SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE[1]

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI

à STOCKHOLM.

§ 1.

Le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe peut se ramener, comme on sait, à l'intégration du système d'équations différentielles suivant:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), &\qquad \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'',\\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + Mg(z_0\gamma - x_0\gamma''), &\qquad \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma,\\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma), &\qquad \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'.
\end{aligned}
$$

Les constantes A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0 qui figurent dans ces équations ont la signification suivante.

A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré, relativement au point fixe.

M est la masse du corps;

g l'intensité de la force de gravité;

---

[1] Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de gravité du corps considéré dans un système de coordonnées, dont l'origine est au point fixe et dont la direction coïncide avec celle des axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie.

Jusqu'à présent on n'était parvenu à intégrer ces équations que dans deux cas particuliers:

1) Le cas de POISSON (ou d'EULER) où l'on a $x_0 = y_0 = z_0 = 0$,

2) Le cas de LAGRANGE où l'on a $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$.

Dans ces deux cas l'intégration s'opère à l'aide des fonctions $\vartheta(u)$ dont l'argument est une fonction entière linéaire du temps.

Les six quantités $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ sont dans ces deux cas des fonctions uniformes du temps, n'ayant d'autres singularités que des pôles pour toutes les valeurs finies de la variable.

Les intégrales des équations différentielles considérées conservent-elles cette propriété dans le cas général?

Si tel était le cas il faudrait pouvoir intégrer ces équations différentielles à l'aide de séries de la forme

$$(2)\qquad \begin{aligned} p &= t^{-n_1}(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots), \\ q &= t^{-n_2}(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \ldots), \\ r &= t^{-n_3}(r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \ldots), \\ \gamma &= t^{-m_1}(f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \ldots), \\ \gamma' &= t^{-m_2}(g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \ldots), \\ \gamma'' &= t^{-m_3}(h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \ldots), \end{aligned}$$

où $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3$ désignent des nombres entiers positifs, et ces séries, pour pouvoir représenter le système général d'intégrales des équations différentielles considérées, devraient contenir *cinq* constantes arbitraires.

Il faut donc examiner si une pareille intégration est possible.

On s'assure facilement, en comparant les exposants des premiers termes dans les membres gauches et dans les membres droits des équations considérées que l'on doit avoir

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1, \qquad m_1 = m_2 = m_3 = 2.$$

On trouve ensuite, en posant par brièveté

$$A_1 = B - C, \qquad B_1 = C - A, \qquad C_1 = A - B$$

et en supposant l'unité de longueur choisie de manière à ce que l'on ait $Mg = 1$, que les coefficients p_0, q_0, r_0 doivent satisfaire aux équations suivantes

$$(3) \qquad \begin{aligned} -Ap_0 &= A_1 q_0 r_0 + y_0 h_0 - z_0 g_0, & -2f_0 &= r_0 g_0 - q_0 h_0, \\ -Bq_0 &= B_1 r_0 p_0 + z_0 f_0 - x_0 h_0, & -2g_0 &= p_0 h_0 - r_0 f_0, \\ -Cr_0 &= C_1 p_0 q_0 + x_0 g_0 - y_0 f_0, & -2h_0 &= q_0 f_0 - p_0 g_0. \end{aligned}$$

Pour que les trois dernières de ces équations puissent être satisfaites par des valeurs de f_0, g_0, h_0 différentes de zéro, il faut que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & r_0 & -q_0 \\ -r_0 & 2 & p_0 \\ q_0 & -p_0 & 2 \end{vmatrix} = 2(4 + p_0^2 + q_0^2 + r_0^2)$$

soit nul.

Si l'on ajoute les trois premières des équations (3) après les avoir multipliées respectivement par Ap_0, Bq_0, Cr_0, on trouve

$$(4) \qquad \begin{aligned} &A^2p_0^2 + B^2q_0^2 + C^2r_0^2 \\ &= x_0(Bq_0h_0 - Cr_0g_0) + y_0(Cr_0f_0 - Ap_0h_0) + z_0(Ap_0g_0 - Aq_0f_0); \end{aligned}$$

mais des trois dernières des équations (3) il résulte

$$(5) \qquad \begin{aligned} 2(Bq_0h_0 - Cr_0g_0) &= p_0(Ap_0f_0 + Bq_0g_0 + Cr_0h_0) - f_0(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2), \\ 2(Cr_0f_0 - Ap_0h_0) &= q_0(Ap_0f_0 + Bq_0g_0 + Cr_0h_0) - g_0(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2), \\ 2(Ap_0g_0 - Bq_0f_0) &= r_0(Ap_0f_0 + Bq_0g_0 + Cr_0h_0) - h_0(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2). \end{aligned}$$

Les six quantités $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ devant satisfaire aux deux relations algébriques

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') + l_1,$$
$$Ax_0p + By_0q + Cz_0r = l,$$

l et l_1 désignant des constantes d'intégration, il faut que l'on ait

$$Ap_0f_0 + Bq_0g_0 + Cr_0h_0 = 0,$$

$$x_0f_0 + y_0g_0 + z_0h_0 = \frac{1}{2}(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2).$$

Il résulte donc des équations (4) et (5)

$$A^2p_0^2 + B^2q_0^2 + C^2r_0^2 = -\frac{1}{4}(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2)^2.$$

Il faut maintenant distinguer deux cas.

1r *cas.* Supposons qu'aucune des quantités

$$A_1 = B - C, \qquad B_1 = C - A, \qquad C_1 = A - B$$

ne soit nulle. Si l'on pose alors

$$\frac{1}{2}(p_0^2 + q_0^2 + r_0^2) = \lambda_0,$$

$$\frac{1}{2}(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2) = \lambda,$$

$$\frac{1}{2}(A^2p_0^2 + B^2q_0^2 + C^2r_0^2) = \lambda_1,$$

on a

$$\frac{1}{2}p_0^2 = -\frac{BC\lambda_0 - (B + C)\lambda + \lambda_1}{B_1C_1},$$

$$\frac{1}{2}q_0^2 = -\frac{CA\lambda_0 - (C + A)\lambda + \lambda_1}{C_1A_1},$$

$$\frac{1}{2}r_0^2 = -\frac{AB\lambda_0 - (A + B)\lambda + \lambda_1}{A_1B_1}.$$

Or nous avons trouvé

$$\lambda_0 = -2, \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{2}\lambda^2.$$

On a donc

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
p_0^2 &= \frac{4BC + 2(B+C)\lambda + \lambda^2}{B_1C_1} = \frac{(2B+\lambda)(2C+\lambda)}{B_1C_1},\\
q_0^2 &= \frac{4CA + 2(C+A)\lambda + \lambda^2}{C_1A_1} = \frac{(2C+\lambda)(2A+\lambda)}{C_1A_1},\\
r_0^2 &= \frac{4AB + 2(A+B)\lambda + \lambda^2}{A_1B_1} = \frac{(2A+\lambda)(2B+\lambda)}{A_1B_1}.
\end{aligned}
$$

Si l'on ajoute les trois premières des équations (3) après les avoir multipliées respectivement par x_0, y_0, z_0, on trouve

$$
(7)\qquad x_0(Ap_0 + A_1q_0r_0) + y_0(Bq_0 + B_1r_0p_0) + z_0(Cr_0 + C_1p_0q_0) = 0.
$$

Cette équation sert à déterminer la quantité λ.

Les trois quantités f_0, g_0, h_0 doivent satisfaire aux trois équations suivantes

$$
\begin{aligned}
p_0f_0 + q_0g_0 + r_0h_0 &= 0,\\
Ap_0f_0 + Bq_0g_0 + Cr_0h_0 &= 0,\\
x_0f_0 + y_0g_0 + z_0h_0 &= \lambda,
\end{aligned}
$$

d'où l'on tire, en posant

$$
\mu = -(A_1x_0q_0r_0 + B_1y_0r_0p_0 + C_1z_0p_0q_0) = Ax_0p_0 + By_0q_0 + Cz_0r_0,
$$

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
f_0 &= -A_1q_0r_0\frac{\lambda}{\mu},\\
g_0 &= -B_1r_0p_0\frac{\lambda}{\mu},\\
h_0 &= -C_1p_0q_0\frac{\lambda}{\mu}.
\end{aligned}
$$

Les équations (6) et (7) déterminent les quantités p_0, q_0, r_0 au signe près.

Si l'on pose

$$
a = \sqrt{\frac{2A+\lambda}{A_1}},\qquad b = \sqrt{\frac{2B+\lambda}{B_1}},\qquad c = \sqrt{\frac{2C+\lambda}{C_1}}
$$

en fixant le signe des quantités a, b, c d'une manière arbitraire, on trouve que pour satisfaire à toutes les équations (3) il faut poser

$$p_0 = bc,$$

$$q_0 = ca,$$

$$r_0 = -ab.$$

L'équation (7) peut donc être écrite de la manière suivante

$$x_0(A+\lambda)p_0 + y_0(B+\lambda)q_0 + z_0(C+\lambda)r_0 = 0$$

ou bien

$$x_0(A+\lambda)bc + y_0(B+\lambda)ca - z_0(C+\lambda)ab = 0.$$

2^d *cas.* Supposons maintenant que l'une des trois quantités A_1, B_1, C_1, (p. ex. C_1) soit égale à zéro. (Dans ce cas on peut toujours aussi supposer $y_0 = 0$.) Pour satisfaire aux deux équations

$$A(p_0 f_0 + q_0 g_0) + C r_0 h_0 = 0,$$

$$p_0 f_0 + q_0 g_0 + r_0 h_0 = 0,$$

il faut nécessairement que l'on ait

$$r_0 h_0 = 0.$$

Les équations (3) admettent donc deux systèmes de solutions, qui peuvent s'écrire, en désignant par $\varepsilon \pm 1$,

I.
$$p_0 = \varepsilon i \cdot \frac{2C}{A-2C} \cdot \frac{z_0}{x_0}, \qquad f_0 = -\frac{2C}{x_0},$$

$$q_0 = \varepsilon i p_0, \qquad g_0 = -i\varepsilon \frac{2C}{x_0},$$

$$r_0 = 2\varepsilon i, \qquad h_0 = 0.$$

II.
$$p_0 = 0, \qquad f_0 = -\frac{2A}{x_0 - i\varepsilon z_0},$$

$$q_0 = 2\varepsilon i, \qquad g_0 = 0,$$

$$r_0 = 0, \qquad h_0 = \varepsilon i \frac{2A}{x_0 - i\varepsilon z_0}.$$

Les coefficients

$$p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0$$

une fois determinés, on obtient les coefficients

$$p_m, q_m, r_m, f_m, g_m, h_m$$

en résolvant le système d'équations linéaires suivantes

$$\begin{aligned}
(m-1)Ap_m - A_1(q_0 r_m + r_0 q_m) - z_0 g_m + y_0 h_m &= P_m,\\
(m-1)Bq_m - B_1(r_0 p_m + p_0 r_m) - x_0 h_m + z_0 f_m &= Q_m,\\
(m-1)Cr_m - C_1(p_0 q_m + q_0 p_m) - y_0 f_m + x_0 g_m &= R_m,\\
(m-2)f_m - r_0 g_m + q_0 h_m - g_0 r_m + h_0 q_m &= F_m,\\
(m-2)g_m - p_0 h_m + r_0 f_m - h_0 p_m + f_0 r_m &= G_m,\\
(m-2)h_m - q_0 f_m + p_0 g_m - f_0 q_m + g_0 p_m &= H_m.
\end{aligned}$$

Les membres droits de ces équations sont des fonctions entières des coefficients $p_\mu, q_\mu, r_\mu, f_\mu, g_\mu, h_\mu$ dans lesquels l'index $\mu < m$.

Afin que les séries

$$\begin{aligned}
p &= t^{-1}\sum p_m t^m, & \gamma &= t^{-2}\sum f_m t^m,\\
q &= t^{-1}\sum q_m t^m, & \gamma' &= t^{-2}\sum g_m t^m,\\
r &= t^{-1}\sum r_m t^m, & \gamma'' &= t^{-2}\sum h_m t^m,
\end{aligned}$$

contiennent le nombre suffisant de constantes arbitraires il faut que le déterminant de ces équations linéaires, lequel est une fonction entière du 6$^{\text{me}}$ degré en m, s'évanouisse pour cinq valeurs différentes de m égales à des nombres entiers positifs. De plus il faut que les quantités P_m, Q_m, R_m, F_m, G_m, H_m soient telles que les équations précédentes soient compatibles entre elles.

En effectuant les calculs je me suis assurée que ces conditions ne sont pas remplies dans le cas général; mais que, outre les deux cas déjà connus, elles sont encore remplies dans un cas nouveau, où les constantes satisfont aux équations suivantes

$$A = B = 2C, \qquad z_0 = 0.$$

C'est ce cas-là que je me propose d'étudier dans les paragraphes suivants.

§ 2.

Dans le cas que nous allons considérer, on a

$$A = B = 2C, \qquad z_0 = 0.$$

Par une rotation des axes de coordonnées dans le plan de xy et par un choix convenable de l'unité de longueur, on peut toujours effectuer, que l'on ait de plus dans ce cas

$$y_0 = 0, \qquad C = 1.$$

Si je pose alors

$$c_0 = Mgx_0,$$

les équations différentielles que nous avons à considérer sont les suivantes:

$$(1) \qquad \begin{cases} 2\dfrac{dp}{dt} = qr, & \dfrac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'', \\[2ex] 2\dfrac{dq}{dt} = -pr - c_0\gamma'', & \dfrac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma, \\[2ex] \dfrac{dr}{dt} = c_0\gamma', & \dfrac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'. \end{cases}$$

Les trois intégrales algébriques du cas général, sont dans ce cas-ci:

$$(2) \qquad \begin{cases} 2(p^2 + q^2) + r^2 = 2c_0\gamma + 6l_1, \\ 2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' = 2l, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1. \end{cases}$$

Outre ces trois intégrales algébriques on en trouve facilement encore une quatrième.

On a en effet (en posant $i = \sqrt{-1}$),

$$2\frac{d}{dt}(p + qi) = -ri(p + qi) - c_0 i\gamma'',$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma + \gamma' i) = -ri(\gamma + \gamma' i) + \gamma'' i(p + qi).$$

Par conséquent

$$\frac{d}{dt}\{(p+qi)^2+c_0(\gamma+\gamma' i)\} = - ri\{(p+qi)^2+c_0(\gamma+\gamma' i)\},$$

et de même

$$\frac{d}{dt}\{(p-qi)^2+c_0(\gamma-\gamma' i)\} = \quad ri\{(p-qi)^2+c_0(\gamma-\gamma' i)\},$$

d'où il suit

$$\frac{d}{dt} lg\{(p+qi)^2+c_0(\gamma+i\gamma')\} + \frac{d}{dt} lg\{(p-qi)^2+c_0(\gamma-i\gamma')\} = 0,$$

et, en intégrant,

$$(3) \qquad \{(p+qi)^2+c_0(\gamma+i\gamma')\}\{(p-qi)^2+c_0(\gamma-i\gamma')\} = k^2,$$

en désignant par k une constante réelle arbitraire.

Posons

$$x_1 = p+qi, \qquad y_1 = \gamma+\gamma' i,$$
$$x_2 = p-qi, \qquad y_2 = \gamma-\gamma' i,$$

$$\xi_1 = (p+qi)^2+c_0(\gamma+i\gamma') = x_1^2+c_0 y_1,$$
$$\xi_2 = (p-qi)^2+c_0(\gamma-i\gamma') = x_2^2+c_0 y_2.$$

L'équation (3) s'écrit alors

$$\xi_1\xi_2 = k^2.$$

Des équations (2) on tire les valeurs de $r^2, r\gamma'', \gamma''^2$ exprimées en x_1, x_2, ξ_1, ξ_2;

$$(4) \qquad \begin{cases} r^2 = 6l_1 - (x_1+x_2)^2 + \xi_1 + \xi_2, \\ c_0 r\gamma'' = 2lc_0 + x_1x_2(x_1+x_2) - x_2\xi_1 - x_1\xi_2, \\ c_0^2\gamma''^2 = c_0^2 - k^2 - x_1^2x_2^2 + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2, \end{cases}$$

ou bien, en posant

$$\mathfrak{A} = 6l_1 - (x_1 + x_2)^2,$$

$$\mathfrak{B} = 2lc_0 + x_1x_2(x_1 + x_2),$$

$$\mathfrak{C} = c_0^2 - k^2 - x_1^2x_2^2,$$

$$(4') \qquad \begin{cases} r^2 = \mathfrak{A} + \xi_1 + \xi_2, \\ c_0 r\gamma'' = \mathfrak{B} - x_2\xi_1 - x_1\xi_2, \\ c_0^2\gamma''^2 = \mathfrak{C} + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2. \end{cases}$$

Les quatre quantités x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 satisfont donc aux deux relations algébriques suivantes

$$(5) \qquad \begin{gathered} \xi_1\xi_2 = k^2, \\ (\mathfrak{A} + \xi_1 + \xi_2)(\mathfrak{C} + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2) - (\mathfrak{B} - x_2\xi_1 - x_1\xi_2)^2 = 0. \end{gathered}$$

Posons

$$R(x_1) = \mathfrak{A}x_1^2 + 2\mathfrak{B}x_1 + \mathfrak{C} = -x_1^4 + 6l_1x_1^2 + 4lc_0x_1 + c_0^2 - k^2,$$

$$R(x_2) = \mathfrak{A}x_2^2 + 2\mathfrak{B}x_2 + \mathfrak{C} = -x_2^4 + 6l_1x_2^2 + 4lc_0x_2 + c_0^2 - k^2,$$

$$R_1(x_1x_2) = \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2 = -6l_1x_1^2x_2^2 - (c_0^2 - k^2)(x_1 + x_2)^2$$
$$- 4lc_0(x_1 + x_2)x_1x_2 + 6l_1(c_0^2 - k^2) - 4l^2c_0^2.$$

Les équations (5), développées, deviennent alors

$$(5') \qquad \begin{gathered} \xi_1\xi_2 = k^2, \\ R(x_2)\xi_1 + R(x_1)\xi_2 + R_1(x_1x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2 = 0. \end{gathered}$$

Posons de plus

$$R(x_1x_2) = \mathfrak{A}x_1x_2 + \mathfrak{B}(x_1 + x_2) + \mathfrak{C} = -x_1^2x_2^2 + 6l_1x_1x_2$$
$$+ 2lc_0(x_1 + x_2) + c_0^2 - k^2;$$

on a alors l'identité

$$(6) \qquad R(x_1)R(x_2) - R(x_1x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2R_1(x_1x_2).$$

Posons:

$$(7)\quad \begin{aligned} W^2 &= \{R_1(x_1x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2\}^2 - 4k^2R(x_1)R(x_2) \\ &= \{R_1(x_1x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2\}^2 - 4k^2\{R(x_1x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2R_1(x_1x_2)\} \\ &= \{R_1(x_1x_2) - k^2(x_1 - x_2)^2\}^2 - 4k^2R(x_1x_2)^2 \end{aligned}$$

$$=\{R_1(x_1x_2)-k^2(x_1-x_2)^2-2kR(x_1x_2)\}\{R_1(x_1x_2)-k^2(x_1-x_2)^2+2kR(x_1x_2)\}.$$

Vu que d'après l'identité (6) on a

$$k^2(x_1 - x_2)^2 + 2kR(x_1x_2) - R_1(x_1x_2)$$

$$= \frac{\text{I}}{(x_1 - x_2)^2}\{k^2(x_1 - x_2)^4 + 2k(x_1 - x_2)^2R(x_1x_2) + R(x_1x_2)^2 - R(x_1)R(x_2)\}$$

$$= \frac{\text{I}}{(x_1 - x_2)^2}\{[k(x_1 - x_2)^2 + R(x_1x_2)]^2 - R(x_1)R(x_2)\}$$

$$= (x_1 - x_2)^2\left\{\frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} + k\right\}\left\{\frac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} + k\right\},$$

et de même

$$k^2(x_1 - x_2)^2 - 2kR(x_1x_2) - R_1(x_1x_2)$$

$$= (x_1 - x_2)^2\left\{\frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} - k\right\}\left\{\frac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} - k\right\},$$

on peut écrire

$$(7')\quad W^2 = (x_1 - x_2)^4\left\{\frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} - k\right\}\left\{\frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} + k\right\}$$

$$\times\left\{\frac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} + k\right\}\left\{\frac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} - k\right\},$$

et on a alors

$$(8)\quad \begin{cases} \xi_1 = -\dfrac{R_1(x_1x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2 - W}{2R(x_2)}, \\[2ex] \xi_2 = -\dfrac{R_1(x_1x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2 + W}{2R(x_1)}. \end{cases}$$

Au lieu des deux variables x_1 et x_2 introduisons maintenant deux variables nouvelles s_1 et s_2, définies par les équations

$$(9)\qquad \begin{cases} s_1 = \dfrac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2} + \dfrac{1}{2}l_1, \\[2ex] s_2 = \dfrac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2} + \dfrac{1}{2}l_1; \end{cases}$$

s_1 et s_2 sont, comme on le voit, les deux racines de l'équation algébrique du second degré

$$(x_1 - x_2)^2\left(s - \frac{1}{2}l_1\right)^2 - R(x_1x_2)\left(s - \frac{1}{2}l_1\right) - \frac{1}{4}R_1(x_1x_2) = 0.$$

On a alors

$$W^2 = (x_1 - x_2)^4(2s_1 - l_1 - k)(2s_1 - l_1 + k)(2s_2 - l_1 - k)(2s_2 - l_1 + k);$$

ou bien, en posant

$$k_1 = \frac{l_1 + k}{2}, \qquad k_2 = \frac{l_1 - k}{2},$$

on a

$$(10)\qquad W^2 = 16(x_1 - x_2)^4(s_1 - k_1)(s_2 - k_1)(s_1 - k_2)(s_2 - k_2),$$

$$(11)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{R(x_2)}\left\{\left[\sqrt{(s_1 - k_1)(s_2 - k_1)} + \sqrt{(s_1 - k_2)(s_2 - k_2)}\right]^2 - k^2\right\}, \\[2ex] \xi_2 = \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{R(x_1)}\left\{\left[\sqrt{(s_1 - k_1)(s_2 - k_1)} - \sqrt{(s_1 - k_2)(s_2 - k_2)}\right]^2 - k^2\right\}. \end{cases}$$

Établissons maintenant les équations différentielles, qui définissent ces deux variables nouvelles s_1 et s_2 en fonction du temps.

En posant

$$(12)\qquad \begin{aligned} g_2 &= k^2 - c_0^2 + 3l_1^2, \\ g_3 &= l_1(k^2 - c_0^2 - l_1^2) + l^2c_0^2, \end{aligned}$$

$$S_1 = 4s_1^3 - g_2s_1 - g_3, \qquad S_2 = 4s_2^3 - g_2s_2 - g_3,$$

on trouve

$$\sqrt{S_1} = \frac{R(x_1) - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)R'(x_1)}{(x_1 - x_2)^3}\sqrt{R(x_2)} - \frac{R(x_2) + \frac{1}{4}(x_1 - x_2)R'(x_2)}{(x_1 - x_2)^3}\sqrt{R(x_1)},$$

$$\sqrt{S_2} = \frac{R(x_1) - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)R'(x_1)}{(x_1 - x_2)^3}\sqrt{R(x_2)} + \frac{R(x_2) + \frac{1}{4}(x_1 - x_2)R'(x_2)}{(x_1 - x_2)^3}\sqrt{R(x_1)},$$

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{ds_1}{\sqrt{S_1}} &= \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}, \\ \frac{ds_2}{\sqrt{S_2}} &= -\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}. \end{aligned} \right.$$

Des équations différentielles (1) il suit, vu que $x_1 = p + qi$, et $x_2 = p - qi$,

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2i\frac{dx_1}{dt} &= rx_1 + c_0\gamma'', \\ -2i\frac{dx_2}{dt} &= rx_2 + c_0\gamma''. \end{aligned} \right.$$

Par conséquent

$$-4\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = r^2x_1^2 + 2rc_0\gamma''x_1 + c_0^2\gamma''^2$$

ou bien, en écrivant au lieu de r^2, $c_0r\gamma''$, $c_0^2\gamma''^2$ leurs valeurs, définies par les équations (4'),

$$-4\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = x_1^2(\mathcal{A} + \xi_1 + \xi_2) + 2x_1(\mathcal{B} - x_2\xi_1 - x_1\xi_2) + \mathcal{C} + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2$$
$$= R(x_1) + (x_1 - x_2)^2\xi_1.$$

De la même manière on trouve

$$-4\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = R(x_2) + (x_1 - x_2)^2\xi_2$$

et

$$4\frac{dx_1}{dt}\cdot\frac{dx_2}{dt} = r^2x_1x_2 + rc_0\gamma''(x_1 + x_2) + c_0^2\gamma''^2$$

$$= x_1x_2(\mathcal{A} + \xi_1 + \xi_2) + (x_1 + x_2)(\mathcal{B} - x_2\xi_1 - x_1\xi_2) + \mathcal{C} + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2$$
$$= R(x_1x_2).$$

En élevant au carré les deux membres de la première des équations (13), on trouve

$$-4\cdot\frac{1}{S_1}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2=-\frac{4}{R(x_1)}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2-\frac{4}{R(x_2)}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2-\frac{8}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt}$$

$$=2+(x_1-x_2)^2\left(\frac{\xi_1}{R(x_1)}+\frac{\xi_2}{R(x_2)}\right)-2\frac{R(x_1x_2)}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}},$$

ou bien, par suite des équations (5'),

$$-4\left(\frac{1}{\sqrt{S_1}}\frac{ds_1}{dt}\right)^2$$

$$=2-\frac{(x_1-x_2)^2}{R(x_1).R(x_2)}\{R_1(x_1x_2)+k^2(x_1-x_2)^2\}-\frac{2R(x_1x_2)}{\sqrt{R(x_1)}\cdot\sqrt{R(x_2)}}$$

$$=\frac{R(x_1).R(x_2)+\overline{R(x_1x_2)}^2-2R(x_1x_2)\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}-k^2(x_1-x_2)^4}{R(x_1)R(x_2)}$$

$$=\frac{(x_1-x_2)^4}{R(x_1).R(x_2)}\left\{\frac{\left[R(x_1x_2)-\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}\right]^2}{(x_1-x_2)^4}-k^2\right\}$$

$$=4\frac{(x_1-x_2)^4}{R(x_1)R(x_2)}\left(\frac{R(x_1x_2)-\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1-x_2)^2}-\frac{1}{2}k\right)\left(\frac{R(x_1x_2)-\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1-x_2)^2}+\frac{1}{2}k\right)$$

$$=4\frac{(x_1-x_2)^4}{R(x_1).R(x_2)}(s_1-k_1)(s_1-k_2).$$

Mais on a

$$s_2-s_1=\frac{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2}.$$

Par conséquent

$$-\frac{1}{S_1}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2=\frac{(s_1-k_1)(s_1-k_2)}{(s_1-s_2)^2}.$$

Posons

$$R_1(s)=-S(s-k_1)(s-k_2)=-4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)(s-k_1)(s-k_2);$$

on a alors

$$\frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}}=\frac{dt}{s_1-s_2}.$$

On trouve tout à fait de la même manière

$$\frac{ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}} = \frac{dt}{s_2 - s_1}.$$

D'où il suit

$$(15) \qquad \begin{aligned} 0 &= \frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}}, \\ dt &= \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}}. \end{aligned}$$

$R_1(s)$ étant un polynôme du cinquième degré, et les racines de l'équation $R_1(s) = 0$ étant toutes différentes entre elles, les équations différentielles (15) nous conduisent aux fonctions ultraelliptiques, ou autrement dit, aux fonctions de M. ROSENHAIN.

Cherchons d'abord les expressions des six quantités $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ exprimées à l'aide des deux quantités s_1 et s_2. Nous y arriverons à l'aide de formules, que j'emprunte à un cours inédit de M. WEIERSTRASS sur les fonctions elliptiques, et dont une partie se trouvent aussi développées dans le *Traité des fonctions elliptiques* etc. de M. HALPHEN et dans les *Formeln und Lehrsätze* etc. de M. SCHWARTZ.

§ 3.

Soit

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

un polynôme du quatrième degré de la variable x. Les coefficients A, B, C, B', A' sont des constantes, assujetties à la condition que $R(x)$ n'ait point de diviseur quadratique. Soit u une seconde variable, liée à x par l'équation différentielle

$$(1) \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

La relation la plus générale entre u et x peut être exprimée de la manière suivante.

Posons

$$(2)\qquad \begin{aligned} g_2 &= AA' - 4BB' + 3C^2, \\ g_3 &= ACA' + 2BCB' - AB'B' - A'BB - C^3, \\ D &= B^2 - AC, \qquad E = A^2B' - 3ABC + 2B^3; \end{aligned}$$

on a alors

$$(3)\qquad 4\left(\frac{D}{A}\right)^3 - g_2\frac{D}{A} - g_3 = \frac{E^2}{A^3}.$$

Nous désignerons par $\wp(u)$ la fonction $\wp(u, g_2, g_3)$, et par $\bar{\wp}(u)$ la fonction $\wp(u, g_2, -g_3)$.[1] En vertu de l'équation (3) on peut définir un argument w tel, que, le signe de $\sqrt{A}$ étant fixé arbitrairement, les deux équations

$$(4)\qquad \wp(w) = \frac{D}{A}, \qquad \wp'(w) = -\frac{E}{A\sqrt{A}}$$

aient lieu simultanément. Posons

$$\begin{aligned} \varphi_0(u) &= -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}}\frac{\wp'u + \wp'w}{\wp u - \wp w} \\ &= -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{\sigma'(u-w)}{\sigma(u-w)} - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + \frac{\sigma'(w)}{\sigma(w)}\right\}. \end{aligned}$$

L'expression la plus générale de x en fonction de u est alors

$$(6)\qquad x = \varphi_0(u - u_0)$$

où u_0 désigne une constante arbitraire. (Pour $u = u_0$; $x = \infty$ et $\frac{1}{x^2}\frac{dx}{du} = \sqrt{A}$.) On a

$$\varphi_0(-u + w) = \varphi_0(u), \qquad \varphi_0\left(u + \frac{w}{2}\right) = \varphi_0\left(-u + \frac{w}{2}\right)$$

---

[1] Voir HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques.*
SCHWARTZ, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen.*

et par conséquent, si l'on pose

$$(8)\quad \varphi(u\,,w) = \varphi_0\left(u+\frac{w}{2}\right) = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\frac{w}{2}\right) - \frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\frac{w}{2}\right) + \frac{\sigma'}{\sigma}(w)\right\}$$

$$= -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp u - \wp\left(\frac{w}{2}\right)} + \frac{1}{2}\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}\right\}.$$

$\varphi(u\,,w)$ est une fonction *paire* de u.

Les équations (4) subsistent sans changement, si l'on ajoute à w une période quelconque de la fonction $\wp(u)$. Si nous désignons par conséquent par $(2\tilde{\omega}\,,2\tilde{\omega}')$ une paire *quelconque* de périodes primitives de la fonction $\wp(u)$, et si de toutes les valeurs de w (en nombre infini) qui satisfont aux équations (4), nous fixons une arbitrairement, les quatre expressions

$$\varphi(u\,,w)\,,\ \varphi(u\,,w+2\tilde{\omega})\,,\ \varphi(u\,,w+2\tilde{\omega}+2\tilde{\omega}')\,,\ \varphi(u\,,w+2\tilde{\omega})$$

représenteront *quatre fonctions paires, différentes* de u, qui toutes, mises à la place de x, satisfont à l'équation différentielle (1). En effet si 2Ω et $2\Omega'$ sont deux périodes quelconques de la fonction $\wp(u)$, il résulte de l'équation (8)

$$(9)\quad \begin{aligned} \varphi(u\,,w+2\Omega) &= \varphi(u+\Omega\,,w) \\ \varphi(u\,,w+2\Omega') &= \varphi(u+\Omega',w). \end{aligned}$$

Pour que l'équation

$$\varphi(u\,,w+2\Omega) = \varphi(u\,,w+2\Omega')$$

puisse subsister pour toutes les valeurs de u, il faut donc que l'on ait

$$\varphi(u+\Omega\,,w) = \varphi(u+\Omega',w),$$
$$\varphi(u+\Omega'-\Omega\,,w) = \varphi(u\,,w),$$

c'est à dire $\Omega'-\Omega$ doit être une période de la fonction $\varphi(u)$ et par conséquent, (en vue de la dernière des équations (8)) $\Omega'-\Omega$ doit être aussi une période de $\wp u$.

Si tel n'est pas le cas, les deux fonctions $\varphi(u, w + 2\Omega)$ et $\varphi(u, w + 2\Omega')$ ne sont pas identiques. On en conclut donc que les quatre fonctions précitées,

$$\varphi(u, w), \varphi(u, w + 2\tilde{\omega}), \varphi(u, w + 2\tilde{\omega} + 2\tilde{\omega}'), \varphi(u, w + 2\tilde{\omega}'),$$

sont toutes les quatre différentes entre elles.

Mais il n'existe en tout que quatre fonctions *paires* de u, qui, mises à la place de x, satisfont à l'équation différentielle (1); ces quatre fonctions se distinguent par là, que pour $u = 0$ chacune d'elle devient égale à l'une des quatre racines de l'équation

$$R(x) = 0.$$

Ces quatre fonctions doivent donc être identiques avec les quatre fonctions paires précitées, et, en vertu des équations (9) on peut aussi les écrire de la manière suivante:

$$\varphi(u, w), \varphi(u + \tilde{\omega}, w), \varphi(u + \tilde{\omega} + \tilde{\omega}', w), \varphi(u + \tilde{\omega}', w).$$

Si nous posons

$$a = \varphi(0, w), \qquad a_1 = \varphi(\tilde{\omega}, w) = \varphi(0, w + 2\tilde{\omega}),$$
$$a_2 = \varphi(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}', w) = \varphi(0, w + 2\tilde{\omega} + 2\tilde{\omega}'),$$
$$a_3 = \varphi(\tilde{\omega}', w) = \varphi(0, w + 2\tilde{\omega}'),$$

les quatre quantités a, a_1, a_2, a_3 représentent les 4 racines différentes de l'équation $R(x) = 0$ et l'on a

$$a = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\wp''\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}, \qquad a_2 = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\wp''\left(\frac{w}{2} + \tilde{\omega} + \tilde{\omega}'\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2} + \tilde{\omega} + \tilde{\omega}'\right)},$$

$$a_1 = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\wp''\left(\frac{w}{2} + \tilde{\omega}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2} + \tilde{\omega}\right)}, \qquad a_3 = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\wp''\left(\frac{w}{2} + \tilde{\omega}'\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2} + \tilde{\omega}'\right)}.$$

En posant $\wp(\tilde{\omega}) = e_1$, $\wp(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}') = e_2$, $\wp(\tilde{\omega}') = e_3$, les relations suivantes ont lieu pour chaque valeur de l'argument u,

$$\wp\left(\frac{u}{2}\right) = -\frac{(e_2^2 - e_3^2)\sigma_1 u + (e_3^2 - e_1^2)\sigma_2 u + (e_1^2 - e_2^2)\sigma_3 u}{(e_2 - e_3)\sigma_1 u + (e_3 - e_1)\sigma_2 u + (e_1 - e_2)\sigma_3 u},$$

$$\wp'\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{-2(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\sigma u}{(e_2 - e_3)\sigma_1 u + (e_3 - e_1)\sigma_2 u + (e_1 - e_2)\sigma_3 u},$$

$$\frac{\wp''\left(\frac{u}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)} = -2 \cdot \frac{(e_2 - e_3)\sigma_2 u \sigma_3 u + (e_3 - e_1)\sigma_3 u \sigma_1 u + (e_1 - e_2)\sigma_1 u \sigma_2 u}{\sigma u[(e_2 - e_3)\sigma_1 u + (e_3 - e_1)\sigma_2 u + (e_1 - e_2)\sigma_3 u]}$$

$$= -2\frac{\sigma_1 u + \sigma_2 u + \sigma_3 u}{\sigma u}. \text{ [1]}$$

On a de plus

$$\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_1}, \qquad \frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_2}, \qquad \frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_3}.$$

Pour chaque valeur déterminée de w, les signes correspondants des racines carrées dans ces formules sont aussi parfaitement déterminés, et l'on a

$$\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} \cdot \sqrt{\frac{D}{A} - e_2} \cdot \sqrt{\frac{D}{A} - e_3} = -\frac{1}{2}\wp'(w) = \frac{E}{2A\sqrt{A}}.$$

En vertu de ces formules, on a donc

$$-\wp\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{(e_2^2 - e_3^2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} + (e_3^2 - e_1^2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_2} + (e_1^2 - e_2^2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_3}}{(e_2 - e_3)\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} + (e_3 - e_1)\sqrt{\frac{D}{A} - e_2} + (e_1 - e_2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_3}},$$

$$\wp'\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{-2(e_2 - e_3)(e_3 - e_1(e_1 - e_2)}{(e_2 - e_3)\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} + (e_3 - e_1)\sqrt{\frac{D}{A} - e_2} + (e_1 - e_2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_3}},$$

$$\frac{1}{2\sqrt{A}}\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} + \sqrt{\frac{D}{A} - e_2} + \sqrt{\frac{D}{A} - e_3}\right\}.$$

[1] Voir SCHWARZ, *Formeln und Lehrsätze.*

Par conséquent la racine a de l'équation $R(x) = 0$, correspondante à la valeur particulière de w que nous avons choisie, est donnée par la formule:

$$a = -\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\sigma_1(w) + \sigma_2(w) + \sigma_3(w)}{\sigma(w)} - \frac{B}{A}$$

$$= -\frac{B}{A} - \frac{1}{\sqrt{A}} \left\{ \sqrt{\frac{D}{A} - e_1} + \sqrt{\frac{D}{A} - e_2} + \sqrt{\frac{D}{A} - e_3} \right\}.$$

Si l'on pose

$$h_0 = \frac{\sigma_1(w) + \sigma_2(w) + \sigma_3(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_1} + \sqrt{\frac{D}{A} - e_2} + \sqrt{\frac{D}{A} - e_3},$$

$$h_1 = \frac{(e_2 - e_3)\sigma_1(w) + (e_3 - e_1)\sigma_2(w) + (e_1 - e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

$$= (e_2 - e_3)\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} + (e_3 - e_1)\sqrt{\frac{D}{A} - e_2} + (e_1 - e_2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_3},$$

$$h_2 = \frac{(e_2^2 - e_3^2)\sigma_1(w) + (e_3^2 - e_1^2)\sigma_2(w) + (e_1^2 - e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

$$= (e_2^2 - e_3^2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} + (e_3^2 - e_1^2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_2} + (e_1^2 - e_2^2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_3},$$

on a donc

$$a = -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}},$$

$$\varphi(u, w) = -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)}{h_1 \wp u + h_2}.$$

En posant

$$\tilde{\omega} = \omega_1,$$

$$\tilde{\omega} + \tilde{\omega}' = \omega_2,$$

$$\tilde{\omega}' = \omega_3$$

et en désignant par λ, μ, ν les nombres $1, 2, 3$ dans un ordre quelconque, on a les formules

$$\frac{\sigma_\lambda(u + 2\omega_\lambda)}{\sigma(u + 2\omega_\lambda)} = \frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u},$$

$$\frac{\sigma_\lambda(u + 2\omega_\mu)}{\sigma(u + 2\omega_\mu)} = -\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u},$$

$$\frac{\sigma_\lambda(u + 2\omega_\nu)}{\sigma(u + 2\omega_\nu)} = -\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}.$$

On obtient donc, en écrivant dans les formules précédentes, $w + 2\omega_1$, $w + 2\omega_2$, $w + 2\omega_3$ à la place de w et en posant

$$h_0' = \frac{\sigma_1(w) - \sigma_2(w) - \sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

$$h_1' = \frac{(e_2 - e_3)\sigma_1(w) - (e_3 - e_1)\sigma_2(w) - (e_1 - e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

$$h_2' = \frac{(e_2^2 - e_3^2)\sigma_1(w) - (e_3^2 - e_1^2)\sigma_2(w) - (e_1^2 - e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

$$h_0'' = \frac{-\sigma_1(w) + \sigma_2(w) - \sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

$$(14) \qquad h_1'' = \frac{-(e_2 - e_3)\sigma_1(w) + (e_3 - e_1)\sigma_2(w) - (e_1 - e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

$$h_2'' = \frac{-(e_2^2 - e_3^2)\sigma_1(w) + (e_3^2 - e_1^2)\sigma_2(w) - (e_1^2 - e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

$$h_0''' = \frac{-\sigma_1(w) - \sigma_2(w) + \sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

$$h_1''' = \frac{-(e_2 - e_3)\sigma_1(w) - (e_3 - e_1)\sigma_2(w) + (e_1 - e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

$$h_2''' = \frac{-(e_2^2 - e_3^2)\sigma_1(w) - (e_3^2 - e_1^2)\sigma_2(w) + (e_1^2 - e_3^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

les formules suivantes

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
a &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}},\\
\varphi(u\,,\, w) &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}}\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{h_1\wp u + h_2},\\
a_1 &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0'}{\sqrt{A}},\\
\varphi(u+\omega_1\,,\, w) &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0'}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}}\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{h_1'\wp u + h_2'},\\
a_2 &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0''}{\sqrt{A}},\\
\varphi(u+\omega_2\,,\, w) &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0''}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}}\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{h_1''\wp u + h_2''},\\
a_3 &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0'''}{\sqrt{A}},\\
\varphi(u+\omega_3\,,\, w) &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0'''}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}}\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{h_1'''\wp u + h_2'''}.
\end{aligned}
$$

De cette manière on obtient les quatre fonctions *paires* de u, qui satisfont à l'équation différentielle $\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$, de même que les racines correspondantes de l'équation $R(x) = 0$, c'est à dire les valeurs que chacune de ces quatre fonctions prend pour $u = 0$, exprimées en fonctions rationelles des quantités suivantes:

$$
\frac{B}{A},\quad \frac{1}{\sqrt{A}},\quad \frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_1},\quad \frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_2},\quad \frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_3}.
$$

Jusqu'à présent nous n'avons assujetti les constantes $A\,, B\,, C\,, B'\,, A'$ (les coefficients de $R(x)$) à aucune condition; supposons maintenant que tous ces coefficients sont réels. — Il y a toujours dans ce cas des valeurs réelles positives de u qui satisfont à l'équation $\wp'(u) = 0$; désignons par ω la plus petite de toutes ces valeurs. De même l'équation $\bar{\wp}'(u) = 0$ peut être satisfaite par des valeurs réelles positives de u et nous désignerons par $\tilde{\omega}$ la plus petite de ces dernières.

Il faut à présent distinguer deux cas:

I. La quantité $g_2^3 - 27g_3^2$ est *positive.*

Posons dans ce cas

$$\omega_1 = \omega, \qquad \omega_2 = \omega + \tilde{\omega}i, \qquad \omega_3 = \tilde{\omega}i,$$

$$\wp(\omega_1) = e_1, \qquad \wp(\omega_2) = e_2, \qquad \wp(\omega_3) = e_3.$$

Les quantités e_1, e_2, e_3, qui représentent les racines de l'équation

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0,$$

sont dans ce cas toutes trois réelles, et l'on a

$$e_1 > e_2 > e_3;$$

$(2\omega_1, 2\omega_3)$ est une paire de périodes primitives de la fonction $\wp(u)$.

II. La quantité $g_2^3 - 27g_3^2$ est *négative.*

Posons dans ce cas

$$\omega_1 = \frac{\omega - \tilde{\omega}i}{2}, \qquad \omega_2 = \omega, \qquad \omega_3 = \frac{\omega + \tilde{\omega}i}{2},$$

$$\wp(\omega_1) = e_1, \qquad \wp(\omega_2) = e_2, \qquad \wp(\omega_3) = e_3;$$

$(2\omega_1, 2\omega_3)$ représente dans ce cas aussi une paire de périodes primitives de la fonction $\wp(u)$, mais e_1 et e_3 sont dans ce cas des quantités imaginaires, conjuguées, tandis que $e_2 = -(e_1 + e_3)$ est réel. La quantité $\frac{e_1 - e_3}{i}$ est positive.

Si nous convenons de donner à $\sqrt{A}$ sa valeur positive dans le cas où A est positif, et de désigner par cette racine le produit de i par une quantité positive, dans le cas où A est négatif, on peut dans les deux cas déterminer de la manière suivante une valeur de w satisfaisant aux équations

$$\wp(w) = \frac{D}{A}, \qquad \wp'(w) = -\frac{E}{A\sqrt{A}}.$$

Les équations

$$\frac{E^2}{A^3} = \wp'(w)^2 = 4\left(\frac{D}{A} - e_1\right)\left(\frac{D}{A} - e_2\right)\left(\frac{D}{A} - e_3\right)$$

nous font voir que dans le cas I, si $A > 0$, $\frac{D}{A}$ doit être contenu soit dans l'intervalle $(e_1 \ldots \infty)$, soit dans l'intervalle $(e_3 \ldots e_2)$; si $A < 0$, $\frac{D}{A}$ appartiendra soit à l'intervalle $(-\infty \ldots e_3)$ soit à l'intervalle $(e_2 \ldots e_1)$. Dans le cas II, au contraire, $\frac{D}{A}$ doit être contenu soit dans l'intervalle $(e_2 \ldots \infty)$, soit dans l'intervalle $(-\infty \ldots e_2)$.

Désignons par $(a \ldots b)$ une quantité contenue dans l'intervalle réelle $(a \ldots b)$, par $(+)$ et $(-)$ des quantités positives ou négatives respectivement et par ε une quantité réelle satisfaisant à la condition

$$0 \leqq \varepsilon \leqq 1.$$

On a dans le cas I

$$(1) \qquad \wp(2\varepsilon\omega) = (\infty \ldots e_1), \qquad \wp'(2\varepsilon\omega) = \begin{cases} (-)\,, & \text{si } \varepsilon < \frac{1}{2}, \\ 0\,, & \text{»} \ \varepsilon = \frac{1}{2}, \\ (+)\,, & \text{»} \ \varepsilon > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(2) \qquad \wp(\omega + 2\varepsilon\tilde{\omega}i) = (e_1 \ldots e_2), \qquad \wp'(\omega + 2\varepsilon\tilde{\omega}i) = \begin{cases} (+)i, & \text{si } \varepsilon < \frac{1}{2}, \\ 0\,, & \text{»} \ \varepsilon = \frac{1}{2}, \\ (-)i, & \text{»} \ \varepsilon > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(3) \qquad \wp(2\varepsilon\omega + \tilde{\omega}i) = (e_3 \ldots e_2), \qquad \wp'(2\varepsilon\omega + \tilde{\omega}i) = \begin{cases} (+)\,, & \text{si } \varepsilon < \frac{1}{2}, \\ 0\,, & \text{»} \ \varepsilon = 0, \\ (-)\,, & \text{»} \ \varepsilon > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(4) \qquad \wp(2\varepsilon\tilde{\omega}i) = (-\infty \ldots e_3), \qquad \wp'(2\varepsilon\tilde{\omega}i) = \begin{cases} (-)i, & \text{si } \varepsilon < \frac{1}{2}, \\ 0\,, & \text{»} \ \varepsilon = \frac{1}{2}, \\ (+)i, & \text{»} \ \varepsilon > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dans chacun de ces quatre cas, si l'on fait croître ε d'une manière continue de 0 à $\frac{1}{2}$, la fonction $\wp(u)$ parcourt tout l'intervalle indiqué, en croissant continuellement dans le 3^{me} et dans le 4^{me} cas, en diminuant dans le 1^{er} et dans le 2^{me}. Si l'on fait varier ensuite ε de $\frac{1}{2}$ jusqu'à 1, $\wp(u)$ parcourt dans chaque cas le même intervalle qu'auparavant, mais dans le sens contraire. A deux valeurs de ε, à égale distance de $\frac{1}{2}$, correspondent les mêmes valeurs de $\wp(u)$, mais des valeurs contraires de $\wp'(u)$.

Dans le cas II on a

$$\wp(2\varepsilon\omega) = (+\infty \ldots e_2), \qquad \wp'(2\varepsilon\omega) = \begin{cases} (-), & \text{si} \quad \varepsilon < \frac{1}{2}, \\ 0\;, & \text{»} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}, \\ (+), & \text{»} \quad \varepsilon > \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{5}$$

$$\wp(2\varepsilon\tilde{\omega}i) = (-\infty \ldots e_2), \qquad \wp'(2\varepsilon\tilde{\omega}i) = \begin{cases} (-)i, & \text{si} \quad \varepsilon < \frac{1}{2}, \\ 0\;, & \text{»} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}, \\ (+)i, & \text{»} \quad \varepsilon > \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{6}$$

D'après ces formules, on peut définir une quantité w, satisfaisant aux équations

$$\wp(w) = \frac{D}{A}, \qquad \wp'(w) = -\frac{E}{A\sqrt{A}}$$

de la manière suivante:

I. $g_2^3 - 27g_3^2$ *est positif.*

1) Si A est positif et $\frac{D}{A}$ appartient à l'intervalle $(+\infty \ldots e_1)$ on peut poser

$$w = 2\varepsilon\omega \quad (0 < \varepsilon < 1),$$

en remarquant que

$$\varepsilon \lesseqgtr \frac{1}{2}, \quad \text{selon que} \quad E \gtreqless 0.$$

2) Si A est négatif et $\frac{D}{A}$ se trouve dans l'intervalle $(-\infty \ldots e_3)$, on peut poser

$$w = 2\varepsilon\tilde{\omega}i \quad (0 < \varepsilon < 1),$$

et l'on a

$$\varepsilon \lesseqqgtr \frac{1}{2}, \quad \text{selon que} \quad E \gtreqqless 0.$$

3) Si A est positif, mais $\frac{D}{A}$ se trouve dans l'intervalle $(e_3 \ldots e_2)$ on peut poser

$$w = 2\varepsilon\omega + \tilde{\omega}i \quad (0 \leqq \varepsilon < 1),$$

et l'on a

$$\varepsilon \lesseqqgtr \frac{1}{2}, \quad \text{selon que} \quad E \lesseqqgtr 0.$$

4) Si A est négatif et $\frac{D}{A}$ appartient à l'intervalle $(e_1 \ldots e_2)$ on peut poser

$$w = \omega + 2\varepsilon\tilde{\omega}i \quad (0 \leqq \varepsilon < 1),$$

et l'on a

$$\varepsilon \lesseqqgtr \frac{1}{2}, \quad \text{selon que} \quad E \lesseqqgtr 0.$$

II. $g_2^3 - 27g_3^2$ *est une quantité négative.*

5) Si A est positif, $\frac{D}{A}$ appartient à l'intervalle $(e_2 \ldots \infty)$ et l'on peut poser

$$w = 2\varepsilon\omega \quad (0 \leqq \varepsilon < 1),$$

$$\varepsilon \quad \text{étant} \quad \lesseqqgtr \frac{1}{2}, \quad \text{selon que} \quad E \gtreqqless 0.$$

6) Si A est négatif, $\frac{D}{A}$ se trouve dans l'intervalle $(-\infty \ldots e_2)$ et l'on peut poser

$$w = 2\varepsilon\tilde{\omega}i \quad (0 < \varepsilon < 1),$$

$$\varepsilon \quad \text{étant} \quad \lesseqqgtr \frac{1}{2}, \quad \text{selon que} \quad E \gtreqqless 0.$$

Les cas 1) et 2) se présentent lorsque toutes les quatre racines de l'équation $R(x) = 0$ sont réelles.

Les cas 3) et 4) ont lieu si tous ces racines sont imaginaires.

Enfin on a les cas 5) et 6) lorsque deux racines sont réelles et les deux autres imaginaires conjuguées.

Dans le cas 1) les quantités $\frac{D}{A} - e_1$, $\frac{D}{A} - e_2$, $\frac{D}{A} - e_3$ sont toutes trois réelles et positives; dans le cas 2) elles sont réelles et négatives; par conséquent, en vertu des équations (14) les quantités

$$\frac{h_0}{\sqrt{A}}, \frac{h_0'}{\sqrt{A}}, \frac{h_0''}{\sqrt{A}}, \frac{h_0'''}{\sqrt{A}}$$

sont dans les deux cas réelles.

Dans le cas 3) les quantités $\frac{D}{A} - e_1$, $\frac{D}{A} - e_2$ sont négatives, tandis que $\frac{D}{A} - e_3$ est positif; par conséquent

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A} - e_2}$$

sont des quantités imaginaires, tandis que $\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A} - e_3}$ est une quantité réelle.

Les quantités $\frac{h_0}{\sqrt{A}}, \frac{h_0'}{\sqrt{A}}, \frac{h_0''}{\sqrt{A}}, \frac{h_0'''}{\sqrt{A}}$ sont donc des quantités complexes. Les quantités a et a_3, ainsi que a_1 et a_2 sont dans ce cas-ci des quantités complexes conjuguées.

Dans le cas 4) les quantités $\frac{D}{A} - e_2$, $\frac{D}{A} - e_3$ sont positives, tandis que $\frac{D}{A} - e_1$ est négatif; par conséquent

$$\frac{\sqrt{\frac{D}{A} - e_1}}{\sqrt{A}} \quad \text{est réel, mais} \quad \frac{\sqrt{\frac{D}{A} - e_2}}{\sqrt{A}}, \frac{\sqrt{\frac{D}{A} - e_3}}{\sqrt{A}} \quad \text{sont imaginaires.}$$

$\frac{h_0}{\sqrt{A}}, \frac{h_0'}{\sqrt{A}}, \frac{h_0''}{\sqrt{A}}, \frac{h_0'''}{\sqrt{A}}$ sont des quantités complexes.

Les racines a et a_1, ainsi que a_2 et a_3 sont des quantités complexes conjuguées.

Dans le cas 5) $\frac{D}{A} - e_2$ est positif, $\frac{D}{A} - e_1$, $\frac{D}{A} - e_3$ sont des quantités complexes conjuguées. Les fonctions $\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}$, $\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}$ prennent pour des valeurs réelles de u des valeurs complexes conjuguées, de manière que si u et u' sont des valeurs complexes conjuguées, les valeurs correspondantes

$$\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}, \frac{\sigma_3 u'}{\sigma u'}$$

sont aussi des quantités complexes conjuguées.

Dans le cas 5), aussi bien que dans le cas 6), les quantités

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\sigma_1 w}{\sigma w}, \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\sigma_3 w}{\sigma w}$$

sont des quantités complexes conjugués, tandis que

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\sigma_2 w}{\sigma w}$$

est une quantité réelle.

Les quantités a et a_2 sont donc réelles dans les cas 5) et 6), mais a_1 et a_3 sont complexes et conjuguées.

Il résulte donc de la discussion précédente que, pour des valeurs réelles de u, les fonctions

$$\varphi(u, w), \varphi(u + \omega_1, w), \varphi(u + \omega_2, w), \varphi(u + \omega_3, w)$$

sont toutes réelles dans le cas 1) et 2) et toutes imaginaires, dans le cas 3) et 4). Il est à remarquer que dans le cas 3) la première et la troisième de même que la seconde et la quatrième de ces fonctions sont des quantités imaginaires conjuguées; dans le cas 4) ce sont au contraire la première et la seconde, de même que la 3^me^ et la 4^me^ de ces fonctions qui sont conjuguées.

Dans les cas 5) et 6) la première et la troisième de ces fonctions sont réelles, tandis que la seconde et la 4^me^ sont imaginaires et conjuguées.

§ 4.

Pour pouvoir appliquer les formules du paragraphe précédent au cas qui nous occupe il faut commencer par la discussion des racines de l'équation

$$R(x) = -x^4 + 6l_1x^2 + 4c_0lx + c_0^2 - k^2 = 0.$$

Posons

$$k_0 = c_0^2 - k^2, \qquad l_0 = c_0 l.$$

En général, si

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

et que l'on pose

$$g_2 = AA' - 4BCB' + 3C^2,$$
$$g_3 = ACA' + 2BCB' - AB'^2 - A'B^2 - C^3,$$

la condition de la réalité des racines de l'équation $R(x) = 0$ peut s'énoncer de la manière suivante.

Si $G = g_2^3 - 27g_3^2 < 0$, l'équation $R(x) = 0$ a deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées.

Si $G = g_2^3 - 27g_3^2 > 0$, toutes les quatre racines sont réelles à la fois ou toutes les quatre imaginaires, conjuguées deux à deux. Le premier cas a lieu, si l'on a en plus

$$B^2 - AC > 0, \; 12(B^2 - AC)^2 - A^2g_2 > 0.$$

Mais si, $g_2^3 - 27g_3^2$ étant positif, l'une de ces dernières quantités est négative, toutes les quatre racines de l'équation $R(x) = 0$ sont imaginaires.

Appliquons ceci à notre cas. On aura

$$A = -1, \quad B = 0, \quad C = l_1, \quad B' = lc_0 = l_0, \quad A' = c_0^2 - k^2 = k_0,$$

$$g_2 = -k_0 + 3l_1^2,$$
$$g_3 = -l_1(k_0 + l_1^2) + l_0^2,$$

$$B^2 - AC = l_1, \qquad 12(B^2 - AC)^2 - A^2 g_2 = k_0 + 9l_1^2,$$

$$g_2^3 - 27g_3^2 = (-k_0 + 3l_1^2)^3 - 27[-l_1(k_0 + l_1^2) + l_0^2]^2$$

$$= -27\left\{l_0^4 - 2l_1(k_0 + l_1^2)l_0^2 + \frac{1}{27}k_0(k_0 + 9l_1^2)^2\right\}.$$

En vertu de l'identité

$$l_1^2(k_0 + l_1^2)^2 = \frac{1}{27}k_0(k_0 + 9l_1^2)^2 + \left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^3$$

les racines de l'équation quadratique en l_0^2

$$Q(l_0^2) = l_0^4 - 2l_1(k_0 + l_1^2)l_0^2 + \frac{1}{27}k_0(k_0 + 9l_1^2)^2$$

peuvent s'écrire

$$l_0'^2 = l_1(k_0 + l_1^2) + \left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$l_0''^2 = l_1(k_0 + l_1^2) - \left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

formules où nous supposerons le radical $\left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ positif, s'il est réel.

Appliquant ces formules à la discussion des racines de l'équation $R(x) = 0$, on voit qu'il faut distinguer les cas suivants:

1°. $l_1 > 0$, $k_0 > 0$, $-k_0 + 3l_1^2 < 0$.

Dans ce cas $l_0'^2$ et $l_0''^2$ sont tous les deux imaginaires. Par conséquent $G = -27Q(l_0^2)$ est négatif pour toutes les valeurs réelles de l_0, et l'équation $R(x) = 0$ a deux racines réelles et deux racines imaginaires.

2°. $l_1 > 0$, $k_0 > 0$, $-k_0 + 3l_1^2 > 0$.

$l_0'^2$ et $l_0''^2$ sont positifs tous les deux et $l_0'^2 > l_0''^2$. Alors si

$$l_0^2 > l_0'^2 \quad \text{ou} \quad l_0''^2 > l_0^2,$$

on a $G < 0$ et l'équation $R(x) = 0$ a encore deux racines réelles et deux racines imaginaires. Si au contraire

$$l_0'^2 > l_0^2 > l_0''^2,$$

G est positif, et, vu que l'on a aussi $l_1 > 0$, $k_0 + 9l_1^2 > 0$, les quatre racines de l'équation $R(x) = 0$ sont réelles.

3°. $l_1 > 0$, $k_0 < 0$, $k_0 + 9l_1^2 > 0$.

La racine $l_0'^2$ est positive, l'autre $l_0''^2$ négative. La quantité

$$G = -27Q(l_0^2)$$

est négative, si $l_0^2 > l_0'^2$, et dans ce cas l'équation $R(x) = 0$ a quatre racines réelles. Si au contraire $l_0^2 < l_0'^2$, G est positif, et l'équation proposée n'a que deux racines réelles.

4°. $l_1 > 0$, $k_0 < 0$, $k_0 + 9l_1^2 < 0$.

Comme dans le cas précédent G est positif pour $l_0^2 < l_0'^2$, et négatif pour $l_0^2 > l_0'^2$. S'il est négatif, l'équation $R(x) = 0$ a dans ce cas quatre racines imaginaires; s'il est positif elle a deux racines réelles et deux racines imaginaires.

5°. $l_1 < 0$, $k_0 > 0$.

$l_0'^2$ et $l_0''^2$ étant négatifs ou imaginaires, la quantité $G = -27Q(l_0^2)$ reste négative pour toute valeur réelle de l_0; l'équation $R(x) = 0$ a donc deux racines réelles et deux racines imaginaires.

6°. $l_1 < 0$, $k_0 < 0$.

Ce cas est tout à fait conforme au quatrième.

Résumé:

L'équation $R(x) = 0$ à quatre racines réelles dans les deux cas suivants:

1) $l_1 > 0$, $k_0 > 0$, $-k_0 + 3l_1^2 > 0$, $l_0'^2 > l_0^2 > l_0''^2$,

où

$$l_0'^2 = l_1(k_0 + l_1^2) + \left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$l_0''^2 = l_1(k_0 + l_1^2) - \left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

2) $l_1 > 0$, $k_0 < 0$, $k_0 + 9l_1^2 > 0$, $l_0^2 < l_0'^2$.

Les quatre racines de l'équation $R(x) = 0$ sont imaginaires dans les deux cas suivants:

1) $l_1 > 0$, $k_0 < 0$, $k_0 + 9l_1^2 < 0$, $l_0^2 < l_0'^2$.

2) $l_1 < 0$, $k_0 < 0$, $l_0^2 < l_0'^2$.

Enfin l'équation $R(x) = 0$ a deux racines réelles dans les cas suivants:

1) $l_1 > 0, k_0 > 0, -k_0 + 3l_1^2 < 0$, pour chaque valeur de l_0.

2) $l_1 > 0, k_0 > 0, -k_0 + 3l_1^2 > 0, l_0^2 > l_0'^2$ ou bien $l_0^2 < l_0''^2$.

3) $l_1 > 0, k_0 < 0, \quad k_0 + 9l_1^2 > 0, l_0^2 > l_0'^2$.

4) $l_1 > 0, k_0 < 0, \quad k_0 + 9l_1^2 < 0, l_0^2 > l_0'^2$.

5) $l_1 < 0, k_0 > 0$, pour chaque valeur de l_0.

6) $l_1 < 0, k_1 < 0, l_0^2 > l_0'^2$.

§ 5.

J'examinerai plus en détail le cas où toutes les racines de l'équation

$$R(x) = -x^4 + 6l_1x^2 + 4lc_0x + c_0^2 - k^2 = 0$$

sont réelles.

En nous servant des mêmes dénotations que dans le § 3, on a donc dans ce cas

$$\wp(w) = \frac{D}{A} = -l_1, \qquad \wp'(w)^2 = 4s^3 - g_2s - g_3 = -l_0^2.$$

w est purement imaginaire.

e_1, e_2, e_3 sont réels et l'on a

$$e_1 > e_2 > e_3 > -l_1.$$

Les quantités

$$\frac{\sigma_1}{\sigma}(w) = \sqrt{-(l_1 + e_1)}, \qquad \frac{\sigma_2}{\sigma}(w) = \sqrt{-(l_1 + e_2)}, \qquad \frac{\sigma_3}{\sigma}(w) = \sqrt{-(l_1 + e_3)}$$

sont toutes les trois purement imaginaires, et il en est de même des quantités

$$h_0 = \frac{\sigma_1}{\sigma}(w) + \frac{\sigma_2}{\sigma}(w) + \frac{\sigma_3}{\sigma}(w),$$

$$h_1 = (e_2 - e_3)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w) + (e_3 - e_1)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w) + (e_1 - e_2)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w),$$

$$h_2 = (e_2^2 - e_3^2)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w) + (e_3^2 - e_1^2)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w) + (e_1^2 - e_2^2)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w).$$

Le coefficient de x^4 dans $R(x)$ étant égal à -1, nous poserons donc dans ce cas, en désignant par E le produit $(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)$,

$$p + qi = x_1 = \varphi(u_1) = i\left(h_0 + \frac{2E}{h_1 \wp u_1 + h_2}\right),$$

$$p - qi = x_2 = \varphi(u_2) = i\left(h_0 + \frac{2E}{h_1 \wp u_2 + h_2}\right),$$

et l'on voit que x_1 et x_2 seront des quantités imaginaires conjuguées, si u_1 et u_2 le sont. Posons

$$u_1 = \frac{u + vi}{2}, \qquad u_2 = \frac{u - vi}{2},$$

u et v étant réels.

On a alors

$$s_1 = \wp(u_1 + u_2) = \wp(u),$$

$$s_2 = \wp(u_1 - u_2) = \wp(vi).$$

Il suit de ces formules, que s_1 et s_2 sont tous les deux des quantités réelles, contenues entre les limites suivantes

$$(\infty \ldots s_1 \ldots e_1)\,,\,(e_3 \ldots s_2 \ldots -\infty).$$

Pour exprimer les quantités p et q au moyen de s_1 et s_2 je me servirai des formules suivantes.

On trouve à la page 50 de l'ouvrage cité de M. Schwarz les formules suivantes

$$\begin{aligned} &\sigma_\lambda(w)\sigma(u + v + w)\sigma(u - v) \\ &= \sigma(u + w)\sigma(u)\sigma_\lambda(v + w)\sigma_\lambda(v) - \sigma_\lambda(u + w)\sigma_\lambda(u)\sigma(v + w)\sigma(v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_\lambda(w)\sigma_\lambda(u + v + w)\sigma_\lambda(u - v) \\ &= \sigma_\lambda(u+w)\sigma_\lambda(u)\sigma_\lambda(v+w)\sigma_\lambda(v) - (e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)\sigma(u+w)\sigma(u)\sigma(v + w)\sigma(v). \end{aligned}$$

En faisant dans ces formules $w = 0$ et en donnant successivement à λ les valeurs 1, 2, 3 on trouve

$$\begin{aligned} \sigma(u + v)\,\sigma(u - v) &= \sigma^2 u \sigma_1^2 v - \sigma_1^2 u \sigma^2 v \\ \sigma_1(u + v)\sigma_1(u - v) &= \sigma_1^2 u \sigma_1^2 v - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\sigma^2 u \sigma^2 v, \\ \sigma_2(u + v)\sigma_2(u - v) &= \sigma_2^2 u \sigma_2^2 v + (e_1 - e_2)(e_2 - e_3)\sigma^2 u \sigma^2 v, \\ \sigma_3(u + v)\sigma_3(u - v) &= \sigma_3^2 u \sigma_3^2 v - (e_1 - e_3)(e_2 - e_3)\sigma^2 u \sigma^2 v, \end{aligned}$$

ou bien, en remarquant que

$$\sigma_2^2 u = \sigma_1^2 u + (e_1 - e_2)\sigma^2 u,$$

$$\sigma_3^2 u = \sigma_1^2 u + (e_1 - e_3)\sigma^2 u,$$

$$\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) = \sigma_1^2 u\sigma_1^2 v + (e_1-e_2)(e_1-e_3)\sigma^2 u\sigma^2 v + (e_1-e_2)(\sigma^2 u\sigma_1^2 v + \sigma_1^2 u\sigma^2 v),$$

$$\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v) = \sigma_1^2 u\sigma_1^2 v + (e_1-e_2)(e_1-e_3)\sigma^2 u\sigma^2 v + (e_1-e_3)(\sigma^2 u\sigma_1^2 v + \sigma_1^2 u\sigma^2 v).$$

Il suit de ces formules

$$2(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\sigma^2 u\sigma^2 v = (e_2 - e_3)\sigma_1(u + v)\sigma_1(u - v)$$
$$+ (e_3 - e_1)\sigma_2(u + v)\sigma_2(u - v) + (e_1 - e_2)\sigma_3(u + v)\sigma_3(u - v),$$

$$2(e_2 - e_3)\sigma_1^2 u\sigma_1^2 v = (e_2 - e_3)\sigma_1(u + v)\sigma_1(u - v)$$
$$- (e_3 - e_1)\sigma_2(u + v)\sigma_2(u - v) - (e_1 - e_2)\sigma_3(u + v)\sigma_3(u - v),$$

$$2(e_2 - e_3)\sigma^2 u\sigma_1^2 v$$
$$= (e_2 - e_3)\sigma(u + v)\sigma(u - v) - \sigma_2(u + v)\sigma_2(u - v) + \sigma_3(u + v)\sigma_3(u - v),$$

$$2(e_2 - e_3)\sigma_1^2 u\sigma^2 v$$
$$= -(e_2 - e_3)\sigma(u + v)\sigma(u - v) - \sigma_2(u + v)\sigma_2(u - v) + \sigma_3(u + v)\sigma_3(u - v),$$

d'où l'on tire par division

$$\frac{\sigma_1^2 u}{\sigma^2 u} = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\frac{(e_2 - e_3)\sigma(u + v)\sigma(u - v) + \sigma_2(u + v)\sigma_2(u - v) - \sigma_3(u + v)\sigma_3(u - v)}{(e_2 - e_3)\sigma_1(u + v)\sigma_1(u - v) + (e_3 - e_1)\sigma_2(u + v)\sigma_2(u - v) + (e_1 - e_2)\sigma_3(u + v)\sigma_3(u - v)}$$

et par conséquent, vu que $\wp u = \frac{\sigma_1^2 u}{\sigma^2 u} + e_1$,

$$\wp u = -\frac{E\sigma(u+v)\sigma(u-v) + (e_2^2 - e_3^2)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v) + (e_3^2 - e_1^2)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) + (e_1^2 - e_2^2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)}{(e_2 - e_3)\sigma_1(u + v)\sigma_1(u - v) + (e_3 - e_1)\sigma_2(u + v)\sigma_2(u - v) + (e_1 - e_2)\sigma_3(u + v)\sigma_3(u - v)},$$

$$\wp v = -\frac{-E\sigma(u+v)\sigma(u-v) + (e_2^2 - e_3^2)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v) + (e_3^2 - e_1^2)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) + (e_1^2 - e_2^2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)}{(e_2 - e_3)\sigma_1(u + v)\sigma_1(u - v) + (e_3 - e_1)\sigma_2(u + v)\sigma_2(u - v) + (e_1 - e_2)\sigma_3(u + v)\sigma_3(u - v)}.$$

En posant donc

$$P_\alpha = \frac{\sigma_\alpha(u_1 + u_2)}{\sigma(u_1 + u_2)}\frac{\sigma_\alpha(u_1 - u_2)}{\sigma(u_1 - u_2)} = \sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)}, \qquad (\alpha=1,2,3)$$

on a

$$\wp(u_1) + \wp(u_2) = -2\frac{(e_2^2 - e_3^2)P_1 + (e_3^2 - e_1^2)P_2 + (e_1^2 - e_2^2)P_3}{(e_2 - e_3)P_1 + (e_3 - e_1)P_2 + (e_1 - e_2)P_3},$$

$$\wp(u_1) - \wp(u_2) = \frac{-2E}{(e_2 - e_3)P_1 + (e_3 - e_1)P_2 + (e_1 - e_2)P_3},$$

$$\wp(u_1)\cdot\wp(u_2) = -\frac{(e_2-e_3)(e_1^2+e_2e_3)P_1 + (e_3-e_1)(e_2^2+e_3e_1)P_2 + (e_1-e_2)(e_3^2+e_1e_2)P_3}{(e_2-e_3)P_1 + (e_3-e_1)P_2 + (e_1-e_2)P_3}.$$

En portant ces expressions dans les formules

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = i\left(h_0 + E\frac{h_1(\wp u_1 + \wp u_2) + 2h_2}{h_1^2\wp u_1\wp u_2 + h_1h_2(\wp u_1 + \wp u_2) + h_2^2},\right.$$

$$q = \frac{x_1 - x_2}{2i} = E\frac{h_1(\wp u_1 - \wp u_2)}{h_1^2\wp u_1\wp u_2 + h_1h_2(\wp u_1 + \wp u_2) + h_2^2},$$

on trouve, après quelques calculs,

$$p = -i\frac{L_1P_1 + M_1P_2 + N_1P_3}{LP_1 + MP_2 + NP_3},$$

$$q = \frac{E}{LP_1 + MP_2 + NP_3},$$

où j'ai posé

$$L = (e_2 - e_3)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w) = i(e_2 - e_3)\sqrt{l_1 + e_1},$$

$$M = (e_3 - e_1)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w) = i(e_3 - e_1)\sqrt{l_1 + e_2},$$

$$N = (e_1 - e_2)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w) = i(e_1 - e_2)\sqrt{l_1 + e_3},$$

$$L_1 = (e_2 - e_3)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w) = (e_2 - e_3)\sqrt{(l_1 + e_2)(l_1 + e_3)},$$

$$M_1 = (e_3 - e_1)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w) = (e_3 - e_1)\sqrt{(l_1 + e_3)(l_1 + e_1)},$$

$$N_1 = (e_1 - e_2)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w) = (e_1 - e_2)\sqrt{(l_1 + e_1)(l_1 + e_2)}.$$

Les quantités $l_1 + e_1, l_1 + e_2, l_1 + e_3$ sont toutes les trois positives.

Les quantités $s_1 - e_1, s_1 - e_2, s_1 - e_3$ sont aussi positives.

Les quantités $s_2 - e_1, s_2 - e_2, s_2 - e_3$ sont au contraire toutes les trois négatives.

L, M, N, P_1, P_2, P_3 sont donc imaginaires.

L_1, M_1, N_1 sont réels.

On voit que p et q ont des valeurs réelles.

Pour calculer la valeur de r je me sers de l'équation

$$2\frac{dp}{dt} = qr.$$

En général, si l'on pose

$$R(s) = R_0(s - a_0)(s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)(s - a_4),$$

$$du_1 = \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}, \qquad ds_1 = \frac{\sqrt{R(s_1)}}{s_1 - s_2}(du_1 - s_2 du_2),$$

$$du_2 = \frac{ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}, \qquad ds_2 = \frac{\sqrt{R(s_2)}}{s_2 - s_1}(du_1 - s_1 du_2),$$

$$P_\alpha = \sqrt{c_\alpha(s_1 - a_\alpha)(s_2 - a_\alpha)}$$

$$P_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta}{s_1 - s_2}\left\{\frac{\sqrt{R(s_1)}}{(s_1 - a_\alpha)(s_1 - a_\beta)} - \frac{\sqrt{R(s_2)}}{(s_2 - a_\alpha)(s_2 - a_\beta)}\right\}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 0, \ldots, 4\\ \beta = 0, \ldots, 4\end{pmatrix}$$

c_α et $c_{\alpha\beta}$ désignant des constantes quelconques, on trouve après quelques calculs,

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial u_1} = \frac{1}{2(a_\beta - a_\gamma)}\left\{\frac{P_\gamma P_{\alpha\gamma}}{c_\gamma c_{\alpha\gamma}} - \frac{P_\beta P_{\alpha\beta}}{c_\beta c_{\alpha\beta}}\right\},$$

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial u_2} = \frac{1}{2(a_\beta - a_\gamma)}\left\{\frac{a_\gamma P_\beta P_{\alpha\beta}}{c_\beta c_{\alpha\beta}} - \frac{a_\beta P_\gamma P_{\alpha\gamma}}{c_\gamma c_{\alpha\gamma}}\right\},$$

$$\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial u_1} = \frac{1}{2} R_0 c_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta,$$

$$\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial u_2} = -\frac{1}{2} R_0 a_\gamma c_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta - \frac{1}{2}\frac{c_{\alpha\beta} P_{\alpha\gamma} P_{\beta\gamma}}{c_\gamma c_{\alpha\gamma} c_{\beta\gamma}}.$$

Dans notre cas on a

$$R(s) = -4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)(s-k_1)(s-k_2), \qquad R_0 = -4,$$

$$dt = du_1, \qquad 0 = du_2.$$

On trouve donc

$$r = \frac{2}{q}\frac{dp}{dt} = -i\frac{LP_{23} + MP_{31} + NP_{12}}{LP_1 + MP_2 + NP_3},$$

$$P_{23} = \frac{i}{s_1 - s_2}\Big\{\sqrt{s_1-e_1)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_2)(s_2-e_3)}$$
$$- \sqrt{(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_2-e_1)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}\Big\},$$

$$P_{13} = \frac{i}{s_1 - s_2}\Big\{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_3)}$$
$$- \sqrt{(s_1-e_3)(s_1-e_1)(s_2-e_2)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}\Big\},$$

$$P_{12} = \frac{i}{s_1 - s_2}\Big\{\sqrt{(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_2)}$$
$$- \sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_2-e_3)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}\Big\}.$$

Comme nous l'avons vu plus haut, pour des valeurs réelles de t, s_1 et s_2 doivent être contenus entre les limites suivantes

$$\infty \ldots s_1 \ldots e_1 \,,\, e_3 \ldots s_2 \ldots -\infty.$$

Les quantités

$$(s_1-e_1)(s_2-e_2)(s_2-e_3)$$
$$(s_1-e_2)(s_2-e_3)(s_2-e_1)$$
$$(s_1-e_3)(s_2-e_1)(s_2-e_2)$$

sont donc positives, et les quantités

$$(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_2-e_1)$$
$$(s_1-e_3)(s_1-e_1)(s_2-e_2)$$
$$(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_2-e_3)$$

négatives.

Pour que r soit réel pour des valeurs réelles de t, il faut que P_{23}, P_{13}, P_{12} soient réelles; pour que cela ait lieu, il faut que le produit

$$(s_1 - k_1)(s_1 - k_2)$$

soit négatif, et que le produit

$$(s_2 - k_1)(s_2 - k_2)$$

soit positif.

Les constantes d'intégration doivent donc être choisies de manière à satisfaire à l'inégalité

$$k_1 > e_1 > k_2.$$

s_1 et s_2 devront alors être contenus entre les limites

$$(k_1 \ldots s_1 \ldots e_1), (k_2 \ldots s_2 \ldots -\infty).$$

Il nous reste à calculer les valeurs de $\gamma, \gamma', \gamma''$.

On obtient γ'' de l'équation

$$2\frac{dq}{dt} = -rp - c_0\gamma''$$

ou

$$c_0\gamma'' = -\left(2\frac{dq}{dt} + rp\right),$$

et l'on trouve à l'aide des formules de différentiation précitées

$$c_0\gamma'' = \frac{L_1P_{23} + M_1P_{13} + N_1P_{12}}{LP_{23} + MP_{13} + NP_{12}},$$

les coefficients L, M, N, L_1, M_1, N_1 ayant les mêmes significations qu'auparavant.

La valeur de γ' peut être calculée à l'aide de l'équation

$$\frac{dr}{dt} = c_0\gamma'.$$

L'on trouve

$$c_0\gamma' = -i.\frac{(LP_1 + MP_2 + NP_3)\left(L\frac{d}{dt}P_{23} + M\frac{d}{dt}P_{13} + N\frac{d}{dt}P_{12}\right) - (LP_{23} + MP_{13} + NP_{12})\left(L\frac{d}{dt}P_1 + M\frac{d}{dt}P_2 + N\frac{d}{dt}P_3\right)}{(LP_1 + MP_2 + NP_3)^2}.$$

D'après les formules de différentiation précitées, l'on trouve

$$(LP_1 + MP_2 + NP_3)\Big(L\frac{d}{dt}P_{23} + M\frac{d}{dt}P_{13} + N\frac{d}{dt}P_{12}\Big)$$

$$-(LP_{23} + MP_{13} + NP_{12})\Big(L\frac{d}{dt}P_1 + M\frac{d}{dt}P_2 + N\frac{d}{dt}P_3\Big)$$

$$= R_0(LP_1 + MP_2 + NP_3)(LP_2P_3 + MP_3P_1 + NP_1P_2)$$

$$-(LP_{23}+MP_{31}+NP_{12})\Big(L\frac{P_3P_{13}-P_2P_{12}}{e_2-e_3}+M\frac{P_1P_{12}-P_3P_{23}}{e_3-e_1}+N\frac{P_2P_{23}-P_1P_{13}}{e_1-e_2}\Big)$$

$$= R_0(L^2 + M^2 + N^2)P_1P_2P_3 - \frac{L^2}{e_2-e_3}P_{23}(P_3P_{13} - P_2P_{12})$$

$$-\frac{M^2}{e_3-e_1}P_{13}(P_1P_{12} - P_3P_{23}) - \frac{N^2}{e_1-e_2}P_{12}(P_2P_{23} - P_1P_{13})$$

$$+ MN\Big(R_0(P_2^2 + P_3^2)P_1 - P_{13}\frac{P_2P_{23} - P_1P_{13}}{e_1 - e_2} - P_{12}\frac{P_1P_{12} - P_3P_{23}}{e_3 - e_1}\Big)$$

$$+ NL\Big(R_0(P_3^2 + P_1^2)P_2 - P_{12}\frac{P_3P_{13} - P_2P_{12}}{e_2 - e_3} - P_{23}\frac{P_2P_{23} - P_1P_{13}}{e_1 - e_2}\Big)$$

$$+ LM\Big(R_0(P_1^2 + P_2^2)P_3 - P_{23}\frac{P_1P_{12} - P_3P_{23}}{e_3 - e_1} - P_{13}\frac{P_3P_{13} - P_2P_{12}}{e_2 - e_3}\Big).$$

Cette expression du nominateur de γ' peut être un peu simplifiée de la manière suivante.

En désignant par $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ les nombres 1, 2, 3, 4, 5 rangées dans un ordre quelconque et en posant, comme nous l'avons fait,

$$P_\alpha = \sqrt{(s_1 - a_\alpha)(s_2 - a_\alpha)},$$

$$P_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{R_0(s_1 - a_\gamma)(s_1 - a_\delta)(s_1 - a_\varepsilon)(s_2 - a_\alpha)(s_2 - a_\beta)} - \sqrt{R_0(s_1 - a_\alpha)(s_1 - a_\beta)(s_2 - a_\gamma)(s_2 - a_\delta)(s_2 - a_\varepsilon)}}{s_1 - s_2},$$

on trouve facilement les relations suivantes:

$$R_0 P_\alpha P_\beta P_\gamma - P_{\beta\gamma}\frac{P_\gamma P_{\alpha\gamma} - P_\beta P_{\alpha\beta}}{a_\beta - a_\gamma} = P_{\alpha\delta} P_{\alpha\varepsilon},$$

$$R_0 P_\alpha P_\beta P_\gamma - P_{\alpha\gamma}\frac{P_\alpha P_{\alpha\beta} - P_\gamma P_{\beta\gamma}}{a_\gamma - a_\alpha} = P_{\beta\delta} P_{\beta\varepsilon},$$

$$R_0 P_\alpha P_\beta P_\gamma - P_{\alpha\beta}\frac{P_\beta P_{\beta\gamma} - P_\alpha P_{\alpha\gamma}}{a_\alpha - a_\beta} = P_{\gamma\delta} P_{\gamma\varepsilon},$$

$$R_0(P_\beta^2 + P_\gamma^2) P_\alpha - P_{\alpha\gamma}\frac{P_\beta P_{\beta\gamma} - P_\alpha P_{\alpha\gamma}}{a_\alpha - a_\beta} - P_{\alpha\beta}\frac{P_\alpha P_{\alpha\beta} - P_\gamma P_{\beta\gamma}}{a_\gamma - a_\alpha}$$

$$= P_{\beta\delta} P_{\gamma\varepsilon} + P_{\beta\varepsilon} P_{\gamma\delta} + R_0 (a_\beta - a_\gamma)^2 P_\alpha,$$

$$R_0(P_\gamma^2 + P_\alpha^2) P_\beta - P_{\alpha\beta}\frac{P_\gamma P_{\alpha\gamma} - P_\beta P_{\alpha\beta}}{a_\beta - a_\gamma} - P_{\beta\gamma}\frac{P_\beta P_{\beta\gamma} - P_\alpha P_{\alpha\gamma}}{a_\alpha - a_\beta}$$

$$= P_{\gamma\delta} P_{\alpha\varepsilon} + P_{\alpha\delta} P_{\gamma\varepsilon} + R_0 (a_\gamma - a_\alpha)^2 P_\beta,$$

$$R_0(P_\alpha^2 + P_\beta^2) P_\gamma - P_{\beta\gamma}\frac{P_\alpha P_{\alpha\beta} - P_\gamma P_{\beta\gamma}}{a_\gamma - a_\alpha} - P_{\alpha\gamma}\frac{P_\gamma P_{\alpha\gamma} - P_\beta P_{\alpha\beta}}{a_\beta - a_\gamma}$$

$$= P_{\alpha\delta} P_{\beta\varepsilon} + P_{\alpha\varepsilon} P_{\beta\delta} + R_0 (a_\alpha - a_\beta)^2 P_\gamma.$$

Si l'on pose donc

$$a_1 = e_1, \qquad k_1 = a_4,$$
$$a_2 = e_2, \qquad k_2 = a_5,$$
$$a_3 = e_3,$$

on trouve pour $c_0\gamma'$ l'expression suivante

$$c_0\gamma' = \frac{i}{2}\,\frac{L^2 P_{14} P_{15} + M^2 P_{24} P_{25} + N^2 P_{34} P_{35} + MN[P_{24} P_{35} + P_{25} P_{34} + (e_2 - e_3)^2 P_1] + NL[P_{34} P_{15} + P_{35} P_{14} + (e_3 - e_1)^2 P_2] + LM[P_{14} P_{25} + P_{15} P_{24} + (e_1 - e_2)^2 P_3]}{(LP_1 + MP_2 + NP_3)^2}.$$

Enfin on trouve la valeur de γ, exprimée à l'aide de s_1 et de s_2, à l'aide de l'équation

$$2(p^2 + q^2) + r^2 = 2c_0\gamma + 6l_1.$$

En posant

$$L_2 = (e_2^2 - e_3^2)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w) = i(e_2^2 - e_3^2)\sqrt{l_1 + e_1},$$

$$M_2 = (e_3^2 - e_1^2)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w) = i(e_3^2 - e_1^2)\sqrt{l_1 + e_2},$$

$$N_2 = (e_1^2 - e_2^2)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w) = i(e_1^2 - e_2^2)\sqrt{l_1 + e_3},$$

on trouve

$$2c_0\gamma = -4l_1 + \frac{L_2P_1 + M_2P_2 + N_2P_3}{LP_1 + MP_2 + NP_3} - \left(\frac{LP_{23} + MP_{13} + NP_{12}}{LP_1 + MP_2 + NP_3}\right)^2.$$

§ 6.

Les six quantités $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ une fois exprimées en fonctions de s_1 et de s_2, on obtient sans peine l'expression de chaque fonction rationnelle symétrique de ces deux dernières quantités, en fonction du temps, à l'aide de formules générales.

J'emprunte les définitions suivantes, introduites dans l'analyse par M. Weierstrass, au mémoire de M. Königsberger *Zur Transformation der Abelschen Functionen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 64).

Soit

$$R(x) = A_0(x - a_0)(x - a_1)\dots(x - a_{2\rho})$$

une fonction entière de x du degré $2\rho + 1$; supposons que $A_0, a_0, a_1, \dots, a_{2\rho}$ soient toutes des quantités réelles et, si $A_0 > 0$,

$$a_0 > a_1 > \dots > a_{2\rho},$$

mais si $A_0 < 0$

$$a_0 < a_1 < \dots < a_{2\rho}.$$

Soient $u_1, \dots, u_\rho$ ρ variables, liées aux ρ variables $x_1, \dots, x_\rho$ par les

ρ équations suivantes, dans lesquelles $F_1(x), \ldots, F_\rho(x)$ désignent des fonctions entières de x d'un degré inférieur à ρ,

$$u_1 = \int\limits_{a_1}^{x_1} \frac{F_1(x)dx}{\sqrt{R(x)}} + \ldots + \int\limits_{a_{2\rho-1}}^{x_\rho} \frac{F_1(x)dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$u_\rho = \int\limits_{a_1}^{x_1} \frac{F_\rho(x)dx}{\sqrt{R(x)}} + \ldots + \int\limits_{a_{2\rho-1}}^{x_\rho} \frac{F_\rho(x)dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Posons

$$K_{\alpha\beta} = \int\limits_{a_{2\beta-1}}^{a_{2\beta}} \frac{F_\alpha(x)dx}{\sqrt{R(x)}}, \qquad i\overline{K}_{\alpha\beta} = \int\limits_{a_{2\beta-2}}^{a_{2\beta-1}} \frac{F_\alpha(x)dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$iK'_{\mu\nu} = i\overline{K}_{\mu1} + i\overline{K}_{\mu2} + \ldots + i\overline{K}_{\mu\nu},$$

en convenant de définir la racine carrée dans chacune de ces intégrales par la formule

$$\sqrt{R(x)} = A_0^{\rho+1}\left(\frac{x-a_0}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-a_1}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}\cdots\left(\frac{x-a_{2\rho}}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définissons ρ variables nouvelles $v_1, \ldots, v_\rho$ par les équations

$$u_1 = 2K_{11}v_1 + \ldots + 2K_{1\rho}v_\rho,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$u_\rho = 2K_{\rho1}v_1 + \ldots + 2K_{\rho\rho}v_\rho.$$

Supposons que ces équations, résolues par rapport à $v_1, \ldots, v_\rho$, nous donnent

$$v_1 = G_{11}u_1 + \ldots + G_{\rho1}u_\rho,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$v_\rho = G_{1\rho}u_1 + \ldots + G_{\rho\rho}u_\rho.$$

Posons

$$\tau_{\alpha\beta} = 2i(G_{1\alpha}K_{1\beta} + \ldots + G_{\rho\alpha}K_{\rho\beta}),$$

d'où il suit $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$, et définissons la fonction $\vartheta(v_1 \ldots v_\rho)$ comme la somme de la série infinie

$$\vartheta(v_1 \ldots v_\rho) = \sum e^{\{\nu_1(2v_1+\nu_1\tau_{11}+\ldots+\nu_\rho\tau_{1\rho})+\ldots+\nu_\rho(2v_\rho+\nu_1\tau_{\rho 1}+\ldots+\nu_\rho\tau_{\rho\rho})\}\pi i};$$

la sommation, indiquée par le signe Σ, doit être effectuée de telle manière, que chacune des ρ quantités $\nu_1, \ldots, \nu_\rho$ parcourt, indépendemment des autres, toute la série des nombres entiers de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Cette fonction $\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)$ satisfait aux deux équations suivantes:

$$\vartheta(v_1 + p_1 \ldots v_\rho + p_\rho) = \vartheta(v_1 \ldots v_\rho),$$

$p_1 \ldots p_\rho$ désignant des nombres entiers quelconques, et

$$\vartheta(v_1 + \tau_{1\alpha} \ldots v_\rho + \tau_{\rho\alpha}) = \vartheta(v_1 \ldots v_\rho) e^{-(2v_\alpha+\tau_{\alpha\alpha})\pi i}.$$

Inversement, chaque fonction continue de $v_1 \ldots v_\rho$ satisfaisant à ces deux équations pour toutes les systèmes de valeurs $v_1 \ldots v_\rho$, doit nécessairement être égale à $\vartheta(v_1 \ldots v_\rho)$, multipliée par une constante.

Désignons par $n_1 \ldots n_\rho$ des constantes arbitraires, posons

$$\tau_\alpha = n_1\tau_{\alpha 1} + n_2\tau_{\alpha 2} + \ldots + n_\rho\tau_{\alpha\rho}$$

et définissons une nouvelle fonction $\vartheta(v_1 \ldots v_\rho \mid n_1 \ldots n_\rho)$ par l'équation

$$\vartheta(v_1 \ldots v_\rho \mid n_1 \ldots n_\rho) = \vartheta(v_1 + \tau_1 \ldots v_\rho + \tau_\rho) e^{\sum_\alpha n_\alpha(2v_\alpha+\tau_\alpha)\pi i}.$$

Les quantités $n_1 \ldots n_\rho$ s'appellent les *paramètres* de cette nouvelle fonction ϑ. Si $n'_1 \ldots n'_\rho$ désignent un autre système de ρ constantes, et que l'on pose

$$\tau'_\alpha = n'_1\tau'_{\alpha 1} + \ldots + n'_\rho\tau'_{\alpha\rho},$$

on a

$$\vartheta(v_1 + \tau'_1 \ldots v_\rho + \tau'_\rho \mid n_1 \ldots n_\rho)$$

$$= \vartheta(v_1 \ldots v_\rho \mid n_1 + n'_1 \ldots n_\rho + n'_\rho) e^{-\sum n'_\alpha(2v_\alpha+\tau'_\alpha)\pi i}.$$

Si les quantités $n'_1 \dots n'_\rho$, $m_1 \dots m_\rho$ sont des nombres entiers, on a

$$\vartheta(v_1 \dots v_\rho \mid n_1 + n'_1 \dots n_\rho + n'_\rho) = \vartheta(v_1 \dots v_\rho \mid n_1 \dots n_\rho),$$

$$\vartheta(v_1 + m_1 \dots v_\rho + m_\rho \mid n_1 \dots n_\rho) = e^{\sum_a 2m_a n_a \pi i}\vartheta(v_1 \dots v_\rho \mid n_1 \dots n_\rho),$$

$$\vartheta(v_1 + \tau'_1 \dots v_\rho + \tau'_\rho \mid n_1 \dots n_\rho) = e^{-\sum n'_a(2v_a + \tau'_a)\pi i}\vartheta(v_1 \dots v_\rho \mid n_1 \dots n_\rho).$$

Posons de plus

$$\vartheta(v_1 \dots v_\rho)_\lambda = \vartheta\left(v_1 + \frac{1}{2}m_1^\lambda \dots v_\rho + \frac{1}{2}m_\rho^\lambda \,\middle|\, \frac{1}{2}n_1^\lambda \dots \frac{1}{2}n_\rho^\lambda\right) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, 2\rho)$$

où les nombres entiers $m_1^\lambda \dots m_\rho^\lambda$, $n_1^\lambda \dots n_\rho^\lambda$ sont définis par l'équation

$$\int_\infty^{a_\lambda} \frac{F_a(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = m_1^\lambda K_{a1} + \dots + m_\rho^\lambda K_{a\rho} + i(n_1^\lambda K'_{a1} + n_2^\lambda K'_{a2} + \dots + n_\rho^\lambda K'_{a\rho}).$$

(On s'assure facilement que chacun des nombres entiers $m_1^\lambda \dots m_\rho^\lambda$ est égal à 0 ou à -1; et chacun des nombres entiers $n_1^\lambda \dots n_\rho^\lambda$ à 0 ou a $+1$).

En désignant ensuite par λ et μ deux nombres différents quelconques de la série $0, 1, \dots, 2\rho$, définissons les nombres entiers $m_1^\nu \dots m_\rho^\nu$, $n_1^\nu \dots n_\rho^\nu$ par les congruences

$$\left.\begin{aligned} m_a^\nu &\equiv m_a^\lambda + m_a^\mu \\ n_a^\nu &\equiv n_a^\lambda + n_a^\mu \end{aligned}\right\} \pmod 2$$

et de plus par la condition que chacun des nombres m_λ^ν doit être égal à 0 ou à -1, et chacun des nombres n_λ^ν à 0 ou à $+1$, et posons

$$\vartheta(v_1 \dots v_\rho)_{\lambda\mu} = \vartheta\left(v_1 + \frac{1}{2}m_1^\nu \dots v_\rho + \frac{1}{2}m_\rho^\nu \,\middle|\, \frac{1}{2}n_1^\nu \dots \frac{1}{2}n_\rho^\nu\right).$$

La relation entre les variables $v_1 \dots v_\rho$ et $x_1 \dots x_\rho$ peut alors être exprimée de la manière suivante.

Posons

$$\varphi(x) = (x - x_1) \dots (x - x_\rho)$$

et désignons par $\varepsilon \pm 1$, selon que $A_0 \gtrless 0$; on a alors

$$\frac{\sqrt{\varepsilon^\rho(-1)^\alpha\varphi(a_{2\alpha})}}{\sqrt[4]{R'(a_{2\alpha})}} = \frac{\vartheta(v_1\ldots v_\rho)_{2\alpha}}{\vartheta(v_1\ldots v_\rho)},$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon^\rho(-1)^{\alpha-1}\varphi(a_{2\alpha-1})}}{\sqrt[4]{R'(a_{2\alpha-1})}} = \frac{\vartheta(v_1\ldots v_\rho)_{2\alpha-1}}{\vartheta(v_1\ldots v_\rho)},$$

$$A_0\sqrt{\frac{\pm(a_\lambda - a_\mu)}{A_0}}\sum_1^\rho{}_\alpha\left\{\frac{\sqrt{R(x_\alpha)}}{(x_\alpha - a_\lambda)(x_\alpha - a_\mu)\varphi'(x_\alpha)}\right\} = \frac{\vartheta(v_1\ldots v_\rho)\vartheta(v_1\ldots v_\rho)_{\lambda\mu}}{\vartheta(v_1\ldots v_\rho)_\lambda\vartheta(v_1\ldots v_\rho)_\mu}.$$

Nous avons supposé que toutes les racines de l'équation $R(x) = 0$ sont réelles. M. Henoch a montré dans sa dissertation inaugurale (Berlin 1867) comment ces formules peuvent être généralisées, pour le cas où les racines de l'équation $R(x) = 0$ sont imaginaires.

§ 7.

Pour pouvoir appliquer les formules du paragraphe précédent au cas qui nous occupe, il faut ranger les cinq quantités réelles k_1, k_2, e_1, e_2, e_3 par ordre de grandeur.

Plusieurs cas peuvent se présenter ici. Le manque de temps m'empêche de les examiner tous en détail. Je me contenterai d'effectuer tous les calculs pour le cas où l'on a entre les constantes d'intégration les inégalités suivantes

$$l_1 > k > c_0 > 0\,,\ l^2 < \frac{3l_1 - k}{2}.$$

Dans ce cas, si l'on écrit

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s + l_1)\left(s - \frac{l_1 + \sqrt{k^2 - c_0^2}}{2}\right)\left(s - \frac{l_1 - \sqrt{k^2 - c_0^2}}{2}\right) - l_0^2,$$

on s'assure facilement que les cinq quantités e_1, e_2, e_3, k_1, k_2 satisfont aux inégalités suivantes

$$\frac{l_1 + k}{2} > e_1 > e_2 > \frac{l_1 - k}{2} > e_3.$$

Si l'on désigne par a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 les cinq racines de l'équation $R(s) = 0$, rangées par ordre de grandeur

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4,$$

il faut donc poser

$$\frac{l_1 + k}{2} = a_4, \qquad \frac{l_1 - k}{2} = a_1, \qquad e_1 = a_3, \qquad e_2 = a_2, \qquad e_3 = a_0.$$

Si l'on pose alors

$$dt = du_1 = \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R(s_2)}},$$

$$0 = du_2 = \frac{ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}$$

et que l'on détermine les quantités $K_{\alpha\beta}$, $K'_{\alpha\beta}$, $v_1 \ldots v_\rho$ comme il a été montré au paragraphe précédent; v_1, v_2 seront des fonctions linéaires du temps, et l'on aura, en désignant par c_λ la valeur que prend $\vartheta(v_1, v_2)_\lambda$ pour $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, les relations suivantes:

$$\frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_1} = \frac{e_1 - e_2}{k} = \frac{c_2^2 c_{03}^2 c_{34}^2}{c_4^2 c_{01}^2 c_{12}^2}, \qquad \frac{l_1 + e_1}{k} = \frac{a_4 + a_1 - a_2 - a_0}{a_4 - a_1} = \frac{c_5^2 c_{23}^2}{c_4^2 c_{01}^2} - \frac{c_2^2 c_{14}^2}{c_4^2 c_{12}^2},$$

$$\frac{a_3 - a_0}{a_4 - a_1} = \frac{e_1 - e_3}{k} = \frac{c_0^2 c_{23}^2 c_{34}^2}{c_4^2 c_{01}^2 c_{12}^2}, \qquad \frac{l_1 + e_2}{k} = \frac{a_4 + a_1 - a_0 - a_3}{a_4 - a_1} = \frac{c_5^2 c_{23}^2}{c_4^2 c_{01}^2} - \frac{c_0^2 c_2^2}{c_{01}^2 c_{12}^2},$$

$$\frac{a_2 - a_0}{a_4 - a_1} = \frac{e_2 - e_3}{k} = \frac{c_5^2 c_{14}^2 c_{34}^2}{c_4^2 c_{01}^2 c_{12}^2}, \qquad \frac{l_1 + e_3}{k} = \frac{a_4 + a_1 - a_3 - a_2}{a_4 - a_2} = \frac{c_5^2 c_{03}^2}{c_4^2 c_{12}^2} - \frac{c_0^2 c_2^2}{c_{01}^2 c_{12}^2},$$

et, en posant

$$C = (a_3 - a_1)^{\frac{3}{2}} \frac{c_{01} c_{03} c_{12} c_{23} c_{14} c_{34}}{c_0^2 c_2^2 c_4^2},$$

on a

$$P_1 = \sqrt{(s_1 - e_1)(s_2 - e_1)} = \sqrt{(s_1 - a_3)(s_2 - a_3)} = -i \frac{C}{\sqrt{a_3 - a_1}} \frac{c_0 c_2 c_4}{c_{01} c_{12} c_{14}} \frac{\vartheta_3(v_1 v_2)}{\vartheta_5(v_1 v_2)},$$

$$P_2 = \sqrt{(s_1 - e_2)(s_2 - e_2)} = \sqrt{(s_1 - a_2)(s_2 - a_2)} = -i \frac{C}{\sqrt{a_3 - a_1}} \frac{c_5 c_2}{c_{12} c_{23}} \frac{\vartheta_2(v_1 v_2)}{\vartheta_5(v_1 v_2)},$$

$$P_3 = \sqrt{(s_1 - e_3)(s_2 - e_3)} = \sqrt{(s_1 - a_0)(s_2 - a_0)} = \frac{C}{\sqrt{a_3 - a_1}} \frac{c_5 c_0}{c_{01} c_{03}} \frac{\vartheta_0(v_1 v_2)}{\vartheta_5(v_1 v_2)},$$

$$P_4 = \sqrt{(s_1 - k_1)(s_2 - k_1)} = \sqrt{(s_1 - a_4)(s_2 - a_4)} = - \frac{C}{\sqrt{a_3 - a_1}} \frac{c_5 c_4}{c_{14} c_{34}} \frac{\vartheta_4(v_1 v_2)}{\vartheta_5(v_1 v_2)},$$

$$P_5 = \sqrt{(s_1 - k_2)(s_2 - k_2)} = \sqrt{(s_1 - a_1)(s_2 - a_1)} = \frac{C}{\sqrt{a_3 - a_1}} \frac{c_0 c_2 c_4}{c_{03} c_{23} c_{34}} \frac{\vartheta_1(v_1 v_2)}{\vartheta_5(v_1 v_2)},$$

$$P_{12} = \frac{\sqrt{(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_2)} - \sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_2-e_3)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$
$$= iC\frac{c_5}{c_{12}}\frac{\vartheta_{23}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{13} = \frac{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_3)} - \sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_3)(s_2-e_2)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$
$$= -C\frac{c_5}{c_{01}}\frac{\vartheta_{03}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{14} = \frac{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-k_1)} - \sqrt{(s_1-e_1)(s_1-k_1)(s_2-e_2)(s_2-e_3)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$
$$= -C\frac{c_5}{c_{14}}\frac{\vartheta_{34}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{15} = \frac{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_2-e_1)(s_2-k_2)} - \sqrt{(s_1-e_1)(s_1-k_2)(s_2-e_2)(s_2-e_3)(s_2-k_1)}}{s_1-s_2}$$
$$= -C\frac{\vartheta_{13}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{23} = \frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_2)(s_2-e_3)} - \sqrt{(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_2-e_1)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$
$$= C\frac{c_5}{c_4}\frac{\vartheta_{02}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{24} = \frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_3)(s_1-k_2)(s_2-e_2)(s_2-k_1)} - \sqrt{(s_1-e_2)(s_1-k_1)(s_2-e_1)(s_2-e_3)(s_2-k_2)}}{s_2-s_2}$$
$$= -C\frac{c_5}{c_0}\frac{\vartheta_{24}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{25} = \frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_2-e_2)(s_2-k_2)} - \sqrt{(s_1-e_2)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_3)(s_2-k_1)}}{s_1-s_2}$$
$$= C\frac{c_5}{c_{23}}\frac{\vartheta_{12}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{34} = \frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_1-k_2)(s_2-e_3)(s_2-k_1)} - \sqrt{(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_2-e_1)(s_2-e_2)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$
$$= -iC\frac{c_5}{c_2}\frac{\vartheta_{04}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{35} = \frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_1-k_1)(s_2-e_3)(s_2-k_2)} - \sqrt{(s_1-e_3)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_1)(s_2-k_1)}}{s_1-s_2}$$
$$= -iC\frac{c_5}{c_{03}}\frac{\vartheta_{01}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{45} = \frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_2-k_1)(s_2-k_2)} - \sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_2)(s_2-e_3)}}{s_1-s_2}$$
$$= -iC\frac{c_5}{c_{34}}\frac{\vartheta_{14}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)}.$$

Les six quantités $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ une fois exprimées à l'aide des quotients $\frac{\vartheta_a(v_1, v_2)}{\vartheta(v_1, v_2)}$, dans lesquelles v_1, v_2 désignent des fonctions entières, linéaires du temps t, il s'agit de trouver les expressions des six autres cosinus $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$, en fonction du temps.

Ces quantités satisfont aux équations différentielles

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha' r - \alpha'' q, \qquad \frac{d\beta}{dt} = \beta' r - \beta'' q,$$
$$\frac{d\alpha'}{dt} = \alpha'' p - \alpha r, \qquad \frac{d\beta'}{dt} = \beta'' p - \beta r,$$
$$\frac{d\alpha''}{dt} = \alpha q - \alpha' p, \qquad \frac{d\beta''}{dt} = \beta q - \beta' p.$$

De ces équations il suit

$$\frac{d(\alpha + \beta i)}{dt} = (\alpha' + \beta' i) r - (\alpha'' + \beta'' i) q.$$

En divisant par $\alpha + \beta i$ et en remarquant que

$$(\alpha' + \beta' i)(\alpha - \beta i) = \alpha\alpha' + \beta\beta' + i(\alpha\beta' - \alpha'\beta) = -\gamma\gamma' + i\gamma'',$$
$$(\alpha'' + \beta'' i)(\alpha - \beta i) = \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + i(\alpha\beta'' - \alpha''\beta) = -\gamma\gamma'' - i\gamma',$$
$$(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2,$$

on trouve

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha + \beta i) = r\frac{-\gamma\gamma' + i\gamma''}{1-\gamma^2} + q\frac{\gamma\gamma'' + i\gamma'}{1-\gamma^2} = \frac{-\gamma\frac{d\gamma}{dt} + i(\gamma' q + \gamma'' r)}{1-\gamma^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{d\gamma}{dt} + i(\gamma' q + \gamma'' r)}{1+\gamma} - \frac{\frac{d\gamma}{dt} - i(\gamma' q + \gamma'' r)}{1-\gamma}\right\}.$$

De la même manière on trouve

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha' + \beta' i) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{d\gamma'}{dt} + i(\gamma p + \gamma'' r)}{1 + \gamma'} - \frac{\frac{d\gamma'}{dt} - i(\gamma p + \gamma'' r)}{1 - \gamma'}\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta'' i) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{d\gamma''}{dt} + i(\gamma p + \gamma' q)}{1 + \gamma''} - \frac{\frac{d\gamma''}{dt} - i(\gamma p + \gamma' q)}{1 - \gamma''}\right\}.$$

En portant dans les seconds membres de ces équations, les valeurs de $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$, exprimées en fonctions du temps, on voit que pour obtenir les valeurs de $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ il faut intégrer des fonctions rationnelles de quotients $\frac{\vartheta_\alpha(t + c, c_1)}{\vartheta(t + c, c_1)}$.

On peut démontrer que chacune des six quantités $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ est une fonction uniforme du temps, n'ayant que des pôles pour des valeurs finies du temps.

D'après un théorème bien connu $f(t)$ est une fonction uniforme pouvant être représentée sous forme de quotient de deux séries convergentes pour toutes les valeurs finies de t, si la condition suivante est remplie:

$$\frac{d}{dt}\lg f(t)$$

peut être développée dans l'entourage de chaque valeur finie t_0 en série convergente de la forme

$$\frac{d}{dt}\lg f(t) = m(t - t_0)^{-1} + \mathfrak{P}(t - t_0)$$

où $\mathfrak{P}(t - t_0)$ désigne une série infinie ne contenant que des termes à exposant positif, et m est égal à zéro ou à un nombre entier positif ou négatif.

Or, tel est justement le cas pour les seconds membres des équations qui définissent

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha + \beta i), \frac{d}{dt}\lg(\alpha' + \beta' i), \frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta'' i)$$

en fonctions du temps.

Si l'on écrit dans ces seconds membres pour $\gamma, \gamma', \gamma'', p, q, r$ leurs valeurs en fonctions du temps et si, en supposant t dans le voisinage de t_0, on les développe en séries procédant selon les puissances de $t - t_0$, on voit immédiatement que des termes à exposant négatif ne pourront entrer dans ces développements que dans les deux cas suivants:

1) Si les développements de $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ contiennent des puissances négatives de $(t - t_0)$.

2) Si pour $t = t_0$ l'une des trois quantités $\gamma, \gamma', \gamma''$ est égale à ± 1. En ayant recours aux équations différentielles (1) et en écrivant τ au lieu de $t - t_0$, on voit que dans le 1^er^ cas les développements de $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ doivent avoir la forme suivante:

$$\begin{aligned} p &= p_0\tau^{-1} + p_1 + p_2\tau + \ldots, & \gamma &= f_0\tau^{-2} + f_1\tau^{-1} + f_2 + \ldots, \\ q &= q_0\tau^{-1} + q_1 + q_2\tau + \ldots, & \gamma' &= g_0\tau^{-2} + g_1\tau^{-1} + g_2 + \ldots, \\ r &= r_0\tau^{-1} + r_1 + r_2\tau + \ldots, & \gamma'' &= h_0\tau^{-2} + h_1\tau^{-1} + h_2 + \ldots, \end{aligned}$$

où les coefficients $p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0$ peuvent avoir ces deux systèmes différents de valeurs (voir § 1):

$$\text{I.} \qquad \begin{aligned} r_0 &= 0, & h_0 &= \pm i\frac{4}{c_0}, \\ q_0 &= \pm i2, & g_0 &= 0, \\ p_0 &= 0, & f_0 &= -\frac{4}{c_0}, \end{aligned}$$

$$\text{II.} \qquad \begin{aligned} q_0 &= \pm ip_0, & g_0 &= \pm if_0 = -\frac{r_0}{c_0} = \mp\frac{2i}{c_0}, \\ r_0 &= \pm 2i, & h_0 &= 0. \end{aligned}$$

En portant ces développements dans le second membre de l'équation

$$\frac{d\lg(\alpha'' + \beta''i)}{dt} = \frac{\gamma''\dfrac{d\gamma''}{dt} - i(\gamma p + \gamma' q)}{\gamma''^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\dfrac{d\gamma''}{dt} - i(\gamma p + \gamma' q)}{\gamma'' - 1} + \frac{\dfrac{d\gamma''}{dt} + i(\gamma p + \gamma' q)}{\gamma'' + 1}\right\},$$

on voit que l'on a dans le cas I

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta''i) = -2\tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau)$$

et dans le cas II

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta''i) = -\tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau).$$

Examinons maintenant le développement de $\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta''i)$ dans le voisinage d'une valeur $t = t_0$ pour laquelle $\gamma'' = \pm 1$.

En général, si l'on pose

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_1 t + \ldots, & \gamma &= f_0 + f_1 t + \ldots, \\ q &= q_0 + q_1 t + \ldots, & \gamma' &= g_0 + g_1 t + \ldots, \\ r &= r_0 + r_1 t + \ldots, & \gamma'' &= h_0 + h_1 t + \ldots, \end{aligned}$$

les coefficients $p_1, q_1, r_1, f_1, g_1, h_1$ sont définis (en vertu des équations différentielles (1), § 2) en fonctions de $p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0$ par les équations suivantes

$$\begin{aligned} 2p_1 &= q_0 r_0, & f_1 &= r_0 g_0 - q_0 h_0, \\ 2q_1 &= -p_0 r_0 - c_0 h_0, & g_1 &= p_0 h_0 - r_0 f_0, \\ r_1 &= c_0 g_0, & h_1 &= q_0 f_0 - p_0 g_0. \end{aligned}$$

Les trois quantités $\gamma, \gamma', \gamma''$ sont liées par l'équation

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

Leurs valeurs initiales f_0, g_0, h_0 sont donc aussi assujetties à la condition

$$f_0^2 + g_0^2 + h_0^2 = 1.$$

Désignons par ε_1 et par ε_2 deux quantités qui satisfont à l'équation

$$\varepsilon_1^2 = 1, \qquad \varepsilon_2^2 = 1.$$

Si je pose $h_0 = \varepsilon_1$ il faut donc que l'on ait en même temps $g_0 = \varepsilon_2 i f_0$ et l'on trouve alors

$$h_1 = -\varepsilon_2 i f_0(p_0 + \varepsilon_2 i q_0),$$
$$p_0 f_0 + q_0 g_0 = f_0(p_0 + \varepsilon_2 i q_0) = \varepsilon_2 i h_1.$$

Le développement du terme $\frac{1}{2}\frac{\frac{d\gamma''}{dt} - i\varepsilon_1(p\gamma + q\gamma')}{\gamma'' - \varepsilon_1}$ qui seul peut contenir des puissances négatives de τ, a donc la forme

$$\frac{1 + \varepsilon_1\varepsilon_2}{2}\tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau).$$

Si ε_1 et ε_2 ont même signe le coefficient de τ^{-1} est égal à $+ 1$.

Si ε_1 et ε_2 ont des signes contraires ce coefficient est nul.

On voit donc que dans tous les cas, le développement de

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta''i)$$

a la forme voulue

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta''i) = m(t - t_0)^{-1} + \mathfrak{P}(t - t_0),$$

d'où il résulte que $\alpha'' + \beta''i$ est une fonction uniforme du temps, pouvant être mise sous la forme d'un quotient de deux séries toujours convergentes.

On arrive au même résultat concernant $\alpha + \beta i$ et $\alpha' + \beta' i$.

Je me suis aussi assurée que ces quantités peuvent être exprimées en fonctions rationnelles des quantités de la forme

$$\frac{\vartheta_\alpha(u_1 + v_1, u_2 + v_2)}{\vartheta(u_1 u_2)} e^{u_3},$$

α étant l'index d'une de 16 fonctions $\vartheta(u_1 u_2)$, u_1, u_2, u_3 désignant des fonctions linéaires, entières du temps, et v_1, v_2 désignant des constantes imaginaires.

Mais à cause de la grande complication des calculs, je ne suis pas encore arrivée à développer ces formules sous leur forme finale.

§ 8.

Il peut être intéressant de réaliser sur un modèle un cas de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe où toutes les conditions du cas que nous venons d'étudier se trouvent remplies.

Dans les équations différentielles (1) les constantes A, B, C désignent les trois moments d'inertie principaux relativement au point fixe.

Soient maintenant A_1, B_1, C_1 les trois moments d'inertie principaux du même corps relativement à son centre de gravité et désignons par x, y, z les coordonnées d'un point dans un système d'axes de coordonnées dont l'origine se trouve au centre de gravité et dont les directions coïncident avec les trois axes d'inertie principaux passant par ce point.

On a alors, en désignant par μ la densité du corps considéré au point donc les coordonnées sont x, y, z,

$$A_1 = \iiint \mu(y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz, \qquad B_1 = \iiint \mu(z^2 + x^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$C_1 = \iiint \mu(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$0 = \iiint \mu x\,dx\,dy\,dz, \qquad 0 = \iiint \mu y\,dx\,dy\,dz, \qquad 0 = \iiint \mu z\,dx\,dy\,dz,$$

$$0 = \iiint \mu yz\,dx\,dy\,dz, \qquad 0 = \iiint \mu zx\,dx\,dy\,dz, \qquad 0 = \iiint \mu xy\,dx\,dy\,dz.$$

Toutes ces intégrales triples doivent être étendues à tout l'intérieur du corps considéré.

Soient a, b, c les coordonnées d'un point O. Désignant par ξ, η, ζ les coordonnées d'un point de l'espace relativement à des axes parallèles aux précédents, mais dont l'origine coïncide avec le point O, on a

$$\xi = x - a, \qquad \eta = y - b, \qquad \zeta = z - c.$$

L'équation de l'ellipsoïde d'inertie dont le centre est en O est, comme on sait,

$$1 = A_1'\xi^2 + B_1'\eta^2 + C_1'\zeta^2 - 2D_1'\eta\zeta - 2E_1'\zeta\xi - 2F_1\xi\eta = \varphi(\xi, \eta, \zeta),$$

les coëfficients A_1', B_1', ... étant définis par les équations

$$A_1' = \iiint \mu(\eta^2 + \zeta^2)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = A_1 + M(b^2 + c^2),$$

$$B_1' = \iiint \mu(\zeta^2 + \xi^2)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = B_1 + M(c^2 + a^2),$$

$$C_1' = \iiint \mu(\xi^2 + \eta^2)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = C_1 + M(a^2 + b^2),$$

$$D_1' = \iiint \mu\eta\zeta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = Mbc,$$

$$E_1' = \iiint \mu\zeta\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = Mca,$$

$$F_1' = \iiint \mu\xi\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = Mab.$$

M désigne la masse totale du corps,

$$M = \iiint \mu d\xi d\eta d\zeta.$$

Soient maintenant u, v, w les coordonnées d'un point de l'espace relativement à des axes, dont l'origine est au point O, mais dont les directions coïncident avec les directions des axes principaux de l'ellipsoide d'inertie, correspondant à ce point. On a alors

$$u = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta,$$
$$v = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta,$$
$$w = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta,$$
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$
$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \lambda u^2 + \mu v^2 + \nu w^2,$$

λ, μ, ν étant des constantes positives.

De plus en désignant par u_0, v_0, w_0 les coordonnées du centre de gravité dans ce nouveau système, on a

$$-u_0 = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$
$$-v_0 = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c,$$
$$-w_0 = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c.$$

Si nous imprimons maintenant au corps considéré un mouvement de rotation autour du point fixe O, les conditions du cas étudié par nous seront remplies, si l'on a

$$\lambda = \mu = 2\nu,$$
$$-w_0 = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c = 0.$$

On doit donc pouvoir satisfaire aux équations suivantes

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \nu[2(u^2 + v^2) + w^2], \qquad a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 = 0,$$
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = u^2 + v^2 + w^2, \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1.$$

Voyons si l'on peut choisir le point O de manière à ce que ces équations soient remplies.

Des deux premières de ces équations, il résulte

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) - 2\nu(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = -\nu w^2.$$

Cette dernière équation devant être satisfaite identiquement, si l'on écrit pour w sa valeur

$$w = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta,$$

on obtient, en égalant à zéro les coefficients de chaque terme dans cette identité, les équations suivantes:

$$A_1' - 2\nu = A_1 + M(b^2 + c^2) - 2\nu = -\nu\alpha_2^2,$$
$$B_1' - 2\nu = B_1 + M(c^2 + a^2) - 2\nu = -\nu\beta_2^2,$$
$$C_1' - 2\nu = C_1 + M(a^2 + b^2) - 2\nu = -\nu\gamma_2^2,$$

$$D_1' = Mbc = \nu\beta_2\gamma_2,$$
$$E_1' = Mca = \nu\gamma_2\alpha_2,$$
$$F_1' = Mab = \nu\alpha_2\beta_2.$$

Si aucune des trois constantes a, b, c (les coordonnées du point O) n'était nulle il résulterait des trois dernières équations

$$M^3a^2b^2c^2 = \nu^3\alpha_2^2\beta_2^2\gamma_2^2,$$
$$M^{\frac{1}{2}}a = \nu^{\frac{1}{2}}\alpha_2,$$
$$M^{\frac{1}{2}}b = \nu^{\frac{1}{2}}\beta_2,$$
$$M^{\frac{1}{2}}c = \nu^{\frac{1}{2}}\gamma_2,$$

ce qui est évidemment impossible par suite des équations

$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1,$$
$$a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 = 0,$$

ni M ni ν ne pouvant être $= 0$.

Si nous supposons $c = 0$, mais a et b différents de 0, nous devon poser $\gamma_2 = 0$, et par conséquent

$$Mab = \nu\alpha_2\beta_2, \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \qquad a\alpha_2 + b\beta_2 = 0,$$

d'où il suit

$$\alpha_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \beta_2 = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

(le signe de $\sqrt{a^2 + b^2}$ étant déterminé arbitrairement)

$$M = \frac{-\nu}{a^2 + b^2},$$

équation impossible, vu que M et ν sont tous les deux des quantités positives.

Il faut donc supposer $b = 0$, $c = 0$. On a alors

$$A_1' = A_1, \qquad B_1' = B_1 + Ma^2, \qquad C_1' = C_1 + Ma^2,$$
$$D_1' = 0, \qquad E_1' = 0, \qquad F_1' = 0,$$
$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = A_1\xi^2 + (B_1 + Ma^2)\eta^2 + (C_1 + Ma^2)\zeta^2.$$

Si les trois axes d'inertie principaux A_1, B_1, C_1 relatifs au centre de gravité du corps considéré satisfont à l'équation

$$A_1 = 2(B_1 - C_1),$$

on pourra satisfaire à toutes les conditions supposées par nous, en prenant

$$a^2 = \frac{A_1 - B_1}{M},$$

car on a dans ce cas

$$B_1 + Ma^2 = A_1, \qquad C_1 + Ma^2 = C_1 + A_1 - B_1 = \frac{1}{2}A_1,$$

par conséquent

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = A_1\left(\xi^2 + \eta^2 + \frac{1}{2}\zeta^2\right).$$

Remarquons seulement que pour que a soit réel, il faut et il suffit que l'on ait $B_1 > 2C_1$.

On voit donc, d'après ce calcul, qu'il est possible de réaliser mécaniquement toutes les conditions du problème que je viens d'étudier.