SUR L'ÉQUATION DU SIXIÈME DEGRÉ

PAR

F. BRIOSCHI
à MILAN.

1. *Les invariants d'une forme binaire du sixième degré.*

1. Les expressions des invariants d'une forme binaire du sixième ordre, en fonction de ses coefficients, sont connues depuis longtemps par les travaux de CLEBSCH, GORDAN, CAYLEY, SALMON.[1] Ces invariants sont cinq et des degrés $2, 4, 6, 10, 15$.

Soit:

$$u(x_1, x_2) = u_0 x_1^6 + 6u_1 x_1^5 x_2 + 15 u_2 x_1^4 x_2^2 + \ldots + u_6 x_2^6$$

la forme du sixième ordre, et:

$$k = \frac{1}{2}(uu)_4 = k_0 x_1^4 + 4k_1 x_1^3 x_2 + \ldots + k_4 x_2^4$$

un de ses covariants biquadratiques; on a:

$$k_0 = u_0 u_4 - 4u_1 u_3 + 3u_2^2, \qquad 2k_1 = u_0 u_5 - 3u_1 u_4 + 2u_2 u_3,$$

$$6k_2 = u_0 u_6 - 9u_2 u_4 + 8u_3^2, \qquad 2k_3 = u_1 u_6 - 3u_2 u_5 + 2u_3 u_4,$$

$$k_4 = u_2 u_6 - 4u_3 u_5 + 3u_4^2.$$

---

[1] CLEBSCH et GORDAN, *Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie*, Annali di Matematica, Serie 2ª, Tomo 1°, 1867. — CAYLEY, *Memoirs upon Quantics*. — SALMON, *Lessons introductory to the modern higher Algebra.*

Acta mathematica. 12. Imprimé le 11 octobre 1888.

Les invariants des degrés 2, 4, 6, sont:

$$a = u_0 u_6 - 6u_1 u_5 + 15 u_2 u_4 - 10 u_3^2,$$

$$g_2 = k_0 k_4 - 4k_1 k_3 + 3k_2^2,$$

$$g_3 = k_0 k_2 k_4 + 2k_1 k_2 k_3 - k_1^2 k_4 - k_0 k_3^2 - k_2^3.$$

Les expressions des deux autres invariants se déduisent de celles des trois covariants quadratiques:

$$l = (uk)_4, \qquad m = (lk)_2, \qquad n = (mk)_2,$$

et l'on a: l'invariant du 10^{me} degré:

$$g = \frac{1}{2}(mm)_2 = \frac{1}{2}(ln)_2,$$

et l'invariant gauche du 15^{me} degré:

$$e = \begin{vmatrix} l_0 & m_0 & n_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}.$$

Le carré de ce dernier invariant est une fonction rationnelle, entière, des autres, et en posant:

$$p = \frac{2}{9}[3(g + 4g_2 g_3) - 2a(g_2^2 + 2ag_3)],$$

$$q = \frac{2}{9}[3a(g - 20g_2 g_3) - 8(4g_2^3 + 27g_3^2)],$$

on trouve:

$$e^2 = -3[3(g - 20g_2 g_3)p^2 + 2(g_2^2 + 2ag_3)pq + 4g_3 q^2].$$

Enfin si l'on pose:

$$u(x_1, x_2) = u_0(x_1 - \omega_0 x_2)(x_1 - \omega_1 x_2) \ldots (x_1 - \omega_5 x_2),$$

l'invariant δ, ou discriminant:

$$\delta = u_0^6(\omega_0 - \omega_1)^2(\omega_0 - \omega_2)^2 \ldots (\omega_4 - \omega_5)^2$$

s'exprime en fonction des invariants a, g_2, g_3, g de la manière suivante:[1]

$$\delta = 3^5 \cdot 4^3[32a^2(5^4 \cdot g_3 + 5^3 \cdot ag_2 - 4a^3) - 5^5(8ag_2^2 + 48g_2g_3 + 3g)],$$

et en conséquence on peut substituer δ à g.

2. Par la transformation linéaire:

$$x_1 = \mu(\xi_2 + \omega_5\xi_1), \qquad x_2 = \mu\xi_1$$

on obtient:

$$u(x_1, x_2) = U(\xi_1, \xi_2),$$

étant:

$$U(\xi_1, \xi_2) = \xi_2(\xi_1 - \eta_0\xi_2)(\xi_1 - \eta_1\xi_2)\ldots(\xi_1 - \eta_4\xi_2),$$

$$\mu^6 = \frac{1}{u_0(50)(51)(52)(53)(54)}, \qquad \eta_r = \frac{1}{(r5)}$$

et

$$(rs) = \omega_r - \omega_s.$$

Soit:

$$U(\xi_1, \xi_2) = \xi_2(\xi_1^5 + 5p_1\xi_1^4\xi_2 + 10p_2\xi_1^3\xi_2^2 + \ldots + p_5\xi_2^5),$$

et calculons les invariants des degrés $2, 4, 6$ de cette nouvelle forme du sixième ordre, que j'indique par $\alpha, \gamma_2, \gamma_3$. Je supposerai $p_1 = 0$, ce qui n'ôte rien à la généralité de ce qui suit. On a ainsi:

$$\alpha = -\frac{5}{6}(p_4 + 3p_2^2), \qquad \gamma_2 = \frac{1}{18}(10p_2^2p_4 - 4p_2p_3^2 + 6p_2^4 + p_3p_5),$$

$$\gamma_3 = -\frac{1}{3^3 \cdot 4^2}[16p_3^4 + 16p_2^6 + 64p_2^3p_3^2 - 80p_2^4p_4 - 20p_2p_3^2p_4 - 4p_2^2p_3p_5 - p_2p_5^2],$$

et, comme donne la théorie des invariants,

$$\mu^{12}a = \alpha, \qquad \mu^{24}g_2 = \gamma_2, \qquad \mu^{36}g_3 = \gamma_3, \qquad \mu^{60}\delta = \Delta,$$

Δ étant le discriminant de la forme $U(\xi_1, \xi_2)$.

---

[1] Annali di Matematica, Serie 2ª, Tomo 1°, *Il discriminante delle forme binarie del sesto ordine.*

2. *Recherches anciennes sur certaines équations du sixième degré.*

1. J'ai déjà fait connaître[1] les travaux de deux géomètres italiens, Malfatti et Ruffini, relatifs à l'équation du 5^{me} degré, et le lien entre ces anciennes recherches et celles dues à Jacobi, Cayley et d'autres géomètres anglais.[2]

Je vais rappeler en peu de mots comment on arrive à l'équation du sixième degré que j'ai nommée *résolvante* de Malfatti. Considérons l'équation du 5^{me} degré:

$$\xi^5 + 10p_2\xi^3 + 10p_3\xi^2 + 5p_4\xi + p_5 = 0$$

dont les racines sont $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_4$. En posant avec Malfatti:

$$\eta_0 = m + p + q + n, \qquad \eta_1 = \varepsilon m + \varepsilon^2 p + \varepsilon^3 q + \varepsilon^4 n,$$
$$\eta_2 = \varepsilon^2 m + \varepsilon^4 p + \varepsilon q + \varepsilon^3 n, \qquad \eta_3 = \varepsilon^3 m + \varepsilon p + \varepsilon^4 q + \varepsilon^2 n,$$
$$\eta_4 = \varepsilon^4 m + \varepsilon^3 p + \varepsilon^2 q + \varepsilon n,$$

dans lesquelles $1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^4 = \sqrt{5}$, on trouve que le produit $\rho = mnpq$ est une fonction des racines $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_4$ n'ayant que six valeurs; en effet elle est cyclique, invariable pour les substitutions:

$$\binom{r}{2r}, \binom{r}{3r}, \binom{r}{4r},$$

et les six valeurs sont correspondantes aux substitutions:

$$\binom{r}{r}, \binom{r}{(2r)^3}, \binom{r}{(2r)^3+1}, \ldots, \binom{r}{(2r)^3+4}.$$

En posant:

$$w = 5^2[15\rho - 12p_2^2 + p_4],$$

---

[1] *Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni del quinto grado,* Annali di Matematica, Serie 1ª, Tomo 5°, 1864.

[2] Jacobi, *Observatio de aequatione sexti gradus, ad quam aequationes quinti gradus revocari possunt,* Journal de Crelle, T. 13.

Cayley, Philosophical Transactions, T. 151.

la résolvante de MALFATTI est la suivante:

$$[w^3 + 4\cdot5\cdot3^3\cdot\beta w + 4^2\cdot5\cdot3^3\cdot\gamma]^2 + 3^5[w + 5\cdot6\alpha]\Delta = 0,$$

dans laquelle:

$$\beta = \frac{5^2}{2\cdot3^2}[2p_4^2 - 18p_2^2p_4 + 12p_2p_3^2 - 3p_3p_5],$$

$$\gamma = \frac{5^3}{4^2\cdot3^3}[36(12p_2^2p_4^2 + 12p_3^4 - 31p_2p_3^2p_4 + 9p_2^2p_3p_5 + 4p_3p_4p_5) - 27p_2p_5^2 - 112p_4^3],$$

et α, Δ ont les valeurs supérieures.

Or les valeurs de β, γ peuvent s'exprimer en fonctions des invariants α, γ_2, γ_3 de la manière suivante:

$$\beta = 4\alpha^2 - 3\cdot5^2\cdot\gamma_2; \qquad \gamma = 56\alpha^3 - 4\cdot3^2\cdot5^2\cdot\alpha\gamma_2 - 3^3\cdot5^3\cdot\gamma_3;$$

et par conséquent la résolvante de MALFATTI peut être considérée comme une transformée d'une équation spéciale du 6^{me} degré, transformée dont les coefficients sont des invariants de la même équation.

2. La valeur fondamentale $\binom{r}{r}$ qu'on obtient en formant le produit $\rho = mnpq$ donne pour w_0 la valeur:

$$w_0 = -20p_4 - 3\psi,$$

étant:

$$\psi = \eta_0^2(\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_4) + \eta_1^2(\eta_0\eta_2 + \eta_3\eta_4) + \eta_2^2(\eta_1\eta_3 + \eta_0\eta_4)$$
$$+ \eta_3^2(\eta_2\eta_4 + \eta_0\eta_1) + \eta_4^2(\eta_1\eta_2 + \eta_0\eta_3);$$

ou si l'on pose:

$$\gamma_5^4 = (\eta_1 - \eta_3)(\eta_0 - \eta_2)(\eta_2 - \eta_4)(\eta_4 - \eta_0), \quad \gamma_0^4 = (\eta_2 - \eta_4)(\eta_1 - \eta_3)(\eta_3 - \eta_0)(\eta_0 - \eta_1),$$
$$\gamma_{12}^4 = (\eta_2 - \eta_3)(\eta_0 - \eta_1)(\eta_1 - \eta_4)(\eta_4 - \eta_0), \quad \gamma_{34}^4 = (\eta_1 - \eta_4)(\eta_0 - \eta_2)(\eta_2 - \eta_3)(\eta_3 - \eta_0),$$

on a:

$$w_0 = 2\gamma_{34}^4 - \gamma_5^4 - \gamma_0^4 - \gamma_{12}^4,$$

et l'on déduit au moyen des substitutions:

$$\binom{r}{(2r)^3}, \binom{r}{(2r)^3 + 1}, \binom{r}{(2r)^3 + 4},$$

$$w_1 = 2\gamma_{12}^4 - \gamma_{34}^4 - \gamma_5^4 - \gamma_0^4; \qquad w_2 = 2\gamma_5^4 - \gamma_0^4 - \gamma_{12}^4 - \gamma_{34}^4;$$
$$w_3 = 2\gamma_0^4 - \gamma_{12}^4 - \gamma_{34}^4 - \gamma_5^4;$$

et les substitutions:

$$\begin{pmatrix} r \\ (2r)^3+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ (2r)^3+3 \end{pmatrix}$$

donnent:

$$w_4 = 2\gamma_5^4 - \gamma_2^4 - \gamma_{03}^4 - \gamma_{14}^4,$$

$$w_5 = 2\gamma_5^4 - \gamma_{01}^4 - \gamma_4^4 - \gamma_{23}^4,$$

étant:

$$\gamma_2^4 = (\eta_0-\eta_4)(\eta_1-\eta_2)(\eta_2-\eta_3)(\eta_3-\eta_1), \quad \gamma_{03}^4 = (\eta_0-\eta_1)(\eta_2-\eta_4)(\eta_4-\eta_3)(\eta_3-\eta_2),$$

$$\gamma_{14}^4 = (\eta_3-\eta_4)(\eta_0-\eta_1)(\eta_1-\eta_2)(\eta_2-\eta_0), \quad \gamma_{01}^4 = (\eta_0-\eta_3)(\eta_1-\eta_2)(\eta_2-\eta_4)(\eta_4-\eta_1),$$

$$\gamma_4^4 = (\eta_0-\eta_2)(\eta_1-\eta_3)(\eta_3-\eta_4)(\eta_4-\eta_1), \quad \gamma_{23}^4 = (\eta_1-\eta_2)(\eta_0-\eta_3)(\eta_3-\eta_4)(\eta_4-\eta_0).$$

3. Comme j'ai démontré autrefois, si dans l'équation supérieure de MALFATTI on pose

$$w + 5.6.\alpha = -3\lambda^2,$$

on obtient la transformée:

$$\lambda^6 + 30\alpha\lambda^4 + 60(5\alpha^2+\beta)\lambda^2 + \Delta^{\frac{1}{2}}\lambda + 40(25\alpha^3 + 15\alpha\beta - 2\gamma) = 0,$$

ou les résolvantes de JACOBI et de M. CAYLEY.

3. *Conséquences des résultats exposés dans le chapitre précédent.*

1. Soit, comme dans le chapitre 1^r, $(rs) = \omega_r - \omega_s$, et considérons les dix fonctions suivantes des racines $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_5$:

$$c_5^4 = (02)(24)(40)(13)(35)(51), \qquad c_0^4 = (01)(13)(30)(24)(45)(52),$$

$$c_{12}^4 = (01)(14)(40)(23)(35)(52), \qquad c_{34}^4 = (02)(23)(30)(14)(45)(51),$$

$$c_{23}^4 = (03)(34)(40)(12)(25)(51), \qquad c_{14}^4 = (01)(12)(20)(34)(45)(53),$$

$$c_4^4 = (02)(25)(50)(13)(34)(41), \qquad c_{03}^4 = (01)(15)(50)(23)(34)(42),$$

$$c_{01}^4 = (03)(35)(50)(12)(24)(41), \qquad c_2^4 = (04)(45)(50)(12)(23)(31).$$

Entre ces fonctions on a les relations connues:

$$c_{23}^4 + c_{14}^4 = c_5^4 + c_0^4 - c_{12}^4 - c_{34}^4,$$
$$c_4^4 + c_{03}^4 = c_5^4 - c_0^4 + c_{12}^4 - c_{34}^4,$$
$$c_{01}^4 + c_4^4 = c_5^4 - c_0^4 - c_{12}^4 + c_{34}^4,$$
$$c_{23}^4 - c_{14}^4 = c_4^4 - c_{03}^4 = c_{01}^4 - c_2^4,$$

et en conséquence si l'on indique par $\mathfrak{Q}$ un quelconque de ces derniers binomes, et l'on pose:

$$c_5^4 = c_1, \qquad c_0^4 = c_2, \qquad c_{12}^4 = c_3, \qquad c_{34}^4 = c_4,$$

on aura:

$$c_{23}^4 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \mathfrak{Q}), \qquad c_{14}^4 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \mathfrak{Q}),$$

$$c_4^4 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \mathfrak{Q}), \qquad c_{03}^4 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \mathfrak{Q}),$$

$$c_{01}^4 = \frac{1}{2}(\alpha_3 + \mathfrak{Q}), \qquad c_2^4 = \frac{1}{2}(\alpha_3 - \mathfrak{Q}),$$

étant:

$$\alpha_1 = c_1 + c_2 - c_3 - c_4, \qquad \alpha_2 = c_1 - c_2 + c_3 - c_4, \qquad \alpha_3 = c_1 - c_2 - c_3 + c_4.$$

Soit:

$$c^4 + q_1 c^3 + q_2 c^2 + q_3 c + q_4 = 0$$

l'équation dont les racines sont c_1, c_2, c_3, c_4; la relation connue:

$$c_{23}^2 c_{14}^2 = c_5^2 c_0^2 - c_{12}^2 c_{34}^2$$

donne pour $\mathfrak{Q}^2$ la valeur:

$$\mathfrak{Q}^2 = q_1^2 - 4q_2 + 8\sqrt{q_4}.$$

2. On a vu au chapitre 1^r^ que les racines $\eta_0, \eta_1, \ldots$ sont liées aux racines $\omega_0, \omega_1, \ldots$ par la relation:

$$\eta_r = \frac{1}{(r5)};$$

on en déduit très facilement qu'entre une quelconque des fonctions γ_{rs}^4 et la correspondante c_{rs}^4 on a celle-ci:

$$\gamma_{rs}^4 = u_0^2 \mu^{12} c_{rs}^4;$$

en conséquence, si l'on pose, par exemple:

$$y_0 = u_0^2[2c_4 - c_1 - c_2 - c_3],$$

on aura:

$$w_0 = \mu^{12} y_0$$

et en général

$$w_r = \mu^{12} y_r.$$

Indiquons maintenant par b, c des quantités analogues aux β, γ du chapitre précédent, c'est à dire:

$$b = 4a^2 - 3 \cdot 5^2 . g_2, \qquad c = 56a^3 - 4 \cdot 3^2 . 5^2 . ag_2 - 3^3 . 5^3 . g_3,$$

on aura:

$$\mu^{24} b = \beta, \qquad \mu^{36} c = \gamma,$$

et de la résolvante de MALFATTI on déduira la suivante:

$$\text{(A)} \qquad [y^3 + 4 \cdot 5 \cdot 3^3 . by + 4^2 . 5 \cdot 3^3 . c]^2 + 3^5[y + 5 \cdot 6 . a]\delta = 0,$$

ou l'autre:

$$\text{(B)} \quad z^6 + 30az^4 + 60(5a^2 + b)z^2 + \delta^{\frac{1}{2}} z + 40(25a^3 + 15ab - 2c) = 0,$$

z étant liée à y par la relation:

$$y + 5 \cdot 6a = -3z^2.$$

On arrive ainsi à ce résultat remarquable, que les quatre invariants:

$$b, c, \delta, a\delta$$

de la forme $u(x_1, x_2)$ du sixième ordre peuvent s'exprimer en fonction des dix quantités c_{rs}.

On peut observer: que chacun de ces quatre invariants est identiquement égal à zéro si la forme u a un facteur triple; et que leurs valeurs en fonction de c_1, c_2, c_3, c_4 sont les suivants:

$$b = -\frac{1}{3^2 \cdot 4 \cdot 5}(q_1^2 - 3q_2 + 3\sqrt{q_4}), \qquad \delta = (q_3 - q_1\sqrt{q_4})\sqrt{q_4},$$

$$c = -\frac{1}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5}[4q_1^3 - 18q_1q_2 + 27q_3 + 18q_1\sqrt{q_4}],$$

$$a\delta = -\frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5}[4q_1^2q_4 - 12q_2q_4 + 3q_3^2 + 24q_4\sqrt{q_4} - 4q_1q_3\sqrt{q_4}].$$

4. *Transformation de l'équation générale du sixième degré. Sa forme normale.*

1. J'ai montré il y a quelques années[1] de quelle manière on peut transformer une équation générale du sixième degré au double point de vue d'annuler un ou plusieurs des coefficients de la transformée et de rendre les autres des invariants de l'équation donnée.[2]

Soient, comme au chapitre 1r, $u(x_1, x_2)$ une forme du sixième ordre, $k = \frac{1}{2}(uu)_4$ un de ses covariants biquadratiques, δ son discriminant; si des deux formes du cinquième ordre:

$$\varphi = tu_1 + x_2k\delta^{\frac{1}{2}} = 0, \qquad \psi = tu_2 - x_1k\delta^{\frac{1}{2}} = 0,$$

dans lesquelles:

$$u_1 = \frac{1}{6}\frac{du}{dx_1}, \qquad u_2 = \frac{1}{6}\frac{du}{dx_2},$$

on élimine le rapport $x_1 : x_2$, on obtient l'équation:

$$t^6 + u_{12}t^4 + u_{14}\delta t^2 + u_{15}\delta^{\frac{3}{2}}t + u_{16}\delta^2 = 0,$$

$u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{16}$ étant des fonctions rationnelles, entières des invariants de la forme u des degrés 12, 14, 15, 16.

[1] Annali di Matematica, Serie 2a, T. 11, *Sulle relazioni esistenti fra covarianti ed invarianti di una stessa forma binaria.*

[2] Pour la théorie générale de ces transformations on peut consulter l'important Mémoire de M. Hermite: *Sur l'équation du* 5me *degré,* pag. 11 et suivantes.

Avant de déterminer la valeur de ces coefficients, il est opportun de démontrer une propriété remarquable des racines $t_0, t_1, \ldots, t_5$ de la nouvelle équation corréspondantes aux racines $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_5$ de l'équation $u(x) = 0$. On voit tout de suite que, étant:

$$t_r = -\frac{6k(\omega_r)}{u'(\omega_r)}\delta^{\frac{1}{2}},$$

on aura:

$$t_r = \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{5^2.6.u'(\omega_r)}[5u'(\omega_r)u'''(\omega_r) - 3u''^2(\omega_r)].$$

Considérons la racine t_0, en posant:

$$m_r = \frac{1}{\omega_0 - \omega_r} = \frac{1}{(0r)},$$

on a:

$$\frac{u''(\omega_0)}{u'(\omega_0)} = 2\sum_1^5{}_r m_r, \qquad \frac{4u'(\omega_0)u'''(\omega_0) - 3u''^2(\omega_0)}{u'^2(\omega_0)} = -12\sum_1^5{}_r m_r^2,$$

et en conséquence:

$$\frac{5u'(\omega_0)u'''(\omega_0) - 3u''^2(\omega_0)}{u'(\omega_0)} = 6u'(\omega_0)[\sum m_r m_s - 2\sum m_r^2].$$

On aura ainsi:

$$5^2.t_0 = u'(\omega_0)[\sum m_r m_s - 2\sum m_r^2]\delta^{\frac{1}{2}}$$

ou:

$$5^2.t_0 = \delta^{\frac{1}{2}}[\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 + \psi_5],$$

ayant indiqué par $\psi_1, \psi_2, \ldots$ les expressions suivantes:

$$\psi_1 = \frac{1}{(10)}[(03)(04)(12)(15) + (02)(05)(13)(14)],$$

$$\psi_2 = \frac{1}{(20)}[(04)(05)(23)(21) + (03)(01)(24)(25)],$$

$$\psi_3 = \frac{1}{(30)}[(05)(01)(34)(32) + (04)(02)(35)(31)],$$

$$\psi_4 = \frac{1}{(40)}[(01)(02)(45)(43) + (05)(03)(41)(42)],$$

$$\psi_5 = \frac{1}{(50)}[(02)(03)(51)(54) + (01)(04)(52)(53)],$$

qui se déduisent l'une de l'autre par la substitution cyclique (12345). En se rappelant les valeurs des dix quantités c_{rs}^4 données au chapitre précédent, on trouve que $\psi_1, \psi_2, \ldots$ peuvent aussi s'exprimer comme il suit:

$$\psi_1 = -\frac{c_{23}^4 + c_4^4}{(01)(25)(34)}, \qquad \psi_2 = \frac{c_2^4 - c_0^4}{(02)(13)(45)}, \qquad \psi_3 = \frac{c_{03}^4 + c_5^4}{(03)(15)(24)},$$

$$\psi_4 = \frac{c_{14}^4 - c_{01}^4}{(04)(12)(35)}, \qquad \psi_5 = -\frac{c_{34}^4 + c_{12}^4}{(05)(14)(23)}.$$

Mais on démontre très facilement, et c'est connu, que chacune des cinq expressions:

$$\begin{gathered}(01)(25)(34)c_5^2\,c_2^2\,c_{01}^2c_{34}^2,\\ (02)(13)(45)c_{01}^2c_{03}^2c_{12}^2c_{23}^2,\\ (03)(15)(24)c_2^2\,c_4^2\,c_{14}^2c_{12}^2,\\ (04)(12)(35)c_4^2\,c_0^2\,c_{34}^2c_{03}^2,\\ (05)(14)(23)c_0^2\,c_5^2\,c_{23}^2c_{14}^2\end{gathered}$$

est égale à $\Pi c = \delta^{\frac{1}{2}}$. On aura en conséquence:

$$\begin{aligned}\delta^{\frac{1}{2}}.\psi_1 &= -\,c_5^2\,c_2^2\,c_{01}^2c_{34}^2[c_{23}^4 + c_4^4\,],\\ \delta^{\frac{1}{2}}.\psi_2 &= \quad c_{01}^2c_{03}^2c_{12}^2c_{23}^2[c_2^4\, - c_0^4\,],\\ \delta^{\frac{1}{2}}.\psi_3 &= \quad c_2^2\,c_4^2\,c_{14}^2c_{12}^2[c_{03}^4 + c_5^4\,],\\ \delta^{\frac{1}{2}}.\psi_4 &= \quad c_4^2\,c_0^2\,c_{34}^2c_{03}^2[c_{14}^4 - c_{01}^4],\\ \delta^{\frac{1}{2}}.\psi_5 &= -\,c_0^2\,c_5^2\,c_{23}^2c_{14}^2[c_{34}^4 + c_{12}^4];\end{aligned}$$

d'autre part, des relations connues entre les carrés des fonctions c_{rs}, on déduit que:

$$\begin{aligned}c_{01}^2c_{03}^2c_{12}^2c_{23}^2 &= \quad c_{01}^4(c_{34}^4 + c_{03}^4) - c_5^2c_2^2c_{01}^2c_{34}^2,\\ c_2^2\,c_4^2\,c_{14}^2c_{12}^2 &= -\,c_2^4\,(c_{01}^4 + c_{12}^4) + c_5^2c_2^2c_{01}^2c_{34}^2,\\ c_4^2\,c_0^2\,c_{34}^2c_{03}^2 &= \quad c_{34}^4(c_5^4\, - c_0^4\,) - c_5^2c_2^2c_{01}^2c_{34}^2,\\ c_0^2\,c_5^2\,c_{23}^2c_{14}^2 &= \quad c_5^4\,(c_{14}^4 - c_2^4\,) + c_5^2c_2^2c_{01}^2c_{34}^2;\end{aligned}$$

donc en observant qu'on a:

$$-c_{23}^4 - c_4^4 - c_2^4 + c_0^4 + c_{03}^4 + c_5^4 - c_{14}^4 + c_{01}^4 - c_{34}^4 - c_{12}^4 = 0,$$

on arrive à ce résultat: que les racines $t_0, t_1, \ldots$ sont exprimables en fonction des quantités c_{rs}^4. On a pour t_0:

$$5^2 . t_0 = c_5^4[c_2^4 c_{34}^4 - c_2^4 c_{01}^4 - c_{12}^4 c_{14}^4 - c_{01}^4 c_{34}^4] - c_0^4[c_{14}^4 c_{34}^4 + c_{01}^4 c_{03}^4]$$
$$+ c_2^4[c_{01}^4 c_{34}^2 - c_{03}^4 c_{12}^4].$$

Au moyen des relations établies dans le chapitre précédent entre les dix quantités c_{rs}^4 on arrive à démontrer que les racines $t_0, t_1, \ldots$ peuvent se représenter comme il suit:

$$5^2 . t_0 = b_1 + a_1, \qquad 5^2 . t_5 = b_1 - a_1,$$
$$5^2 . t_2 = b_2 + a_2, \qquad 5^2 . t_1 = b_2 - a_2,$$
$$5^2 . t_4 = b_3 + a_3, \qquad 5^2 . t_3 = b_3 - a_3,$$

dans lesquelles:

$$a_1 = c_1 c_2 (c_3 + c_4) - c_3 c_4 (c_1 + c_2) - (c_1 + c_2)(c_3 + c_4)\alpha_1 + 2\alpha_1 \sqrt{q_4},$$
$$a_2 = c_1 c_3 (c_4 + c_2) - c_4 c_2 (c_1 + c_3) - (c_1 + c_3)(c_4 + c_2)\alpha_2 + 2\alpha_2 \sqrt{q_4},$$
$$a_3 = c_1 c_4 (c_2 + c_3) - c_2 c_3 (c_1 + c_4) - (c_1 + c_4)(c_2 + c_3)\alpha_3 + 2\alpha_3 \sqrt{q_4},$$

et:

$$b_1 = (c_1 - c_2)(c_3 - c_4)\mathfrak{Q}, \qquad b_2 = (c_1 - c_3)(c_4 - c_2)\mathfrak{Q},$$
$$b_3 = (c_1 - c_4)(c_2 - c_3)\mathfrak{Q}$$

et en conséquence $b_1 + b_2 + b_3 = 0$, comme cela devait être.

Mais, ce qui est remarquable pour le but que nous avons en vue, ces quantités $a_1, b_1, \ldots$ sont des fonctions des quinze différences deux à deux des racines $y_0, y_1, \ldots, y_5$. A l'aide des relations démontrées précédemment on transforme en effet les expressions supérieures dans les suivantes:

$$54a_1 = [02][15][34] + [02][14][35] + [04][13][25] + [05][13][24],$$
$$(1) \quad 54a_2 = [01][25][34] + [01][24][35] - [04][15][23] - [05][14][23],$$
$$54a_3 = -[03][14][25] - [03][15][24] + [04][12][35] + [05][12][34],$$
$$27b_1 = -[01][23][45], \qquad 27b_2 = -[03][12][45], \qquad 27b_3 = [02][13][45],$$

dans lesquelles

$$[rs] = y_r - y_s$$

et l'on a posé $u_0 = 1$.

2. En vertu d'un théorème connu de la théorie des formes, les coefficients de la transformée en t seront, en conséquence des valeurs supérieures de $a_1, b_1, \ldots$, non seulement des invariants ou des fonctions d'invariants de la forme $u(x_1, x_2)$, comme nous l'avons démontré, mais aussi des invariants, ou des fonctions des invariants de l'équation (A) en y. La détermination de la valeur de ces coefficients se réduit alors à la calculation de quelques coefficients numériques. Il est évident que le coefficient u_{12} est égal à l'invariant du second degré de l'équation (A), sauf un coefficient numérique; que $u_{14}\delta$ est égal à un invariant du quatrième degré; $u_{15}\delta^{\frac{3}{2}}$ égal à la racine carrée du discriminant, $u_{16}\delta^2$ égal à un invariant du sixième degré.

Soient, pour l'équation (A), l, m, n ses invariants des degrés $2, 4, 6$ analogues aux invariants a, b, c de la forme u; et soit p le discriminant. En posant:

$$v = \frac{1}{2} 3^3 \cdot 5^2 \cdot t,$$

on trouve que l'équation en t ou en v est la suivante:

$$\text{(C)} \qquad v^6 + 30lv^4 + 60(5l^2 + m)v^2 + p^{\frac{1}{2}}v + 40(25l^3 + 15lm - 2n) = 0,$$

et à cette équation je donne la dénomination de *forme normale* de l'équation du sixième degré.

Cette équation à la même forme que l'équation (B) en z, par conséquent si l'on pose:

$$\sigma + 5 \cdot 6 \cdot l = -3v^2,$$

elle se transforme dans la suivante:

$$\text{(D)} \qquad [\sigma^3 + 4 \cdot 5 \cdot 3^3 \cdot m\sigma + 4^2 \cdot 5 \cdot 3^3 \cdot n]^2 + 3^5[\sigma + 5 \cdot 6 \cdot l]p = 0.$$

La détermination des valeurs de l, m, n, en fonction des invariants

a, b, c, δ de la forme $u(x_1, x_2)$, ne présente ainsi aucune difficulté, et l'on trouve:

$$l = 2.5.4^3.3^8[3ad + 5b^3 + c^2],$$

$$5l^2 + m = 5^2.4^6.3^{18}[(11a^2 - 2b)d + 4a(5b^3 + c^2) + 18b^2(5ab - c)]d,$$

$$25l^3 + 15lm - 2n = -2.5^3.4^8.3^{27}[4(8a^3 + 12ab - c)d + 12(a^2 - 4b)(5b^3 + c^2) - 4.3^5.ab^2(5ab - c) + 3^5.b^4]d^2,$$

ayant posé:

$$d = \frac{1}{3^3.4^3}\delta.$$

Enfin $p^{\frac{1}{2}}$ nous l'avons démontré égal, sauf un coefficient numérique, à $u_{15}\delta^{\frac{3}{2}}$; or la forme $u(x_1, x_2)$ ne peut avoir d'autre invariant du quinzième degré que l'invariant gauche qu'on a indiqué par e dans le chapitre 1r, et on trouve:

$$p^{\frac{1}{2}} = -4^4.5^{10}.3^{24}.e\delta^{\frac{3}{2}}.$$

La forme normale des équations du sixième degré est par conséquent complètement calculée.

Cette équation normale est, comme on a vu, le résultat de l'élimination du rapport $x_1 : x_2$ de deux équations du cinquième degré $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Il est évident que de ces deux équations on pourrait aussi déduire la valeur de $x_1 : x_2$ en fonction rationnelle de t, c'est à dire que la recherche des valeurs de $\omega_0, \omega_1, \ldots$ ou la résolution de l'équation générale du sixième degré $u(x) = 0$ dépend entièrement de la résolution de l'équation en t.

3. La forme de l'équation supérieure en σ montre tout de suite, si on se rappelle l'équation (A), de quelle manière les racines $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ sont formées avec les $y_0, y_1, \ldots$. En indiquant par h_{rs} les dix fonctions qu'on obtient en substituant dans les c_{rs} les racines $y_0, y_1, \ldots$ aux racines $\omega_0, \omega_1, \ldots$, on arrive très facilement à ce résultat:

$$\sigma_0 = 2h_5^4 - h_0^4 - h_{12}^4 - h_{34}^4,$$

$$\sigma_1 = 2h_0^4 - h_{12}^4 - h_{34}^4 - h_5^4 = h_0^4 + h_{14}^4 + h_{23}^4 - 2h_5^4,$$

$$\sigma_4 = 2h_{12}^4 - h_{34}^4 - h_5^4 - h_0^4 = h_{12}^4 + h_{03}^4 + h_4^4 - 2h_5^4,$$

$$\sigma_2 = 2h_{34}^4 - h_5^4 - h_0^4 - h_{12}^4 = h_{34}^4 + h_2^4 + h_{01}^4 - 2h_5^4,$$

$$\sigma_3 = 2h_5^4 - h_{23}^4 - h_4^4 - h_{01}^4,$$

$$\sigma_5 = 2h_5^4 - h_{14}^4 - h_{03}^4 - h_2^4,$$

et de ces relations on déduit les suivantes:

$$\text{(E)}\quad \begin{aligned}
h_5^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4), & h_{12}^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_0),\\
h_0^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_0 + \sigma_4 + \sigma_2), & h_{34}^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_0 + \sigma_4 + \sigma_1),\\
h_{23}^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_3), & h_{14}^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_5),\\
h_4^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), & h_{03}^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_5),\\
h_{01}^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_4 + \sigma_1 + \sigma_3), & h_2^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_4 + \sigma_1 + \sigma_5).
\end{aligned}$$

Ces relations nous seront utiles dans le chapitre qui suit.

5. *Résolution de l'équation du sixième degré.*

1. Soient

$$u_1 = \int \frac{z_1(z_2dz_1 - z_1dz_2)}{\sqrt{f(z_1, z_2)}}, \qquad u_2 = \int \frac{z_2(z_2dz_1 - z_1dz_2)}{\sqrt{f(z_1, z_2)}}$$

deux intégrales hyperelliptiques de première espèce; et soient $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}; \omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{23}, \omega_{24}$ les périodes normales primitives. En posant:

$$p_{rs} = \omega_{1r}\omega_{2s} - \omega_{2r}\omega_{1s} = - p_{sr},$$

on a, comme il est connu:[1]

$$p_{13} + p_{24} = 0, \qquad p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

et si:

$$v_1 = \frac{1}{p_{12}}(u_1\omega_{22} - u_2\omega_{12}), \qquad v_2 = \frac{1}{p_{21}}(u_1\omega_{21} - u_2\omega_{11}),$$

les nouvelles périodes seront:

$$\text{pour } v_1: \quad 1\,,\, 0, \qquad \tau_{11} = \frac{p_{32}}{p_{12}}, \quad \tau_{12} = \frac{p_{42}}{p_{12}},$$

$$\text{»} \quad v_2: \quad 0\,,\, 1, \qquad \tau_{21} = \frac{p_{13}}{p_{12}}, \quad \tau_{22} = \frac{p_{14}}{p_{12}},$$

et en conséquence $\tau_{21} = \tau_{12}$.

Soit:

$$\vartheta_{rs}(v_1\,,\, v_2\,,\, \tau_{11}\,,\, \tau_{12}\,,\, \tau_{22})$$

une des dix fonctions théta paires; et ϑ_{rs} la même fonction dans laquelle on a supposé $v_1 = v_2 = 0$.

On sait qu'en indiquant par ρ la quantité:

$$\rho = \frac{(2\pi i)^2}{p_{12}},$$

le produit $\rho^2\vartheta_{rs}^4$ est une fonction des racines de l'équation $f(z_1\,,\, z_2) = 0$, fonction qu'on obtient en substituant ces racines dans l'expression c_{rs}^4 aux racines $\omega_0\,,\, \omega_1\,,\, \ldots$ de l'équation $u(x_1\,,\, x_2) = 0$.

Si en conséquence on pose:

$$\varphi_0 = \rho^2[2\vartheta_5^4 - \vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4 - \vartheta_{34}^4],$$

$$\varphi_1 = \rho^2[2\vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4 - \vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4],$$

$$\varphi_4 = \rho^2[2\vartheta_{12}^4 - \vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4 - \vartheta_0^4],$$

$$\varphi_2 = \rho^2[2\vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4 - \vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4],$$

$$\varphi_3 = \rho^2[2\vartheta_5^4 - \vartheta_{23}^4 - \vartheta_4^4 - \vartheta_{01}^4],$$

$$\varphi_5 = \rho^2[2\vartheta_5^4 - \vartheta_{14}^4 - \vartheta_{03}^4 - \vartheta_2^4],$$

[1] J'ai adopté la notation due au Prof^r KLEIN. Voir dans les Math. Annalen, Bd. 27, *Über hyperelliptische Sigmafunctionen.*

l'équation du sixième degré dont les racines sont $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_5$, aura la même forme que les équations (A) ou (D), et l'on aura:

$$[\varphi^3 + 4\cdot 5\cdot 3^3 . B\varphi + 4^2\cdot 5\cdot 3^3 . C]^2 + 3^5[\varphi + 5\cdot 6 . A]D = 0,$$

dans laquelle A, B, C, D sont pour la forme $f(z_1, z_2)$ les mêmes invariants qu'étaient a, b, c, δ pour la forme $u(x_1, x_2)$.

Déterminons maintenant la valeur de ces invariants A, B, C, D par les équations:

$$A = l, \qquad B = m, \qquad C = n, \qquad D = p,$$

on aura comme conséquence:

$$\sigma_r = \varphi_r,$$

c'est à dire les racines de l'équation (D) en σ, laquelle est une transformée de l'équation générale du sixième degré $u(x_1, x_2) = 0$, s'expriment par des fonctions théta dans lesquelles la valeur des périodes est déterminée par les relations supérieures entre les invariants.

Mais à cause des équations (E) on voit que, étant $\sigma_r = \varphi_r$, on aura aussi:

$$h_{rs}^4 = \rho^2 \vartheta_{rs}^4,$$

et en conséquence on peut déterminer la valeur des racines $v_0, v_1, \ldots$ de l'équation (C) en fonctions explicites des fonctions théta.

2. Pour atteindre ce résultat il faut se rappeler les valeurs (1) de $a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3$. On sait que chacune des quinze expressions:

$$(y_r - y_s)(y_{r_1} - y_{s_1})(y_{r_2} - y_{s_2})$$

dont se composent ces valeurs sont des fonctions des h_{rs} et l'on a, par exemple,

$$(y_0 - y_1)(y_2 - y_3)(y_4 - y_5) = \frac{h_0^2 h_2^2 h_{03}^2 h_{12}^2 h_{14}^2 h_{34}^2}{\Pi h}.$$

On trouve ainsi pour $v_0 , v_1 , \dots$ les valeurs suivantes:

$$\frac{2\Pi\delta}{\rho} v_0 = \vartheta_0^4 \, \vartheta_{12}^4 \vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4 [\vartheta_{12}^4 \vartheta_{34}^4 + \vartheta_{34}^4 \vartheta_0^4 + \vartheta_0^4 \, \vartheta_{12}^4 - 2 \vartheta_5^2 \vartheta_0^2 \, \vartheta_{12}^2 \vartheta_{34}^2],$$

$$\frac{2\Pi\delta}{\rho} v_2 = \vartheta_0^4 \, \vartheta_{14}^4 \vartheta_{23}^4 - \vartheta_5^4 [\vartheta_{14}^4 \vartheta_{23}^4 + \vartheta_{23}^4 \vartheta_0^4 + \vartheta_0^4 \, \vartheta_{14}^4 - 2 \vartheta_5^2 \vartheta_0^2 \, \vartheta_{14}^2 \vartheta_{23}^2],$$

$$\frac{2\Pi\delta}{\rho} v_4 = \vartheta_{12}^4 \vartheta_4^4 \, \vartheta_{01}^4 - \vartheta_5^4 [\vartheta_4^4 \, \vartheta_{01}^4 + \vartheta_{01}^4 \vartheta_{12}^4 + \vartheta_{12}^4 \vartheta_4^4 - 2 \vartheta_5^2 \vartheta_{12}^2 \vartheta_4^2 \, \vartheta_{01}^2],$$

$$\frac{2\Pi\delta}{\rho} v_5 = \vartheta_{14}^4 \vartheta_{03}^4 \vartheta_2^4 - \vartheta_5^4 [\vartheta_{03}^4 \vartheta_2^4 + \vartheta_2^4 \, \vartheta_{14}^4 + \vartheta_{14}^4 \vartheta_{03}^4 - 2 \vartheta_5^2 \vartheta_{14}^2 \vartheta_{03}^2 \vartheta_2^2],$$

$$\frac{2\Pi\delta}{\rho} v_1 = \vartheta_{34}^4 \vartheta_2^4 \, \vartheta_{01}^4 - \vartheta_5^4 [\vartheta_2^4 \, \vartheta_{01}^4 + \vartheta_{01}^4 \vartheta_{34}^4 + \vartheta_{34}^4 \vartheta_2^2 - 2 \vartheta_5^2 \vartheta_{34}^2 \vartheta_2^2 \, \vartheta_{01}^2],$$

$$\frac{2\Pi\delta}{\rho} v_3 = \vartheta_{23}^4 \vartheta_4^4 \, \vartheta_{01}^4 - \vartheta_5^4 [\vartheta_4^4 \, \vartheta_{01}^4 + \vartheta_{01}^4 \vartheta_{23}^4 + \vartheta_{23}^4 \vartheta_4^4 - 2 \vartheta_5^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_4^2 \, \vartheta_{01}^2].$$

En résumant: la méthode que j'ai suivie pour la résolution des équations du sixième ordre se compose de quatre recherches différentes. 1°. Etant donnée une équation quelconque du sixième degré $u(x_1 , x_2) = 0$ on peut au moyen de certaines fonctions de ses racines, fonctions que j'ai indiquées par c_{rs}^4, déterminer des quantités à six valeurs $y_0 , y_1 , \dots , y_5$, et les coefficients de l'équation dont les racines sont ces quantités ont la propriété d'être des invariants de la forme $u(x_1 , x_2)$. 2°. J'ai démontré que d'autre part l'équation $u(x_1 , x_2) = 0$ peut être directement transformée dans une autre (forme normale (C)) qui a la même propriété quant aux coefficients et la même forme que la précédente. Les racines de l'équation donnée $u(x_1 , x_2) = 0$ sont des fonctions rationnelles des racines de cette dernière. 3°. Mais les racines de cette dernière sont des fonctions des $y_0 , y_1 , \dots$ d'une forme spéciale qui rend possible d'exprimer la valeur de ces mêmes racines en fonction de certaines quantités h_{rs}^4 composées avec les $y_0 , y_1 , \dots$ de la même manière que les c_{rs}^4 le sont avec les racines de l'équation donnée. 4°. Enfin, de la théorie des fonctions théta hyperelliptiques à deux variables on déduit qu'avec les dix fonctions paires $\vartheta_{rs}^4(0 , 0)$ on peut former des quantités à six valeurs, et que l'équation qui a pour racines ces quantités est de la même forme que les équations précédentes, et ses coefficients sont des invariants de la forme du sixième ordre $f(z_1, z_2)$ qui appartient aux intégrales normales hyperelliptiques. Ces invariants peuvent donc être déterminés de manière que cette dernière équation vienne à coïncider avec la transformée de l'équation donnée.

3. J'ai déduit l'équation (A) en y de la résolvante de MALFATTI, mais je dois ajouter que cette équation, ou plus précisément la correspondante pour les fonctions $\vartheta_{rs}(0, 0)$, se trouve dans un mémoire remarquable de M. le Dr MASCHKE, et que la calculation directe des invariants de la forme $f(z_1, z_2)$ par les fonctions $\vartheta_{rs}(0, 0)$ est due à M. le Dr BOLZA.[1] Peu de temps après la publication de ces mémoires, par la connaissance que j'avais depuis quelques années de la transformée en v de l'équation générale du sixième degré je me suis aperçu que de cette coïncidence de forme on pourrait déduire la résolution des équations du sixième degré; et j'ai communiqué ce résultat à mon savant ami M. le Profr KLEIN. Quelques jours après M. MASCHKE m'a envoyé une communication pour l'Académie des Lincei dans laquelle il était arrivé au même résultat par une transformation de TSCHIRNAUS.[2]

Je dois remercier M. MITTAG-LEFFLER qui, m'ayant déterminé à composer ce petit mémoire, m'a donné l'occasion de rendre plus claire et plus complète la méthode que j'ai suivie.

Milan, Août 1888.

---

[1] MASCHKE, *Über die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln.* — BOLZA, *Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärform sechsten Grades durch die Nullwerthe der zugehörigen ϑ-Functionen,* Math. Annalen, Bd. 30.

[2] Rendiconti della R. accademia dei Lincei, Seduta del 4 marzo 1888, *La risoluzione della equazione del sesto grado,* Estratto di una lettera del Dr MASCHKE al Socio BRIOSCHI; *Osservazioni sulla precedente comunicazione* del Socio BRIOSCHI.