvaient avoir un sens en même temps. Mais il est facile de s'assurer qu'il n'en est pas ainsi. Quand on attribue à x une valeur particulière x_1, z devient une fonction satisfaisant à une équation linéaire d'ordre n à coefficients uniformes, admettant pour points singuliers à distance finie les points $v_1, v_2, \ldots v_m$. Supposons que cette équation ait toutes ses intégrales régulières pour

$u = v_i$ et pour $u = \infty$. Soit r une racine de l'une des équations déterminantes fondamentales relatives aux points critiques $v_1, v_2, \ldots . v_m$ et r' une des racines de l'équation relative au point $u = \infty$; entre ces racines on a la relation

$$\sum r + \sum r' = \frac{(m-1)n(n-1)}{2}$$

Pour que toutes les intégrales définies

$$\int_{v_i}^{v_h} z\, du, \qquad \int_{v_i}^{\infty} z\, du,$$

aient un sens, il faudra que l'on ait, pour toutes ces racines

$$1 + r > 0,$$
$$r' > 1,$$

et par conséquent

$$nm + \sum r + \sum r' > n,$$

condition compatible avec la précédente.

(25). On a vu, dans la première partie, que l'équation différentielle d'ordre $m - 1$ n'était pas irréductible toutes les fois que la fonction $f(x, u)$ était uniforme dans le voisinage de certains des points v. Tout pareillement, si certaines branches de $f_1(x, u)$ sont holomorphes pour quelques-uns de ces points, on pourra trouver un système d'intégrales de la forme $(v_i v_h)$ qui vérifient une équation linéaire à coefficients uniformes d'un ordre inférieur à $n(m-1)$. J'examine plus loin deux exemples où cette particularité se présente et où la cause de cette réduction se trouve mise en évidence.

On peut encore généraliser le théorème III en supposant que la fonction $f_1(x, u)$, au lieu de dépendre d'un seul paramètre x, contient un nombre quelconque de paramètres variables $x_1, x_2, \ldots . x_p$ et en conservant les autres hypothèses. Les intégrales $(v_i v_h)$ représentent alors des fonctions des p variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots . x_p$, vérifiant un système d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles dont les coefficients sont des fonctions uniformes de ces variables.

(26). L'application du théorème précédent conduit à des propriétés intéressantes de certaines intégrales multiples et en particulier de certaines intégrales doubles, dont quelques-unes s'étaient déjà présentées dans les recherches de Mr Appell (loc. cit. page 196). D'une manière générale soit $f(x, u, v)$ une fonction de trois variables indépendantes x, u, v, jouissant de propriétés analogues à celles de $f(x, u)$, dont il a été question dans la première partie. Toutes les déterminations de la fonction s'obtiennent en multipliant l'une d'elles par certaines constantes; si l'on attribue à x et à v des valeurs particulières, $f(x, u, v)$ considérée comme fonction de u seulement admet un nombre *limité* n de valeurs singulières, $v_1, v_2, \ldots v_n$. Supposons que toutes les intégrales $(v_i v_h)$ aient un sens; d'après le théorème I, ces intégrales envisagées comme fonctions de v satisfont à une équation différentielle linéaire d'ordre $n - 1$, dont les coefficients sont des fonctions uniformes de v et dépendent en outre du paramètre x. Admettons de plus que les points critiques de cette équation sont en nombre fini m, quel que soit x, et appelons-les $w_1, w_2, \ldots w_m$. Les intégrales définies $(v_i v_h)$ sont des branches d'une même fonction analytique des deux variables x et v, possédant précisément les propriétés de la fonction dont il est question dans le théorème III. Soit $\varphi(x, v)$ cette fonction; si les diverses intégrales

$$\int_{w_i}^{w_h'} \varphi(x, v)\, dv$$

ont un sens, ce théorème nous apprend qu'elles vérifient une équation différentielle linéaire d'ordre $(n - 1)(m - 1)$ à coefficients uniformes. Cette équation admettra donc comme solutions un certain nombre d'intégrales doubles telles que

$$\int_{w_i}^{w_h} dv \int_{v_i}^{v_h} f(x, u, v)\, du$$

Il est bien aisé de voir comment la proposition peut être étendue à des intégrales triples ou à des intégrales multiples d'un ordre quelconque en augmentant le nombre des variables $u, v, w \ldots$ etc., et comment on peut aussi l'étendre en supposant que la fonction sous le signe $\int$ dépend de plusieurs paramètres $x_1, x_2, \ldots x_p$.

Je n'ai pu parvenir à un procédé général pour former l'équation différentielle dans le cas d'une intégrale multiple, comme dans le cas d'une intégrale simple. Dans les exemples que j'examine ci-après on n'a pas besoin de former cette équation. Admettons que l'on ait reconnu qu'un certain nombre d'intégrales doubles de la forme précédente satisfont à une même équation linéaire d'ordre p à coefficients uniformes; si, par un moyen quelconque, on est parvenu à former une équation linéaire de cet ordre, ayant ses coefficients uniformes, qui est vérifiée par l'une de ces intégrales doubles, on pourra affirmer qu'elle est vérifiée par toutes les autres, pourvu toutefois que cette équation soit irréductible.

(27). Soit $f(x, u, v)$ l'expression suivante:

$$f(x, u, v) = u^{a_1-1} v^{a_2-1} (1-u)^{b_1-a_1-1} (1-v)^{b_2-a_2-1} (1-xuv)^{-a_3}$$

Si l'on regarde x et v comme constants, cette expression est une fonction de la seule variable u admettant les points singuliers

$$u = 0, \qquad u = 1, \qquad u = \frac{1}{vx}, \qquad u = \infty;$$

d'après le théorème I, chacune des intégrales

$$\omega = \int_g^h f(x, u, v)\, du,$$

g et h désignant l'une des quantités $0, 1, \frac{1}{vx}, \infty$, pourvu qu'elle ait un sens, regardée comme fonction de v, satisfait à une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes. Nous supposerons que les parties réelles des quantités a_1, $b_1 - a_1$, $1 - a_3$, $a_3 + 1 - b_1$ sont positives, de façon que toutes ces intégrales aient un sens. On a par exemple

$$\int_0^1 f(x, u, v)\, du = Cv^{a_2-1} (1-v)^{b_2-a_2-1} F(a_3, a_1, b_1, vx)$$

Chacune de ces intégrales définies est donc une branche d'une fonction analytique multiforme des 2 variables v et x, telle qu'entre trois déterminations il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants. De plus, quand on regarde x comme constant, chaque branche de la fonction est holomorphe pour toute valeur de v sauf pour $v = 0$, $v = 1$, $v = \frac{1}{x}$, $v = \infty$. Les exposants de discontinuité relatifs à ces différents points critiques, sont respectivement

$$\begin{array}{lll} \text{pour } v = 0 \ \ldots\ldots & a_2 - 1, & a_2 - b_1, \\ \text{pour } v = 1 \ \ldots\ldots & b_2 - a_2, & b_2 - a_2 - 1, \\ \text{pour } v = \frac{1}{x} \ \ldots\ldots & 0, & b_1 - a_1 - a_3, \\ \text{pour } v = \infty \ \ldots\ldots & a_1 + 2 - b_2, & a_3 + 2 - b_2 ; \end{array}$$

supposons que les parties réelles des quantités

$$a_2, \quad a_2 + 1 - b_1, \quad b_2 + 1 - a_2, \quad b_1 + 1 - a_1 - a_3, \quad a_1 + 1 - b_2, \quad a_3 + 1 - b_2,$$

soient positives, conditions compatibles avec les précédentes, comme il est aisé de s'en assurer. Si ω désigne l'une des branches de la fonction que nous venons de définir, toutes les intégrales

$$y = \int_{g'}^{h'} \omega\, du,$$

où g et h désignent l'une des quantités 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞, auront un sens et devront satisfaire à une équation linéaire à coefficients uniformes, quand on les regarde comme des fonctions de x. La règle générale donne 4 pour l'ordre de cette équation; mais on va voir qu'en laissant de côté quelques-unes de ces intégrales définies les intégrales restantes vérifient une équation du 3ème ordre, ayant aussi ses coefficients uniformes.

Les fonctions $\omega = \int_g^h f(x, u, v)\, du$, considérées comme fonctions de v, vérifient une équation linéaire du second ordre à coefficients rationnels, admettant comme points singuliers les points 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞. Soit $\varphi(\omega) = 0$ cette équation. A partir de chacun des points 0, 1, $\frac{1}{x}$, tirons une ligne droite indéfinie; si nous considérons ces trois lignes comme des coupures, les diverses solutions de l'équation

$$\varphi(\omega) = 0$$

seront des fonctions uniformes de v dans toute l'étendue du plan. Désignons par ω_1 et ω_2 celles de ces solutions qui se comportent d'une manière simple dans le voisinage du point $v = \frac{1}{x}$; l'une d'elles ω_1 est holomorphe dans le voisinage de ce point. On a en effet, C désignant un facteur constant

$$\omega_1 = \int_{-\infty}^{0} f(x,\ u,\ v)\, du = Cv^{a_2-1}(1-v)^{b_2-a_2-1} F(a_3,\ a_1,\ a_1 + a_3 + 1 - b_1,\ 1 - vx)$$

La seconde ω_2 est représentée par l'intégrale

$$\int_{1}^{\frac{1}{vx}} f(x,\ u,\ v)\, du =$$

$$= C'v^{a_2-1}(1-v)^{b_2-a_2-1}(1-vx)^{b_1-a_1-a_3} F(b_1 - a_3,\ b_1 - a_1,\ b_1 + 1 - a_1 - a_3,\ 1 - vx);$$

elle se reproduit multipliée par $e^{\pm 2\pi i(b_1-a_1-a_3)}$ lorsque v décrit un petit lacet autour du point $\frac{1}{x}$. Autour des points 0 et 1 comme centres, avec des rayons très-petits r, r' décrivons deux circonférences et décrivons en outre une circonférence d'un très-grand rayon ayant pour centre l'origine (fig. 12). Envisageons les deux contours fermés $ama'LML'b'nba$ et $am'a'LM'L'b'n'ba$, formés par des arcs de ces circonférences, la portion ab de l'axe réel et les lignes $a'L$ et $b'L'$, infiniment voisines de cet axe et situées au-dessus.

Toutes les intégrales de l'équation $\varphi(\omega) = 0$ sont holomorphes à l'intérieur du premier contour et l'application du théorème de Cauchy à l'une quelconque de ces intégrales donne la relation

$$(ama') + (a'L) + (LML') + (L'b') + (b'nb) + (ba) = 0$$

Faisons augmenter indéfiniment le rayon R et décroître les rayons r, r'; en appliquant successivement la relation précédente aux intégrales ω_1, ω_2, on parvient aux deux relations

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \omega_1\, dv + \int_{0}^{1} \omega_1\, dv + \int_{1}^{+\infty} \omega_1\, dv = 0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \omega_2\, dv + \int_{0}^{1} \omega_2\, dv + \int_{1}^{+\infty} \omega_2\, dv = 0 \end{cases}$$

Je remarque ensuite que l'intégrale désignée par ω_1 est holomorphe à l'intérieur du contour $am'a'LM'L'b'n'a$; quand on part du point a avec cette intégrale ω_1, on parvient au point a', après avoir décrit l'arc $am'a'$ qui traverse la coupure $-\infty$ —— 0 avec une fonction qui sera représentée par $C\omega_1 + C'\omega_2$, C et C' étant des constantes; on arrivera de même au point b' avec une fonction telle que $C_1\omega_1 + C_1'\omega_2$; de sorte que l'application du théorème de CAUCHY à ce nouveau contour nous donne une nouvelle relation telle que

$$(2)\qquad C\int_{-\infty}^{0} \omega_1\, dv + \int_{0}^{1} \omega_1\, dv + C_1\int_{1}^{+\infty} \omega_1\, dv + C'\int_{-\infty}^{0} \omega_2\, dv + C'_1\int_{1}^{+\infty} \omega_2\, dv = 0$$

Les relations (1) et (2) montrent que les six intégrales considérées s'expriment linéairement au moyen de trois d'entre elles; et il en serait de même si le point $\frac{1}{x}$ était situé dans la partie supérieure du plan.

Si nous faisons décrire à la variable x un chemin fermé quelconque ne coupant pas l'axe réel, les fonctions ω_1, ω_2 restent des fonctions continues de v pour toutes les valeurs réelles de v, sauf pour les valeurs 0 et 1. Les six intégrales conservent un sens; mais ω_1, ω_2 peuvent être remplacées par des combinaisons linéaires telles que

$$\lambda\omega_1 + \mu\omega_2,$$
$$\lambda'\omega_1 + \mu'\omega_2$$

de façon que les valeurs finales de nos intégrales seront liées aux valeurs initiales par des formules linéaires et homogènes à coefficients constants. Supposons ensuite que le point $\frac{1}{x}$ vienne à traverser l'axe réel, par exemple la ligne 0 —— 1; l'intégrale $\int_0^1 \omega_1\, dv$ conserve un sens, puisque ω_1 est holomorphe pour $v = \frac{1}{x}$. Quant à l'intégrale $\int_0^1 \omega_2\, dv$, on la remplacera par la somme des deux intégrales prise en signe contraire

$$\int_{-\infty}^{0} \omega_2\, dv, \quad \int_{1}^{+\infty} \omega_2\, dv,$$

dont chacune conserve un sens, et l'on voit que la continuation analytique de la fonction est représentée par une combinaison linéaire des mêmes intégrales. On opérerait de la même manière, si le point $\frac{1}{x}$ traversait la coupure $-\infty$ —— 0, ou la coupure 1 —— $+\infty$.

En définitive, les fonctions représentées par ces six intégrales définies doivent vérifier une même équation linéaire du troisième ordre à coefficients uniformes, admettant comme points critiques à distance finie les points $x = 0$, $x = 1$. Soit ω une fonction de x et de v, de la forme $C\omega_1 + C'\omega_2$, où C et C' sont des constantes indépendantes de x et de v; toutes les intégrales telles que

$$\int_{-\infty}^{0} \omega dv, \quad \int_{0}^{1} \omega dv, \quad \int_{1}^{+\infty} \omega dv,$$

appartiendront à la même équation. On connaît six fonctions ω qui s'expriment par une intégrale simple; cela nous fera *dix-huit* intégrales doubles vérifiant la même équation. Elles sont toutes comprises dans la formule

$$y = \int_{g'}^{h'} dv \int_{g}^{h} f(x, u, v)\, du, \tag{3}$$

g et h désignant l'une des quantités 0, 1, $\frac{1}{vx}$, ∞, g' et h' l'une des quantités 0, 1, ∞.

A ces dix-huit intégrales on peut en joindre trois autres de la manière suivante. Entourons le point $\frac{1}{x}$ d'un cercle de rayon infiniment petit et considérons les trois contours $abn'clc'm'a$, $L'b'n'cdNM''L'$, $La'm'c'd'N'M'L$. La fonction ω_2 de v est holomorphe à l'intérieur de ces trois contours. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy à chacun d'eux et, en remarquant qu'aux deux bords dN, $d'N'$ infiniment voisins de la coupure $\frac{1}{x}$ —— ∞, ω_2 prend des valeurs dont le rapport est un nombre K différent de l'unité, on obtient les relations suivantes:

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\omega_2 dv + \int_{-\infty}^{0}\omega_2 dv + \int_{0}^{\frac{1}{x}}\omega_2 dv = 0,$$

$$\int_{0}^{1}\omega_2 dv + \int_{1}^{\frac{1}{x}}\omega_2 dv + \int_{\frac{1}{x}}^{0}\omega_2 dv = 0,$$

$$\int_{1}^{\infty}\omega_2 dv + \int_{\frac{1}{x}}^{1}\omega_2 dv + K\int_{\infty}^{\frac{1}{x}}\omega_2 dv = 0,$$

qui, ajoutées membre à membre, donnent

$$(1-K)\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\omega_2 dv + \int_{-\infty}^{0}\omega_2 dv + \int_{0}^{1}\omega_2 dv + \int_{1}^{+\infty}\omega_2 dv = 0$$

De cette dernière on tire

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\omega_2 dv,$$

et, en portant dans les précédentes sa valeur, on en déduit successivement

$$\int_{0}^{\frac{1}{x}}\omega_2 dv, \quad \int_{1}^{\frac{1}{x}}\omega_2 dv$$

On voit que ces trois nouvelles fonctions s'expriment linéairement au moyen des premières et, par suite, qu'elles vérifient la même équation. La fonction ω_2 est représentée par l'intégrale simple

$$\omega_2 = \int_{1}^{\frac{1}{vx}} f(x,\ u,\ v)\, du;$$

on aura donc trois nouvelles intégrales doubles comprises dans la formule

$$y = \int_g^{\frac{1}{x}} dv \int_1^{\frac{1}{vx}} f(x, u, v)\, du, \tag{4}$$

g désignant l'une des quantités 0, 1, ∞.

Je considère maintenant en particulier l'intégrale double

$$y = \int_0^1 \int_0^1 u^{a_1-1} v^{a_2-1} (1-u)^{b_1-a_1-1} (1-v)^{b_2-a_2-1} (1-xuv)^{-a_3}\, du\, dv;$$

si on la développe en série, on trouve

$$y = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(b_1-a_1)\Gamma(b_2-a_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)} F(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, x),$$

où l'on a posé

$$F(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a_1 \,.\, m)(a_2 \,.\, m)(a_3 \,.\, m)}{(1 \,.\, m)(b_1 \,.\, m)(b_2 \,.\, m)} x^m,$$

le symbole $(\lambda \,.\, m)$ désignant le produit $\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+m-1)$. Cette intégrale représente, comme on voit, une série hypergéométrique d'ordre supérieur,[1] et cette série satisfait, comme il est facile de s'en assurer, à l'équation différentielle du 3ème ordre

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2(x-1)\frac{d^3y}{dx^3} + [(3+a_1+a_2+a_3)x - (1+b_1+b_2)]\, x\frac{d^2y}{dx^2} \\ & + \{(1+a_1+a_2+a_3+a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)x - b_1b_2\}\frac{dy}{dx} + a_1a_2a_3y = 0 \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, si l'on suppose les quantités a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 absolument quelconques, cette équation est irréductible, comme il est facile de le montrer en s'appuyant sur la forme des intégrales dans le voisinage des valeurs 0, 1, ∞. Il en résulte que l'équation (5) est vérifiée par chacune des intégrales doubles (3) et (4); et la proposition, démontrée en supposant

---

[1] Thomæ. Mathematische Annalen, II Band, et Journal de Crelle, tome 87.

que toutes ces intégrales aient un sens, s'étend d'elle-même au cas où certaines d'entre elles cesseraient d'avoir un sens.

A cause de la symétrie de $f(x, u, v)$ en u et v, l'équation (5) sera aussi vérifiée par chacune des intégrales doubles

$$y = \int_{g'}^{h'} du \int_{g}^{h} f(x, u, v)\, dv, \tag{3'}$$

où l'on prend pour g et h l'une des quantités $0,\ 1,\ \frac{1}{ux},\ \infty$ et pour g' et h' l'une des quantités $0,\ 1,\ \infty$. Elle est aussi vérifiée par chacune des intégrales doubles

$$y = \int_{g}^{\frac{1}{x}} du \int_{1}^{\frac{1}{ux}} f(x, u, v)\, dv, \tag{4'}$$

où g désigne l'une des quantités $0,\ 1,\ \infty$.

Prenons en particulier l'intégrale double

$$y = \int_0^1 dv \int_{\frac{1}{xv}}^{\infty} f(x, u, v)\, du;$$

posons-y: $u = \frac{1}{xvt}$, elle devient:

$$y = x^{1-b_1} \int_0^1 \int_0^1 t^{a_3-b_1} v^{a_2-b_1} (1-t)^{-a_3} (1-v)^{b_2-a_2-1} (1-xvt)^{-(a_1+1-b_1)} dt$$

La nouvelle intégrale est de la même forme que la première; l'équation (5) admet donc la solution

$$y = x^{1-b_1} F(a_1 + 1 - b_1,\ a_2 + 1 - b_1,\ a_3 + 1 - b_1,\ b_2 + 1 - b_1,\ 2 - b_1,\ x)$$

Par raison de symétrie, elle admet aussi la solution

$$y = x^{1-b_2} F(a_1 + 1 - b_2,\ a_2 + 1 - b_2,\ a_3 + 1 - b_2,\ 2 - b_2,\ b_1 + 1 - b_2,\ x),$$

qui est représentée par l'intégrale double

$$y = \int_0^1 du \int_{\frac{1}{xu}}^{\infty} f(x, u, v)\, dv$$

Prenons encore l'intégrale double

$$y = \int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty} f(x,\ u,\ v)\, du dv;$$

en posant $u = \frac{1}{t}$, $v = \frac{1}{w}$, elle devient

$$y = x^{-a_3}\int_0^1\int_0^1 t^{a_3-b_1}\, w^{a_3-b_2}\,(1-t)^{b_1-a_1-1}\,(1-w)^{b_2-a_2-1}\left(1-\frac{tw}{x}\right)^{-a_3} dt dw$$

L'équation (5) admet donc l'intégrale

$$y = x^{-a_3}\, F\left(a_3+1-b_1,\ a_3+1-b_2,\ a_3,\ a_3+1-a_1,\ a_3+1-a_2,\ \frac{1}{x}\right)$$

Par raison de symétrie, elle admet aussi les deux intégrales

$$y = x^{-a_1}\, F\left(a_1,\ a_1+1-b_1,\ a_1+1-b_2,\ a_1+1-a_2,\ a_1+1-a_3,\ \frac{1}{x}\right),$$

$$y = x^{-a_2}\, F\left(a_2+1-b_1,\ a_2,\ a_2+1-b_2,\ a_2+1-a_1,\ a_2+1-a_3,\ \frac{1}{x}\right)$$

Ces dernières sont d'ailleurs représentées par les intégrales doubles

$$\int_1^{\infty} dv \int_0^{\frac{1}{xv}} f(x,\ u,\ v)\, du, \qquad \int_1^{\infty} du \int_1^{\frac{1}{xu}} f(x,\ u,\ v)\, dv.$$

(28). Soit

$$\varphi(x,\ y,\ u,\ v) = u^{\beta-1}\, v^{\beta'-1}\,(1-u)^{\gamma-\beta-1}\,(1-v)^{\gamma'-\beta'-1}\,(1-ux-vy)^{-\alpha}$$

Chacune des intégrales simples

$$\omega = \int_g^h \varphi(x,\ y,\ u,\ v)\, du,$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, $\frac{1-vy}{x}$, ∞, pourvu qu'elle ait un sens, considerée comme fonction de v, satisfait à une équation linéaire du second ordre à coefficients rationnels, ayant pour points critiques à distance finie les points

$$0,\ 1,\ \frac{1}{y},\ \frac{1-x}{y}.$$

Je suppose, pour fixer les idées, que les parties réelles des quantités β, $\gamma-\beta$, $1-\alpha$, $\alpha+1-\gamma$ sont positives, de façon que toutes ces intégrales aient un sens. On a par exemple

$$\int_0^1 \varphi(x,\ y,\ u,\ v)\, du = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\, v^{\beta'-1}(1-v)^{\gamma'-\beta'-1}(1-vy)^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \frac{x}{1-vy}\right),$$

F désignant la série hypergéométrique de GAUSS. Ces diverses intégrales sont des branches d'une même fonction multiforme jouissant des propriétés nécessaires pour qu'on puisse leur appliquer le théorème III. Regardons pour un moment x et y comme fixes, et soit $\Psi(\omega)=0$ l'équation différentielle dont il vient d'être question. Imaginons un système de coupures formé par les droites $-\infty$ —— 0, 1 —— $+\infty$, et par des lignes droites indéfinies partant des points $\frac{1}{y}$ et $\frac{1-x}{y}$. Si le chemin suivi par la variable v est assujetti à ne rencontrer aucune de ces lignes, toutes les intégrales de l'équation $\Psi(\omega)=0$ sont des fonctions uniformes de v dans toute l'étendue du plan. Les exposants de discontinuité relatifs aux points critiques ont respectivement les valeurs suivantes:

pour $v=0$ . . . . $\beta'-1$, β',

pour $v=1$ . . . . $\gamma'-\beta'-1$, $\gamma'-\beta'$,

pour $v=\frac{1}{y}$ . . . . 0, $\beta-\alpha$,

pour $v=\frac{1-x}{y}$ . . . . . 0, $\gamma-\alpha-\beta$,

pour $v=\infty$ . . . . $\alpha+2-\gamma'$, $\alpha+3-\gamma-\gamma'$;

supposons que les parties réelles des quantités β', $\gamma'-\beta'$, $\beta+1-\alpha$, $\gamma+1-\alpha-\beta$, $\alpha+1-\gamma'$, $\alpha+2-\gamma-\gamma'$, soient positives, conditions compatibles avec les précédentes, comme il est aisé de s'en assurer. Toutes les intégrales $\int \omega dv$, prises entre deux des limites $0,\ 1,\ \frac{1}{y}\ \frac{1-x}{y},\ \infty$ auront alors un sens.

Une des branches de la fonction ω est holomorphe pour $v = \frac{1}{y}$; elle est représentée par l'intégrale définie

$$\omega_1 = \int_1^{+\infty} \varphi(x,\ y,\ u,\ v)\, du.$$

On a, en effet, à un facteur constant près

$$\omega_1 = v^{\beta'-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1}\, x^{-\alpha}\, F\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha+1-\beta,\ \frac{1-vy}{x}\right)$$

De même une branche ω_2 est holomorphe pour $v = \frac{1-x}{y}$;

$$\omega_2 = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x,\ y,\ u,\ v)\, du;$$

car on a à un facteur constant près,

$$\omega_2 = v^{\beta'-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1} (1-vy)^{-\alpha}\, F\left(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ \frac{1-x-vy}{1-vy}\right)$$

Nous considérerons en outre les deux branches ω_3 et ω_4 qui sont représentées par les intégrales définies suivantes

$$\omega_3 = \int_0^{\frac{1-vy}{x}} \varphi(x,\ y,\ u,\ v)\, du,$$

$$\omega_4 = \int_1^{\frac{1-vy}{x}} \varphi(x,\ y,\ u,\ v)\, du$$

Ces nouvelles branches se comportent d'une manière simple dans le voisinage des valeurs $\frac{1}{y},\ \frac{1-x}{y}$, attribuées à la variable v. On a, en effet, en faisant abstraction d'un facteur constant,

$$\omega_3 = v^{\beta'-1}(1-v)^{\gamma'-\beta'-1} x^{-\beta}(1-vy)^{\beta-\alpha} F\left(\beta+1-\gamma,\ \beta,\ \beta+1-\alpha,\ \frac{1-vy}{x}\right),$$

$$\omega_4 = v^{\beta'-1}(1-v)^{\gamma'-\beta'-1}(1-vy)^{\beta-\gamma}(1-x-vy)^{\gamma-\beta-\alpha} F\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{1-x-vy}{1-vy}\right).$$

Lorsque la variable v tourne autour du point $\frac{1}{y}$, ω_3 se reproduit multipliée par le facteur $e^{\pm 2\pi i(\beta-\alpha)}$ et lorsque v tourne autour du point $\frac{1-x}{y}$, ω_4 est multipliée par $e^{\pm 2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}$.

Les deux points $\frac{1}{y}$, $\frac{1-x}{y}$ peuvent être situés tous les deux dans la partie supérieure ou dans la partie inférieure du plan, ou bien l'un dans la partie supérieure et l'autre dans la partie inférieure du plan.

Je suppose d'abord qu'ils soient tous les deux dans la même partie du plan, par exemple dans la partie inférieure (fig. 13).

Les deux fonctions ω_1, ω_2 sont holomorphes à l'intérieur du contour *ama'LML'b'nba*, et le théorème de CAUCHY, appliqué à ce contour, donne les deux relations:

$$(6)\qquad \begin{cases} \int_{-\infty}^{0}\omega_1 dv + \int_{0}^{1}\omega_1 dv + \int_{1}^{+\infty}\omega_1 dv = 0, \\ \int_{-\infty}^{0}\omega_2 dv + \int_{0}^{1}\omega_2 dv + \int_{1}^{+\infty}\omega_2 dv = 0. \end{cases}$$

Si les points $\frac{1}{y}$, $\frac{1-x}{y}$ sont disposés autrement, comme dans la figure (14), ω_1 est holomorphe à l'intérieur du contour *ama'LML'b'nba*, et on a encore:

$$(7)\qquad \int_{-\infty}^{0}\omega_1 dv + \int_{0}^{1}\omega_1 dv + \int_{1}^{+\infty}\omega_1 dv = 0.$$

De même la fonction ω_2, qui est holomorphe dans le voisinage du point $\frac{1-x}{y}$, est holomorphe à l'intérieur du contour *am'a'LM'L'b'n'ba*, mais aux points a' et b' elle est représentée par $C\omega_1 + C'\omega_2$, $C_1\omega_1 + C'_1\omega_2$,

C, C', C_1, C'_1 étant des constantes, et l'application du théorème de Cauchy donne une nouvelle relation:

$$C\int_{-\infty}^{0}\omega_1 dv + C'\int_{-\infty}^{0}\omega_2 dv + \int_{0}^{1}\omega_2 dv + C_1\int_{1}^{+\infty}\omega_1 dv + C'_1\int_{1}^{+\infty}\omega_2 dv = 0 \tag{8}$$

En définitive les six intégrales définies

$$\int_{-\infty}^{0}\omega_1 dv,\ \int_{0}^{1}\omega_1 dv,\ \int_{1}^{+\infty}\omega_1 dv,$$

$$\int_{-\infty}^{0}\omega_2 dv,\ \int_{0}^{1}\omega_2 dv,\ \int_{1}^{+\infty}\omega_2 dv,$$

peuvent s'exprimer linéairement au moyen de quatre d'entre elles; les autres cas de figure se traiteraient comme les précédents. Les variables x, y, suivant des chemins quelconques, on reconnaît que la continuation analytique de l'une quelconque des fonctions représentées par ces six intégrales définies peut toujours s'exprimer par une combinaison linéaire des mêmes intégrales. Ces fonctions vérifient donc un système d'équations linéaires aux dérivées partielles de la forme suivante:

$$\begin{cases} r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z, \\ t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z, \end{cases} \tag{9}$$

les a et les b étant des fonctions uniformes de x et de y et p, q, r, s, t désignant, suivant l'usage, les dérivées partielles,

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Il en sera de même de toute intégrale de la forme

$$z = \int (C\omega_1 + C'\omega_2)\, dv,$$

prise entre deux des limites 0, 1, ∞, où C et C' désignent des constantes par rapport à x, y, v. Il existe six fonctions de la forme $C\omega_1 + C'\omega_2$ qui s'expriment par une intégrale simple; cela fait en tout dix-huit intégrales doubles qui vérifient les équations (9). Elles sont toutes comprises dans la formule

$$(10) \qquad z = \int_{g'}^{h'} dv \int_{g}^{h} \varphi(x, y, u, v)\, du,$$

g et h désignant deux des quantités $0, 1, \frac{1-vy}{x}, \infty$ et g', h' deux des quantités $0, 1, \infty$. A ces dix-huit intégrales on peut ajouter les six autres données par les deux formules

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} z &= \int_{g}^{\frac{1}{y}} dv \int_{0}^{\frac{1-vy}{x}} \varphi(x, y, u, v)\, du, \\ z &= \int_{g}^{\frac{1-x}{y}} dv \int_{1}^{\frac{1-vy}{x}} \varphi(x, y, u, v)\, du, \end{aligned} \right.$$

où l'on donne à g une des valeurs $0, 1, \infty$. On démontre en effet, en opérant comme dans le premier exemple, que ces nouvelles intégrales s'expriment linéairement au moyen des premières.

Je prends maintenant en particulier l'intégrale double

$$z = \int_0^1 \int_0^1 u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1} (1-ux-vy)^{-\alpha}\, du dv,$$

qui a été étudiée par M^r^ Appell (loc. cit. page 196). En la développant en série, on trouve sans peine

$$z = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma'-\beta')}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')} F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y),$$

$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$ désignant la série hypergéométrique de deux variables

$$\sum \frac{(\alpha \,.\, m+n)(\beta \,.\, m)(\beta' \,.\, n)}{(\gamma \,.\, m)(\gamma' \,.\, n)(1 \,.\, m)(1 \,.\, n)} x^m y^n,$$

la sommation s'étendant aux valeurs entières de m et de n de zéro à l'infini. Cette fonction vérifie, comme on sait, le système des deux équations

$$(12)\qquad \begin{cases} x(1-x)r - xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta yq - \alpha\beta z = 0, \\ y(1-y)t - xys + [\gamma' - (\alpha+\beta'+1)y]\,q - \beta' xp - \alpha\beta' z = 0. \end{cases}$$

Admettons que ce système est irréductible; ce qu'on peut du reste démontrer en toute rigueur. Il résulte de ce qui précède que les équations (12) seront vérifiées par chacune des intégrales doubles (10) et (11).

A cause de la forme de l'expression $\varphi(x, y, u, v)$, elles seront aussi vérifiées par chacune des intégrales doubles

$$(10)'\qquad z = \int_{g'}^{h'} du \int_{g}^{h} \varphi(x, y, u, v)\, dv,$$

où l'on prend pour g et h deux des quantités 0, 1, $\frac{1-ux}{y}$, ∞ et pour g' et h' deux des quantités 0, 1, ∞. Il en sera de même de chacune des intégrales doubles

$$(11)'\qquad \begin{cases} z = \displaystyle\int_{g}^{\frac{1}{x}} du \int_{0}^{\frac{1-ux}{y}} \varphi(x, y, u, v)\, dv, \\[2ex] z = \displaystyle\int_{g}^{\frac{1-y}{x}} du \int_{1}^{\frac{1-ux}{y}} \varphi(x, y, u, v)\, dv, \end{cases}$$

où g a l'une des valeurs 0, 1, ∞.

Parmi ces diverses intégrales, je considère en particulier la suivante:

$$z = \int_0^1 dv \int_{\frac{1-vy}{x}}^{\infty} \varphi(x, y, u, v)\, du;$$

si l'on y pose $u = \frac{1-vy}{xt}$, elle devient

$$z = x^{1-\gamma} \int^1 \int_0^1 t^{\alpha-\gamma} (1-t)^{-\alpha} v^{\beta'-1} (1-v)^{\gamma'-\beta'-1} (1-vy)^{\beta-\alpha} (1-tx-vy)^{\gamma-\beta-1}\, dv dt.$$

Développons la nouvelle intégrale double suivant les puissances croissantes de x; le coefficient de x^m sera

$$\frac{(\beta+1-\gamma)(\beta+2-\gamma)\ldots(\beta+m-\gamma)}{1.2\ldots.m}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 t^{\alpha-\gamma+m}(1-t)^{-\alpha}v^{\beta'-1}(1-v)^{\gamma'-\beta'-1}(1-vy)^{-(\alpha+m+1-\gamma)}\,dtdv,$$

c'est-à-dire

$$\frac{(\beta+1-\gamma)\ldots.(\beta+m-\gamma)}{1.2\ldots.m}\;\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+m+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(m+2-\gamma)}F(\alpha+m+1-\gamma,\,\beta',\,\gamma',\,y)$$

On obtient pour l'intégrale considérée le développement qui suit

$$z=x^{1-\gamma}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)}\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(\beta+1-\gamma.m)(\alpha+1-\gamma.m)}{(1.m)(2-\gamma.m)}F(\alpha+m+1-\gamma,\beta',\gamma',y)x^m;$$

ou bien

$$z=\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)}x^{1-\gamma}F_2(\alpha+1-\gamma,\,\beta+1-\gamma,\,\beta',\,2-\gamma,\,\gamma',\,x,\,y)$$

Les équations (12) admettent donc l'intégrale commune

$$x^{1-\gamma}F_2(\alpha+1-\gamma,\,\beta+1-\gamma,\,\beta',\,2-\gamma,\,\gamma',\,x,\,y).$$

Par raison de symétrie, elles admettront aussi l'intégrale commune

$$y^{1-\gamma'}F_2(\alpha+1-\gamma',\,\beta,\,\beta'+1-\gamma',\,\gamma,\,2-\gamma',\,x,\,y),$$

qui serait représentée par l'intégrale double

$$\int\limits_0^1 du\int\limits_{\frac{1-ux}{y}}^{\infty}\varphi(x,\,y,\,u,\,v)\,dv.$$

Si l'on fait attention à la manière dont la seconde intégrale commune se déduit de la première, on déduira de la troisième une nouvelle intégrale commune de même forme

$$x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}F_2(\alpha+2-\gamma-\gamma',\,\beta+1-\gamma,\,\beta'+1-\gamma',\,2-\gamma,\,2-\gamma',\,x,\,y).$$

Prenons encore l'intégrale double

$$z=\int^{\frac{1}{y}}dv\int^{\frac{1-vy}{x}}\varphi(x,\,y,\,u,\,v)\,du;$$

si l'on y pose d'abord $v = \frac{1}{y} t$, puis $u = \frac{w}{x}$, elle devient

$$z = x^{-\beta} y^{-\beta'} \int_0^1 dt \int_0^{1-t} w^{\beta-1} t^{\beta'-1} \left(1 - \frac{w}{x}\right)^{\gamma-\beta-1} \left(1 - \frac{t}{y}\right)^{\gamma'-\beta'-1} (1 - w - t)^{-\alpha} dw,$$

c'est-à-dire

$$z = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta+\beta'+1-\alpha)} x^{-\beta} y^{-\beta'} F_3\left(\beta, \beta', \beta+1-\gamma, \beta'+1-\gamma', \beta+\beta'+1-\alpha, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).$$

Les résultats qui précèdent ont été trouvés directement par M^r Appell; mais la méthode suivie montre bien clairement le lien analytique qui existe entre ces différentes intégrales doubles, au premier abord d'un aspect si différent.

Les autres intégrales doubles conservent un sens tant que x et y restent compris entre certaines limites, variables d'une intégrale à l'autre. Dans ces limites, elles représentent des fonctions des deux variables indépendantes x et y, qui vérifient les équations (12). Mais si on les développe en séries, le coefficient du terme général ne paraît pas susceptible d'une forme simple, comme dans les exemples déjà examinés.

Toulouse, Décembre 1882.

Fig. 1

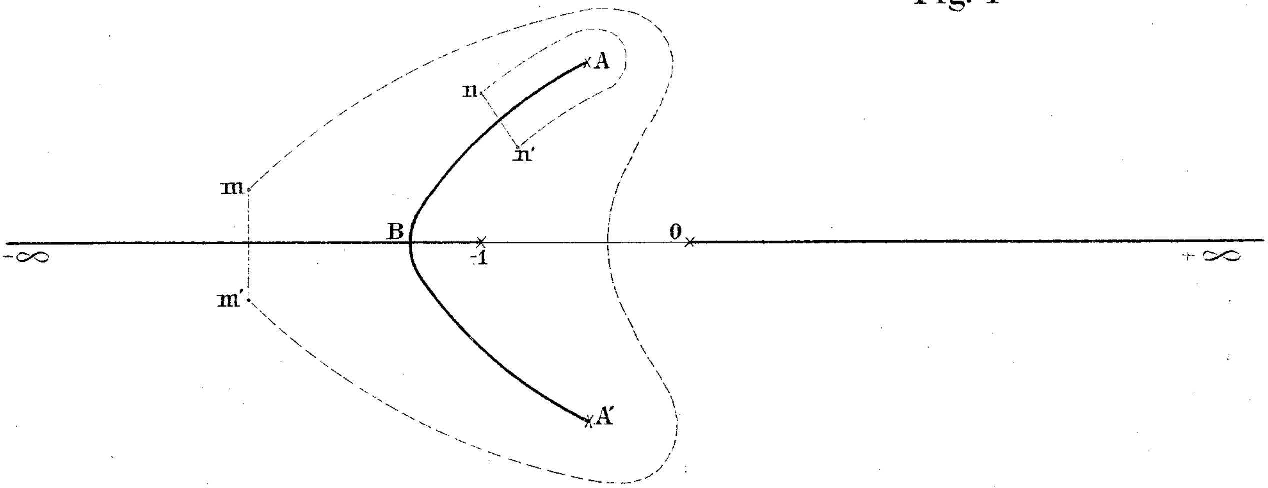


Fig. 2

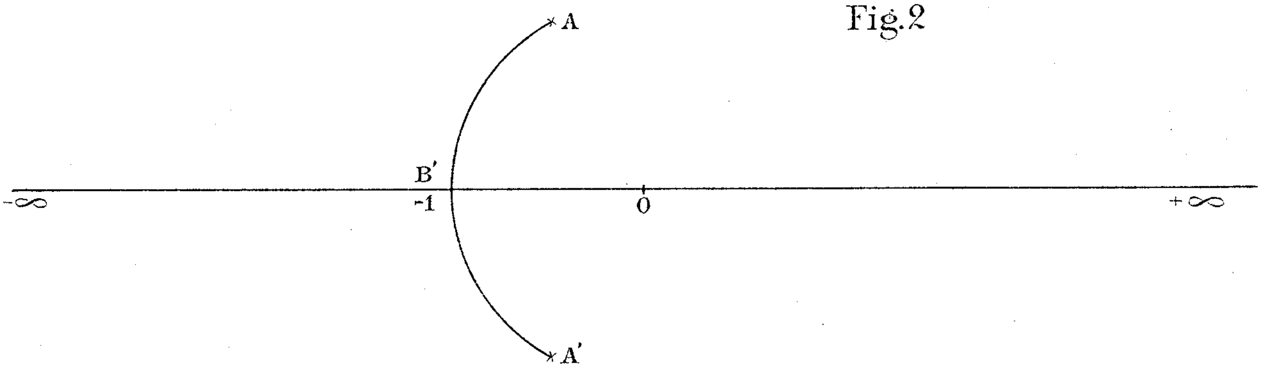


Fig. 3

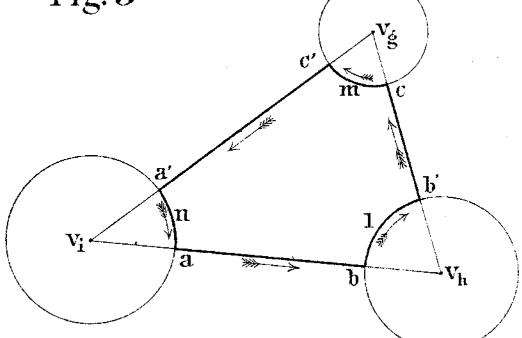
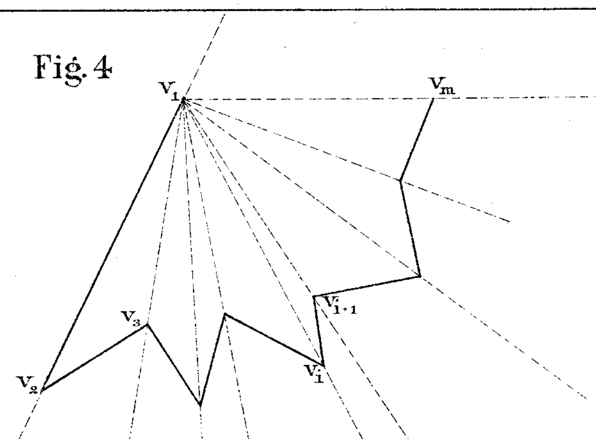


Fig. 4



Centr.-Tryck. Stockh. D. 252.

Fig. 5

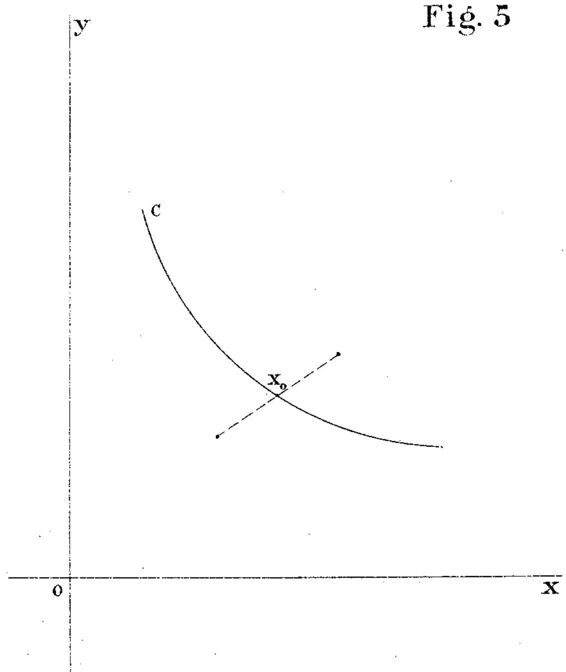


Fig. 6

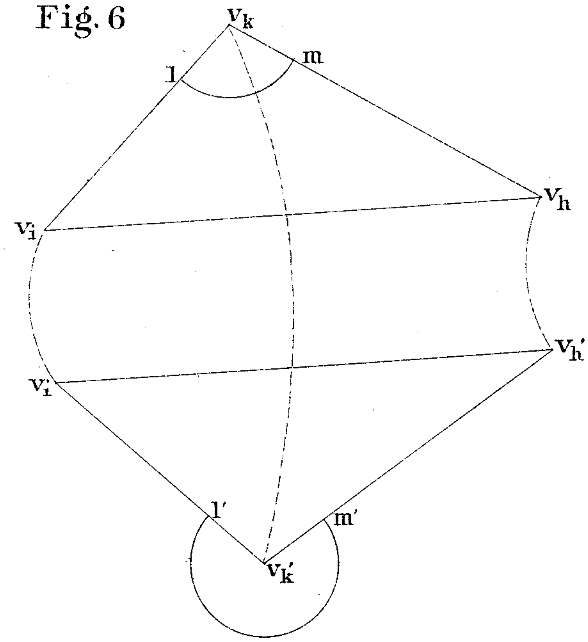


Fig. 7

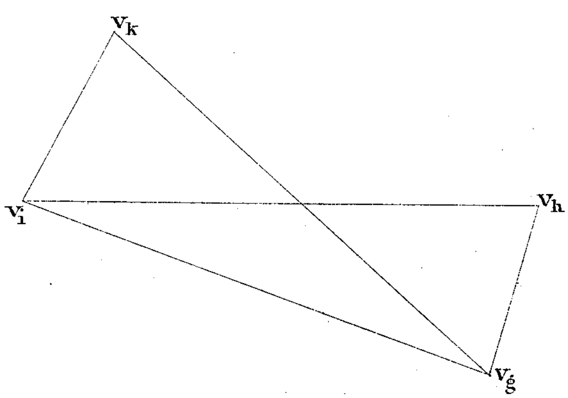
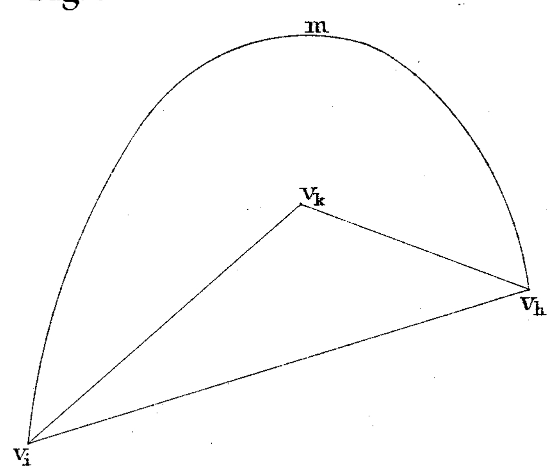


Fig. 8



Centr.-Tryck. Stockh. 1882.

Fig. 9

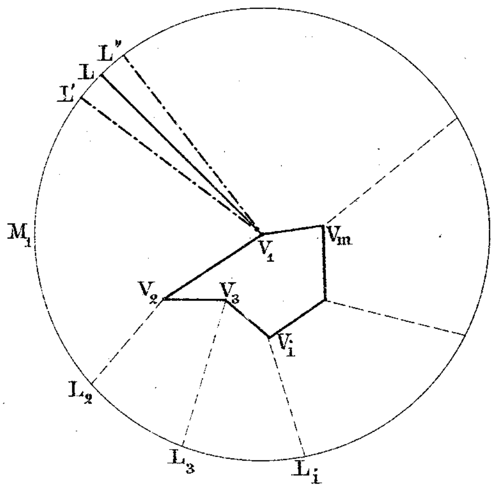
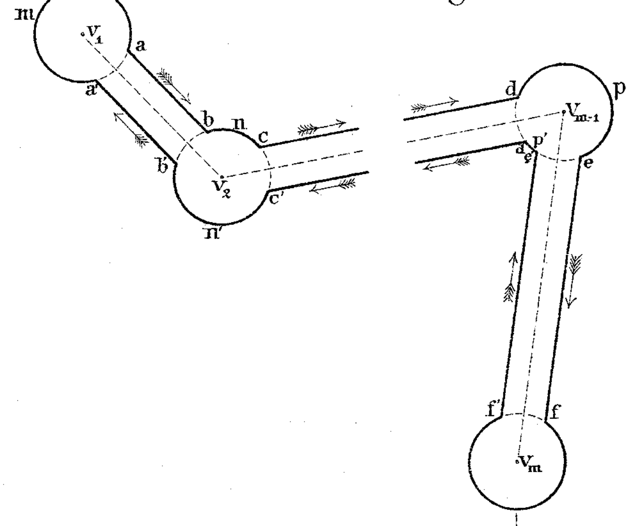


Fig. 10



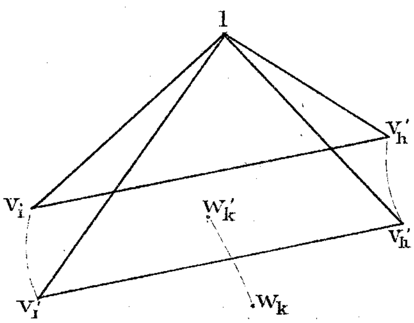
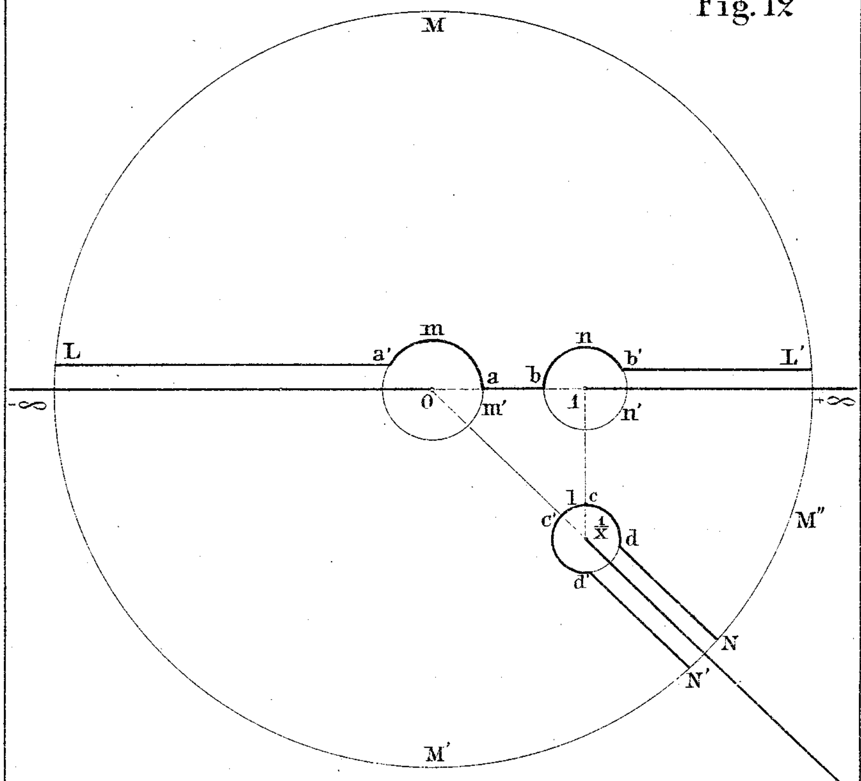
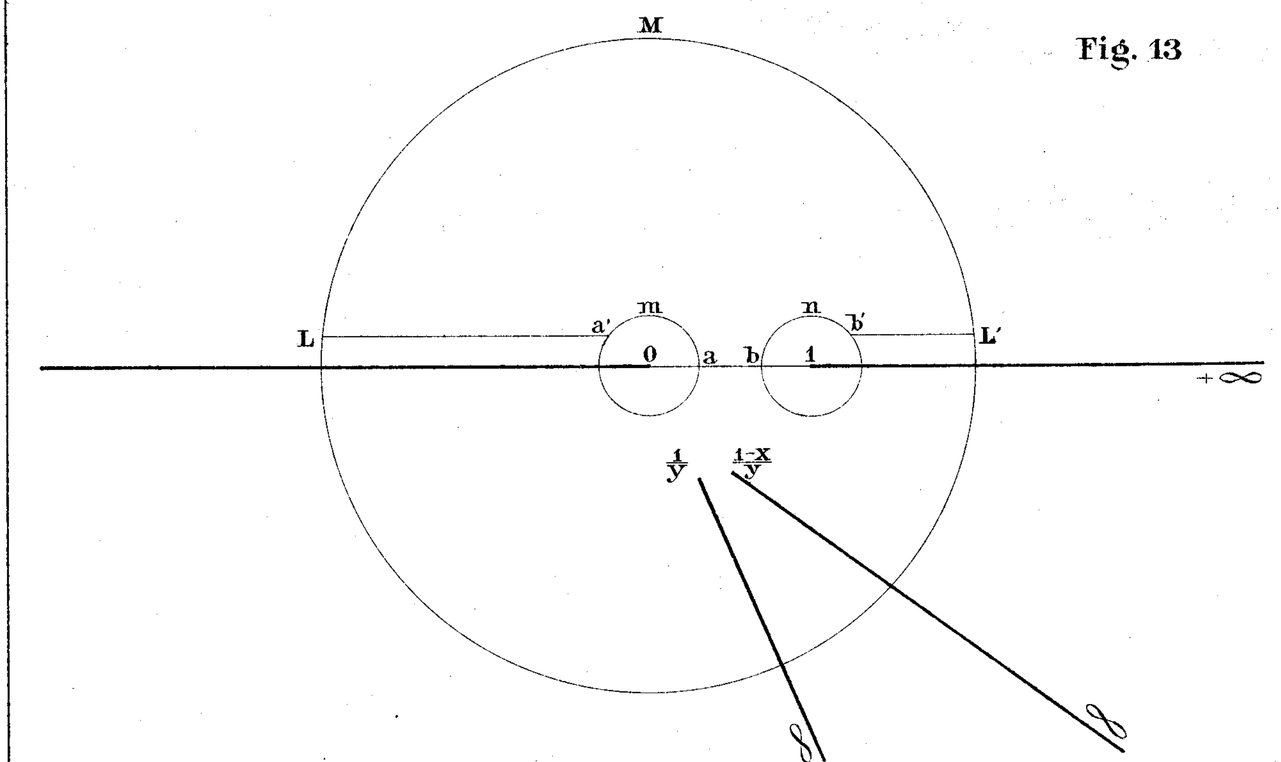


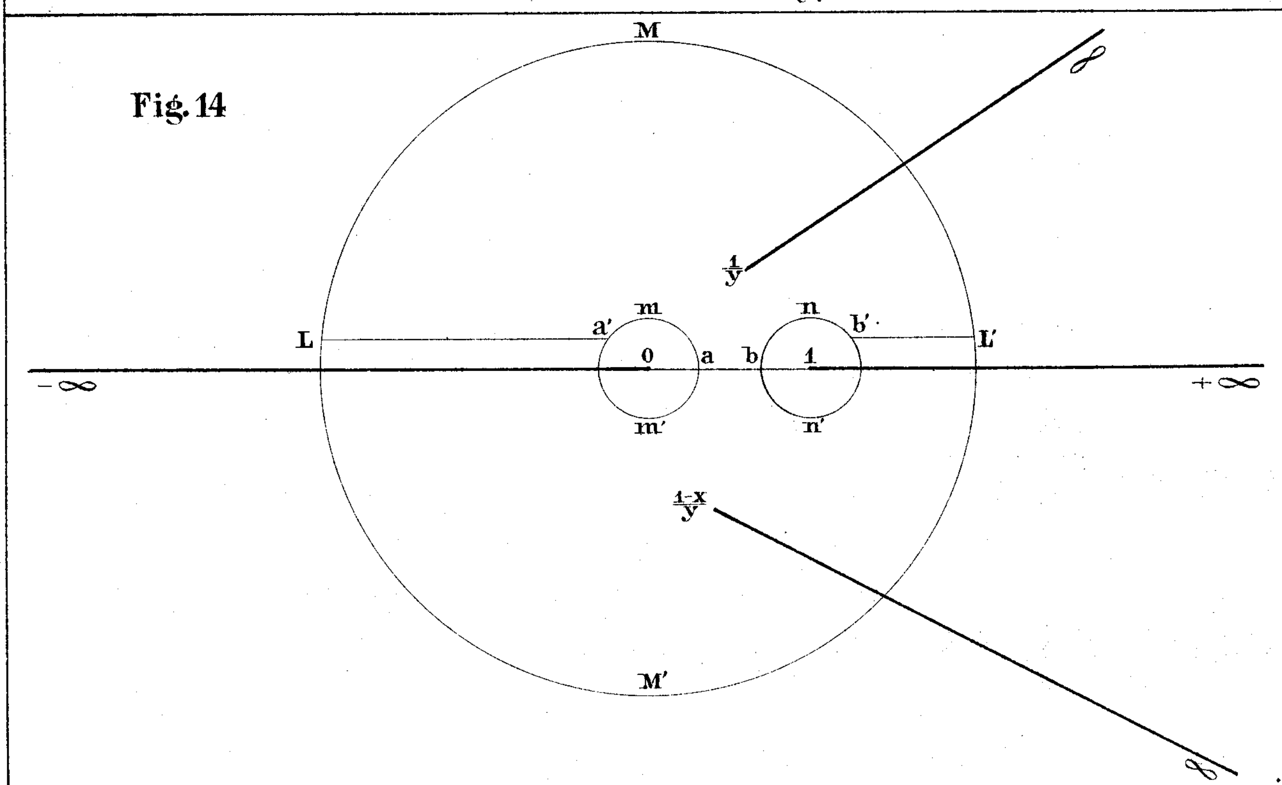
Fig. 11

Fig. 12



Centr. Tryck. Stockh. D 252.





Centr. Tryck. Stock. D.252.