NOTE SUR LES HUIT POINTS D'INTERSECTION DE TROIS SURFACES DU SECOND ORDRE

PAR

H.-G. ZEUTHEN
À COPENHAGUE.

Le rédacteur en chef des Acta Mathematica ayant bien voulu me montrer, avant l'impression, le mémoire précédent de M. Dobriner — ce qu'il a pu faire parce que mon nom figure dans la rédaction — je profite de cette circonstance pour joindre quelques remarques à cet intéressant travail.

On sait que de nos jours beaucoup de géomètres se sont occupés des huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre, dans le but de trouver la construction la plus simple du huitième point lorsque les sept points du groupe sont donnés; mais ils se sont contentés d'en étudier un petit nombre de propriétés convenables à ce but. M. Dobriner, au contraire, a fait des propriétés de la configuration une étude indépendante des applications constructives.

L'intérêt des propriétés qu'il a trouvées s'augmente par la circonstance qu'elles font espérer d'en trouver d'autres qui ne sont pas moins simples. En effet, en généralisant les propriétés connues de la configuration formée de six points d'une conique plane, il est parvenu à des résultats qui ne sont pas symétriques par rapport à la configuration des huit points dont il s'occupe.

Il est donc probable qu'il existe des propriétés plus générales qui s'étendent d'une manière uniforme à tous les huit points.

Ces propriétés ne se rattacheront pas immédiatement aux plans de Hesse, dont la détermination par les huit points n'est pas symétrique; mais on peut substituer au théorème de Hesse le théorème suivant:

I. 12345678 *étant un octogone inscrit à trois surfaces du second ordre qui n'appartiennent pas à un faisceau, les droites d'intersection des plans passant par les triples opposés de sommets:*

$$a \equiv \binom{123}{567}, \qquad b \equiv \binom{234}{678}, \qquad c \equiv \binom{345}{781}, \qquad d \equiv \binom{456}{812}$$

se trouvent sur une surface du second ordre. Nous les appellerons ses *directrices* en reservant le nom de *génératrices* aux droites de l'autre génération de la surface.

Ce théorème comprend celui de Hesse. En effet, la droite joignant le point (34, 678) au point (45, 812) rencontre évidemment les droites b, c et d. Selon le théorème énoncé il doit donc rencontrer aussi la quatrième droite a, ce qui est le théorème de Hesse.

De l'autre côté on peut déduire le théorème énoncé de celui de Hesse. A cet effet il suffit de considérer trois droites, telles que

$$[(34\,,\,678)\,,\,(45\,,\,812)],$$

qui rencontrent, selon le théorème de Hesse, les quatre droites a, b, c, d. Cela suffit pour démontrer que celles-ci se trouvent sur une surface du second ordre.

Le théorème énoncé présentant une certaine analogie avec celui de Pascal, on doit obtenir les théorèmes qui correspondent d'une manière semblable à ceux de Steiner, Kirkman etc., en étudiant les relations qui ont lieu entre les surfaces que déterminent, conformément au théorème énoncé, un *groupe* d'octogones inscrits aux surfaces données.

Nous nous bornerons ici à établir le théorème suivant:

II. *Les génératrices des surfaces du second ordre qui correspondent de la manière indiquée dans le théorème* I *aux* 16 *octogones:*

12 34 56 78
21 34 56 78
12 43 56 78
21 43 56 78
12 34 65 78
21 34 65 78
12 43 65 78
21 43 65 78
12 34 56 87
21 34 56 87
12 43 56 87
21 43 56 87
12 34 65 87
21 34 65 87
12 43 65 87
21 43 65 87

appartiendront à un complexe linéaire.

On voit que, dans les 16 octogones que nous venons d'énumerer, les quatre couples de sommets 12, 34, 56, 78 se succèdent dans le même ordre, mais que le groupe est formé par la combinaison de toutes les inversions de sommets appartenant au même couple.

Pour démontrer le théorème II nous rappellerons que deux couples quelconques de directrices (génératrices) d'une surface du second ordre peuvent être pris pour des droites conjuguées par rapport à un complexe linéaire, qui contiendra les génératrices (directrices) de la surface, et que le complexe est déterminé par ces deux couples de droites conjuguées; il est aussi déterminé par un couple de droites conjuguées et par une droite donnée du complexe qui ne rencontre pas les droites conjuguées données, ou par cinq droites du complexe.

Si nous déterminons un complexe par les deux couples de droites conjuguées a et d, b et c de la surface du théorème I, il suffira de démontrer que ce complexe a des rapports analogues avec la surface correspondant à l'octogone 21345678, qu'on obtient par une seule des inversions permises. Cette dernière surface contient les directrices

$$a \equiv \binom{123}{567}, \qquad e \equiv \binom{134}{678}, \qquad f \equiv \binom{345}{782}, \qquad d \equiv \binom{456}{812}.$$

Il s'agit donc de démontrer que le complexe déterminé par les couples de droites conjuguées a et d, e et f coïncide avec celui que nous avons déjà déterminé. Cela résulte du fait que ces deux complexes ont en commun le couple de droites conjuguées a et d et la droite du complexe 34, qui rencontre b et c, e et f sans rencontrer a et d.

En considérant la détermination par les droites conjuguées a et d, b et c, on voit que le complexe contient les droites suivantes

$$12\ ,\ 34\ ,\ 56\ ,\ 78,$$

et

$$\binom{123}{564},\ \binom{128}{567},\ \binom{342}{781},\ \binom{345}{786},$$

et, en appliquant à ces dernières droites les inversions permises, on en trouve encore les droites suivantes

$$\binom{124}{563},\ \binom{127}{568},\ \binom{341}{782},\ \binom{346}{785}.$$

En établissant directement que ces 12 droites appartiennent à un seul complexe linéaire, on aura de nos théorèmes I et II une démonstration indépendante du théorème de Hesse. En effet, les droites a et d, qui rencontrent quatre de ces droites, formeront un couple de droites conjuguées, de même b et c, e et f, et on sait que deux couples de droites conjuguées se trouvent toujours sur une surface du second ordre.

Afin d'avoir une détermination de notre complexe qui ne dépend pas de notre théorème I, nous commencerons par démontrer que les droites

$$m \equiv \binom{123}{563}, \qquad n \equiv \binom{124}{564}, \qquad p \equiv \binom{341}{781}, \qquad q \equiv \binom{342}{782}$$

sont des directrices d'une surface du second ordre.

En effet, il résulte de la propriété fondamentale des huit points donnés, qui il existe une surface du second ordre qui passe par les droites 56 et 78 et les points 1, 2, 3, 4. On a donc entre les rapports anharmoniques des plans joignant les droites 56 et 78 à ces points l'équation suivante

$$56(1234) = 78(1234),$$

ou bien, en désignant par $1''$ et $2''$ les points où les plans 781 et 782 rencontrent la droite 34, et par $3'$ et $4'$ les points où les plans 563 et 564 rencontrent la droite 12:

$$(123'4') = (1''2''34).$$

Or les droites

$$11'',\ 22'',\ 3'3\ ,\ 4'4$$

sont identiques respectivement à

$$p\ ,\ q\ ,\ m\ ,\ n\ .$$

On voit donc que ces quatre droites sont des génératrices ou directrices d'une surface du second ordre.

Le complexe linéaire qui a les couples de droites m et n, p et q pour droites conjuguées contiendra les droites

$$12\ ,\ 34\ ,\ 56\ ,\ 78$$

et

$$\binom{123}{564}\ ,\ \binom{124}{563}\ ,\ \binom{341}{782}\ ,\ \binom{342}{781}.$$

En intervertant entre eux les deux couples de points, 12 et 56, on trouve un complexe qui a encore m et n pour droites conjuguées, et qui contient encore la droite 78, qui ne rencontre pas m et n. Ce nouveau complexe doit donc coïncider avec le précédent. On voit ainsi qu'il contient les droites $\binom{345}{786}$, $\binom{346}{785}$, et de même par l'inversion des deux couples de points, 34 et 78, qu'il contient les droites $\binom{127}{568}$, $\binom{128}{567}$.

Comme le complexe trouvé contient les quatre droites 12, 34, 56, 78, tous les trois complexes qu'on obtiendrait en ordonnant les quatre couples de points 12, 34, 56, 78 de différentes manières, doivent contenir la congruence déterminée par ces même quatre droites. On aura donc, en désignant le complexe déjà considéré par (12, 34, 56, 78) et en appliquant des notations analogues aux deux autres, le théorème suivant:

III. *Les complexes* (12, 34, 56, 78), (12, 56, 78, 34), (12, 78, 34, 56) *ont en commun une congruence de droites.*

Copenhague le 27 février 1889.