ZUR THEORIE DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y' = f(x, y)$.

Von

E. KAMKE

in TÜBINGEN.

In der Literatur über die Theorie der Differentialgleichung[1]

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

werden die Sätze, die sich auf die Fortsetzbarkeit der Integralkurven bis zum Rande des Richtungsfeldes und auf die Abhängigkeit der Integrale von der Funktion $f(x, y)$ und von den Anfangsbedingungen beziehen, nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass neben der Stetigkeit von $f(x, y)$ noch die Lipschitzbedingung gefordert wird.[2] Im Folgenden soll gezeigt werden, wie diese Sätze bei blosser Stetigkeit von $f(x, y)$ und einem beliebigen Gebiet als Definitionsbereich von $f(x, y)$ lauten.

§ 1.

Satz 1: *Es sei $f(x, y)$ in dem Gebiet $\mathfrak{G}$ stetig. Dann kann jede Integralkurve der Differentialgleichung*

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

bis an den Rand von $\mathfrak{G}$ fortgesetzt werden.

Das soll folgendes besagen: Wenn $y = \varphi(x)$ in dem offenen Intervall[3] (a, b) eine Integralkurve von (1) ist, gibt es ein Intervall (A, B), welches das Intervall (a, b) enthält, und mindestens eine in dem Intervall (A, B) existierende Integral-

[1] Es handelt sich hier stets um Differentialgleichungen reeller Funktionen.

[2] Vgl. jedoch Fussnote 7 und 8.

[3] Bei offenen Intervallen wird, falls nichts gegenteiliges gesagt ist, für die untere und obere Grenze stets $-\infty$ bzw. $+\infty$ zugelassen.

kurve $y = \Phi(x)$ von (1), so dass beide Integralkurven in dem Intervall (a, b) zusammenfallen und die zweite Integralkurve in jeder der beiden Richtungen der x-Achse dem Rand von $\mathfrak{G}$ beliebig nahe kommt. Dieses letzte soll z. B. für zunehmendes x bedeuten: Entweder ist $B = +\infty$; oder es ist B endlich und

$$\overline{\lim_{x \to B-0}} |\Phi(x)| = +\infty;$$

oder es ist sowohl B wie dieser Limes superior endlich, und es gibt für jedes $\varepsilon > 0$ beliebig nahe an $x = B$ immer wieder Kurvenpunkte, in deren ε-Umgebung ein Randpunkt von $\mathfrak{G}$ liegt.

Beweis: Zunächst wird an folgendes erinnert: Ist ξ, η ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{G}$, so lässt sich um ihn stets eine quadratische abgeschlossene Umgebung[4]

$$(2) \qquad |x - \xi| \leqq \varepsilon, \ |y - \eta| \leqq \varepsilon$$

so abgrenzen, dass sie (inkl. Rand) in $\mathfrak{G}$ liegt. Nach dem Existenzsatz von Peano gibt es dann für die Differentialgleichung (1) mindestens eine durch den Punkt ξ, η gehende Integralkurve, $v = \psi(x)$ und zu dieser ein Intervall (α, β) so dass die Integralkurve für $\alpha < x < \beta$ im Innern von (2) verläuft, während die Punkte $\alpha, \psi(\alpha)$ und $\beta, \psi(\beta)$ auf dem Rand des Quadrats (1) liegen. Demnach gilt mindestens eine der beiden Relationen $\beta - \xi = \varepsilon$ und $|\psi(\beta) - \psi(\xi)| = \varepsilon$; und entsprechendes gilt für α statt β. In den Punkten α und β genügt $\psi(x)$ auch noch der Differentialgleichung (1).

Es soll nun die Fortsetzbarkeit der Integralkurve $y = \varphi(x)$ bis an den Rand von $\mathfrak{G}$ für zunehmende x bewiesen werden. Hat b schon eine der für B aufgestellten Eigenschaften, so ist nichts mehr zu beweisen. Hat b dagegen keine dieser Eigenschaften, so ist $y = \varphi(x)$ für $\frac{1}{2}(a + b) < x < b$ beschränkt und hat von den Randpunkten von $\mathfrak{G}$ einen Abstand, der grösser als eine gewisse positive Zahl ϱ ist.[5] Wird die Menge der Punkte, die von unserun Kurvenstück einen Abstand $\leqq \frac{1}{2}\varrho$ haben, zu einer abgeschlossenen Menge $\mathfrak{H}$ ergänzt, so ist $f(x, y)$ in dem abgeschlossenen und beschränkten Gebiet $\mathfrak{H}$ stetig, also beschränkt, etwa

$$|f(x, y)| < M \text{ in } \mathfrak{H}.$$

---

[4] Die Seiten der hier vorkommenden Umgebungsquadrate sollen stets den Koordinatenachsen parallel sein.

[5] Hat $\mathfrak{G}$ keinen Randpunkt, so kann ϱ beliebig gewählt werden.

Dann ist für $\frac{1}{2}(a+b) < x_1 < x_2 < b$

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi(x))\, dx \right| < (x_2 - x_1) M$$

Hieraus folgt, dass

$$\lim_{x \to b-0} \varphi(x)$$

existiert. Wird dieser Limes mit $\varphi(b)$ bezeichnet, so liegt der Punkt $b, \varphi(b)$ in $\mathfrak{H}$, und daher ist sogar für $\frac{1}{2}(a+b) < x \leqq b$

$$\int_{\frac{1}{2}(a+b)}^{x} f(x, \varphi(x))\, dx = \varphi(x) - \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Daraus folgt aber, dass $\varphi(x)$ im Punkte b noch nach links differenzierbar ist und der Differentialgleichung (1) genügt.

Nun werde $\xi_1 = b$, $\eta_1 = \varphi(b)$ gesetzt und eine unendliche Folge

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \cdots \to 0$$

gewählt, wobei ε_1 so klein sei, dass die abgeschlossene quadratische ε_1-Umgebung von ξ_1, η_1 in $\mathfrak{G}$ liegt. Nach der Bemerkung am Anfang des Beweises gibt es für (1) eine durch ξ_1, η_1 gehende Integralkurve $y = \psi_1(x)$, die rechts von ξ_1 genau bis ξ_2 im Innern der ε_1-Umgebung von ξ_1, η_1 verlaufen möge, während für $\eta_2 = \psi_1(\xi_2)$ $\xi_2 - \xi_1 = \varepsilon_1$ oder $|\eta_2 - \eta_1| = \varepsilon_1$ oder beides zutrifft. Es wird nun

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) \text{ für } a < x \leqq \xi_1, \\ \psi(x) \text{ für } \xi_1 \leqq x \leqq \xi_2 \end{cases}$$

gesetzt.

Wenn die abgeschlossene quadratische ε_1-Umgebung von ξ_2, η_2 keinen Randpunkt von $\mathfrak{G}$ enthält, kann das Verfahren für ξ_2, η_2 statt ξ_1, η_1 wiederholt werden und führt so zu einer Integralkurve $y = \psi_2(x)$ die rechts von ξ_2 genau für $\xi_2 < x < \xi_3$ im Innern dieser Umgebung verlaufen möge, während für $\eta_3 = \psi_2(\xi_3)$ mindestens eine der beiden Relationen $\xi_3 - \xi_2 = \varepsilon_1$ und $|\eta_3 - \eta_2| = \varepsilon_1$ gilt. Zusammen mit dem schon festgelegten Kurvenstück ergibt sich so eine für $a < x \leqq \xi_3$ existierende Integralkurve $\Phi(x)$ von (1). — So kann man fortfahren. Entweder kann das Verfahren unbegrenzt fortgesetzt werden, oder es bricht nach endlich vielen Schritten ab.

Für den ersten Fall ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung so: Für $\xi_n \to \infty$ ist sie klar. Es seien also die ξ_n beschränkt, so dass wegen der monotonen Zunahme der ξ_n

$$B_1 = \lim_{n \to \infty} \xi_n$$

existiert und endlich ist. Wenn in diesem Fall die η_n nicht beschränkt sind, ist die Behauptung wiederum richtig. Es mögen also die η_n beschränkt sein. Dann ist auch die ganze für $\frac{1}{2}(a+b) < x < B_1$ existierende Integralfunktion $\Phi(x)$ beschränkt. Dann kommt sie aber auch beliebig nahe an den Rand von $\mathfrak{G}$. Denn sonst liesse sich um dieses Kurvenstück ein abgeschlossenes und beschränktes Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ abgrenzen, in dem sie ganz enthalten wäre. Daher würde nach dem oben angegebenen Schluss $\lim\limits_{x \to B_1 - 0} \Phi(x)$ existieren, insbesondere also auch $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n$. Da ausserdem auch $\lim\limits_{x \to \infty} \xi_n$ existiert, würde das aber der Tatsache widersprechen, dass mindestens eine der Differenzen $\xi_n - \xi_{n-1}$ und $|\eta_n - \eta_{n-1}|$ den Wert ε_1 haben muss.

Im zweiten Fall gibt es ein letztes ξ_n und in der abgeschlossenen quadratischen ε_1-Umgebung von ξ_n, η_n liegt mindestens ein Randpunkt von $\mathfrak{G}$. Dann gibt es ein grösstes ε_ν, so dass in der abgeschlossenen quadratischen ε_ν-Umgebung von ξ_n, η_n kein Randpunkt von $\mathfrak{G}$ liegt. Das vorhin beschriebene Verfahren wird nun mit ε_ν statt ε_1 durchgeführt. In dieser Weise kann man fortfahren. Da $\varepsilon_n \to 0$ ist, wird die Kurve dabei so fortgesetzt, dass sie, gleichgültig, ob das Verfahren einmal abbricht oder nicht, nach rechts hin beliebig grosse Abszissen oder beliebig grosse Ordinaten erhält oder in beliebige Nähe von endlichen Randpunkten von $\mathfrak{G}$ gelangt. Die Behauptung über die Fortsetzbarkeit nach links hin ergibt sich in entsprechender Weise.

§ 2.

Die weiteren Sätze werden sich wesentlich auf die beiden folgenden Hilfssätze stützen.

Hilfssatz 1: *In dem Gebiet $\mathfrak{G}$ seien die Funktionen $f(x,y)$ und $g(x,y)$ definiert und*

$$f(x,y) < g(x,y). \tag{3}$$

Ferner seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $\xi \leqq x < \xi + a$ zwei Integrale der Differentialgleichungen

$$y'=f(x,y) \qquad \textit{bzw.} \; y'=g(x,y)$$

mit demselben Anfangswert

$$\varphi(\xi)=\psi(\xi)=\eta.$$

Dann ist im ganzen Intervall $\xi<x<\xi+a$

$$\varphi(x)<\psi(x). \tag{4}$$

Beweis: Da $f(\xi,\varphi(\xi))<g(\xi,\psi(\xi))$, d. h. $\varphi'(\xi)<\psi'(\xi)$ ist und da beide Integrale denselben Anfangswert haben, trifft die Ungleichung (4) sicher für ein gewisses rechts an ξ anstossendes Intervall zu. Ist ξ_1 die untere Grenze der Zahlen $x>\xi$, für welche die Ungleichung (4) nicht erfüllt ist, so ist daher sicher $\xi_1>\xi$. Wenn nun $\xi_1<\xi+a$ wäre, so wäre wegen der Stetigkeit der Funktionen φ und ψ

$$\varphi(\xi_1)=\psi(\xi_1),$$

also wegen (3)

$$f(\xi_1,\varphi(\xi_1))<g(\xi_1,\psi(\xi_1)),$$

d. h.

$$\varphi'(\xi_1)<\psi'(\xi_1).$$

Dann wäre aber für alle hinreichend kleinen positiven h

$$\varphi(\xi_1-h)>\psi(\xi_1-h),$$

also ξ_1 nicht die untere Grenze der Zahlen $x>\xi$, für die (4) nicht zutrifft.

Zusatz: Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ dagegen im Intervall $\xi-a<x\leqq\xi$ Integrale der Differentialgleichungen des Hilfssatzes 1, so ist unter sonst gleichen Voraussetzungen im Intervall $\xi-a<x<\xi$

$$\varphi(x)>\psi(x).$$

Hilfssatz 2: *Es sei $f(x,y)$ in dem Gebiet $\mathfrak{G}$ stetig. Durch den Punkt ξ,η des Gebiets $\mathfrak{G}$ gibt es dann nach dem Satz von Peano für jedes ε mindestens eine Integralkurve der Differentialgleichung*

$$y'=f(x,y)+\varepsilon; \tag{5}$$

eine solche Integralkurve wird für jedes ε ausgewählt, nach beiden Seiten irgendwie bis zum Rand von $\mathfrak{G}$ fortgesetzt und mit $\varphi(x,\varepsilon)$ bezeichnet. Für $\varepsilon=0$ möge durch *den Punkt* ξ, η *nur eine Integralkurve von* (5) *vorhanden sein.*[6] *Endlich sei* (α_0, β_0) *das genaue Existenzintervall von* $\varphi(x, 0)$ *und* $\alpha_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \beta_0$. *Dann existieren alle* $\varphi(x, \varepsilon)$ *für alle hinreichend kleinen* ε *in dem ganzen Intervall* $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$, *und in diesem Intervall existiert der folgende Limes gleichmässig und hat den Wert*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(x, \varepsilon) = \varphi(x, 0).$$

Beweis: Es darf natürlich $\alpha_1 < \xi < \beta_1$ angenommen werden. Die Kurve $y = \varphi(x, 0)$ hat für $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ vom Rand von $\mathfrak{G}$ einen Abstand, der grösser als eine positive Zahl ϱ ist. Die Gesamtheit aller Punkte, die von diesem Kurvenstück einen Abstand $< \frac{1}{2} \varrho$ haben, bildet nach Hinzunahme ihrer Häufungspunkte ein beschränktes abgeschlossenes Teilgebiet $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$. Daher ist $f(x, y)$ in $\mathfrak{H}$ beschränkt, etwa

$$|f(x, y)| < A. \tag{6}$$

Es sei nun $\langle \sigma, \tau \rangle$ irgend ein den Punkt ξ enthaltendes Teilintervall von $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$, zu welchem es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so dass alle Kurven $y = \varphi(x, \varepsilon)$ für $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_0$ und für $\sigma \leqq x \leqq \tau$ in $\mathfrak{H}$ liegen. Solche Zahlen σ, τ gibt es; denn für ein beliebiges $\varepsilon_0 > 0$ ist für alle $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_0$, soweit die von ξ, η ausgehenden Kurven in $\mathfrak{H}$ bleiben,

$$|\varphi'(x, \varepsilon)| = |f(x, \varphi(x, \varepsilon)) + \varepsilon| < A + \varepsilon_0$$

d. h. die Steigung aller dieser $y = \varphi(x, \varepsilon)$ liegt unter einer gemeinsamen Schranke, so dass alle diese Kurven in einer gemeinsamen Umgebung von ξ noch innerhalb $\mathfrak{H}$ bleiben.

Für $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ und $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \leqq \varepsilon_0$ ist dann in $\langle \sigma, \tau \rangle$ nach dem Hilfssatz 1

$$\varphi(x, \varepsilon_2) \begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} \varphi(x, \varepsilon_1) \text{ für } \begin{cases} \sigma < x < \xi, \\ \xi < x < \tau. \end{cases} \tag{7}$$

Ferner ist für $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_0$ und $\sigma \leqq x \leqq \tau$

$$\varphi(x, \varepsilon) = \eta + \int_\xi^x f(x, \varphi(x, \varepsilon))\, dx + \varepsilon(x - \xi), \tag{8}$$

[6] Aus dieser Tatsache darf man übrigens nicht schliesssen, dass nun auch für die Differentialgleichung $y' = f(x, y) + \varepsilon$ durch den Punkt ξ, η nur eine Integralkurve geht. Das zeigt das Beispiel $\xi = \eta = 0$, $f(x, y) = \sqrt{|y|} + 1$ und $\varepsilon = -1$.

also sind wegen (6) alle $\varphi(x, \varepsilon)$ in $\langle \sigma, \tau \rangle$ beschränkt und wegen der aus (8) folgenden Relation

$$|\varphi(x_2, \varepsilon) - \varphi(x_1, \varepsilon)| \leqq (A + \varepsilon_0) | x_2 - x_1 |$$

auch gleichgradig stetig. Daher gibt es eine Zahlenfolge

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \cdots \to 0,$$

so dass die Funktionenfolge

$$\varphi(x, \varepsilon_1), \varphi(x, \varepsilon_2), \varphi(x, \varepsilon_3), \ldots$$

in $\langle \sigma, \tau \rangle$ gleichmässig konvergiert. Wegen (7) existiert dann auch für kontinuierliches ε

$$\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \varphi(x, \varepsilon)$$

in $\langle \sigma, \tau \rangle$ gleichmässig, und $\varphi(x)$ ist demnach stetig. Entsprechend ergibt sich die gleichmässige Konvergenz und Stetigkeit von

$$\overline{\varphi}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0-0} \varphi(x, \varepsilon).$$

Da $f(x, y)$ in $\mathfrak{H}$ gleichmässig stetig ist, folgt mit der gleichmässigen Konvergenz dieser Grenzwerte aus (8) für $\varepsilon \to 0 + 0$

$$\varphi(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(x, \varphi(x))\, dx,$$

also wegen der Stetigkeit des Integranden

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \text{ für } \sigma \leqq x \leqq \tau$$

und $\varphi(\xi) = \eta$. Da es durch den Punkt ξ, η aber nur eine Integralkurve von (5) für $\varepsilon = 0$ gibt, ist

$$\varphi(x) = \varphi(x, 0) \text{ für } \sigma \leqq x \leqq \tau$$

und entsprechend

$$\overline{\varphi}(x) = \varphi(x, 0).$$

Damit ist die behauptete Konvergenz für ein gewisses Teilintervall von $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$ bewiesen, und zwar für jedes Teilintervall, das den Punkt ξ enthält und für das alle Kurven $y = \varphi(x, \varepsilon)$ für alle hinreichend kleinen ε in $\mathfrak{H}$ liegen. Es sei nun $\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle$ das kleinste Teilintervall von $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$, das alle derartigen Intervalle enthält. Um den Punkt $\bar{\beta}, \varphi(\bar{\beta}, 0)$ lässt sich ein im Innern von $\mathfrak{H}$ gelegenes achsenparalleles Rechteck so abgrenzen, dass, wenn $2s$ und $2t$ die Längen seiner horizontalen bzw. vertikalen Seite sind,

$$7As < t \text{ und } \bar{\beta} - s > \xi \tag{9}$$

ist. Dann ist $\langle \xi, \bar{\beta} - s \rangle$ ein Intervall, für welches die Behauptung schon als richtig erkannt ist. D. h. es gibt ein $0 < \varepsilon_0 < A$, so dass für alle $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_0$ insbesondere

$$|\varphi(\bar{\beta} - s, \varepsilon) - \varphi(\bar{\beta} - s, 0)| < As \tag{10}$$

ist. Wegen (6) ist, so weit die Kurven in $\mathfrak{H}$ verlaufen,

$$|\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(\bar{\beta} - s, \varepsilon)| \leqq 2A\,|x - \bar{\beta} + s|,$$

also insbesondere

$$|\varphi(\bar{\beta}, 0) - \varphi(\bar{\beta} - s, 0)| \leqq 2As \tag{11}$$

und, so weit die Kurven $y = \varphi(x, \varepsilon)$ für das Intervall $|x - \bar{\beta}| \leqq s$ in $\mathfrak{H}$ verlaufen,

$$|\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(\bar{\beta} - s, \varepsilon)| \leqq 4As. \tag{12}$$

Aus (10), (11), (12) ergibt sich nun, so weit $y = \varphi(x, \varepsilon)$ für $|x - \bar{\beta}| \leqq s$ in $\mathfrak{H}$ liegt,

$$|\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(\bar{\beta}, 0)| < 7As < t,$$

d. h. $y = \varphi(x, \varepsilon)$ trifft keinen der horizontalen Ränder unseres Rechtecks, verläuft somit bei $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_0$ für $\xi \leqq x \leqq \bar{\beta} + s$ ganz in $\mathfrak{H}$.

Entsprechend beweist man, dass auch in einem Intervall $\bar{\alpha} - r \leqq x \leqq \xi$ alle $\varphi(x, \varepsilon)$ für alle hinreichend kleinen ε existieren und in $\mathfrak{H}$ verlaufen. Daraus folgt erstens, dass diese Existenz auch in $\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle$ selber gesichert ist, und zweitens, dass das Intervall $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$ in $\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle$ enthalten ist, da sich sonst ein Widerspruch ergibt. Damit ist aber der Hilfssatz bewiesen.

§ 3.

Aus diesen Hilfssätzen lassen sich nun die angekündigten Sätze folgendermassen ableiten.

Satz 2: *Die Funktion $f(x, y, \mu)$ sei für jedes feste μ des Intervalls $|\mu - \mu_0| < M$ stetig in dem Gebiet $\mathfrak{G}$ der x, y-Ebene, und in jedem beschränkten abgeschlossenen Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ sei gleichmässig*

$$f(x,y,\mu)\to f(x,y,\mu_0) \textit{ für } \mu\to\mu_0.$$

Nach dem Satz von Peano gibt es dann für die Differentialgleichung

$$y'=f(x,y,\mu) \tag{13}$$

durch den Punkt ξ,η *von* $\mathfrak{G}$ *mindestens eine Integralkurve; eine solche wird irgendwie ausgewählt, irgendwie bis zum Rand von* $\mathfrak{G}$ *fortgesetzt und mit* $y=\varphi(x,\mu)$ *bezeichnet. Für* $\mu=\mu_0$ *möge durch den Punkt* ξ,η *nur eine Integralkurve von* (13) *vorhanden sein. Endlich sei* (α_0,β_0) *das genaue Existenzintervall von* $\varphi(x,\mu_0)$ *und* $\alpha_0<\alpha_1<\beta_1<\beta_0$. *Dann existieren alle* $\varphi(x,\mu)$ *für alle hinreichend nahe an* μ_0 *gelegenen* μ *in dem ganzen Intervall* $\alpha_1\leqq x\leqq\beta_1$, *und in diesem Intervall existiert der folgende Limes gleichmässig und hat den Wert:*

$$\lim_{\mu\to\mu_0}\varphi(x,\mu)=\varphi(x,\mu_0).$$ [7]

Beweis: Wie bei dem Beweis zum Hilfssatz 2 wird ein beschränktes abgeschlossenes Teilgebiet $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ konstruiert, das die Kurve $y=\varphi(x,\mu_0)$ für $\alpha_1\leqq x\leqq\beta_1$ in seinem Innern enthält.

Nun sei $\delta>0$ beliebig gegeben. Nach Hilfssatz 2 gibt es ein $\varepsilon>0$, so dass die durch ξ,η gehenden Integralkurven $y=\varphi_1(x)$ und $y=\varphi_2(x)$ der beiden Differentialgleichungen

$$y'=f(x,y,\mu_0)-\varepsilon \quad\text{und}\quad y'=f(x,y,\mu_0)+\varepsilon$$

für $\alpha_1\leqq x\leqq\beta_1$ existieren, in $\mathfrak{H}$ liegen und überdies

$$\varphi(x,\mu_0)-\delta\leqq\varphi_1(x),\ \ \varphi_2(x)\leqq\varphi(x,\mu_0)+\delta \tag{14}$$

ist. Für das Gebiet $\mathfrak{H}$ gibt es nach der Voraussetzung ein M_1, so das für $|\mu-\mu_0|<M_1$ und alle Punkte x, y von $\mathfrak{H}$

$$f(x,y,\mu_0)-\varepsilon<f(x,y,\mu)<f(x,y,\mu_0)+\varepsilon$$

ist. Nach Hilfssatz 1 ist daher

$$\operatorname{Min}\{\varphi_1(x),\varphi_2(x)\}\leqq\varphi(x,\mu)\leqq\operatorname{Max}\{\varphi_1(x),\varphi_2(x)\}, \tag{15}$$

[7] Einen in dieser Richtung liegenden Satz hat kürzlich Herr T. Yosie [Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan (3) 8 (1926) 16 ff.] bewiesen. Jedoch nur in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Punktes ξ,η. Der Beweis stützt sich auf den Beweis für den Peanoschen Existenzsatz, den Herr Perron mit Hilfe der Oberfunktionen gegeben hat, während hier diese Theorie nicht benutzt wird.

so weit die drei Integralkurven dem Gebiet $\mathfrak{H}$ angehören. Da $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ für $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ in $\mathfrak{H}$ liegen und da bei dem Bau des Gebiets $\mathfrak{H}$ auch die Punkte der zwischen $x, \varphi_1(x)$ und $x, \varphi_2(x)$ liegenden Strecke zu $\mathfrak{H}$ gehören, folgt aus (15), dass $\varphi(x, \mu)$ mindestens so weit eine in $\mathfrak{H}$ liegende Kurve liefert, wie dieses bei $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ der Fall ist, d. h. sicher im ganzen Intervall $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$. Für dieses Intervall folgt daher aus (14) und (15)

$$\varphi(x, \mu_0) - \delta \leqq \varphi(x, \mu) \leqq \varphi(x, \mu_0) + \delta.$$

Damit ist aber der Satz bewiesen.

Zusatz: Die Behauptung des Satzes 2 besagt, dass es zu jedem $\delta > 0$ ein M_1 gibt, so dass

$$|\varphi(x, \mu) - \varphi(x, \mu_0)| < \delta \text{ für } |\mu - \mu_0| < M_1$$

ist, und weiter, dass man mit *einem* M_1 für *alle* Punkte des Intervalls $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ auskommt. Der Beweis zeigt ausserdem, dass dieses M_1 auch unabhängig von der Auswahl der Kurven $y = \varphi(x, \mu)$ aus den ev. unendlich vielen Kurven gewählt werden kann, die zu einem Wert μ gehören.

Mit einer bekannten Methode kann aus dem Satz 2 nun das folgende Ergebnis über die gleichzeitige Änderung der Differentialgleichung und der Anfangsbedingungen hergeleitet werden.

Satz 3: *Die Funktion $f(x, y, \mu)$ sei für jedes feste μ des Intervalls $|\mu - \mu_0| < M$ stetig in dem Gebiet $\mathfrak{G}$ der x, y-Ebene, und in jedem beschränkten abgeschlossenen Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ sei gleichmässig*

$$f(x, y, \mu) \to f(x, y, \mu_0) \text{ für } \mu \to \mu_0.$$

Nach dem Satz von **Peano** *gibt es dann für die Differentialgleichung*

$$y' = f(x, y, \mu) \tag{13}$$

durch jeden Punkt ξ, η von $\mathfrak{G}$ mindestens eine Integralkurve; eine solche wird irgendwie ausgewählt, irgendwie bis zum Rand von $\mathfrak{G}$ fortgesetzt und mit

$$y = \varphi(x; \xi, \eta, \mu)$$

bezeichnet. Für $\mu = \mu_0$ möge durch den Punkt ξ_0, η_0 nur eine Integralkurve von (13) vorhanden sein. Endlich sei (α_0, β_0) das genaue Existenzintervall von $\varphi(x; \xi_0, \eta_0, \mu_0)$ und $\alpha_0 < \alpha_1 < \xi_0 < \beta_1 < \beta_0$. Dann existieren alle $\varphi(x; \xi, \eta, \mu)$ in dem Intervall $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$

für alle hinreichend nahe an ξ_0, η_0, μ_0 *gelegenen* ξ, η, μ, *und in diesem Intervall existiert für* $\xi \to \xi_0$, $\eta \to \eta_0$, $\mu \to \mu_0$ *gleichmässig der folgende dreifache Limes und hat den Wert*

$$\lim \varphi(x; \xi, \eta, \mu) = \varphi(x; \xi_0, \eta_0, \mu_0).$$ [8]

Beweis: Es werden zwei Zahlen α, β so eingeschoben, dass

$$\alpha_0 < \alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta < \beta_0$$

ist. Dann existiert $\varphi(x; \xi_0, \eta_0, \mu_0)$ auch noch im Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$, und dieses Integralkurvenstück hat vom Rand von $\mathfrak{G}$ einen Abstand, der grösser als eine positive Zahl ϱ ist. Es sei $\mathfrak{H}_1$ die abgeschlossene Menge der Punkte, die von dem Kurvenstück einen Abstand $\leqq \frac{1}{2}\varrho$ haben, und $\mathfrak{H}_2$ die abgeschlossene Menge der Punkte, für die dieser Abstand $\leqq \frac{1}{4}\varrho$ ist. Ferner sei ξ, η ein Punkt, für den $\alpha < \xi < \beta$ und

$$(16) \qquad |\xi - \xi_0| < \frac{1}{8}\varrho, \quad |\eta - \eta_0| < \frac{1}{8}\varrho$$

ist, so dass also ξ, η noch in $\mathfrak{H}_2$ liegt. Endlich werde

$$x = X + \xi - \xi_0$$

$$(17) \qquad \Phi(X) = \varphi(x; \xi, \eta, \mu) + \eta_0 - \eta$$

gesetzt. Dann ist

$$\Phi(\xi_0) = \varphi(\xi; \xi, \eta, \mu) + \eta_0 - \eta = \eta_0$$

und

$$\Phi'(X) = \varphi'(x; \xi, \eta, \mu) = f(x, \varphi(x; \xi, \eta, \mu), \mu) = f(X + \xi - \xi_0, \Phi(X) + \eta - \eta_0, \mu),$$

d. h. $\Phi(X)$ ist für $\alpha + \xi_0 - \xi \leqq X \leqq \beta + \xi_0 - \xi$ ein Integral der Differentialgleichung

$$(18) \qquad Y' = f(X + \xi - \xi_0, Y + \eta - \eta_0, \mu)$$

und hat für $X = \xi_0$ den Anfangswert η_0.

Liegt der Punkt X, Y in $\mathfrak{H}_2$, so liegt $X + \xi - \xi_0, Y + \eta - \eta_0$ wegen (16) sicher noch in $\mathfrak{H}_1$. Nach der Voraussetzung gibt es daher für ein beliebig gegebenes $\Delta > 0$ gleichmässig für alle in $\mathfrak{H}_2$ gelegenen Punkte X, Y ein M_0, so dass

[8] Für einen weniger weit reichenden Satz, der in dieser Richtung liegt, vgl. ebenfalls T. Yosie, a. a. O.

$|f(X+\xi-\xi_0,\ Y+\eta-\eta_0,\mu)-f(X+\xi-\xi_0,\ Y+\eta-\eta_0,\mu_0)|<\varDelta$ für $|\mu-\mu_0|<M_0$

ist. Und weiter gibt es gleichmässig für alle Punkte X, Y von $\mathfrak{H}_2$ ein $\varrho_0<\frac{1}{8}\varrho$, so dass

$$|f(X+\xi-\xi_0,\ Y+\eta-\eta_0,\mu_0)-f(X,Y,\mu_0)|<\varDelta$$

für $|\xi-\xi_0|<\varrho_0$ und $|\eta-\eta_0|<\varrho_0$ ist. Aus diesen beiden Abschätzungen folgt

$$|f(X+\xi-\xi_0,\ Y+\eta-\eta_0,\mu)-f(X,Y,\mu_0)|<2\varDelta$$

d. h. es ist gleichmässig für die Punkte X, Y von $\mathfrak{H}_2$ für $\xi\to\xi_0$, $\eta\to\eta_0$, $\mu\to\mu_0$ der dreifache Limes

$$\lim f(X+\xi-\xi_0,\ Y+\eta-\eta_0,\mu)=f(X,Y,\mu_0).$$

Da die Differentialgleichung (18) für $\xi=\xi_0$, $\eta=\eta_0$, $\mu=\mu_0$ mit (13) für $\mu=\mu_0$ identisch ist, also nur eine durch ξ_0,η_0 gehende Integralkurve besitzt, folgt daher aus Satz 2, dass $\varPhi(x)$ jedenfalls im Intervall[9] $\left\langle\frac{\alpha+\alpha_1}{2},\frac{\beta+\beta_1}{2}\right\rangle$ für alle ξ,η,μ, die hinreichend nahe an ξ_0,η_0,μ_0 liegen, existiert und für $\xi\to\xi_0$, $\eta\to\eta_0$, $\mu\to\mu_0$ der dreifache Limes

$$\lim\ \varPhi(x)=\varphi(x;\xi_0,\eta_0,\mu_0)$$

ist, und zwar gleichmässig für alle $\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_1)\leqq x\leqq\frac{1}{2}(\beta+\beta_1)$. D. h. es ist wegen (17) im Intervall $\left\langle\frac{\alpha+\alpha_1}{2},\frac{\beta+\beta_1}{2}\right\rangle$

$$\lim\ \varphi(x-\xi+\xi_0;\ \xi,\eta,\mu)=\varphi(x;\xi_0,\eta_0,\mu_0).$$

Wenn $\alpha_1\leqq x\leqq\beta_1$ ist, liegen demnach, da dieses Intervall für alle hinreichend kleinen $|\xi-\xi_0|$ im Intervall $\left\langle\frac{\alpha+\alpha_1}{2}+\xi-\xi_0,\ \frac{\beta+\beta_1}{2}+\xi-\xi_0\right\rangle$ enthalten ist, die Kurven $\varphi(x-\xi+\xi_0;\ \xi,\eta,\mu)$ und $\varphi(x;\xi,\eta,\mu)$ beide in $\mathfrak{H}_1$. Daher ist, wenn A eine obere Schranke von $f(x,y,\mu)$ in $\mathfrak{H}_1$ ist

[9] Diese vorsichtige Normierung des Intervalls ist notwendig, damit die Relation (17) für die in diesem Intervall liegenden X für alle hinreichend kleinen $|\xi-\xi_0|$ gesichert bleibt.

$$|\varphi(x; \xi, \eta, \mu) - \varphi(x - \xi + \xi_0; \xi, \eta, \mu)| = \left| \int\limits_{x-\xi+\xi_0}^{x} f(x, \varphi(x; \xi, \eta, \mu), \mu)\, dx \right| \leqq |\xi - \xi_0| A\,.$$

Aus dieser von x unabhängigen Abschätzung folgt schliesslich, dass in $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$ auch gleichmässig

$$\lim\ \varphi(x; \xi, \eta, \mu) = \varphi(x; \xi_0, \eta_0, \mu_0)$$

ist; w. z. b. w.

Tübingen, 16. Juni 1928.