# ÜBER EINE BESONDERE ART DER KETTENBRUCH-ENTWICKLUNG REELLER GRÖSSEN

VON

A. HURWITZ
in KÖNIGSBERG i. Pr.

Bezeichnet $x_0$ irgend eine reelle Grösse und setzt man

$$(1)\qquad x_0 = a_0 - \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 - \frac{1}{x_2}, \quad \ldots, \quad x_n = a_n - \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \ldots,$$

wo die ganze Zahl $a_n$ immer so bestimmt ist, dass die Differenz $x_n - a_n$ zwischen die Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ fällt, so erhält man für $x_0$ die Kettenbruch-Entwicklung

$$(2)\qquad x_0 = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ldots}}$$

In der vorliegenden Arbeit habe ich diese Art von Kettenbruch-Entwicklung in eingehender Weise untersucht. Ich hatte diese Untersuchung schon abgeschlossen, als ich auf eine in den Göttinger Nachrichten aus dem Jahre 1873 erschienene Note[1] von Herrn MINNIGERODE aufmerksam wurde. Herr MINNIGERODE zeigt, dass die Entwicklung (2) immer periodisch wird, wenn $x_0$ einer ganzzahligen quadratischen Gleichung genügt, sowie dass diese periodische Entwicklung zur vollständigen Auflösung der Pell'schen Gleichung dienen kann. Diese Resultate ergeben

[1] *Über eine neue Methode, die Pell'sche Gleichung aufzulösen.*

sich auch im Verlaufe der vorliegenden Untersuchung; sie bezeichnen indessen hier nur einzelne Glieder in der Kette von Sätzen, deren Gesammtheit die Theorie jener Kettenbruch-Entwicklung ausmacht. Dass die Entwicklung (2) für quadratische Irrationalitäten periodisch wird, folgt übrigens auch unmittelbar aus den Sätzen, welche ich im 11ten Bande dieser Zeitschrift über die Entwicklung complexer Grössen in Kettenbrüche bewiesen habe.

Bei jeder besonderen Art von Kettenbruch-Entwicklung ist das Gesetz, nach welchem die Näherungsbrüche fortschreiten, von fundamentaler Bedeutung. Es handelt sich namentlich darum, zu untersuchen ob und in welcher Weise die Nenner der Näherungsbrüche wachsen, sowie festzustellen wie stark die entwickelte Grösse durch die Näherungsbrüche angenähert wird. Es ist nun merkwürdig, dass diese Untersuchung mit Nothwendigkeit darauf führt, neben der ursprünglichen noch eine zweite Art von Kettenbruch-Entwicklung in Betracht zu ziehen. Dieser Umstand ist bislang wohl deshalb nirgends hervorgehoben worden, weil in den bisher ausführlich untersuchten Fällen die zweite Entwicklungs-Art mit der ursprünglichen identisch ist. In dem vorliegenden Falle werden dagegen, wie man sehen wird, beide Arten gänzlich von einander verschieden.

## § 1. *Bezeichnungen.*

Im Folgenden werde ich die Kettenbruch-Entwicklung einer Grösse $x_0$, welche aus den Gleichungen

$$(3)\qquad x_0 = a_0 - \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 - \frac{1}{x_2}, \quad \ldots, \quad x_n = a_n - \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \ldots$$

hervorgeht, abkürzend durch

$$(4)\qquad x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1})$$

bezeichnen. Den $n^{\text{ten}}$ Näherungsbruch dieser Entwicklung nenne ich

$$5)\qquad \frac{p_n}{q_n} = (a_0, a_1, \ldots, a_n),$$

und denke mir den Zähler und Nenner dieses Bruches durch die bekannten Recursionsformeln

$$(6)\qquad p_n = a_n p_{n-1} - p_{n-2}, \qquad q_n = a_n q_{n-1} - q_{n-2},$$

mit Hülfe der Anfangswerthe

$$p_{-2} = 0, \qquad p_{-1} = 1; \qquad q_{-1} = 0, \qquad q_0 = 1$$

berechnet. Zwischen den eingeführten Grössen bestehen die Identitäten:

$$(7)\qquad p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n = 1,$$

$$(8)\qquad x_0 = \frac{p_n x_{n+1} - p_{n-1}}{q_n x_{n+1} - q_{n-1}}.$$

Ich bemerke ferner, dass ich die reellen Zahlen (und nur von solchen wird in der Folge die Rede sein) in der üblichen Weise durch die Punkte einer unbegrenzten Geraden repräsentire. Diese Gerade betrachte ich als in sich geschlossen, entsprechend dem Umstande, dass die beiden Werthe $+\infty$ und $-\infty$ als nicht verschieden gelten sollen. Durchläuft ein Punkt die Gerade von $-\infty$ bis $+\infty$, so bewegt er sich in derjenigen Richtung, welche ich als die »positive» bezeichnen will. Die Gesammtheit der Werthe, die ein Punkt nach und nach repräsentirt, welcher sich in positivem Sinne von $a$ bis $b$ bewegt, bilden das Intervall $a \dots b$. Soll die obere oder untere Grenze eines Intervalles nicht zu demselben gerechnet werden, so deute ich dieses dadurch an, dass ich die betreffende Grenze in Klammern setze. Hiernach wird z. B. eine Grösse $\xi$ in das Intervall $-\frac{1}{2} \dots \left(\frac{1}{2}\right)$ fallen, wenn $-\frac{1}{2} \leqq \xi < \frac{1}{2}$ und in das Intervall $2 \dots (-2)$, wenn entweder $\xi \geqq 2$ oder $\xi < -2$ ist. Um auszudrücken, dass eine Grösse $\xi$ in ein bestimmtes Intervall $a \dots b$ fällt, werde ich mich bisweilen der symbolischen Gleichung

$$(9)\qquad \xi = a \dots b$$

bedienen. Ich stelle hier einige Regeln zusammen, nach welchen man mit solchen symbolischen Gleichungen rechnen kann. Mit der Gleichung (9) bestehen immer gleichzeitig die folgenden Gleichungen:

$$\xi + k = a + k \ldots b + k, \tag{10}$$

wo $k$ positiv oder negativ sein kann.

$$k\xi = ka \ldots kb, \tag{11}$$

wenn $k$ positiv ist.

$$-\xi = -b \ldots -a. \tag{12}$$

$$-\frac{1}{\xi} = -\frac{1}{a} \ldots -\frac{1}{b}. \tag{13}$$

Allgemein besteht der Satz:

Bezeichnen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgend welche Grössen, so folgt aus (9) die Gleichung

$$\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} = \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta} \ldots \frac{\alpha b + \beta}{\gamma b + \delta},$$

oder die Gleichung

$$\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} = \frac{\alpha b + \beta}{\gamma b + \delta} \ldots \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta},$$

je nachdem $\alpha\delta - \beta\gamma$ positiv oder negativ ist.

Ferner ist es gestattet aus den beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \xi = a \ldots b \\ \xi' = a' \ldots b' \end{cases} \tag{14}$$

die Folgerung

$$\xi + \xi' = a + a' \ldots b + b' \tag{15}$$

zu ziehen: 1.) wenn $a < b$ und $a' < b'$, 2.) wenn $a < b, a' > b', a + a' > b + b'$ und 3.) wenn $a > b$, $a' < b'$, $a + a' > b + b'$ ist. Falls in einer der Gleichungen (9) und (14) die eine oder andere Grenze mit einer Klammer versehen ist, so muss auch in jeder abgeleiteten Gleichung die entsprechende Grenze in Klammern gesetzt werden.

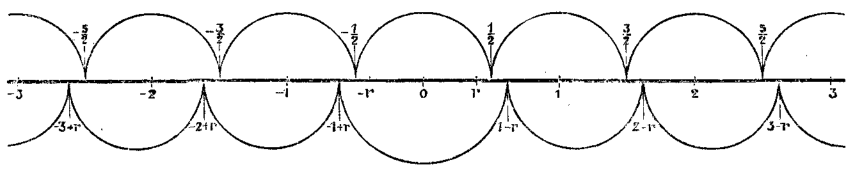
## § 2. *Die Theilnenner der Kettenbruch-Entwicklung.*

Die Kettenbruch-Entwicklung, welche ich untersuchen will, entsteht für eine beliebige Grösse $x_0$, wenn man die Gleichungskette (3) nach folgender Massgabe bildet. Man markire auf der Geraden, deren Punkte die reellen Zahlen repräsentiren, die Punkte $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots$ und theile dadurch die ganze unendliche Gerade in unendlich viele Intervalle[1]

$$a - \frac{1}{2} \ldots \left(a + \frac{1}{2}\right), \; (a = -\infty \ldots + \infty).$$

Dann soll in der Gleichungskette (3) für $a_n$ immer diejenige ganze Zahl genommen werden, welche in demselben Intervalle wie $x_n$ liegt.

Fig. 1




Diese Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, welche die Theilnenner der Kettenbruch-Entwicklung bilden, unterliegen gewissen allgemeinen Gesetzen, welche ich zunächst aufstellen will. Aus der Gleichung

$$x_i - a_i = -\frac{1}{2} \ldots \left(\frac{1}{2}\right), \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

folgt

$$x_{i+1} = -\frac{1}{x_i - a_i} = 2 \ldots (-2).$$

---

[1] Siehe Figur 1. Um die Anschaulichkeit der Figur zu erhöhen, ist über jedes der in Betracht kommenden Intervalle ein nach oben gerichteter Halbkreis beschrieben. Die in der Figur ebenfalls gezeichneten, nach unten gerichteten Halbkreise sollen in gleicher Weise eine später zu betrachtende Intervall-Eintheilung anschaulich machen.

Daher können die Theilnenner $a_1, a_2, a_3, \ldots$, nur Zahlen aus der Reihe

$$\pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$$

sein. Wenn ferner einer dieser Theilnenner, etwa $a_i$, den Werth 2 erhält, so ist

$$x_i = 2 \ldots \left(2 + \frac{1}{2}\right),$$

also

$$x_i - a_i = 0 \ldots \left(\frac{1}{2}\right),$$

und

$$x_{i+1} = -\frac{1}{x_i - a_i} = \infty \ldots (-2).$$

Es kann daher, wenn $a_i = 2$ ist, der folgende Theilnenner $a_{i+1}$ nur der Reihe

$$-2, -3, \ldots$$

entnommen sein. Ebenso ergiebt sich: wenn $a_i = -2$ ist, so ist der auf $a_i$ folgende Theilnenner $a_{i+1}$ nothwendig eine Zahl der Reihe

$$+2, +3, \ldots.$$

Hiermit sind nun alle Gesetze, welche für die Theilnenner gelten, erschöpft, wie aus folgendem Satze hervorgeht:

*Es sei*

$$x_0 = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, y_{n+1}), \tag{16}$$

*wo $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ ganze Zahlen, $y_{n+1}$ eine reelle Grösse bezeichnen. Dann stellt die Gleichung* (16) *die hier betrachtete Kettenbruch-Entwicklung der Grösse $x_0$ vor, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1.) *Die Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sind absolut genommen grösser als* 1.

2.) *Ist eine der Zahlen $b_1, b_2, \ldots$ etwa $b_i$, gleich* 2 *bez. gleich* $-2$, *so ist die folgende $b_{i+1}$ eine negative bez. positive Zahl.*

3.) *Die Grössen $y_{n+1}$ und $b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ gehören dem Intervalle* $2 \ldots (-2)$ *an.*

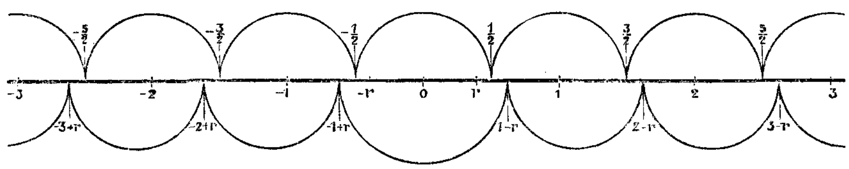
## § 2. *Die Theilnenner der Kettenbruch-Entwicklung.*

Die Kettenbruch-Entwicklung, welche ich untersuchen will, entsteht für eine beliebige Grösse $x_0$, wenn man die Gleichungskette (3) nach folgender Massgabe bildet. Man markire auf der Geraden, deren Punkte die reellen Zahlen repräsentiren, die Punkte $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \dots$ und theile dadurch die ganze unendliche Gerade in unendlich viele Intervalle[1]

$$a - \frac{1}{2} \dots \left(a + \frac{1}{2}\right), \quad (a = -\infty \dots + \infty).$$

Dann soll in der Gleichungskette (3) für $a_n$ immer diejenige ganze Zahl genommen werden, welche in demselben Intervalle wie $x_n$ liegt.

Fig. 1.




Diese Zahlen $a_1, a_2, a_3, \dots$, welche die Theilnenner der Kettenbruch-Entwicklung bilden, unterliegen gewissen allgemeinen Gesetzen, welche ich zunächst aufstellen will. Aus der Gleichung

$$x_i - a_i = -\frac{1}{2} \dots \left(\frac{1}{2}\right), \qquad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

folgt

$$x_{i+1} = -\frac{1}{x_i - a_i} = 2 \dots (-2).$$

---

[1] Siehe Figur 1. Um die Anschaulichkeit der Figur zu erhöhen, ist über jedes der in Betracht kommenden Intervalle ein nach oben gerichteter Halbkreis beschrieben. Die in der Figur ebenfalls gezeichneten, nach unten gerichteten Halbkreise sollen in gleicher Weise eine später zu betrachtende Intervall-Eintheilung anschaulich machen.

*oder die Entwicklung*

(21) $$\frac{p_n}{q_n} = (a_0\,,\, a_1\,,\, a_2\,,\, \ldots\,,\, a_{n-1} + 1\,,\, 2),$$

*je nachdem* $a_n$ *von* $-2$ *verschieden oder gleich* $-2$ *ist.*

Endlich folgt aus der Entwicklung

$$x_0 = (a_0\,,\, a_1\,,\, a_2\,,\, \ldots\,,\, a_n\,,\, x_{n+1})$$

die andere

$$-x_0 = (-a_0\,,\, -a_1\,,\, -a_2\,,\, \ldots\,,\, -a_n\,,\, -x_{n+1}),$$

mit einziger Ausnahme des Falles, wo $x_{n+1} = 2$ ist. In diesem Falle lautet die Entwicklung von $-x_0$:

$$-x_0 = (-a_0\,,\, -a_1\,,\, -a_2\,,\, \ldots\,,\, -a_n + 1\,,\, 2).$$

## § 3. *Die Nenner der Näherungsbrüche.*

Ich betrachte nun die Nenner

(22) $$q_0 = 1, \qquad q_1 = a_1, \quad q_2, \quad q_3, \ldots$$

der Näherungsbrüche, welche zu der Entwicklung einer beliebigen Grösse

(23) $$x_0 = (a_0\,,\, a_1\,,\, a_2\,,\, \ldots)$$

gehören. Aus der Gleichung

(24) $$q_n = a_n q_{n-1} - q_{n-2},$$

folgt

$$|q_n| \geqq |a_n q_{n-1}| - |q_{n-2}| \geqq 2|q_{n-1}| - |q_{n-2}|.$$

wo $|q_n|$, $|a_n q_{n-1}| \ldots$, wie üblich, die absoluten Beträge von $q_n, a_n q_{n-1}, \ldots$ bedeuten. Wenn nun $|q_{n-1}| > |q_{n-2}|$, so wird auch, der vorhergehenden Ungleichung zufolge, $|q_n| > |q_{n-1}|$ sein. Da aber offenbar $|q_1| > |q_0|$, so folgt nach und nach $|q_2| > |q_1|, |q_3| > |q_2|, \ldots$ und allgemein $|q_n| > |q_{n-1}|$. Es liegt also der Quotient

$$(25) \qquad \mathfrak{Q}_n = \frac{q_{n-1}}{q_n}$$

beständig zwischen $-1$ und $+1$.

Man denke sich nun für $x_0$ alle möglichen reellen Grössen genommen, und für jeden einzelnen Werth von $x_0$ die Reihe der Quotienten $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3, \ldots$ gebildet. Alle diese Quotienten werden durch Punkte des Intervall's $-1 \ldots +1$ repräsentirt, und man erhält also in diesem Intervalle, den unendlich vielen Werthen von $\mathfrak{Q}_n$ entsprechend, unendlich viele Punkte. Es ist nun eine für unsere Theorie fundamentale Frage, welches die untere und welches die obere Grenze dieser unendlichen Menge von Punkten ist. Bezeichnen wir den reciproken Werth von $\mathfrak{Q}_n$ mit

$$(26) \qquad Q_n = \frac{q_n}{q_{n-1}},$$

so finden wir, vermöge der Gleichung (24)

$$(27) \qquad Q_1 = a_1, \quad Q_2 = a_2 - \frac{1}{Q_1}, \quad Q_3 = a_3 - \frac{1}{Q_2}, \ldots, Q_n = a_n - \frac{1}{Q_{n-1}}, \ldots,$$

woraus für $Q_n$ die Kettenbruch-Entwicklung

$$(28) \qquad Q_n = (a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1)$$

folgt. Betrachten wir nun zunächst nur solche Werthe von $x_0$, für welche keiner der Theilnenner $a_1, a_2, \ldots$ gleich $2$ oder $-2$ wird. Es ist dann

$$Q_1 = a_1 = 3 \ldots -3,$$

$$Q_2 = a_2 - \frac{1}{Q_1} = 3 - \frac{1}{3} \ldots -3 - \frac{1}{-3},$$

$$Q_3 = a_3 - \frac{1}{Q_2} = 3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3}} \ldots -3 - \cfrac{1}{-3 - \cfrac{1}{-3}},$$

u. s. f. Die Zahlen $3, (3, 3), (3, 3, 3), \ldots$ bilden nun eine Reihe beständig abnehmender Grössen, deren untere Grenze der unendliche Kettenbruch

$$(3, 3, 3, 3, \dots)$$

ist. Bezeichnen wir mit

$$(29)\qquad r = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,382\dots$$

die kleinere Wurzel der Gleichung

$$r + \frac{1}{r} = 3,$$

so ist $\frac{1}{r}$ der Werth des unendlichen Kettenbruchs. Die untere und obere Grenze der betrachteten Werthe $Q_n$ sind also $-\frac{1}{r}$ bez. $+\frac{1}{r}$, und folglich die Grenzen von $\mathfrak{Q}_n = \frac{1}{Q_n}$ bez. $-r$ und $+r$. Betrachten wir nun auch den Fall, wo in der Entwicklung von $x_0$ die Werthe $2$ und $-2$ als Theilnenner auftreten. Ist $a_{n+1}$ der erste Theilnenner, welcher gleich $2$ oder $-2$ ist, so wird

$$Q_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{Q_n} = \begin{cases} \quad 2-r\dots 2+r \\ \text{oder}\quad -2-r\dots -2+r \end{cases}$$

also a fortiori

$$Q_{n+1} = +2-r\dots -2+r$$

und

$$\mathfrak{Q}_{n+1} = \frac{1}{Q_{n+1}} = -1+r\dots 1-r,$$

da $\frac{1}{2-r} = 1-r$ ist. Die in diesem Falle stattfindenden Grenzen $-1+r$ und $1-r$ erweisen sich nun als die allgemein richtigen, wie aus dem folgenden Satze hervorgeht:

*Entwickelt man irgend eine Grösse $x_0$ in den Kettenbruch*

$$x_0 = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots),$$

*und bezeichnet $\mathfrak{Q}_n$ den reciproken Werth von*

$$Q_n = \frac{q_n}{q_{n-1}} = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1),$$

*so liegt $\mathfrak{Q}_n$ stets zwischen* $-r$ *und* $1-r$, *wenn* $a_n$ *von* $-2$ *verschieden ist, und zwischen* $-1+r$ *und* $r$, *wenn* $a_n$ *von* $2$ *verschieden ist.*

Da nach den Gleichungen (27)

$$Q_{n+1} = a_{n+1} - \mathfrak{Q}_n$$

ist, da ferner für einen positiven Werth von $a_{n+1}$ der Theilnenner $a_n$ nicht gleich $2$, für einen negativen Werth von $a_{n+1}$ nicht gleich $-2$ sein kann, so lässt sich unser Satz auch so aussprechen:

*Der Werth von*

$$Q_{n+1} = (a_{n+1}, a_n, \ldots, a_1)$$

*liegt im Intervalle* $a_{n+1} - r \ldots a_{n+1} + 1 - r$, *wenn* $a_{n+1}$ *positiv ist, und im Intervalle* $a_{n+1} - 1 + r \ldots a_{n+1} + r$, *wenn* $a_{n+1}$ *negativ ist.*

Nehmen wir an unser Satz gelte für den Index $n-1$, so folgt aus der zweiten Form des Satzes

$$Q_n = a_n - r \ldots a_n + 1 - r, \quad \text{für} \quad a_n = 2, 3, \ldots,$$

und

$$Q_n = a_n - 1 + r \ldots a_n + r, \quad \text{für} \quad a_n = -2, -3, \ldots.$$

Die verschiedenen Intervalle für $a_n = 2, 3, \ldots$ reihen sich an einander, ebenso die Intervalle für $a_n = -2, -3, \ldots$. Indem man dieses beachtet erkennt man, dass

$$Q_n = 3 - r \ldots -2 + r,$$

wenn $a_n$ von $2$ verschieden ist, und

$$Q_n = 2 - r \ldots -3 + r,$$

wenn $a_n$ von $-2$ verschieden ist. Im ersten Falle ergiebt sich

$$\mathfrak{Q}_n = \frac{1}{Q_n} = -1 + r \ldots r,$$

im zweiten Falle

$$\mathfrak{Q}_n = \frac{1}{Q_n} = -r \ldots 1 - r.$$

Unser Satz gilt daher für den Index $n$, wenn er für den Index $n - 1$ als gültig vorausgesetzt wird. Nun ist der Satz aber für $n = 1$, wo $Q_1 = a_1$ ist, offenbar richtig, und also gilt er allgemein für jeden Werth von $n$.

Da $Q_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}$ in allen Fällen dem Intervalle $2 - r \ldots - 2 + r$ angehört, also dem absoluten Betrage nach grösser als $2 - r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ist, so ergiebt sich das Corollar:

»Die absoluten Beträge der Nenner $q_0, q_1, q_2, \ldots$ der Näherungsbrüche wachsen stärker als die Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Exponenten $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.»

## § 4. *Die Kettenbruch-Entwicklung zweiter Art.*

Der im vorigen Paragraphen bewiesene Satz führt dazu, neben der bisher betrachteten Art von Kettenbruch-Entwicklung noch eine zweite einzuführen. Man theile nämlich die unendliche Gerade durch die Punkte[1]

$$\pm (1 - r), \pm (2 - r), \pm (3 - r), \ldots$$

in die Intervalle

$$\ldots, (-3 + r) \ldots -2 + r, (-2 + r) \ldots -1 + r, (-1 + r) \ldots (1 - r),$$
$$1 - r \ldots (2 - r), 2 - r \ldots (3 - r), \ldots.$$

Ist nun $x_0$ eine beliebige Grösse, so bilde man die Gleichungskette

$$(30) \qquad x_0 = a_0 - \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = a_1 - \frac{1}{x_2}, \quad \ldots, \quad x_n = a_n - \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \ldots,$$

wo allgemein $a_n$ diejenige ganze Zahl bezeichnet, welche in demselben Intervalle wie $x_n$ liegt. Um die hierdurch definirte neue Art der Kettenbruch-Entwicklung von der früheren bequem unterscheiden zu können, will ich sie als die *zweite* Art, dagegen die frühere als die *erste* Art be-

[1] Siehe Figur 1.

zeichnen. Der Satz des letzten Paragraphen lässt sich dann offenbar so aussprechen:

*Entwickelt man eine Grösse $x_0$ in einen Kettenbruch erster Art*

$$x_0 = (a_0\,, a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n\,, \ldots), \tag{31}$$

*und bezeichnen $q_{n-1}\,, q_n$ die Nenner zweier aufeinander folgender Näherungsbrüche dieses Kettenbruches, so ist vermöge der Gleichung*

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = (a_n\,, a_{n-1}\,, \ldots, a_2\,, a_1) \tag{32}$$

*der Bruch $\frac{q_n}{q_{n-1}}$ in einen Kettenbruch zweiter Art entwickelt.*

Die beiden Arten von Kettenbruch-Entwicklungen stehen in einem Verhältniss der Reciprocität zu einander. Dieses spricht sich darin aus, dass der vorstehende Satz im Wesentlichen richtig bleibt, wenn man die Worte »erster Art» und »zweiter Art» mit einander vertauscht.

In der That: die in der Gleichungskette (30) auftretenden Grössen befriedigen die Bedingung

$$x_i - a_i = -\frac{1}{x_{i+1}} = (-1 + r)\ldots(1 - r),$$

also

$$x_{i+1} = (2 - r)\ldots(-2 + r). \qquad {\scriptstyle (i=0,1,2,\ldots)}$$

Folglich sind die Zahlen $a_{i+1}$ $(i = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots)$ sämmtlich der Reihe

$$+2\,, -2\,, +3\,, -3\,, \ldots$$

entnommen. Ist ferner $a_{n-1}$ positiv, so ist

$$x_{n-1} - a_{n-1} = -\frac{1}{x_n} = \quad -r\ldots(1 - r),$$

also

$$x_n = 3 - r\ldots(-2 + r),$$

folglich kann $a_n$ nicht gleich 2 werden. Ebenso ergiebt sich, dass auf eine negative Zahl $a_{n-1}$ nicht der Werth $a_n = -2$ folgen kann.

In Hinblick auf § 2 ergiebt sich hieraus, dass der Kettenbruch (32) von der ersten Art ist, wenn (31) die Entwicklung zweiter Art von $x_0$ vorstellt. Nur der Fall, in welchem $a_1 = -2$ ist, bildet eine Ausnahme; in diesem Falle wird nämlich die Entwicklung erster Art von $\frac{q_n}{q_{n-1}}$ nicht durch (32), sondern durch die Gleichnng

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2 + 1, 2)$$

gegeben sein. Diese Überlegungen lassen sich auch in folgenden Satz zusammenfassen, welcher dem Satze des vorigen Paragraphen an die Seite zu stellen ist:

*Wenn $x_0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ ein Kettenbruch zweiter Art ist, so liegt*

$$Q_n = \frac{q_n}{q_{n-1}} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$$

1.) *im Intervalle $a_n - \frac{1}{2} \ldots a_n + \frac{1}{2}$, wenn $a_n$ von 2 und $-2$ verschieden ist,*

2.) *im Intervalle $a_n \ldots a_n + \frac{1}{2}$, wenn $a_n = 2$ ist,*

3.) *im Intervalle $a_n - \frac{1}{2} \ldots a_n$, wenn $a_n = -2$ ist.*

*Dabei können die Intervallgrenzen $a_n - \frac{1}{2}$, $a_n + \frac{1}{2}$ nur für $n = 2$, die Grenze $a_n$ nur für $n = 1$ erreicht werden.*

Zur Beurtheilung, ob ein vorgelegter Kettenbruch ein solcher von der zweiten Art ist, kann folgender Satz dienen, welchen wir indessen in der Folge nicht verwenden werden und deshalb nur beiläufig anführen:

»Es sei

$$x_0 = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, y_{n+1}),$$

wo $b_0, b_1, \ldots, b_n$ ganze Zahlen, $y_{n+1}$ eine reelle Grösse bezeichnen. Dann stellt diese Gleichung stets die Kettenbruch-Entwicklung zweiter Art von $x_0$ vor, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1.) Die Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sind absolut genommen grösser als 1.

2.) Wenn eine der Zahlen $b_0, b_1, b_2, \ldots$, etwa $b_i$, positiv bez. negativ ist, so ist die folgende $b_{i+1}$ von 2 bez. — 2 verschieden.

3.) Die Grösse $y_{n+1}$ liegt im Intervalle $(3-r)\ldots(-2+r)$, wenn $b_n > 0$ und im Intervalle $(2-r)\ldots(-3+r)$, wenn $b_n < 0$ ist.»

## § 5. *Convergenz der betrachteten Kettenbrüche.*

Der Grad der Convergenz eines Kettenbruches

$$x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \tag{33}$$

wird durch die Grösse der Differenz $x_0 - \frac{p_n}{q_n}$ gemessen. Nach den Gleichungen (7) und (8) ist

$$x_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{q_n^2\left(x_{n+1} - \frac{1}{Q_n}\right)} \tag{34}$$

wobei wieder

$$Q_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}$$

gesetzt ist. Aus den Gleichungen (27) folgt

$$x_{n+1} - \frac{1}{Q_n} = (x_{n+1} - a_{n+1}) + Q_{n+1}. \tag{35}$$

Wenn nun der Kettenbruch (33) von der ersten Art ist, so unterscheiden wir folgende Fälle:

1.) Die Zahl $a_{n+1}$ ist von $\pm 2$ verschieden. Nach § 3 haben wir dann

$$Q_{n+1} = (3-r)\ldots(-3+r).$$

Ferner ist

$$x_{n+1} - a_{n+1} = -\frac{1}{2}\ldots\left(\frac{1}{2}\right),$$

also, durch Addition,

$$x_{n+1} - \frac{1}{Q_n} = \left(\frac{5}{2} - r\right)\ldots\left(-\frac{5}{2} + r\right).$$

2.) Es ist $a_{n+1} = 2$. Alsdann kommt:

$$Q_{n+1} = (2 - r) \dots (3 - r),$$

$$x_{n+1} - a_{n+1} = 0 \dots \left(\frac{1}{2}\right),$$

also

$$x_{n+1} - \frac{1}{Q_n} = (2 - r) \dots \left(\frac{7}{2} - r\right)$$

3.) Es ist $a_{n+1} = -2$; in diesem Falle hat man

$$Q_{n+1} = (-3 + r) \dots (-2 + r),$$

$$x_{n+1} - a_{n+1} = -\frac{1}{2} \dots (0),$$

und also

$$x_{n+1} - \frac{1}{Q_n} = \left(-\frac{7}{2} + r\right) \dots (-2 + r).$$

Wie man sieht liegt $x_{n+1} - \frac{1}{Q_n}$ in allen Fällen im Intervalle $(2 - r) \dots (-2 + r)$ und ist also absolut genommen grösser als $2 - r$.

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn der Kettenbruch (33) von der zweiten Art ist. Denn, wenn $a_{n+1}$ einen positiven Werth hat, so ist nach dem letzten Satze des § 4

$$Q_{n+1} = (2) \dots \infty;$$

ferner ist

$$x_{n+1} - a_{n+1} = -r \dots (1 - r),$$

also

$$x_{n+1} - \frac{1}{Q_n} = (2 - r) \dots \infty.$$

Wenn zweitens $a_{n+1}$ einen negativen Werth hat, so ist

$$Q_{n+1} = -\infty \dots (-2),$$

$$x_{n+1} - a_{n+1} = (-1 + r) \dots r,$$

also

$$x_{n+1} - \frac{1}{Q_n} = -\infty \dots (-2 + r).$$

In beiden Fällen ist also $x_{n+1} - \frac{1}{Q_n}$ absolut genommen grösser als $2 - r$.

Aus den vorstehenden Betrachtungen ergiebt sich unmittelbar der Satz:

*Entwickelt man die Grösse $x_0$ in einen Kettenbruch erster oder zweiter Art:*

$$x_0 = (a_0\,, a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n\,, \ldots)$$

*und setzt man*

$$(36)\qquad x_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\theta_n(1-r)}{q_n^2} = \frac{\theta_n(\sqrt{5}-1)}{2q_n^2}, \qquad {\scriptstyle (n=1,2,\ldots)}$$

*so sind die Grössen $\theta_n$ sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als* 1.

Hieraus folgt beiläufig, dass die beiden Entwicklungen einer jeden Grösse $x_0$ convergent sind, und dass beide abbrechen, wenn $x_0$ eine rationale Zahl ist.

## § 6. *Äquivalente Grössen.*

Zwei Grössen $x$ und $x'$ heissen äquivalent, wenn eine Gleichung der Form

$$(37)\qquad x' = \frac{\alpha x - \beta}{\gamma x - \delta}$$

stattfindet, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen bezeichnen, welche der Bedingung

$$(38)\qquad \beta\gamma - \alpha\delta = 1$$

genügen. Entwickelt man zwei Grössen $x$ und $x'$ nach irgend einem Gesetze in die Kettenbrüche

$$(39)\qquad \begin{cases} x = (a_0\,, a_1\,, \ldots, a_n\,, x_{n+1}), \\ x' = (a'_0\,, a'_1\,, \ldots, a'_m\,, x'_{m+1}), \end{cases}$$

wo die Theilnenner $a_0, \ldots, a_n, a'_0, \ldots, a'_m$ ganzzahlige Werthe haben, so sind $x$ und $x'$ äquivalent, wenn für irgend einen Werth von $n$ und irgend einen Werth von $m$

$$(40)\qquad x_{n+1} = x'_{m+1}$$

wird. Ich will nun untersuchen, ob umgekehrt aus der Äquivalenz zweier Grössen $x$ und $x'$ die Gleichung (40) gefolgert werden kann, wenn die Entwicklungen (39) beide von der ersten Art sind. Da der Fall wo $x$ und $x'$ rational sind sich unmittelbar in bejahendem Sinne erledigt, so setze ich voraus, dass $x$ und $x'$ bei dieser Untersuchung irrationale Werthe besitzen.

Zwischen den irrationalen Grössen $x$ und $x'$ bestehe also die Gleichung (37). Wir entwickeln $x$ in den Kettenbruch erster Art

(41) $$x = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}),$$

dessen Einrichtung die Gleichung

(42) $$x = \frac{p_n x_{n+1} - p_{n-1}}{q_n x_{n+1} - q_{n-1}}$$

ergiebt. Durch Elimination von $x$ zwischen (37) und (42) kommt:

(43) $$x' = \frac{p x_{n+1} - p'}{q x_{n+1} - q'},$$

wobei zur Abkürzung

(44) $$\begin{cases} p = \alpha p_n - \beta q_n, & p' = \alpha p_{n-1} - \beta q_{n-1}, \\ q = \gamma p_n - \delta q_n, & q' = \gamma p_{n-1} - \delta q_{n-1} \end{cases}$$

gesetzt ist. Ich entwickle nun $\frac{p}{q}$ in einen Kettenbruch erster Art

(45) $$\frac{p}{q} = (b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}, b_r).$$

Wenn sich hierbei $b_r = 2$ ergiebt, so will ich für diese Entwicklung eventuell die andere

$$\frac{p}{q} = (b_0, b_1, \ldots, b_{r-1} - 1, -2)$$

substituiren, und zwar dann, wenn in der Entwicklung von

(46) $$x_{n+1} = (a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots) = (a_{n+1}, x_{n+2})$$

die Zahl $a_{n+1}$ positiv ist. Diese Möglichkeit denke ich in die Gleichung (45) aufgenommen, so dass in derselben $b_r$ sowohl gleich 2 als gleich $-2$ werden kann. Ferner ersetze ich eventuell $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, wodurch zugleich nach (44) $-p$ und $-q$ an die Stelle von $p$ und $q$ treten, und zwar nach der Massgabe, dass der letzte Näherungsbruch des Kettenbruches (45) den Zähler $+p$ und den Nenner $+q$ erhalten soll. Dies vorausgeschickt, sei nun

(47) $$\frac{p''}{q''} = (b_0, b_1, \ldots, b_{r-1})$$

der vorletzte Näherungsbruch des Kettenbruches (45), so ist

$$p''q - q''p = 1.$$

Da nun aus den Gleichungen (44) auch

$$p'q - q'p = (\beta\gamma - \alpha\delta)(p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n) = 1$$

folgt, so muss sein

(48) $$q'' = q' + tq, \qquad p'' = p' + tp,$$

wo $t$ eine ganze Zahl bedeutet. Diese ganze Zahl kann aber von einem bestimmten $n$ ab nur einen der Werthe $0, 1, -1$ haben. Um dieses zu beweisen, bemerke ich, dass

$$\frac{q'}{q} = \frac{\gamma p_{n-1} - \delta q_{n-1}}{\gamma p_n - \delta q_n} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{\gamma}{q_n(\gamma p_n - \delta q_n)},$$

ferner der Gleichung (36) zufolge

$$q_n p_n = q_n^2 x - \theta_n(1 - r),$$

und daher endlich

$$\frac{q'}{q} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{\gamma}{q_n^2(\gamma x - \delta) - \gamma\theta_n(1 - r)} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \varepsilon_n$$

ist. Der mit $\varepsilon_n$ bezeichnete Bruch wird offenbar mit wachsenden Werthen von $n$ unendlich klein und besitzt das Vorzeichen von $\frac{\gamma}{\gamma x - \delta}$. Sei nun erstens $a_{n+1}$ positiv. Dann sind $a_n$ und $b_r$ von $2$ verschieden. Daher bestehen in Hinblick auf den Satz des § 3 die Gleichungen:

$$\frac{q''}{q} = (-1 + r)\ldots(r),$$

$$-\frac{q'}{q} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} - \varepsilon_n = (-r - \varepsilon_n)\ldots(1 - r - \varepsilon_n),$$

und folglich

$$t = \frac{q''}{q} - \frac{q'}{q} - = (-1 - \varepsilon_n) \dots (1 - \varepsilon_n).$$

Wenn zweitens $a_{n+1}$ negativ ist, so sind $a_n$ und $b_r$ von $-2$ verschieden. Daher ist:

$$\frac{q''}{q} = (-r) \dots (1 - r),$$

$$-\frac{q'}{q} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} - \varepsilon_n = (-1 + r - \varepsilon_n) \dots (r - \varepsilon_n),$$

und folglich

$$t = \frac{q''}{q} - \frac{q'}{q} = (-1 - \varepsilon_n) \dots (1 - \varepsilon_n).$$

Die ganze Zahl $t$ liegt also stets zwischen $-1 - \varepsilon_n$ und $1 - \varepsilon_n$. Wenn daher $\frac{\gamma}{\gamma x - \delta}$ und also auch $\varepsilon_n$ positiv ist, so kann $t$ nur gleich $0$ oder $-1$ sein, wenn dagegen $\frac{\gamma}{\gamma x - \delta}$ negativ ist, so hat $t$ einen der Werthe $0$ und $1$.

Aus den Gleichungen (43) und (48) folgt nun

$$(50) \qquad x' = \frac{p(x_{n+1} + t) - p''}{q(x_{n+1} + t) - q''} = (b_0, b_1, \dots, b_r, x_{n+1} + t),$$

wobei nach (46)

$$(51) \qquad x_{n+1} + t = (a_{n+1} + t, a_{n+2}, \dots) = (a_{n+1} + t, x_{n+2})$$

ist. Tragen wir den Werth von $x_{n+1} + t$ aus (51) in (50) ein, so erhalten wir

$$(52) \qquad x' = (b_0, b_1, \dots, b_r, a_{n+1} + t, x_{n+2}),$$

während die Entwicklung erster Art von $x$ lautet:

$$(53) \qquad x = (a_0, a_1, \dots, a_{n+1}, x_{n+2}).$$

Die Gleichung (52) wird aber ebenfalls die Entwicklung erster Art von $x'$ darstellen, wenn nicht einer von folgenden vier Fällen eintritt:

1.) $a_{n+1} = 2, \quad t = -1$; 2.) $a_{n+1} = 3, \quad a_{n+2} > 0, \quad t = -1$;

3.) $a_{n+1} = -2, \quad t = 1$; 4.) $a_{n+1} = -3, \quad a_{n+2} < 0, \quad t = 1$.

Sei nun $\frac{\gamma}{\gamma x - \delta}$ positiv. Dann sind nur die beiden ersten Fälle möglich, weil $t$ nicht gleich 1 sein kann. Da nun auf $a_{n+1} = 2$ ein negativer Theilnenner $a_{n+2}$, welcher also jedenfalls von 2 und 3 verschieden ist, folgen wird, so dürfen wir den Fall 1.) ausschliessen. Aber auch der Fall 2.) kann ausgeschlossen werden, wenn wir annehmen, dass nicht von einem bestimmten Werthe von $n$ ab beständig $a_n = 3$ ist. Ebenso ergiebt sich, falls $\frac{\gamma}{\gamma x - \delta}$ negativ ist, dass die Fälle 3.) und 4.), welche dann die einzig möglichen sind, ausgeschlossen werden können, wenn wir annehmen, dass nicht von einem bestimmten Werthe von $n$ ab beständig $a_n = -3$ ist. Unter diesen Voraussetzungen wird also (52) die Entwicklung erster Art von $x'$ darstellen, sobald $n$ eine gewisse Grenze übersteigt. Da nun ferner die Elimination von $x_{n+2}$ zwischen den beiden Gleichungen (52), (53) zu der ursprünglichen Gleichung $x' = \frac{\alpha x - \beta}{\gamma x - \delta}$ zurückführen muss, so können wir folgenden Satz aussprechen:

*Zwischen den beiden Grössen $x$ und $x'$ bestehe die Gleichung*

$$x' = \frac{\alpha x - \beta}{\gamma x - \delta}, \tag{54}$$

*so dass $x$ und $x'$ äquivalent sind. Es seien ferner*

$$\begin{cases} x = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}), \\ x' = (a'_0, a'_1, \ldots, a'_m, x'_{m+1}), \end{cases} \tag{55}$$

*die Kettenbruch-Entwicklungen erster Art jener Grössen, und es werde vorausgesetzt, dass die Theilnenner $a_0, a_1, \ldots$ nicht von einem bestimmten ab bis ins Unendliche beständig gleich* 3 *oder beständig gleich* $-3$ *sind. Dann kann man $n$ und $m$ stets so wählen, dass $x_{n+1} = x'_{m+1}$ ist, und dass die Gleichung* (54) *durch Elimination von $x_{n+1}$ zwischen den beiden Gleichungen* (55) *entsteht.*

Wenn die in diesem Satze gemachte Voraussetzung über die Theilnenner $a_n$ nicht zutrifft, so ist $x$ entweder zu $r = (0, -3, -3, \ldots)$

oder zu $-r = (0, 3, 3, \ldots)$ äquivalent. Diese beide Zahlen sind auch einander äquivalent, wie aus der Gleichung

$$-r = \frac{-r+1}{r-2}$$

ersichtlich ist. Ist umgekehrt $x$ zu $r$ äquivalent, so sind die Theilnenner $a_n$ von einem bestimmten ab beständig gleich 3 oder $-3$. Denn andernfalls könnten wir unseren Satz auf $x$ und $x' = r$ anwenden und würden zu dem Widerspruch gelangen, dass in der Entwicklung von $r$ die Theilnenner nicht beständig gleich 3 sein könnten. Hieraus geht nun Folgendes hervor:

*Die über die Theilnenner $a_n$ im vorigen Satze eingeführte Voraussetzung ist gleichbedeutend damit, dass $x$ nicht zu $r = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ äquivalent sein soll.*

*Die zu $r$ äquivalenten Grössen zerfallen in zwei Classen. Die Grössen der einen Classe haben eine Entwicklung erster Art, bei welcher schliesslich die Theilnenner von einem bestimmten ab beständig gleich $-3$ sind, während bei der zweiten Classe die Theilnenner schliesslich beständig gleich $+3$ werden.*

Im Folgenden wird sich ein Criterium dafür ergeben, ob eine zu $r$ äquivalente Grösse in die eine oder die andere Classe gehört. Ich bemerke noch, dass die in diesem Paragraphen bewiesenen Sätze wörtlich richtig bleiben, wenn an Stelle der Kettenbruch-Entwicklung erster Art überall die zweite Art gesetzt wird.

## § 7. *Zahlenpaare.*

Es seien $x_0$ und $y_0$ zwei von einander verschiedene irrationale Grössen. Man setze nun

$$(56) \qquad \begin{cases} x_0 = a_0 - \dfrac{1}{x_1}, \\ y_0 = a_0 - \dfrac{1}{y_1}, \end{cases}$$

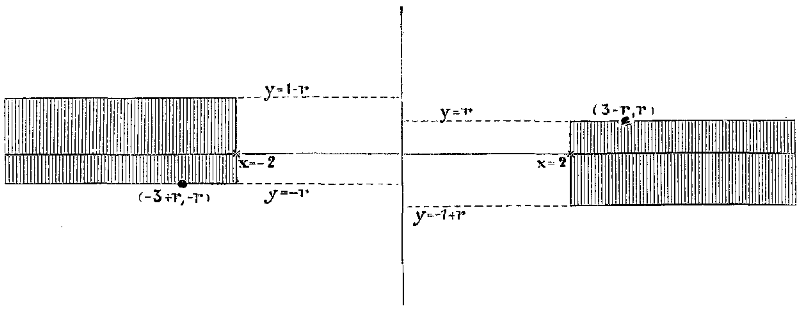
wo die ganze Zahl $a_0$ so bestimmt ist, dass $x_0 - a_0$ zwischen $-\frac{1}{2}$ und

$+\frac{1}{2}$ liegt. Das auf diese Weise erhaltene Zahlenpaar $(x_1, y_1)$ nenne ich dem Paare $(x_0, y_0)$ nach rechts benachbart.[1] Umgekehrt heisse $(x_0, y_0)$ dem Paare $(x_1, y_1)$ nach links benachbart. Die Grössen $(x_1, y_1)$ sind offenbar wieder irrational und von einander verschieden; sie sind ferner in eindeutiger Weise durch $x_0, y_0$ bestimmt. Ich führe nun noch einen neuen Begriff, den des *reducirten* Zahlenpaares ein. Es werde nämlich jedes Zahlenpaar $(x, y)$ durch den Punkt einer Ebene mit den rechtwinkligen Coordinaten $x, y$ dargestellt. In dieser Ebene grenze ich durch die Geraden

$$x = 2, \quad x = -2, \quad y = r, \quad y = -r, \quad y = -1 + r, \quad y = 1 - r,$$
$$\left(r = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

zwei unendliche Streifen ab, welche ich als im Unendlichen zusammen-

Fig. 2.




hängend und also als ein einziges Gebiet $R$ bildend ansehe. In Figur 2. ist das Gebiet $R$ durch Schraffirung kenntlich gemacht. *Ein Zahlenpaar $(x, y)$, welches durch einen Punkt des Gebietes $R$ repräsentirt wird, heisse »reducirt».* Dabei bemerke ich, dass von der Begrenzung des Gebietes $R$ einzig und allein die beiden Punkte

$$x = 3 - r, \quad y = r \quad \text{und} \quad x = -3 + r, \quad y = -r$$

zu dem Gebiete gerechnet werden sollen.

---

[1] Die Bezeichnung lehnt sich an eine in der Theorie der quadratischen Formen übliche an.

Ich bilde nun, von irgend einem Paare $(x_0, y_0)$ ausgehend, die Reihe von Paaren:

$$(57) \qquad (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1}), \ldots,$$

von denen jedes dem vorhergehenden nach rechts benachbart ist, und will untersuchen, wann in der Reihe (57) ein reducirtes Paar vorkommt. Zu dem Ende bemerke ich, dass nach der Bildungsweise des rechten Nachbars die Gleichungen bestehen:

$$(58) \qquad \begin{cases} x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}), \\ y_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, y_{n+1}), \end{cases}$$

von welchen die erste die Kettenbruch-Entwicklung erster Art der Grösse $x_0$ darstellt. Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt:

$$y_0 = \frac{p_n y_{n+1} - p_{n-1}}{q_n y_{n+1} - q_{n-1}},$$

und hieraus durch Auflösung nach $y_{n+1}$:

$$y_{n+1} = \frac{q_{n-1} y_0 - p_{n-1}}{q_n y_0 - p_n} = \frac{q_{n-1}}{q_n} - \frac{1}{q_n(q_n y_0 - p_n)},$$

oder, in Rücksicht auf (36):

$$(59) \qquad y_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} - \frac{1}{q_n^2(y_0 - x_0) + \theta_n(1 - r)} = \frac{q_{n-1}}{q_n} - \varepsilon_n,$$

wo $\varepsilon_n$ mit wachsenden Werthen von $n$ unendlich klein wird und das Vorzeichen von $y_0 - x_0$ besitzt. Es sind nun einige Fälle zu unterscheiden:

I.) Es sei $y_0 - x_0 > 0$ und die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von $x_0$ endige nicht mit der Periode $(-3, -3, \ldots)$. Dann ist $\varepsilon_n$ positiv und wir können $n$ beliebig gross und so wählen, dass $a_n$ weder gleich $-2$ noch gleich $-3$ wird. Für diesen Werth von $n$ ist dann entweder

$$x_{n+1} = 2 \ldots \infty, \quad \text{also} \quad a_{n+1} = 2, 3, \ldots, \qquad a_n = 3, \pm 4, \ldots,$$

oder

$$x_{n+1} = -\infty \ldots -2, \quad \text{also} \quad a_{n+1} = -2, -3, \ldots, \quad a_n = 2, 3, \pm 4, \ldots.$$

Im ersten Falle ist nach § 3:

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = 3 - r \ldots - 4 + r, \quad \text{folglich} \quad y_{n+1} = -\frac{1}{4-r} - \varepsilon_n \ldots r - \varepsilon_n.$$

Im zweiten Falle kommt:

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = 2 - r \ldots - 4 + r, \quad \text{folglich} \quad y_{n+1} = -\frac{1}{4-r} - \varepsilon_n \ldots 1 - r - \varepsilon_n.$$

Nun bildet $(x_{n+1}, y_{n+1})$ ein reducirtes Paar, wenn $n$ so gross gewählt wird, dass die für $y_{n+1}$ gefundenen Intervalle ganz in den Intervallen $-1 + r \ldots r$ resp. $-r \ldots 1 - r$ enthalten sind. Dieses ist aber offenbar möglich.

II.) Es sei $y_0 - x_0 < 0$ und die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von $x_0$ endige nicht mit der Periode $(3, 3, \ldots)$. Da dieser Fall sofort auf den vorigen zurückgeführt werden kann, indem man statt der Reihe (57) die andere

$$(-x_0, -y_0), (-x_1, -y_1), \ldots, (-x_{n+1}, -y_{n+1}), \ldots$$

betrachtet, so ergiebt sich auch für diesen Fall das Resultat, dass in der Reihe (57) stets reducirte Paare vorkommen. Man hat hierbei zu beachten, dass das Paar $(x, y)$ reducirt ist, wenn $(-x, -y)$ ein reducirtes Paar bilden, dass ferner $(x, y), (x', y')$ benachbarte Paare sind, wenn dies für $(-x, -y), (-x', -y')$ gilt.

III.) Es bleiben noch die Fälle zu untersuchen, in welchen $y_0 - x_0 > 0$ und die Entwicklung von $x_0$ mit der Periode $(-3, -3, \ldots)$ endigt, resp. $y_0 - x_0 < 0$ und die Entwicklung von $x_0$ mit der Periode $(3, 3, \ldots)$ endigt. Ich betrachte zuerst den speciellen Fall, wo $x_0 = (3, 3, \ldots) = 3 - r$ ist; lasse es dagegen unbestimmt ob $y_0 - x_0$ positiv oder negativ ist. Aus den Formeln des § 1 geht hervor, dass für den Kettenbruch

$$x_0 = (3, 3, 3, \ldots) = 3 - r \tag{60}$$

die Gleichungen

$$p_{n-1} = q_n, \qquad q_n = 3q_{n-1} - q_{n-2}, \qquad (q_0 = 1, q_1 = 3 \text{ etc.}) \tag{61}$$

sowie

$$x_{n+1} = 3 - r = x_0, \qquad {\scriptstyle (n=0,1,2,\ldots)} \tag{62}$$

gelten. Nun ist

$$y_{n+1} - r = \frac{q_{n-1} y_0 - p_{n-1}}{q_n y_0 - p_n} - r = \frac{(q_{n-1} - r q_n) y_0 - (q_n - r q_{n+1})}{q_n y_0 - p_n};$$

und den Gleichungen (61) zufolge:

$$q_n - r q_{n+1} = q_n - r(3q_n - q_{n-1}) = r(q_{n-1} - r q_n) = r^n(q_0 - r q_1) = - r^{n+2}.$$

Daher ergiebt sich

$$(63) \qquad y_{n+1} - r = \frac{-r^{n+1}}{q_n} \cdot \frac{y_0 - r}{y_0 - \frac{p_n}{q_n}}.$$

Aus dieser Gleichung schliessen wir zunächst, weil $r < 1$ ist, dass $y_{n+1} - r$ mit wachsenden Werthen von $n$ unendlich klein wird. Da nun ferner $\lim \frac{p_n}{q_n} = x_0 = 3 - r$ ist, so wird von einem bestimmten Werthe von $n$ ab $y_{n+1} - r$ positiv, wenn

$$y_0 = (r) \ldots (3 - r),$$

dagegen negativ oder Null, wenn

$$y_0 = (3 - r) \ldots r.$$

Nur im letzteren Falle wird $(x_{n+1}, y_{n+1})$ von einem gewissen Werthe von $n$ ab reducirt sein. Im ersteren Falle dagegen wird sich der Punkt $(x_{n+1}, y_{n+1})$ mit wachsenden Werthen von $n$ freilich immer mehr dem Punkte $(3 - r, r)$ annähern, ohne ihn jedoch zu erreichen oder in das Gebiet $R$ einzutreten.

Wenn nun $x_0$ nicht gleich $3 - r$ ist, aber eine Entwicklung besitzt, welche mit der Periode $(3, 3, \ldots)$ endigt, so wird in der Reihe (57) für einen gewissen Werth von $m$ doch $x_{m+1} = 3 - r$ sein. Dann ist

$$x_0 = \frac{p_m x_{m+1} - p_{m-1}}{q_m x_{m+1} - q_{m-1}}, \qquad y_0 = \frac{p_m y_{m+1} - p_{m-1}}{q_m y_{m+1} - q_{m-1}},$$

und die Reihe (57) setzt sich von dem Paare $(x_{m+1}, y_{m+1})$ gerade so fort, als wenn man von diesem Paare ausgehen würde. Nun ist aber die Gleichung

$$y_{m+1} = (r) \ldots (3 - r)$$

dann und nur dann erfüllt, wenn

$$y_0 = \left(\frac{p_m r - p_{m-1}}{q_m r - q_{m-1}}\right) \ldots \left(\frac{p_m(3 - r) - p_{m-1}}{q_m(3 - r) - q_{m-1}}\right),$$

oder also, wenn

$$y_0 = (x_0') \ldots (x_0)$$

ist, wo $x_0'$ die zu $x_0$ conjugirte algebraische Zahl bedeutet. Es ergiebt sich daher der folgende Satz:

*Endigt die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von $x_0$ mit der Periode* $(3, 3, \ldots)$, *so sind die in der Reihe*

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$$

*auftretenden Paare $(x_n, y_n)$ von einem bestimmten Werthe von $n$ ab sämmtlich reducirt oder sämmtlich nicht reducirt, je nachdem*

$$y_0 = (x_0) \ldots x_0',$$

*oder*

$$y_0 = (x_0') \ldots (x_0)$$

*ist. Dabei bedeutet $x_0'$ die zweite Wurzel der ganzzahligen quadratischen Gleichung, welcher $x_0$ genügt.*

Wir können diesem Satze noch die Bemerkung hinzufügen, dass nothwendig $x_0 > x_0'$ ist. Denn nach der unter I.) angestellten Untersuchung müssen die Werthe von $y_0$, welche grösser als $x_0$ sind, sich sämmtlich in dem Intervalle $(x_0) \ldots x_0'$ befinden, was nur in dem Falle $x_0 > x_0'$ möglich ist.

Wenn von einem bestimmten Werthe von $n$ ab die Theilnenner $a_n$ in der Entwicklung von $x_0$ sämmtlich gleich $-3$ sind, so leiten wir aus der Reihe

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots$$

die andere

$$(-x_0, -y_0), (-x_1, -y_1), \ldots$$

ab, auf welche offenbar der vorhergehende Satz Anwendung findet.

Da nun aus der Gleichung

$$-y_0 = -x'_0 \dots -x_0,$$

die andere

$$y_0 = x_0 \dots x'_0$$

und umgekehrt die erstere aus der letzteren folgt, so ergiebt sich ohne Weiteres:

*Endigt die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von $x_0$ mit der Periode $(-3, -3, \dots)$, so sind die in der Reihe*

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$$

*auftretenden Paare $(x_n, y_n)$ von einem bestimmten Werthe von $n$ ab sämmtlich reducirt oder sämmtlich nicht reducirt, je nachdem*

$$y_0 = x'_0 \dots (x_0)$$

*oder*

$$y_0 = (x_0) \dots (x'_0)$$

*ist. Dabei bedeutet $x'_0$ die zweite Wurzel der ganzzahligen quadratischen Gleichung, welcher $x_0$ genügt.*

Zugleich ist nothwendig $x_0 < x'_0$, da nach der dem vorigen Satze hinzugefügten Bemerkung $-x_0 > -x'_0$ sein muss. Beiläufig folgt hieraus ein Criterium dafür, ob eine zu $r$ äquivalente Zahl $x_0$ eine Kettenbruch-Entwicklung liefert, welche mit der Periode $(3, 3, \dots)$ oder mit der Periode $(-3, -3, \dots)$ endigt. Im ersteren Falle muss nämlich $x_0 - x'_0 > 0$, im letzteren Falle $x_0 - x'_0 < 0$ sein.

Setzen wir $x_0 = \dfrac{\alpha r - \beta}{\gamma r - \delta}$, so ist $x'_0 = \dfrac{\alpha \frac{1}{r} - \beta}{\gamma \frac{1}{r} - \delta}$ und daher

$$x_0 - x'_0 = \frac{r - \frac{1}{r}}{(\gamma r - \delta)\left(\gamma \frac{1}{r} - \delta\right)} = \frac{-\sqrt{5}}{\gamma^2 - 3\gamma\delta + \delta^2},$$

so dass unser Criterium sich in folgender Weise aussprechen lässt:

*Die zu $r$ äquivalente Grösse*

$$\frac{\alpha r - \beta}{\gamma r - \delta}$$

*hat eine Entwicklung erster Art, welche mit der Periode*

$$(-3, -3, \ldots) \quad \textit{oder} \quad (3, 3, \ldots)$$

*endigt, je nachdem*

$$\gamma^2 - 3\gamma\delta + \delta^2$$

*eine positive oder eine negative Zahl ist.*

Kehren wir nun zu der Betrachtung der Reihe (57) zurück, so bleibt nur noch Folgendes zu bemerken. Wenn die Entwicklung erster Art von $x_0$ weder mit der Periode $(3, 3, \ldots)$ noch mit der Periode $(-3, -3, \ldots)$ endigt, oder, was dasselbe besagt, wenn $x_0$ nicht zu $r$ äquivalent ist, so finden die unter I.) und II.) angestellten Betrachtungen Anwendung. Es gilt daher der Satz:

*Ist die Grösse $x_0$ nicht der Zahl $r = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ äquivalent, so sind die in der Reihe*

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$$

*auftretenden Paare $(x_n, y_n)$ von einem bestimmten Werthe von $n$ ab sämmtlich reducirt.*

## § 8. *Reihen reducirter Zahlenpaare.*

Wenn das Paar $(x_0, y_0)$ reducirt ist, so ist sein rechter Nachbar $(x_1, y_1)$ ebenfalls reducirt. Denn sei in den Gleichungen

$$(64) \qquad \begin{cases} x_0 = a_0 - \dfrac{1}{x_1} \\ y_0 = a_0 - \dfrac{1}{y_1} \end{cases}$$

$(x_0, y_0)$ ein reducirtes Paar. Dann sind nur folgende Fälle möglich:

1.) $x_0 = 3 - r$, $y_0 = r$, folglich $x_1 = 3 - r$, $y_1 = r$.

2.) $x_0 = -3 + r$, $y_0 = -r$, folglich $x_1 = -3 + r$, $y_1 = -r$.

3.) $x_0 = 2 \ldots \infty$, $x_1 = 2 \ldots \infty$, folglich

$$a_0 = 3, 4, \ldots, \quad y_0 = (-1 + r) \ldots (r) \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{1}{a_0 - y_0} = (0) \ldots (r).$$

4.) $x_0 = -\infty \ldots -2$, $x_1 = 2 \ldots \infty$, folglich

$$a_0 = -2, -3, \ldots, \quad y_0 = (-r) \ldots (1 - r)$$

$$\text{und} \quad y_1 = \frac{1}{a_0 - y_0} = (-1 + r) \ldots (0),$$

5.) $x_0 = 2 \ldots \infty$, $x_1 = -\infty \ldots -2$, folglich

$$a_0 = 2, 3, \ldots, \quad y_0 = (-1 + r) \ldots (r) \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{1}{a_0 - y_0} = (0) \ldots (1 - r),$$

6.) $x_0 = -\infty \ldots -2$, $x_1 = -\infty \ldots -2$, folglich

$$a_0 = -3, -4, \ldots, \quad y_0 = (-r) \ldots (1 - r) \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{1}{a_0 - y_0} = (-r) \ldots (0).$$

In allen Fällen ist also $(x_1, y_1)$ wieder ein reducirtes Paar. Hieraus folgt, dass die im letzten Paragraphen betrachteten Reihen

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$$

lauter reducirte Paare enthalten, wenn das Ausgangspaar $(x_0, y_0)$ ein reducirtes ist und allgemeiner, dass in der Reihe die Paare $(x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}), \ldots$ bis in's Unendliche reducirt sind, falls $(x_n, y_n)$ ein reducirtes Paar ist.

Wenn man die zweite Gleichung (64) in die Form setzt

$$\frac{1}{y_1} = a_0 - \frac{1}{\left(\frac{1}{y_0}\right)},$$

und annimmt $(x_0, y_0)$ und also auch $(x_1, y_1)$ sei reducirt, so erkennt man, dass $a_0$ die erste Zahl ist, welche bei der Entwicklung von $\frac{1}{y_1}$ in einen Kettenbruch zweiter Art auftritt. Daher ist das Paar $(x_0, y_0)$ vollständig bestimmt, wenn $(x_1, y_1)$ gegeben ist, oder in Worten: Jedes reducirte Paar besitzt einen vollständig bestimmten linken Nachbarn, welcher ebenfalls ein reducirtes Paar ist. Die Ergebnisse dieser Betrachtungen können wir folgendermassen aussprechen:

*Jedes reducirte Paar ist Glied einer unbegrenzt nach rechts und nach links fortsetzbaren Reihe von reducirten Paaren, von welchen jedes dem vorhergehenden nach rechts benachbart ist. Die ganze Reihe von Paaren lässt sich in eindeutiger Weise aus irgend einem Paare der Reihe erzeugen, und wenn*

$$(x_0\,, y_0)\,, (x_1\,, y_1)\,, (x_2\,, y_2)\,, \ldots, (x_{n+1}\,, y_{n+1})\,, \ldots \tag{65}$$

*auf einander folgende Glieder der Reihe sind, so stellen die Gleichungen*

$$\begin{cases} x_0 = (a_0\,, a_1\,, \ldots, a_n\,, x_{n+1}) \\ \dfrac{1}{y_{n+1}} = \left(a_n\,, a_{n-1}\,, \ldots, a_0\,, \dfrac{1}{y_0}\right) \end{cases} \tag{66}$$

*die Kettenbruch-Entwicklungen erster bez. zweiter Art von* $x_0$ *bez.* $\frac{1}{y_{n+1}}$ *dar.*

## § 9. *Quadratische Formen.*

Bezeichnet

$$au^2 + 2buv + cv^2 \tag{67}$$

eine quadratische Form der positiven Determinante

$$D = b^2 - ac, \tag{68}$$

so nenne ich die Wurzeln

$$x_0 = \frac{-b-\sqrt{D}}{c}, \qquad y_0 = \frac{-b+\sqrt{D}}{c} \tag{69}$$

der Gleichung

$$a + 2bx + cx^2 = 0$$

die erste bez. zweite Wurzel der Form, wobei $\sqrt{D}$ den positiven Werth der Quadratwurzel bedeutet. Zwei Formen sind bekanntlich dann und nur dann äquivalent, wenn sie dieselbe Determinante besitzen und wenn zugleich ihre ersten Wurzeln äquivalente Grössen sind. Die in den vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Begriffe übertragen sich sofort auf quadratische Formen; nämlich: eine quadratische Form heisst »reducirt», wenn ihre Wurzeln $(x_0, y_0)$ ein reducirtes Paar bilden, und: zwei Formen derselben Determinante heissen »benachbart», wenn ihre Wurzelpaare benachbart sind. Solche benachbarte Formen sind offenbar äquivalent.

Es seien nun $a, b, c$ ganze Zahlen und $D = b^2 - ac$ kein vollständiges Quadrat. Bilden wir dann von dem Paare $(x_0, y_0)$ ausgehend die Reihe der benachbarten Paare:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1}), \ldots,$$

so wird $(x_{n+1}, y_{n+1})$ von einem bestimmten $n$ ab reducirt sein. Dies gilt nach den Sätzen des § 7 allgemein, selbst in dem Falle wo $x_0$ zu $r$ äquivalent ist, weil dann $y_0$ die zweite Wurzel der ganzzahligen quadratischen Gleichung ist, welcher $x_0$ genügt. Es folgt also:

*Jede quadratische Form* (67) *ist einer reducirten äquivalent. Entwickelt man nämlich die erste Wurzel der Form in einen Kettenbruch erster Art*

$$x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}),$$

*so wird von einem bestimmten Werthe von $n$ ab, die Grösse $x_{n+1}$ stets erste Wurzel einer reducirten Form sein, und die Form* (67) *wird durch die Substitution*

$$u = p_n u' - p_{n-1} v', \qquad v = q_n u' - q_{n-1} v'$$

*in diese reducirte Form übergehen.*

Betrachten wir nun die reducirten Formen einer gegebenen Determinante $D$, so zeigt sich zunächst, *dass nur eine endliche Anzahl solcher Formen existirt.* Nach der Definition hat man nämlich für die Wurzeln $x_0, y_0$ einer reducirten Form entweder

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 2 \ldots \infty \\ y_0 &= -1 + r \ldots r \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left.\begin{aligned} x_0 &= -\infty \ldots -2 \\ y_0 &= -r \ldots 1 - r \end{aligned}\right|,$$

und hieraus

$$\frac{-2\sqrt{D}}{c} = x_0 - y_0 = 2 - r \ldots -2 + r,$$

$$\frac{2\sqrt{D}}{a} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{y_0} = 2 - r \ldots -2 + r$$

Daher liegen die ganzen Zahlen $a$ und $c$ in dem Intervall

$$-2\sqrt{D}(1-r)\ldots+2\sqrt{D}(1-r),$$

und können also, ebenso wie $b = \pm\sqrt{D+ac}$ nur eine endliche Anzahl von Werthen besitzen. Hieraus folgt unmittelbar, dass es nur endlich viele reducirte Formen der Determinante $D$ giebt. Bilden wir von dem Wurzelpaar $(x_0, y_0)$ einer reducirten Form $f$ ausgehend die Reihe der nach rechts benachbarten Paare

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1}), \ldots,$$

so ist jedes Glied dieser Reihe Wurzelpaar einer reducirten zu $f$ äquivalenten Form. Da nun die Anzahl dieser Formen endlich und die Reihe nach rechts wie nach links eindeutig fortsetzbar ist, so ergiebt sich:

*Die reducirten Formen der Determinante $D$ gruppiren sich in »Perioden» unter einander äquivalenter.*

Ferner folgt aus dem Satze des letzten Paragraphen:

*Bezeichnet $x_0$ die erste Wurzel einer reducirten Form, so ist die Entwicklung erster Art von $x_0$ rein periodisch, also von der Gestalt*

$$x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots),$$

*und der reciproke Werth der zweiten Wurzel ist vermöge der Gleichung*

$$\frac{1}{y_0} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0, \ldots)$$

*in einen Kettenbruch zweiter Art entwickelt.*

Verbinden wir mit diesem Resultate den in diesem Paragraphen an erster Stelle hervorgehobenen Satz, so folgt:

*Die Kettenbruch-Entwicklung erster Art einer quadratischen Irrationalität ist stets periodisch.* Dieselbe wird nach dem vorigen Satze *rein* periodisch, wenn die Irrationalität erste Wurzel einer reducirten Form ist. Man bemerkt leicht, dass dieses auch der einzige Fall ist, in welchem dieser Umstand eintritt.

Nach den Ergebnissen des § 6 gehen die Kettenbruch-Entwicklungen erster Art zweier äquivalenter Grössen stets durch Abänderung einer endlichen Anzahl von Theilnennern aus einander hervor. Eine Ausnahme erleidet dieser Satz nur dann, wenn die beiden Grössen zu $r$ äquivalent sind und die Entwicklung der einen mit der Periode $(3, 3, \ldots)$, die Entwicklung der andern mit der Periode $(-3, -3, \ldots)$ endigt. Lassen wir daher stets diejenigen Formenperioden bei Seite, welche von Formen mit den Wurzeln $x_0 = -3 + r$, $y_0 = -r$ gebildet werden, so besteht der Satz:

*Zwei reducirte Formen der Determinante $D$ sind äquivalent oder nicht, je nachdem sie derselben oder verschiedenen Formenperioden angehören.*

Die Auflösung der Pell'schen Gleichung kommt bekanntlich darauf zurück, alle Substitutionen einer reducirten Form in sich zu finden. Oder, was dasselbe ist, alle Äquivalenzgleichungen

$$x_0 = \frac{\alpha x_0 - \beta}{\gamma x_0 - \delta} \tag{70}$$

aufzustellen, wenn $x_0$ die erste Wurzel einer reducirten Form bezeichnet.

Entwickelt man nun $x_0$ in einen Kettenbruch erster Art, und betrachtet die hierbei auftretenden Gleichungen

$$x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_0), \qquad x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, a_1, \ldots, a_n, x_0), \ldots, \tag{71}$$

so sind dieselben sämmtlich von der Form (70). Man erhält aber auf diese Weise auch alle überhaupt existirenden Gleichungen (70). Falls $x_0$ nicht zu $r$ äquivalent ist, folgt dieses aus dem ersten Satze des § 6. Wenn aber $x_0$ zu $r$ äquivalent und folglich gleich $3 - r$ oder gleich $-3 + r$ ist, so muss man den Nachweis direct führen, was keine Schwierigkeit hat und deshalb Kürze halber hier unterbleiben mag. Bekanntlich entstehen die Gleichungen (71) sämmtlich durch Iteration der ersten Gleichung

$$x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_0),$$

welche die kleinste Lösung der Pell'schen Gleichung ergiebt.

Durch die Sätze dieses Paragraphen ist, wie man sieht, die Theorie der quadratischen Formen von positiver Determinante in ähnlicher Weise auf die hier betrachtete Kettenbruch-Entwicklung erster Art gegründet, wie man dieselbe sonst auf die gewöhnliche nach grössten Ganzen fortschreitende Kettenbruch-Entwicklung zu gründen pflegt. Es ist noch zu bemerken, dass die erhaltenen Resultate sich nur unerheblich modificiren, wenn man überall die Worte »erster Art» und »zweiter Art» mit einander vertauscht.

## § 10. *Entwicklungen für die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl.*

Es bezeichne $D$ eine positive ganze Zahl, welche kein vollständiges Quadrat ist, und es seien

$$(72)\qquad \begin{cases} \sqrt{D} = (a_0, a_1, \ldots) \\ \sqrt{D} = (b_0, b_1, \ldots) \end{cases}$$

die Kettenbruch-Entwicklungen erster und zweiter Art von $\sqrt{D}$. Dann werden die Zahlen $a_0$, $b_0$ durch die Gleichungen

$$(73)\qquad \begin{aligned} \sqrt{D} &= a_0 - \tfrac{1}{2} \ldots a_0 + \tfrac{1}{2}, \\ \sqrt{D} &= b_0 - r \ldots b_0 - r + 1. \end{aligned}$$

bestimmt sein. Daraus folgt sofort, dass die Paare

$$(74)\qquad \left.\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{D} + b_0 \\ y_0 &= -\sqrt{D} + b_0 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} x_0' &= \frac{-1}{\sqrt{D} - a_0} \\ y_0' &= \frac{1}{\sqrt{D} + a_0} \end{aligned}\right\}$$

reducirt sind. Daher sind die Kettenbruch-Entwicklungen erster Art von $x_0$ und $x_0'$ rein periodisch; also etwa

$$(75)\qquad x_0 = \sqrt{D} + b_0 = (a_0 + b_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_0 + b_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots),$$

aus welcher Entwicklung unmittelbar die andere

$$(76)\qquad x_0' = \frac{-1}{\sqrt{D} - a_0} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, a_0 + b_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_0 + b_0, \ldots)$$

hervorgeht. Nun entsteht die Entwicklung zweiter Art von $\frac{1}{y_0'} = \sqrt{D} + a_0$ aus der Entwicklung erster Art von $x_0'$ durch Umkehrung der Periode. Also ist

$$(77) \quad \sqrt{D} + a_0 = (a_0 + b_0\,,\, a_n\,,\, a_{n-1}\,,\, \ldots .\, a_1\,,\, a_0 + b_0\,,\, a_n\,,\, \ldots,\, a_1\,,\, \ldots)$$

die Entwicklung zweiter Art von $\sqrt{D} + a_0$. Die Gleichungen (75) und (77) ergeben den Satz:

*Die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl D besitzt Kettenbruch-Entwicklungen erster und zweiter Art von der Gestalt:*

$$(78) \quad \begin{cases} \sqrt{D} = (a_0\,,\, a_1\,,\, \ldots,\, a_n\,,\, a_0 + b_0\,,\, a_1\,,\, \ldots,\, a_n\,,\, a_0 + b_0\,,\, \ldots) \\ \sqrt{D} = (b_0\,,\, a_n\,,\, \ldots,\, a_1\,,\, a_0 + b_0\,,\, a_n\,,\, \ldots,\, a_1\,,\, a_0 + b_0\,,\, \ldots). \end{cases}$$

Die Periode beginnt also (wie in der gewöhnlichen Theorie) bei beiden Entwicklungen sogleich nach dem ersten Theilnenner. Sie schliesst bei beiden ab mit der Summe $a_0 + b_0$ der Anfangsglieder der Entwicklungen. Durch Umkehrung der übrigen Glieder der Periode geht die eine Entwicklung in die andere über.

Aus den Gleichungen (73) geht hervor, dass entweder $a_0 = b_0$ oder $a_0 = b_0 + 1$ ist. Denn in das Intervall $a_0 - \frac{1}{2} \ldots a_0 + \frac{1}{2}$ greifen nur die beiden Intervalle $a_0 - r \ldots a_0 - r + 1$ und $a_0 - 1 - r \ldots a_0 - r$ hinein; jedes andere Intervall $b_0 - r \ldots b_0 - r + 1$ hat keinen Punkt mit $a_0 - \frac{1}{2} \ldots a_0 + \frac{1}{2}$ gemein (vgl. Fig. 1). Unterscheidet man die beiden Fälle, so erhält man den Satz:

*Bestimmt man die ganze Zahl $a_0$ so, dass $\sqrt{D}$ zwischen $a_0 - \frac{1}{2} \ldots a_0 + \frac{1}{2}$ liegt, so sind zwei Fälle möglich: entweder $\sqrt{D}$ ist grösser als $a_0 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ oder $\sqrt{D}$ ist kleiner als $a_0 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Im ersteren Falle sind die Zahlen $a_0, b_0$, mit welchen die Entwicklungen (78) beginnen, einander gleich. Im letzteren Falle ist dagegen $a_0 = b_0 + 1$.*

Nur im ersten Falle haben also die Entwicklungen (78) dieselbe Eigenschaft, wie die gewöhnlich betrachtete Entwicklung, dass nämlich das Schlussglied der Periode das doppelte von dem Anfangsgliede der Entwicklung ist. Freilich scheint dieser erste Fall weit häufiger einzutreten als der zweite Fall. Der erste Werth von $D$ in der Reihe $D = 2, 3, 5, \ldots$, für welchen der zweite Fall eintritt, ist der Werth $D = 13$. Man findet nämlich für die Entwicklungen erster und zweiter Art von $\sqrt{13}$ bezüglich:

$$(79)\quad \begin{cases} \sqrt{13} = (4;\ \ 3,\ \ 2, -7, -3, -2, 7;\ \ 3,\ \ 2, -7, -3, -2, 7; \ldots) \\ \sqrt{13} = (3; -2, -3, -7,\ \ 2,\ \ 3, 7; -2, -3, -7,\ \ 2,\ \ 3, 7; \ldots). \end{cases}$$

Wenn $a_0 = b_0$ ist, so kann man aus der Gleichung

$$\sqrt{D} - a_0 = (0, a_1, \ldots) = (0, a_n, \ldots)$$

schliessen, dass entweder $a_1 = a_n$ oder $a_1 = a_n + 1$ ist. Im Falle, dass $a_1 = a_n$ ist, folgert man weiter, dass entweder $a_2 = a_{n-1}$ oder $a_2 = a_{n-1} + 1$ ist, u. s. f. Hiernach kann unter Umständen die Reihe $a_1, \ldots, a_n$ symmetrisch, d. h. mit der Reihe $a_n, \ldots, a_1$ identisch sein. Dies wird stets dann stattfinden, wenn die Entwicklung erster Art von $\sqrt{D}$ mit der Entwicklung zweiter Art zusammenfällt. Betrachten wir nun einen solchen Werth von $D$, für welchen $\sqrt{D}$ mit $-\sqrt{D}$ äquivalent ist. Dann ist auch $\sqrt{D} + b_0$ mit $-\sqrt{D} - b_0$ äquivalent und es treten folglich diese beiden Zahlen in ein und derselben Formenperiode auf. Wir haben daher, wenn wir Gleichförmigkeit halber $a_{n+1}$ für $a_0 + b_0$ schreiben, folgende Entwicklungen erster Art:

$$\sqrt{D} + b_0 = (a_{n+1}, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

$$-\sqrt{D} - b_0 = (a_r, a_{r+1}, \ldots, a_{r+n}, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_{r+n}, \ldots),$$

wo $r \leqq n$ angenommen werden darf und die Indices von $a$, welche grösser als $n + 1$ werden (mod. $n + 1$) zu reduciren sind. Aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$\sqrt{D} + b_0 = (a_{n+1}, a_1, \ldots, a_{r-1}, -\sqrt{D} - b_0),$$

also auch

$$-\sqrt{D} - b_0 = (-a_{n+1}, -a_1, \ldots, -a_{r-1}, \sqrt{D} + b_0)$$

und folglich durch Elimination von $-\sqrt{D}-b_0$:

(80) $\sqrt{D}+b_0=(a_{n+1}, a_1, \ldots, a_{r-1}, -a_{n+1}, -a_1, \ldots, -a_{r-1}, \sqrt{D}+b_0)$.

Daher müssen die $2r$ Zahlen $a_{n+1}, a_1, \ldots, a_{r-1}, -a_{n+1}, -a_1, \ldots, -a_{r-1}$ eine Periode $a_{n+1}, \ldots, a_n$ oder eine Zusammenfassung mehrerer solcher Perioden bilden. Da aber $r \leqq n$ vorausgesetzt wurde, so ist nur der erste Fall möglich. Setzen wir $a_{n+1}=-a_r$ so folgt aus (80):

$$\sqrt{D}+b_0=(-a_r, a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r, -a_1, -a_2, \ldots, -a_{r-1}; -a_r, a_1, \ldots),$$

wo die vor dem Semikolon stehenden Glieder die Periode bilden. Gehen wir endlich von $\sqrt{D}+b_0$ zu $\sqrt{D}$ selber zurück, so erhalten wir den Satz:

*Wenn der Werth von $\sqrt{D}$ zu dem Werthe von $-\sqrt{D}$ äquivalent ist, so besitzt die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von $\sqrt{D}$ die Gestalt:*

(81) $\sqrt{D}=(a_0; a_1, a_2, \ldots, a_r, -a_1, -a_2, \ldots, -a_r; a_1, a_2, \ldots)$,

*wo die zwischen die beiden Semikolon gesetzten Glieder*

$$a_1, a_2, \ldots, a_r, -a_1, -a_2, \ldots, -a_r$$

*die Periode bilden.*

Die Voraussetzung dieses Satzes lässt sich noch umformen. Wenn nämlich $\sqrt{D}$ zu $-\sqrt{D}$ äquivalent ist, so besteht eine Gleichung der Form

(82) $$-\sqrt{D}=\frac{\alpha\sqrt{D}-\beta}{\gamma\sqrt{D}-\delta}, \qquad (\beta\gamma-\alpha\delta=1).$$

Wegen der Irrationalität von $\sqrt{D}$ folgt aus dieser Gleichung

$$\alpha=\delta, \qquad \beta=\gamma D,$$

und also befriedigen, da $\alpha\delta-\beta\gamma=-1$ ist, die Zahlen $x=\alpha, y=\gamma$ die Gleichung

(83) $$x^2-Dy^2=-1.$$

Umgekehrt leitet man aus einer Lösung $x=\alpha, y=\gamma$ dieser Gleichung sofort eine Relation der Gestalt (82) ab. Daher können wir sagen:

*Die Voraussetzung des vorigen Satzes lässt sich durch die andere ersetzen, dass die Gleichung*

$$x^2 - Dy^2 = -1$$

*eine Auflösung in ganzen Zahlen besitzt.*

Wenn die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von $\sqrt{D}$ die Gestalt (81) hat, so liefert die Entwicklung der Gleichung

$$-\sqrt{D} + a_0 + a_r = (a_r, -a_1, \ldots, -a_{r-1}, \sqrt{D} - a_0 - a_r),$$

eine Relation der Form (82) und damit eine Auflösung der Gleichung (83).

Es ist leicht zu zeigen, dass aus dieser einen Auflösung alle übrigen abgeleitet werden können, ähnlich wie dies für die Kettenbruch-Entwicklung von $\sqrt{D}$, welche nach grössten Ganzen fortschreitet, geschieht.

Königsberg i. Pr. 15. December 1888.