SUR LE MOUVEMENT D'UN FIL DANS UN PLAN FIXE

PAR

P. APPELL

à PARIS.

La forme la plus simple sous laquelle on a pu jusqu'à présent mettre les équations du mouvement d'un fil flexible et inextensible dans un plan fixe a été indiquée par M. RESAL dans son *Traité de Mécanique Générale* (Tome I, pages 321 et suiv.). M. RESAL forme deux équations simultanées aux dérivées partielles de l'intégration desquelles dépend la solution du problème; puis il ajoute que l'élimination de la tension entre ces deux équations conduit à une équation aux dérivées partielles du *sixième ordre,* qui n'est d'ailleurs pas formée.

Dans le présent Mémoire, nous suivrons une méthode qui ne fait intervenir que les éléments essentiels de la question et qui ramène la recherche du mouvement du fil à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du *quatrième ordre.* En cherchant des solutions particulières de forme déterminée de cette équation on arrive à résoudre avec facilité plusieurs problèmes importants.

Nous divisons notre mémoire en trois parties: dans la première se trouvent établies les équations du mouvement, la seconde contient leur application à des cas particuliers, enfin la troisième est relative aux oscillations infiniment petites.

Nous avons indiqué la méthode que nous suivons ici dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris le 22 novembre 1886.

I.

Equations du mouvement.

1. Soit un fil flexible et inextensible mobile dans un plan fixe: désignons par x et y les coordonnées rectangulaires d'un élément ds de ce fil et par s la longueur du fil depuis un point déterminé du fil jusqu'à l'élément ds; appelons mds la masse de l'élément ds, T la tension de cet élément et $mXds$, $mYds$ les projections sur les axes coordonnés de la résultante des forces extérieures appliquées à ce même élément. Les équations du mouvement sont, comme il est bien connu,

$$(1)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dx}{ds}\right) + mX \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dy}{ds}\right) + mY \\ \left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2 = 1, \end{cases}$$

où m est une fonction connue de s qui se réduit à une constante quand le fil est homogène. Ces équations définissent x, y et T en fonction des deux variables indépendantes s et t. L'intégration de ces trois équations simultanées aux dérivées partielles peut être ramenée à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre que l'on forme comme il suit.

Soit α l'angle que fait à l'instant t la tangente au fil en un point avec l'axe des abscisses: l'équation de cette tangente sera de la forme

$$x \sin\alpha - y\cos\alpha = \varphi(\alpha, t)$$

où $\varphi(\alpha, t)$ est une certaine fonction de l'angle α et du temps t. Pour éviter les signes d'intégration, désignons par p une fonction de α et t dont la dérivée partielle par rapport à α soit $\varphi(\alpha, t)$ et appelons p', p'', p''', p^{IV} les dérivées partielles des divers ordres de p par rapport à α. L'équation de la tangente au fil sera alors

$$(2)\qquad x\sin\alpha - y\cos\alpha = p',$$

et, pour avoir la forme du fil à l'instant t, il faudra chercher l'enveloppe de la droite (2) en laissant t constant et faisant varier α. On trouve ainsi, pour les coordonnées du point de contact, les expressions

$$(3)\qquad x = p' \sin\alpha + p'' \cos\alpha, \qquad y = -p' \cos\alpha + p'' \sin\alpha.$$

En convenant d'employer la lettre ∂ pour désigner les dérivées partielles prises par rapport à α et t considérées comme variables indépendantes, et de réserver la lettre d pour désigner les dérivées partielles prises par rapport aux variables indépendantes s et t, on aura

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = (p' + p''') \cos\alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = (p' + p''') \sin\alpha,$$

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2} = p' + p'''$$

et en intégrant

$$s = p + p''.$$

Il semble qu'en intégrant il faille ajouter au second membre une constante par rapport à α c'est à dire une fonction de t: mais cela est inutile, car la fonction p étant jusqu'à présent définie par cette seule condition que sa dérivée partielle par rapport à α égale une fonction $\varphi(\alpha, t)$

$$p' = \varphi(\alpha, t),$$

on a

$$p = \int \varphi(\alpha, t) d\alpha + \psi(t),$$

$\psi(t)$ désignant une fonction arbitraire de t; l'on pourra toujours choisir cette fonction arbitraire de t de telle façon que l'arc s compté à partir d'un point déterminé pris sur le fil ait pour expression

$$(4)\qquad s = p + p''.$$

Dans les équations (1), x, y et T sont considérées comme fonctions des variables indépendantes s et t; à l'aide de la relation (4) $s = p + p''$ on pourra exprimer x, y et T en fonction de α et t qui deviendront les nouvelles variables indépendantes.

Les règles élémentaires du changement de variables donnent

$$
(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\dfrac{d\alpha}{ds}, \qquad \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\dfrac{d\alpha}{ds}, \qquad \dfrac{dT}{ds} = \dfrac{\partial T}{\partial \alpha}\dfrac{d\alpha}{ds} \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\dfrac{d\alpha}{dt}, \qquad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\dfrac{d\alpha}{dt}. \end{cases}
$$

L'angle α est une fonction de s et t définie par la relation

$$s = p + p''$$

qui donne, si on la différentie par rapport à s et t successivement,

$$1 = (p' + p''')\frac{d\alpha}{ds}, \qquad 0 = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t} + (p' + p''')\frac{d\alpha}{dt}$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{p' + p'''}, \qquad \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\dfrac{\partial p}{\partial t} + \dfrac{\partial p''}{\partial t}}{p' + p'''}.$$

Les formules (2)

$$x = p'\sin\alpha + p''\cos\alpha, \qquad y = -p'\cos\alpha + p''\sin\alpha$$

donnent aussi

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = (p' + p''')\cos\alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = (p' + p''')\sin\alpha$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial t}\sin\alpha + \frac{\partial p''}{\partial t}\cos\alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial t}\cos\alpha + \frac{\partial p''}{\partial t}\sin\alpha.$$

On a donc enfin, en portant ces différentes expressions dans les formules (5) et réduisant

$$
(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha, \qquad \dfrac{dy}{ds} = \sin\alpha, \qquad \dfrac{dT}{ds} = \dfrac{1}{p' + p'''}\dfrac{\partial T}{\partial \alpha} \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial p'}{\partial t}\sin\alpha - \dfrac{\partial p}{\partial t}\cos\alpha; \qquad \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{\partial p'}{\partial t}\cos\alpha - \dfrac{\partial p}{\partial t}\sin\alpha, \end{cases}
$$

où les deux premières formules sont évidentes géométriquement.

On a de même

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds}, \qquad \frac{d^2 y}{ds^2} = \cos\alpha\frac{d\alpha}{ds}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{d\alpha}{dt}, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{d\alpha}{dt},$$

ce qui donne

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\frac{\sin\alpha}{p' + p'''}, \qquad \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{\cos\alpha}{p' + p'''}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\sin\alpha - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\cos\alpha - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2\frac{\sin\alpha}{p' + p'''}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\cos\alpha - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\sin\alpha + \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2\frac{\cos\alpha}{p' + p'''}.$$

Les équations (1) du mouvement peuvent s'écrire

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = T\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds} + mX$$

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = T\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\frac{dy}{ds} + mY;$$

en multipliant la première de ces équations par $\sin\alpha$, la deuxième par $-\cos\alpha$ et les ajoutant, après y avoir remplacé les différentes dérivées par les valeurs que nous venons de calculer, on obtient la relation

$$m\left[\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2\frac{1}{p' + p'''}\right] = -\frac{T}{p' + p'''} + m(X\sin\alpha - Y\cos\alpha);$$

en multipliant la première des équations du mouvement par $\cos\alpha$, la deuxième par $\sin\alpha$ et ajoutant, on obtient une seconde relation

$$-m\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial\alpha}\frac{1}{p' + p'''} + m(X\cos\alpha + Y\sin\alpha).$$

Les expressions $X\cos\alpha + Y\sin\alpha$, $-X\sin\alpha + Y\cos\alpha$ sont les composantes tangentielle et normale de la force extérieure rapportée à l'unité de masse: si nous les appelons, pour abréger, Φ et Ψ

$$\Phi = X\cos\alpha + Y\sin\alpha, \qquad \Psi = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha,$$

nous aurons les deux équations suivantes

$$(7)\qquad \begin{cases} T = m\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2 - m(p' + p''')\left(\Psi + \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\right) \\[2ex] \frac{\partial T}{\partial \alpha} = -m(p' + p''')\left(\Phi + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right). \end{cases}$$

Dans le cas le plus général qui puisse se présenter, X et Y et, par suite, Φ et Ψ sont des fonctions données de $x, y, \alpha, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, s$ et t: à l'aide des relations (2), (4) et (6), on pourra exprimer Φ et Ψ en fonction de α, t, p et des dérivées partielles de p par rapport à α et t; de plus m étant une fonction donnée $f(s)$ de l'arc s, on aura

$$m = f(p + p'').$$

Donc les équations (7) seront deux équations simultanées définissant T et p en fonction de α et t. En éliminant T entre ces équations, on obtient une équation du quatrième ordre

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[m\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2 - m(p' + p''')\left(\Psi + \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\right)\right] + m(p' + p''')\left(\Phi + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right) = 0$$

qui définit p en fonction de α et t.

A toute intégrale particulière de cette équation correspond un mouvement possible du fil, à condition que la valeur de la tension T fournie par la première des équations (7) soit *positive*.

2. Avant de passer aux applications, je me propose de montrer rapidement comment les équations (7) peuvent être déduites de celles que donne M. Resal dans le premier volume de son *Traité de mécanique générale,* pages 321 et suivantes.

M. Resal désigne par v et u les composantes de la vitesse d'un point du fil suivant la tangente et la normale au fil, et par φ et ψ les composantes suivant les mêmes directions de l'accélération du même point. On a donc

$$v = \frac{dx}{dt}\cos\alpha + \frac{dy}{dt}\sin\alpha, \qquad u = -\frac{dx}{dt}\sin\alpha + \frac{dy}{dt}\cos\alpha$$

$$\varphi = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\alpha + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\alpha, \qquad \psi = -\frac{d^2x}{dt^2}\sin\alpha + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\alpha.$$

D'après les expressions trouvées précédemment (formules 6 et suiv.) pour $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$, on obtient

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} & v = -\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad u = -\frac{\partial p'}{\partial t} \\ & \varphi = -\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \qquad \psi = -\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2 \frac{1}{p' + p'''}. \end{aligned} \right.$$

Les équations (4) de M. Resal (loc. cit. pag. 323), dans lesquelles on remplace ε par m, deviennent donc

$$\frac{dT}{ds} + m\left(\varphi + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right) = 0$$

$$T\frac{da}{ds} + m\left[\psi + \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2 \frac{1}{p' + p'''}\right] = 0.$$

Les quantités s, α et t sont liées par la relation

$$s = p + p''$$

qui donne

$$1 = (p' + p''')\frac{d\alpha}{ds}, \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{p' + p'''};$$

d'autre part, on a

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\partial T}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\partial T}{\partial \alpha}\frac{1}{p' + p'''}.$$

En remplaçant $\frac{dT}{ds}$ et $\frac{d\alpha}{ds}$ par ces valeurs dans les équations ci-dessus, on retrouve les équations du mouvement (7).

Remarque. D'après les significations géométriques de p et p', il est facile d'établir géométriquement les formules

$$v = -\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad u = -\frac{\partial p'}{\partial t}.$$

3. Dans le cas particulier où les composantes Φ et Ψ ne dependent que de s et α, on peut transformer les équations du mouvement en deux autres définissant l'arc s et la tension T en fonction de α et t. Pour le montrer, rappelons les formules

$$s = p + p'', \qquad \rho = \frac{\partial s}{\partial \alpha} = p' + p'''$$

où ρ désigne le rayon de courbure du fil. Les équations du mouvement deviennent

$$\frac{T}{m\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 - \Psi - \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}, \qquad \frac{1}{m\rho}\frac{\partial T}{\partial \alpha} = -\Phi - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

En différentiant la seconde de ces équations par rapport à α et la retranchant de la première, on a

$$\frac{1}{m\rho}\left(T - \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2}\right) - \frac{\partial \frac{1}{m\rho}}{\partial \alpha}\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 - \Psi + \Phi',$$

ce qui s'écrit aussi

$$T\left[\frac{1}{m\rho} + \frac{1}{\sqrt{m\rho}}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left(\frac{1}{\sqrt{m\rho}}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{m\rho}}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left(\frac{T}{\sqrt{m\rho}}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 - \Psi + \Phi'.$$

De même, en différentiant la première des équations ci-dessus par rapport à α et en l'ajoutant à la seconde, on a

$$\frac{2}{m\rho}\frac{\partial T}{\partial \alpha} + T\frac{\partial \frac{1}{m\rho}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2\right] - \Psi' - \Phi - \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{2}{\sqrt{m\rho}}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{T}{\sqrt{m\rho}}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2\right] - \Psi' - \Phi - \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Dans ces équations, Φ' et Ψ' désignent les dérivées de Φ et Ψ par rapport à α: par exemple, comme Φ dépend de α directement et par l'intermédiaire de s

$$\Phi' = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial s}\rho.$$

Si l'on fait, pour simplifier

$$T = \sqrt{m\rho}\,\mathfrak{T},$$

il vient

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{T}\left[\frac{1}{\sqrt{m\rho}} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{1}{\sqrt{m\rho}}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{m\rho}}\frac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial\alpha^2} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 - \Psi + \Phi' \\ &\frac{2}{\sqrt{m\rho}}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2\right] - \Psi' - \Phi - \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\end{aligned}\right.$$

équations qui définissent $\mathfrak{T}$ et s en fonction de α et t. Dans ces équations ρ est égal à $\frac{\partial s}{\partial\alpha}$ et m est une fonction donnée de s.

Lorsque la seule force extérieure est la pesanteur on a

$$\Phi = -g\sin\alpha, \qquad \Psi = -g\cos\alpha$$
$$\Psi' + \Phi = 0, \qquad \Phi' - \Psi = 0$$

et les équations (10) prennent la même forme que si la force extérieure était *nulle*.

4. *Equations d'équilibre.* — Pour trouver les équations d'équilibre du fil sous l'action des forces données, il suffit de chercher à vérifier les équations du mouvement (7) par une fonction p indépendante du temps t; en effet, le fil étant supposé en équilibre, les composantes tangentielle et normale

$$v = -\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad u = -\frac{\partial p'}{\partial t}$$

de la vitesse d'un point du fil doivent être *nulles*, donc p doit être indépendant de t. Dans cette hypothèse, les équations (7) deviennent

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &T = -m(p' + p''')\Psi \\ &\frac{\partial T}{\partial\alpha} = -m(p' + p''')\Phi\end{aligned}\right.$$

d'où, par l'élimination de T

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}[m(p' + p''')\Psi] - m(p' + p''')\Phi = 0,$$

ce qui est une équation du quatrième ordre définissant p en fonction de α. Dans cette équation, m est une fonction donnée de s et Φ et Ψ des fonctions données de x, y, s, α:

$$m = f(s) = f(p + p'')$$

$$\Phi = \Phi(x, y, s, \alpha) = \Phi(p' \sin\alpha + p'' \cos\alpha,\ -p'\cos\alpha + p''\sin\alpha,\ p + p'',\ \alpha)$$

$$\Psi = \Psi(x, y, s, \alpha) = \Psi(p' \sin\alpha + p'' \cos\alpha,\ -p'\cos\alpha + p''\sin\alpha,\ p + p'',\ \alpha).$$

Les équations (11) résultent immédiatement des équations d'équilibre bien connues:

$$T = -m\rho\Psi, \qquad \frac{dT}{ds} = -m\Phi$$

où ρ désigne le rayon de courbure de la figure d'équilibre

$$\rho = \frac{\partial s}{\partial \alpha} = p' + p'''.$$

Nous n'avons rappelé ces équations qu'en vue de certains théorèmes qui se présenteront plus loin.

Dans le cas particulier où la force extérieure dépendrait uniquement de s et α

$$\Phi = \Phi(s, \alpha), \qquad \Psi = \Psi(s, \alpha),$$

il serait plus simple de prendre, dans les équations d'équilibre, s comme fonction inconnue de α: l'on aurait alors pour déterminer s en fonction de α, l'équation du *second ordre*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(m\Psi \frac{\partial s}{\partial \alpha}\right) - m\frac{\partial s}{\partial \alpha}\Phi = 0,$$

où

$$m = f(s), \qquad \frac{\partial m}{\partial \alpha} = f'(s)\frac{\partial s}{\partial \alpha}.$$

C'est le cas qui se présente quand la seule force extérieure est la pesanteur.

Dans ce dernier cas, les équations (10) donnent immédiatement pour l'équilibre

$$\mathfrak{T} = \text{const.}, \qquad \frac{1}{\sqrt{m\rho}} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left(\frac{1}{\sqrt{m\rho}}\right) = 0$$

$$m\rho = \frac{C}{\cos^2(\alpha - \alpha_0)}, \qquad \int m\, ds = C \operatorname{tang}(\alpha - \alpha_0).$$

En revenant aux équations du mouvement, nous allons tâcher d'en trouver des solutions particulières ayant des significations simples.

II.

Applications à quelques problèmes.

5. Dans les applications des équations précédentes, nous aurons fréquemment à résoudre un problème que l'on peut énoncer comme il suit:

Soient deux variables indépendantes α *et* t, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des fonctions de la variable* α *seule,* $T_1, T_2, \ldots, T_n$ *des fonctions de la variable* t *seule; que doivent être ces fonctions pour qu'il puisse exister entre elles une relation de la forme*

$$A_1 T_1 + A_2 T_2 + \ldots + A_n T_n = 0 \tag{12}$$

ayant lieu quelles que soient α *et* t?

Nous donnerons la solution pour le cas de $n = 4$, en remarquant que le cas où n aurait une valeur différente se traiterait exactement de la même façon.

Soit donc à vérifier la relation

$$A_1 T_1 + A_2 T_2 + A_3 T_3 + A_4 T_4 = 0 \tag{13}$$

quelles que soient α et t. Différentes hypothèses se présentent:

1°) Supposons d'abord les fonctions A_1, A_2, A_3, A_4 *linéairement indépendantes,* c'est à dire supposons qu'il n'y ait entre elles *aucune* relation linéaire homogène à coefficients constants (indépendants de α). Alors la relation supposée (13) ne pourra être vérifiée que si l'on a

$$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0,$$

et les fonctions A_1, A_2, A_3, A_4 seront arbitraires.

2°) Supposons qu'il existe entre les fonctions A_1, A_2, A_3, A_4 *une et une seule* relation linéaire homogène à coefficients constants

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 = 0.$$

Comme les quatre coefficients k_1, k_2, k_3, k_4 ne sont pas tous nuls, supposons, pour fixer les idées, k_1 différent de zéro; nous pourrons alors résoudre cette relation par rapport à A_1 et porter la valeur de A_1 dans l'équation (13) qui deviendra

$$A_2(k_1 T_2 - k_2 T_1) + A_3(k_1 T_3 - k_3 T_1) + A_4(k_1 T_4 - k_4 T_1) = 0.$$

Puisque les fonctions A_2, A_3, A_4 sont linéairement indépendantes, les coefficients de A_2, A_3, A_4 dans cette dernière équation doivent être nuls; ce qui donne

$$\frac{T_1}{k_1} = \frac{T_2}{k_2} = \frac{T_3}{k_3} = \frac{T_4}{k_4}.$$

3°) Supposons qu'il existe entre les fonctions A_1, A_2, A_3, A_4 *deux et seulement deux* relations linéaires homogènes distinctes à coefficients constants

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 = 0$$
$$h_1 A_1 + h_2 A_2 + h_3 A_3 + h_4 A_4 = 0.$$

Comme tous les déterminants $k_i h_j - k_j h_i$ ne peuvent pas être nuls, supposons $k_1 h_2 - h_1 k_2$ différent de zéro. Nous pourrons alors résoudre les deux relations précédentes par rapport à A_1 et A_2 ce qui nous donnera des expressions de la forme

$$A_1 = \lambda_1 A_3 + \mu_1 A_4, \qquad A_2 = \lambda_2 A_3 + \mu_2 A_4,$$

$\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ étant des constantes faciles à exprimer à l'aide des constantes k_i, h_j. Portons ces expressions de A_1 et A_2 dans l'équation (13); nous aurons

$$A_3(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + T_3) + A_4(\mu_1 T_1 + \mu_2 T_2 + T_4) = 0.$$

Comme les fonctions A_3 et A_4 sont linéairement indépendantes, il faudra que l'on ait

$$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + T_3 = 0$$

$$\mu_1 T_1 + \mu_2 T_2 + T_4 = 0.$$

4°) S'il y a, entre les fonctions A_1, A_2, A_3, A_4 *trois relations* linéaires homogènes distinctes à coefficients constants, on en conclura

$$\frac{A_1}{h_1} = \frac{A_2}{h_2} = \frac{A_3}{h_3} = \frac{A_4}{h_4}$$

h_1, h_2, h_3, h_4 étant des constantes; l'équation (13) donne alors

$$h_1 T_1 + h_2 T_2 + h_3 T_3 + h_4 T_4 = 0.$$

5°) Enfin si l'on a

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$$

les fonctions T_1, T_2, T_3, T_4 sont arbitraires.

6. Revenons maintenant à la question de mécanique et supposons que la force extérieure appliquée à un élément du fil dépende uniquement de la position de cet élément c'est à dire de ses coordonnées et de son orientation; alors X et Y seront des fonctions de x, y et α, et il en sera de même de Φ et Ψ de sorte que l'on aura

$$\Phi = \Phi(x, y, \alpha) = \Phi(p' \sin\alpha + p'' \cos\alpha, -p' \cos\alpha + p'' \sin\alpha, \alpha)$$

$$\Psi = \Psi(x, y, \alpha) = \Psi(p' \sin\alpha + p'' \cos\alpha, -p' \cos\alpha + p'' \sin\alpha, \alpha).$$

Cherchons si, dans ces conditions, *le mouvement du fil peut consister en un glissement le long d'une courbe géométrique fixe,* ou, en d'autres termes, *si le fil peut affecter une figure de repos apparent dans l'espace.*

Pour cela, il faut et il suffit que la composante u de la vitesse de chaque point du fil normalement au fil soit nulle. Comme on a trouvé

$$u = -\frac{\partial p'}{\partial t},$$

pour que u soit constamment nul pour chaque point du fil, il faut et il suffit que la fonction p de α et t soit de la forme

$$p = A + \theta$$

où A dépend de α seulement et θ de t seulement. En désignant par $A', A'', \ldots, \theta', \theta'', \ldots$ les dérivées des fonctions A et θ par rapport aux variables α et t respectivement, nous aurons

$$p' = A', \qquad p'' = A'', \quad \ldots$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \theta', \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \theta'', \quad \ldots$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial p''}{\partial t} = 0, \quad \ldots .$$

Portant ces valeurs dans l'équation du mouvement (8), on obtient l'équation

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha}[m\theta'^2 - m(A' + A''')\Psi] + m(A' + A''')(\Phi + \theta'') = 0,$$

dans laquelle m est une fonction donnée de s

$$m = f(s) = f(p + p'') = f(A + A'' + \theta)$$

tandis que Φ et Ψ sont des fonctions de la seule variable α

$$\Phi = \Phi(A' \sin\alpha + A''\cos\alpha\,, -A'\cos\alpha + A''\sin\alpha\,, \alpha)$$

$$\Psi = \Psi(A' \sin\alpha + A''\cos\alpha\,, -A'\cos\alpha + A''\sin\alpha\,, \alpha).$$

Nous examinerons successivement le cas où le fil est homogène et le cas où le fil est hétérogène.

a) Le fil est homogène; *m est une constante.* Ce cas a été examiné par M. LÉAUTÉ.[1] L'équation (14) devient alors, après suppression du facteur m,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[(A' + A''')\Psi] - (A' + A''')(\Phi + \theta'') = 0$$

ou bien

$$\theta'' = -\Phi + \frac{1}{A' + A'''}\frac{\partial}{\partial\alpha}[(A' + A''')\Psi].$$

Le premier membre qui ne dépend que de t ne peut être égal au second qui ne dépend que de α, que si les deux membres sont constants. Donc on a

$$\theta'' = K, \qquad \theta' = Kt + K_1, \qquad \theta = \frac{1}{2}Kt^2 + K_1 t + K_2$$

K, K_1, K_2 désignant des constantes; puis

$$(15) \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}[(A' + A''')\Psi] - (A' + A''')(\Phi + K) = 0.$$

En intégrant cette dernière équation on aura A en fonction de α: alors p sera donné par

$$p = A + \theta = A + \frac{1}{2}Kt^2 + K_1 t + K_2$$

et la tension par la première des formules (7) qui devient, dans le cas actuel,

$$T = m\theta'^2 - m(A' + A''')\Psi = m(Kt + K_1)^2 - m(A' + A''')\Psi.$$

La composante tangentielle de la vitesse d'un point du fil est

$$v = -\frac{\partial p}{\partial t} = -\theta' = -Kt - K_1;$$

elle varie proportionnellement au temps. De plus la courbe suivant laquelle est disposé le fil, c'est à dire *la figure de repos apparent du fil*, est définie par les équations

$$x = A'\sin\alpha + A''\cos\alpha, \qquad y = -A'\cos\alpha + A''\sin\alpha$$

---

[1] Comptes rendus, 10 novembre 1879; Bulletin de la Société Philomathique, 18 novembre 1879.

dans lesquelles A satisfait à l'équation (15); et cette équation n'est autre chose que l'équation d'équilibre du fil (N° 4) dans laquelle p se trouve remplacé par A et la composante tangentielle Φ par $\Phi + K$. En résumé:

Lorsque les forces extérieures appliquées à un fil homogène dépendent seulement de la position de l'élément du fil et que le fil conserve une figure permanente, la vitesse de glissement du fil est proportionnelle au temps, et la forme permanente du fil en mouvement est la figure d'équilibre que prendrait le fil si la composante normale de la force extérieure restait la même et si la composante tangentielle était augmentée d'une constante égale à l'accroissement de la vitesse de glissement pendant l'unité de temps.

Par exemple, si l'on suppose que la seule force extérieure soit la pesanteur, on aura, en prenant pour axe des coordonnées y une verticale dirigée vers le haut,

$$X = 0, \qquad Y = -g,$$
$$\Phi = -g \sin\alpha, \qquad \Psi = -g\cos\alpha;$$

et l'équation (15) deviendra

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[(A' + A''')\cos\alpha] - (A' + A''')\left(\sin\alpha - \frac{K}{g}\right) = 0,$$

d'où en intégrant

$$A' + A''' = \frac{C}{\cos^2\alpha}\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]^{-\frac{K}{g}}$$

C étant une constante arbitraire. On a alors, pour déterminer A, une équation linéaire à coefficients constants avec second membre. L'équation que nous venons de trouver est ce que l'on appelle quelquefois l'équation intrinsèque de la courbe le long de laquelle glisse le fil. En effet, la quantité $A' + A'''$ est égale à $\frac{\partial s}{\partial\alpha}$ c'est à dire au rayon de courbure ρ de la courbe: l'équation ci-dessus donne donc ρ en fonction de α: dans le cas particulier où $K = 0$, elle se réduit à

$$\rho = \frac{C}{\cos^2\alpha},$$

équation intrinsèque de la chaînette.

b) Le fil étant hétérogène, on aura,

$$m = f(s) = f(p + p''), \qquad \frac{\partial m}{\partial \alpha} = (p' + p''')f'(p + p'')$$

en appelant $f'(s)$ la dérivée de la fonction $f(s)$. Posons pour abréger

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \tilde{\omega}(s),$$

et remarquons que

$$p + p'' = A + A'' + \theta,$$

nous aurons d'après l'équation (14)

$$(16) \quad (A' + A''')[\theta'^2 - (A' + A''')\Psi]\tilde{\omega}(A + A'' + \theta) - \frac{\partial}{\partial \alpha}[(A' + A''')\Psi] \\ + (A' + A''')(\Phi + \theta'') = 0.$$

Telle est l'équation qu'il faudrait chercher à vérifier en mettant pour A une fonction de α et pour θ une fonction de t. Le problème pourra avoir une solution ou n'en pas avoir suivant la forme de la fonction $\tilde{\omega}$. Si $\tilde{\omega}(s)$ était une fonction *rationnelle* de s, l'équation (16) serait une relation de la forme (12) du N° 5 et on pourrait lui appliquer les considérations développées dans ce N° 5.

Le résultat est simple si l'on suppose la fonction $\tilde{\omega}(s)$ égale à une constante c, c'est à dire

$$m = e^{c(s - s_0)}.$$

On a alors, en posant $A' + A''' = \rho$, l'équation

$$(16') \qquad c\rho\theta'^2 + \rho\theta'' + \rho(\Phi - c\rho\Psi) - \frac{\partial}{\partial \alpha}(\rho\Psi) = 0$$

qui rentre dans la forme (12) où $n = 2$, en faisant

$$A_1 = \rho, \qquad A_2 = \rho(\Phi - c\rho\Psi) - \frac{\partial}{\partial \alpha}(\rho\Psi)$$

$$T_1 = c\theta'^2 + \theta'', \qquad T_2 = 1.$$

Il est impossible que les fonctions A_1, A_2 soient linéairement indépendantes, car il faudrait alors que les fonctions T_1, T_2 soient *nulles* et on a $T_2 = 1$. Ainsi il existe au moins une relation linéaire homogène à coefficients constants entre A_1 et A_2: d'autre part il n'en peut exister qu'une, car autrement on aurait

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0,$$

ce qui est impossible, la relation

$$\rho = A' + A''' = 0$$

ne définissant pas une courbe mais un point.

La façon la plus générale de satisfaire à l'équation (16′) est donc de supposer qu'il existe une relation linéaire homogène à coefficients constants entre les deux fonctions A_1 et A_2, c'est à dire de supposer

$$\frac{A_1}{k_1} = \frac{A_2}{k_2};$$

on aurait alors

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 = 0.$$

D'après les expressions de A_1, A_2, T_1, T_2 et en faisant

$$k_2 = bck_1,$$

on aura, pour définir la figure permanente du fil, l'équation

$$-bc\rho + \rho(\Phi - c\rho\Psi) - \frac{\partial}{\partial a}(\rho\Psi) = 0,$$

et, pour définir θ, l'équation

$$c\theta'^2 + \theta'' + bc = 0$$

d'où l'on tire facilement θ' par une tangente trigonométrique ou hyperbolique suivant que la constante b est positive ou négative. Cette solution comprend, comme cas particulier intéressant, celle que l'on obtient en faisant

$$b = -K^2, \qquad \theta' = K.$$

Dans le cas particulier où b est nul on a

$$\frac{\theta''}{\theta'^2} + c = 0, \qquad \theta = \frac{1}{c} \log(t - t_0) + K.$$

La figure de repos apparent est alors définie par l'équation

$$\rho(\Phi - c\rho\Psi) - \frac{\partial}{\partial\alpha}(\rho\Psi) = 0,$$

identique à l'équation d'équilibre (page 10).

Remarque. Le problème de M. LÉAUTÉ et le problème plus général que nous venons de traiter peuvent encore être résolus lorsque la force extérieure au lieu de dépendre seulement de la position de l'élément varie proportionnellement quand, x, y, α restant constants, le temps t change. Dans ce cas on aura pour Φ et Ψ des expressions de la forme

$$\Phi = \theta_1 \Phi_1, \qquad \Psi = \theta_1 \Psi_1,$$

θ_1 dépendant de t seul, Φ_1 et Ψ_1 de x, y et α. L'équation (14), pour le cas du fil homogène, donne alors

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[(A' + A''')\Psi_1] - (A' + A''')\left[\Phi_1 + \frac{\theta''}{\theta_1}\right] = 0$$

d'où l'on conclut, comme précédemment

$$\frac{\theta''}{\theta_1} = K, \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}[(A' + A''')\Psi_1] - (A' + A''')[\Phi_1 + K] = 0,$$

La figure de repos apparent est alors la figure d'équilibre d'un fil sollicité par la composante normale Ψ_1, et la composante tangentielle $\Phi_1 + K$; quant à la vitesse de glissement, elle est

$$\theta' = \int K\theta_1 dt.$$

7. Le problème que nous venons de résoudre est un cas particulier du suivant:[1]

Chercher s'il existe un mouvement du fil pouvant se représenter par le glissement du fil le long d'une courbe de forme invariable animée d'un mouvement de translation, et déterminer ce mouvement du fil s'il existe.

Dans cette hypothèse, les coordonnées d'un point du fil doivent s'exprimer en fonction de α et t par des expressions de la forme

$$x = \xi + f(\alpha), \qquad y = \eta + g(\alpha),$$

ξ et η étant des fonctions de t seul, $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$ des fonctions de α seul. Comme on a

$$p' = x \sin\alpha - y \cos\alpha$$

on voit que dans le cas actuel on devra avoir

$$p' = \xi \sin\alpha - \eta \cos\alpha + f(\alpha) \sin\alpha - g(\alpha) \cos\alpha$$

d'où

$$p = -\xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha + A + \theta$$

A étant une fonction de α seul, ξ, η, θ des fonctions de t seul. Nous désignerons par $A', A'', \ldots$ les dérivées de A par rapport à α, et par $\xi', \eta', \theta', \xi'', \eta'', \theta'', \ldots$ les dérivées de ξ, η, θ par rapport à t. La forme de la courbe le long de laquelle glisse le fil est définie par la fonction A; car l'équation intrinsèque de cette courbe est

$$\rho = p' + p''' = A' + A'''.$$

Le mouvement de translation de cette courbe est connu quand on connaît ξ et η en fonction de t; enfin la vitesse de glissement du fil le long

[1] Routh, *Advanced rigid Dynamics:* On steady motion, p. 299.

de cette courbe est $-\theta'$. Cette dernière propriété résulte de ce que les projections de la vitesse d'un point du fil données par les formules générales

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial p'}{\partial t}\sin\alpha - \frac{\partial p}{\partial t}\cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial p'}{\partial t}\cos\alpha - \frac{\partial p}{\partial t}\sin\alpha$$

ont actuellement pour expressions, d'après la forme particulière supposée pour p,

$$\frac{dx}{dt} = \xi' - \theta'\cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = \eta' - \theta'\sin\alpha;$$

ces formules montrent que la vitesse d'un point du fil est la résultante d'une vitesse de translation ayant pour projections ξ' et η' et d'une vitesse de glissement $-\theta'$ dirigée suivant la tangente.

Les coordonnées d'un point de la courbe le long de laquelle glisse le fil sont alors

$$x = \xi + A'\sin\alpha + A''\cos\alpha, \qquad y = \eta - A'\cos\alpha + A''\sin\alpha$$

et l'on a

$$s = p + p'' = A + A'' + \theta, \qquad \rho = p' + p''' = A' + A'''.$$

Comme le fil est en repos apparent par rapport à des axes de directions fixes menés par le point (ξ, η), le mouvement relatif du fil par rapport à ces axes est du genre de ceux qu'a étudiés M. Léauté et dont nous nous sommes occupés dans le numéro précédent.

Si l'on suppose m constant, l'équation du mouvement devient

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[\theta'^2 - (A' + A''')(\Psi + \xi''\sin\alpha - \eta''\cos\alpha)]$$
$$+ (A' + A''')(\Phi - \xi''\cos\alpha - \eta''\sin\alpha + \theta'') = 0$$

ou, en développant

$$(17) \qquad (A'' + A^{\text{IV}})(\Psi + \xi''\sin\alpha - \eta''\cos\alpha)$$
$$-(A' + A''')\left(\Phi - \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} - 2\xi''\cos\alpha - 2\eta''\sin\alpha + \theta''\right) = 0.$$

Il faudrait vérifier cette équation en y mettant pour A une fonction convenable de α et pour ξ, η, θ des fonctions convenables de t.

Si Φ et Ψ sont des fonctions rationnelles de x et y, on sera conduit a une équation de la forme (12) que l'on traitera comme nous l'avons indiqué dans le N° 5.

Nous allons traiter complètement un cas simple, à savoir le cas où Φ et Ψ seraient fonctions du seul angle α, comme il arriverait par exemple si la seule force extérieure était la pesanteur.

Désignons, comme plus haut, par ρ le rayon de courbure $A' + A'''$ et par ρ' sa dérivée $A'' + A^{\mathrm{IV}}$ et posons

$$A_1 = \rho'\Psi - \rho\left(\Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right), \qquad A_2 = \rho' \sin\alpha + 2\rho\cos\alpha,$$

$$A_3 = -\rho'\cos\alpha + 2\rho\sin\alpha, \qquad A_4 = -\rho$$

$$T_1 = 1, \qquad T_2 = \xi'', \qquad T_3 = \eta'', \qquad T_4 = \theta''.$$

L'équation (17) qu'il s'agit de vérifier est alors de la forme

$$A_1 T_1 + A_2 T_2 + A_3 T_3 + A_4 T_4 = 0 \tag{13}$$

examinée en détail dans le N° 5. Nous allons reprendre successivement les diverses hypothèses indiquées dans ce N° 5.

1°) Tous les T_i ne peuvent pas être nuls, car le premier T_1 est 1.

2°) Supposons qu'il y ait *une* relation linéaire homogène à coefficients constants entre A_1, A_2, A_3, A_4

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 = 0.$$

Alors on a

$$\frac{1}{k_1} = \frac{\xi''}{k_2} = \frac{\eta''}{k_3} = \frac{\theta''}{k_4}.$$

On peut supposer k_1 égal à l'unité et on a pour ξ'', η'', θ'' des valeurs constantes

$$\xi'' = k_2, \qquad \eta'' = k_3, \qquad \theta'' = k_4.$$

Quant à la figure de repos apparent par rapport aux axes mobiles de directions fixes menés par le point (ξ, η), elle est donnée par l'équation différentielle

$$A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 = 0$$

c'est à dire

$$\rho' \Psi - \rho\left(\Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right) + k_2(\rho' \sin\alpha + 2\rho\cos\alpha) + k_3(-\rho'\cos\alpha + 2\rho\sin\alpha) - k_4\rho = 0$$

qui définit ρ et par suite A en fonction de α: la détermination de ρ et A est ramenée à des quadratures.

Dans la solution que nous trouvons ainsi et qui est évidente a priori, les axes mobiles de directions fixes menés par le point (ξ, η) sont animés d'un mouvement de translation *uniformément accéleré;* la figure de repos apparent du fil par rapport à ces axes est la figure d'équilibre que prendrait le fil si l'on ajoutait, aux forces agissant réellement Φ et Ψ, une force (force centrifuge) ayant pour projections sur les axes $-k_2$ et $-k_3$ et une force tangentielle k_4; la vitesse de glissement du fil $-\theta'$ varie proportionnellement au temps. Ce résultat s'applique immédiatement au mouvement d'un fil homogène pesant dans un plan sur lequel il glisse sans frottement.

Nous pouvons, par exemple, appliquer cette méthode au problème traité par M. Routh dans l'ouvrage déja cité *Advanced rigid Dynamics,* page 300, § 525 *Form of an electric cable,* problème qui peut s'énoncer ainsi: Un cable est déposé sur le fond horizontal d'une mer par un bateau animé d'un mouvement rectiligne uniforme, la longueur du cable déposé pendant un intervalle de temps quelconque étant égale à la quantité dont avance le bateau dans le même temps; trouver la forme du cable supposée permanente.

D'après l'hypothèse, cette forme du cable est permanente par rapport à un système d'axes mobiles situés dans un plan vertical et entraînés avec le mouvement du bateau. L'origine (ξ, η) de ces axes sera donc animée d'un mouvement rectiligne uniforme et en prenant un axe des x horizontal on aura

$$\eta = 0, \qquad \xi = ct$$

c désignant la vitesse du bateau. La vitesse de glissement du fil le long de la courbe géométrique suivant laquelle il reste disposée étant égale à c, on a

$$\theta' = c, \qquad \theta = ct.$$

Les quantités η'', ξ'', θ'' sont donc nulles actuellement ainsi que les constantes k_2, k_3, k_4 et l'équation définissant la figure permanente du fil est

$$\rho' \Psi - \rho\left(\Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right) = 0.$$

Supposons que la résistance de l'eau sur un élément du cable soit dirigée en sens contraire de la vitesse de cet élément et proportionnelle à cette vitesse, et appelons g' la pesanteur apparente du cable dans l'eau: les composantes tangentielle et normale de la résistance seront de la forme $-\mu v$ et $-\mu u$, v et u désignant comme précédemment les composantes tangentielle et normale de la vitesse d'un élément; puis les composantes tangentielle et normale de la pesanteur g' seront

$$-g' \sin \alpha, \qquad -g' \cos \alpha.$$

On aura donc

$$\Phi = -g' \sin \alpha - \mu v = -g' \sin \alpha + \mu \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\Psi = -g' \cos \alpha - \mu u = -g' \cos \alpha + \mu \frac{\partial p'}{\partial t}$$

car

$$v = -\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad u = -\frac{\partial p'}{\partial t}.$$

Comme actuellement

$$p = -\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha + A + \theta = -ct \cos \alpha + A + ct,$$

on a

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -c \cos \alpha + c, \qquad \frac{\partial p'}{\partial t} = c \sin \alpha$$

et il vient

$$\Phi = - g'(\sin\alpha + e\cos\alpha - e),$$

$$\Psi = - g'(\cos\alpha - e\sin\alpha)$$

en posant

$$e = \frac{\mu c}{g'}.$$

L'équation différentielle devient alors

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{2\sin\alpha + 2e\cos\alpha - e}{\cos\alpha - e\sin\alpha}$$

d'où

$$\log\rho = - 2\log(\cos\alpha - e\sin\alpha) - e\int\frac{d\alpha}{\cos\alpha - e\sin\alpha}$$

$$\rho = \frac{G}{(\cos\alpha - e\sin\alpha)^2}\cdot\left[\frac{\sqrt{1+e^2} - e - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1+e^2} + e + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right]^{\frac{e}{\sqrt{1+e^2}}};$$

ce qui est l'équation intrinsèque de la courbe.

3°) A côté de la solution générale précédente qui convient quelles que soient les expressions données de Φ et Ψ en fonction de α, il peut s'en présenter d'autres pour des lois particulières de forces. Nous les trouverons en supposant qu'il existe entre les fonctions A_1, A_2, A_3, A_4 *deux relations* linéaires homogènes distinctes à coefficients constants

$$k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + k_4A_4 = 0$$

$$h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3 + h_4A_4 = 0.$$

Nous verrons, dans l'examen du cas suivant, que k_1 et h_1 ne peuvent pas être nuls en même temps; on peut aussi s'assurer que les déterminants

$$k_1h_2 - h_1k_2, \qquad k_1h_3 - h_1k_3$$

ne peuvent pas être nuls en même temps, car s'ils étaient nuls on aurait, en éliminant A_1 entre les deux relations supposées,

$$(k_1h_4 - h_1k_4)A_4 = 0$$

d'où

$$A_4 = 0,$$

puisque les deux relations supposées sont distinctes. Mais A_4 qui est égal à $-\rho$, ne peut pas être nul, donc les deux déterminants

$$k_1 h_2 - h_1 k_2, \qquad k_1 h_3 - h_1 k_3,$$

ne peuvent pas être nuls en même temps. Supposons le premier de ces déterminants différent de zéro et résolvons les deux relations linéaires par rapport à A_1 et A_2: nous aurons

$$(18) \qquad \begin{aligned} A_2 &= C_1 A_3 + C_2 A_4 \\ A_1 &= E_1 A_3 + E_2 A_4 \end{aligned}$$

C_1, C_2, E_1, E_2 étant des constantes. En remplaçant A_2, A_3, A_4 par leurs valeurs, on écrit la première de ces relations (18)

$$\rho' \sin\alpha + 2\rho\cos\alpha = C_1(-\rho'\cos\alpha + 2\rho\sin\alpha) - C_2\rho$$

ou en posant

$$C_1 = \operatorname{tg}\beta, \qquad C_2\cos\beta = -c,$$

on a

$$\rho' \sin(\alpha+\beta) + 2\rho\cos(\alpha+\beta) - c\rho = 0.$$

Intégrons cette équation et désignons par G une constante, nous obtiendrons

$$\rho = \frac{G}{\sin^2(\alpha+\beta)}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]^c,$$

ce qui est l'équation intrinsèque de la courbe le long de laquelle glisse le fil. Cette valeur de ρ devra vérifier la seconde des équations (18). En exprimant ce fait, nous aurons une relation entre les composantes Φ et Ψ; de sorte que, comme nous l'avons déjà dit, le cas actuel ne peut se présenter que pour certaines lois spéciales de la force extérieure.

Pour obtenir, sous la forme la plus simple, la relation entre Φ et

Ψ, remarquons que l'on peut toujours faire tourner les axes de façon à amener la constante β à être nulle: alors

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = -c$$

$$\rho = \frac{G}{\sin^2 \alpha}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^c.$$

La seconde des équations (18) devient si l'on y remplace A_1, A_3, A_4 par leurs valeurs

$$\rho'\Psi - \rho\left(\Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right) = E_1(-\rho' \cos\alpha + 2\rho \sin\alpha) - E_2\rho;$$

d'où l'on tire, en remplaçant $\frac{\rho'}{\rho}$ par la valeur que l'on vient de trouver

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{c - 2\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$(19) \quad (\Psi + E_1 \cos\alpha)(c - 2\cos\alpha) - \left(\Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + 2E_1 \sin\alpha - E_2\right)\sin\alpha = 0.$$

Telle est la relation qui devra lier les composantes Φ et Ψ.

Les relations (18) donnent, puisque $C_1 = 0$ et $C_2 = -c$,

$$A_2 = -cA_4, \qquad A_1 = E_1A_3 + E_2A_4,$$

et en portant dans la relation

$$A_1T_1 + A_2T_2 + A_3T_3 + A_4T_4 = 0,$$

$$A_3(E_1T_1 + T_3) + A_4(E_2T_1 - cT_2 + T_4) = 0.$$

Mais, les fonctions A_3 et A_4 étant linéairement indépendantes, cette relation ne peut avoir lieu que si l'on a simultanément

$$E_1T_1 + T_3 = 0, \qquad E_2T_1 - cT_2 + T_4 = 0$$

c'est à dire, en remplaçant T_1, T_2, T_3, T_4 par leurs valeurs $1, \xi'', \eta'', \theta''$

$$E_1 + \eta'' = 0, \qquad E_2 - c\xi'' + \theta'' = 0;$$

d'où l'on tire enfin

$$\eta = -\frac{1}{2}E_1 t^2 + E_1' t + E_1''$$

$$\theta = c\xi - \frac{1}{2}E_2 t^2 + E_2' t + E_2''$$

E_1', E_1'', E_2', E_2'' désignant des constantes arbitraires.

On voit que η est une fonction du second degré de t; quant à ξ on peut le choisir *arbitrairement* en fonction de t, θ est alors déterminé par la seconde des équations précédentes.

Ainsi, en supposant les composantes Φ et Ψ liées par la relation (19), on aura un mouvement permanent du fil dans lequel le fil est constamment disposé suivant la courbe [1] ayant pour équation intrinsèque

$$\rho = \frac{G}{\sin^2\alpha}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^c$$

et glisse avec une vitesse $-\theta'$ le long de cette courbe supposée invariablement liée à des axes mobiles de directions fixes passant par le point (ξ, η).

Cette solution pourrait aussi être obtenue par la théorie du mouvement relatif associée à la remarque de la page 19.

Elle s'applique au cas important où la seule force donnée est la pesanteur: en effet on a alors

$$\Phi = -g\sin\alpha, \qquad \Psi = -g\cos\alpha,$$

de sorte que la relation (19) est vérifiée si l'on fait

$$E_1 = g, \qquad E_2 = 0:$$

on a de plus, d'après les valeurs générales de ξ, η, θ

$$\eta'' = -g, \qquad \theta'' = c\xi'',$$

d'où

$$\eta = \eta_0 - \frac{g}{2}(t - t_0)^2, \qquad \theta = c\xi + c't + c'',$$

[1] Cette courbe est celle que nous avons déjà trouvée à la page 16.

ξ étant une fonction arbitraire de t. On peut donc dire que l'équation du mouvement d'un fil homogène pesant dans un plan fixe

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2-(p'+p''')\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}-g\cos\alpha\right)\right]+(p'+p''')\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-g\sin\alpha\right)=0$$

admet l'intégrale

$$p=-\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha+A+\theta$$

c'est à dire

$$p=\xi(c-\cos\alpha)-\left[\eta_0-\frac{1}{2}g(t-t_0)^2\right]\sin\alpha+A+c't+c''$$

où ξ est une fonction *arbitraire* de t, c, c', c'' des constantes arbitraires et A une fonction de α définie par l'équation

$$\rho=A'+A'''=\frac{G}{\sin^2\alpha}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^c;$$

ce qu'il est aisé de vérifier directement.

4°) Enfin, s'il existe trois relations linéaires homogènes à coefficients constants entre A_1, A_2, A_3, A_4 ou deux relations linéaires homogènes à coefficients constants entre A_2, A_3, A_4 on en déduira

$$\frac{A_2}{k_2}=\frac{A_3}{k_3}=\frac{A_4}{k_4}$$

k_2, k_3, k_4 étant des constantes, c'est à dire

$$\frac{\rho'\sin\alpha+2\rho\cos\alpha}{k_2}=\frac{-\rho'\cos\alpha+2\rho\sin\alpha}{k_3}=-\frac{\rho}{k_4};$$

d'où l'on tire par l'élimination de $\frac{\rho'}{\rho}$ une valeur *constante* pour α, ce qui est *impossible* puisque, dans tous nos calculs, α est pris pour variable *indépendante.*

Cependant ce résultat suggère l'idée que le fil peut affecter la forme d'une ligne droite de direction fixe. On verra sans peine si un pareil mouvement est possible en cherchant à vérifier les équations primitives (1) en posant

$$x=\xi+s\cos\alpha,\qquad y=\eta+s\sin\alpha$$

α étant une constante, s l'arc de courbe et ξ, η des fonctions de t; ce qui n'offre aucune difficulté.

8. On résoudra de la même façon d'autres problèmes analogues aux précédents.

Cherchons, par exemple, en supposant que la force extérieure ne dépende que de la position de l'élément, si le mouvement du fil peut être représenté par un glissement le long d'une courbe restant homothétique d'elle-même par rapport à l'origine.

Pour que les deux droites

$$x \sin\alpha - y\cos\alpha = F(\alpha)$$

$$x \sin\alpha - y\cos\alpha = F_1(\alpha)$$

enveloppent des courbes homothétiques par rapport à l'origine, il faut et il suffit que l'on ait

$$F_1(\alpha) = kF(\alpha)$$

k étant le rapport d'homothétie. Nous avons écrit l'équation de la tangente au fil

$$x \sin\alpha - y\cos\alpha = p';$$

quand t varie, p' devra être multiplié par un facteur indépendant de α; p' sera donc de la forme

$$p' = f_1(t) f(\alpha)$$

et p de la forme

$$p = A\theta + \theta_1$$

A étant fonction de α, θ et θ_1 fonctions de t. Alors

$$s = p + p'' = (A + A'')\theta + \theta_1$$

$$\rho = p' + p''' = (A' + A''')\theta,$$

$$x = \theta(A' \sin\alpha + A'' \cos\alpha)$$

$$y = \theta(-A'\cos\alpha + A''\sin\alpha);$$

et l'équation du mouvement devient, en faisant m constant

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\{[(A + A'')\theta' + \theta_1']^2 - \theta(A' + A''')(\Psi + A'\theta'')\}$$
$$+ \theta(A' + A''')(\Phi + A\theta'' + \theta_1'') = 0.$$

Les quantités Φ et Ψ sont supposées fonctions de x, y, α:

$$\Phi = \Phi(x, y, \alpha) = \Phi[\theta(A'\sin\alpha + A''\cos\alpha), \theta(-A'\cos\alpha + A''\sin\alpha), \alpha]$$
$$\Psi = \Psi(x, y, \alpha) = \Psi[\theta(A'\sin\alpha + A''\cos\alpha), \theta(-A'\cos\alpha + A''\sin\alpha), \alpha].$$

Telle sera l'équation qu'il faudra vérifier par une fonction A de α et des fonctions θ et θ_1 de t. Il pourra se faire qu'il n'y ait d'autre solution que celle qui consiste à supposer θ constant: on retombe alors sur le problème de M. Léauté (N° 6). Un cas particulier digne d'être signalé est celui où Φ et Ψ *seraient homogènes en x et y*; alors une certaine puissance de θ se mettrait en facteur devant Φ et Ψ, et l'équation à vérifier rentrerait dans le type (12).

Nous nous bornerons à traiter le cas où il n'y a pas de forces extérieures: $\Phi = \Psi = 0$. L'équation peut alors s'écrire

$$(20) \qquad 2\theta'^2(A + A'')(A' + A''') + (\theta\theta_1'' + 2\theta'\theta_1')(A' + A''')$$
$$+ \theta\theta''[(A' + A''')(A - A'') - (A'' + A^{\text{IV}})A'] = 0,$$

relation du type (12) où on ferait $n = 3$ et

$$T_1 = \theta'^2, \qquad T_2 = \theta\theta_1'' + 2\theta'\theta_1', \qquad T_3 = \theta\theta''$$
$$A_1 = 2(A + A'')(A' + A'''), \qquad A_2 = A' + A''',$$
$$A_3 = (A' + A''')(A - A'') - (A'' + A^{\text{IV}})A'.$$

Les quantités T_1, T_2, T_3 ne peuvent pas être linéairement indépendantes, car A_1, A_2, A_3 devraient être nulles ce qui entraînerait

$$A' + A''' = 0,$$

et la valeur correspondante de A ne définirait pas une courbe mais un point.

De même les quantités A_1, A_2, A_3 ne peuvent pas être linéairement indépendantes, car T_1, T_2, T_3 devraient être nulles, ce qui entraînerait

$$\theta' = 0, \qquad \theta = \text{const.}$$

et on retomberait sur le problème de M. LÉAUTÉ (N° 6).

Supposons que les quantités T_1, T_2, T_3 soient liées par une relation linéaire à coefficients constants:

$$k_1 \theta'^2 + k_2(\theta\theta_1'' + 2\theta'\theta_1') + k_3 \theta\theta'' = 0,$$

alors on aurait

$$\frac{2(A + A'')(A' + A''')}{k_1} = \frac{A' + A'''}{k_2} = \frac{(A' + A''')(A - A'') - (A'' + A^{\text{IV}})A'}{k_3};$$

les deux premiers rapports fournissent une relation qui exige $A' + A''' = 0$, ou $A + A'' = \frac{k_1}{2k_2}$ c'est à dire aussi $A' + A''' = 0$: cette solution avec l'hypothèse qui lui a donné naissance, doit donc être rejetée.

Il ne reste donc plus qu'une manière de vérifier l'équation (20), c'est de supposer que les quantités A_1, A_2, A_3 sont liées par une relation linéaire à coefficients constants

$$(21) \qquad 2c_1(A + A'')(A' + A''') + c_2(A' + A''') + c_3[(A' + A''')(A - A'') - (A'' + A^{\text{IV}})A'] = 0;$$

alors on aurait

$$(22) \qquad \frac{\theta'^2}{c_1} = \frac{\theta\theta_1'' + 2\theta'\theta_1'}{c_2} = \frac{\theta\theta''}{c_3}.$$

Comme c_3 n'est pas nul, posons

$$\frac{c_1}{c_3} = \frac{c}{2},$$

nous aurons

$$\frac{2\theta'}{\theta} - c\frac{\theta''}{\theta'} = 0,$$

d'où, après deux intégrations bien faciles,

$$(23) \qquad \theta = k(t + t_0)^{\frac{c}{c-2}}$$

en supposant c différent de 2. Dans le cas particulier où $c = 2$, on aurait

$$\theta = ke^{ht}. \tag{24}$$

Quant à la fonction θ_1, elle est donnée par la relation

$$\theta\theta_1'' + 2\theta'\theta_1' = a\theta\theta''$$

dans laquelle on a posé

$$a = \frac{c_2}{c_3}.$$

On en tire

$$\theta_1' = \frac{a\theta'}{c+1} + \frac{b}{\theta^2},$$

b étant une constante arbitraire, d'où enfin θ_1 par une quadrature immédiate

$$\theta_1 = \frac{a}{c+1}\theta + b\int\frac{dt}{\theta^2}.$$

On déterminera A à l'aide de l'équation

$$\begin{aligned} c(A + A'')(A' + A''') + a(A' + A''') \\ + (A' + A''')(A - A'') - (A'' + A^{\text{IV}})A' = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

En écrivant cette équation

$$\begin{aligned} c(A + A'')(A' + A''') + a(A' + A''') - [(A' + A''')A'' + (A'' + A^{\text{IV}})A'] \\ + AA' + AA''' = 0, \end{aligned}$$

on reconnaît que l'on peut intégrer tous les termes et l'on obtient l'intégrale première

$$c(A+A'')^2 + 2a(A+A'') - 2(A'+A''')A' + A^2 - A'^2 + 2AA'' = f, \tag{26}$$

f étant une constante arbitraire. La détermination de A est donc ramenée à l'intégration d'une équation du troisième ordre et comme cette équation ne contient pas la variable indépendante, elle peut se ramener au second ordre.

Cas particulier. Supposons la constante a *nulle.* L'équation différentielle qui donne A se réduit alors à l'équation

$$(27) \quad c(A + A'')(A' + A''') + (A' + A''')(A - A'') - (A'' + A^{\text{IV}})A' = 0$$

homogène et du second degré à coefficients constants. Si l'on essaye de vérifier cette équation par une fonction de la forme

$$A = \lambda e^{\varkappa a}$$

où λ et $\varkappa$ sont des constantes, on obtient pour déterminer $\varkappa$ l'équation

$$c\varkappa(1 + \varkappa^2)^2 + \varkappa(1 + \varkappa^2)(1 - \varkappa^2) - \varkappa^3(1 + \varkappa^2) = 0$$

qui, après suppression du facteur $\varkappa(1 + \varkappa^2)$ donne

$$c(1 + \varkappa^2) + 1 - 2\varkappa^2 = 0.$$

Ainsi en supposant

$$c = \frac{2\varkappa^2 - 1}{1 + \varkappa^2}$$

l'on a la solution $A = \lambda e^{\varkappa a}$. La valeur (23) trouvée pour θ devient

$$\theta = k(t + t_0)^{\frac{1-2\varkappa^2}{3}};$$

et celle de θ_1

$$\theta_1 = b\int \frac{dt}{\theta^2} = \frac{3bk^{-2}}{4\varkappa^2 + 1}(t + t_0)^{\frac{4\varkappa^2+1}{3}}.$$

Donc enfin

$$p = A\theta + \theta_1 = \mu e^{\varkappa a}(t + t_0)^{\frac{1-2\varkappa^2}{3}} + \nu(t + t_0)^{\frac{4\varkappa^2+1}{3}}$$

μ et ν désignant des constantes arbitraires.

Pour voir quelle est la forme de la courbe à l'instant t, calculons les coordonnées x et y par les formules

$$x = p' \sin\alpha + p'' \cos\alpha, \qquad y = -p' \cos\alpha + p'' \sin\alpha,$$

nous aurons

$$x = \mu\varkappa e^{\varkappa a}(t + t_0)^{\frac{1-2\varkappa^2}{3}}(\sin\alpha + \varkappa\cos\alpha)$$

$$y = \mu\varkappa e^{\varkappa a}(t + t_0)^{\frac{1-2\varkappa^2}{3}}(-\cos\alpha + \varkappa\sin\alpha),$$

ou, en coordonnées polaires, en appelant R le rayon vecteur et θ l'angle polaire et posant $\frac{1}{x} = \operatorname{tg} \alpha_0$

$$R = \mu x \sqrt{1 + x^2} e^{x\alpha} (t + t_0)^{\frac{1-2x^2}{3}}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\cos \alpha + x \sin \alpha}{\sin \alpha + x \cos \alpha} = \operatorname{tg} (\alpha - \alpha_0),$$

d'où

$$\alpha = \alpha_0 + \theta$$

et enfin

$$R = \mu x \sqrt{1 + x^2} e^{x(\theta + \alpha_0)} (t + t_0)^{\frac{1-2x^2}{3}},$$

équation d'une *spirale logarithmique.* En écrivant

$$R = \mu x \sqrt{1 + x^2} e^{x\left[\theta + \alpha_0 + \frac{1-2x^2}{3x} \log (t + t_0)\right]},$$

on voit que, quand t varie, cette spirale tourne autour de l'origine avec une vitesse angulaire ω donnée par la formule

$$\omega = \frac{1 - 2x^2}{3x} \cdot \frac{d}{dt} \log (t + t_0) = \frac{1 - 2x^2}{3x} \cdot \frac{1}{t + t_0}.$$

En même temps que cette spirale tourne, le fil glisse sur la spirale.

La tension T est donnée par la formule

$$T = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2 - (p' + p''') \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2};$$

en y remplaçant p par la valeur trouvée

$$p = e^{x\alpha} \theta + \theta_1 = \mu e^{x\alpha} (t + t_0)^{\frac{1-2x^2}{3}} + \nu (t + t_0)^{\frac{4x^2+1}{3}},$$

on a

$$T = [(1 + x^2) e^{x\alpha} \theta' + \theta_1']^2 - x^2 (1 + x^2) e^{2x\alpha} \theta \theta'',$$

ou, en réduisant à l'aide de la relation

$$\theta \theta'' = \frac{2(1 + x^2)}{2x^2 - 1} \theta'^2,$$

$$T = \frac{(1 + x^2)^2}{(1 - 2x^2)} e^{2x\alpha} \theta'^2 + 2(1 + x^2) e^{x\alpha} \theta' \theta_1' + \theta_1'^2.$$

Remarque I. Lorsque x est nul c'est à dire c égal à -1, l'équation qui donne A admet la solution

$$A = \alpha,$$

et la valeur trouvée pour p devient

$$p = (\mu\alpha + \nu)(t + t_0)^{\frac{1}{3}}.$$

Le fil est alors disposé suivant un arc de cercle de centre O et de rayon variable

$$R = \mu(t + t_0)^{\frac{1}{3}}.$$

Cette expression de p, pour le cas où $x = 0$, s'obtient facilement comme limite de celle qui a été trouvée dans la supposition $x \gtrless 0$.

Remarque II. Pour obtenir la solution que nous venons d'étudier, nous avons posé

$$c = \frac{2x^2 - 1}{1 + x^2}, \qquad x^2 = \frac{1 + c}{2 - c};$$

cette solution n'est admissible que si c est compris entre -1 et 2; car si c était en dehors de ces limites x deviendrait imaginaire ainsi que la valeur $\lambda e^{x\alpha}$ trouvée pour A: les expressions trouvées pour θ et θ_1 conviendraient encore, car elles ne dépendent que de x^2.

Par exemple, si $c = -2$, la valeur de x est $\pm \frac{1}{2}\sqrt{-1}$: dans ce cas, l'équation (26) dans laquelle on pose

$$A^2 + A'^2 = u$$

se transforme en la suivante

$$u'' + u = -f$$

qui donne immédiatement

$$u = 2G\cos\alpha + 2H\sin\alpha - f$$

G et H désignant des constantes. La fonction A est alors donnée par l'équation

$$A^2 + A'^2 = 2G\cos\alpha + 2H\sin\alpha - f; \tag{28}$$

d'ailleurs les valeurs de θ et θ_1 deviennent, puisque

$$x^2 = -\frac{1}{4}, \qquad c = -2,$$

$$\theta = k(t + t_0)^{\frac{1}{2}}, \qquad \theta_1 = b\int \frac{dt}{\theta^2} = \frac{b}{k^2}\log(t + t_0);$$

d'où, pour p une valeur de la forme

$$p = kA(t + t_0)^{\frac{1}{2}} + h\log(t + t_0),$$

A étant donnée par l'équation (28). Pour des déterminations convenables de G, H, f cette équation (28) admet une intégrale de la forme

$$A = L\cos\frac{\alpha}{2} + M\sin\frac{\alpha}{2}$$

L et M désignant des constantes.

Les mêmes méthodes permettraient de trouver les mouvements du fil qui consistent en un glissement du fil le long d'une courbe de forme invariable animée d'un mouvement de rotation autour d'un point fixe du plan. Mais nous ne nous arrêtons pas à cette question et nous passons à l'étude des oscillations infiniment petites.

III.

Oscillations infiniment petites autour d'une position d'équilibre stable.

9. Supposons que l'on ait vérifié les équations d'équilibre (11) en y mettant pour p une fonction p_1 de α et pour T une fonction T_1 du même angle: nous appellerons ρ_1 le rayon de courbure de la figure d'équilibre exprimé en fonction de α, et s_1 l'arc de courbe exprimé en fonction de α, de sorte que

$$\rho_1 = \frac{ds_1}{d\alpha};$$

enfin la densité m qui est une fonction donnée de l'arc, sera dans l'équilibre une fonction de α que nous désignerons par m_1. Si l'on écarte le fil très peu de cette position d'équilibre supposée stable, et si l'on imprime à ses points des vitesses très petites, le mouvement du fil consistera en de petites oscillations autour de la figure d'équilibre. Dans ce mouvement qui est défini par les équations (7), p conserve une valeur voisine de p_1 et T une valeur voisine de T_1, de sorte qu'on pourra poser

$$p = p_1 + \varepsilon, \qquad T = T_1 + W,$$

ε et W étant des fonctions de α et t qui, ainsi que leurs dérivées, conservent des valeurs très petites pendant toute la durée du mouvement. En substituant ces valeurs de p et T dans les équations du mouvement et ordonnant suivant les puissances croissantes de ε, W et de leurs dérivées, on aura d'abord une partie principale qui sera nulle en vertu des équations d'équilibre, puis, en négligeant les termes d'un ordre supérieur au premier par rapport aux fonctions ε, W et à leurs dérivées, on aura deux équations linéaires donnant ε et W en fonction de α et t. Si l'on substituait la valeur $p = p_1 + \varepsilon$ dans l'équation (8), on aurait, par cette même méthode, une équation linéaire du quatrième ordre donnant ε en fonction de α et t.

Il sera facile de faire l'application de cette méthode au cas où les forces Φ et Ψ dépendent seulement de α. Mais, dans l'hypothèse actuelle, (Φ et Ψ ne dépendant que de α), on arrivera à des équations plus commodes en partant des équations du mouvement sous la forme (10). Affectons de l'indice 1 les valeurs des quantités $\mathfrak{T}$, s, ρ, m dans la position d'équilibre, toutes ces quantités étant supposées exprimées en fonction de α; et désignons par $\mathfrak{T}_1'$, s_1', ρ_1', m_1' les dérivées de ces quantités par rapport à la variable α dont elles dépendent uniquement, de sorte que $s_1' = \rho_1$. Les équations d'équilibre seront, d'après (10)

$$(29) \qquad \begin{cases} \mathfrak{T}_1\left[\dfrac{1}{\sqrt{m_1\rho_1}} + \dfrac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{m_1\rho_1}}\right)\right] - \dfrac{1}{\sqrt{m_1\rho_1}}\dfrac{\partial^2\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha^2} = -\Psi + \Phi' \\ \dfrac{2}{\sqrt{m_1\rho_1}}\dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha} = -\Psi' - \Phi. \end{cases}$$

Dans le mouvement oscillatoire, les valeurs de $\mathfrak{T}$, s, ρ, m diffèrent peu de $\mathfrak{T}_1$, s_1, ρ_1, m_1, et l'on peut poser

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 + V, \qquad s = s_1 + \sigma, \qquad \rho = \rho_1 + \sigma',$$

$$m = m_1 + \frac{m_1'}{\rho_1}\sigma,$$

cette dernière formule résultant de ce que l'on a

$$m = f(s) = f(s_1 + \sigma) = m_1 + \sigma\frac{dm_1}{ds_1};$$

on aura donc

$$m\rho = m_1\rho_1 + m_1\sigma' + \sigma m_1' = m_1\rho_1 + (\sigma m_1)',$$

$(\sigma m_1)'$ désignant la dérivée du produit σm_1 par rapport à α; par conséquent

$$\frac{1}{\sqrt{m\rho}} = \frac{1}{\sqrt{m_1\rho_1}}\left[1 + \frac{(\sigma m_1)'}{m_1\rho_1}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{m_1\rho_1}} - \frac{1}{2}\frac{(\sigma m_1)'}{(m_1\rho_1)^{\frac{3}{2}}}.$$

En faisant les substitutions précédentes dans les équations du mouvement (10) et tenant compte des équations d'équilibre (29), on obtient les deux équations suivantes

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &V\left(R_1 + \frac{\partial^2 R_1}{\partial\alpha^2}\right) - \frac{1}{2}\mathfrak{T}_1\left(R_1^3\tau' + \frac{\partial^2(R_1^3\tau')}{\partial\alpha^2}\right) - R_1\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{2}R_1^3\tau'\frac{\partial^2\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha^2} = 0 \\ &2R_1\frac{\partial V}{\partial\alpha} - R_1^3\tau'\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha} = -\frac{1}{m_1}\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles on a posé pour simplifier

$$\frac{1}{\sqrt{m_1\rho_1}} = R_1, \qquad \sigma m_1 = \tau, \qquad \tau' = \frac{\partial\tau}{\partial\alpha}.$$

Dans ces équations R_1, $\mathfrak{T}_1$ et m_1 sont des fonctions connues de α: l'intégration de ces équations donnera V et τ en fonction de α et t. Ayant trouvé τ en fonction de α et t, on aura $\sigma = \frac{\tau}{m_1}$ et, par suite, la formule

$$s = s_1 + \sigma$$

donnera l'expression de l'arc du fil en fonction de α et t, c'est à dire l'équation intrinsèque de la courbe suivant laquelle est disposé le fil au temps t. Les coordonnées d'un point du fil seront données en α et t par les quadratures

$$x = \int ds \cos\alpha = \int ds_1 \cos\alpha + \int d\sigma \cos\alpha = x_1 + \xi$$
$$y = \int ds \sin\alpha = \int ds_1 \sin\alpha + \int d\sigma \sin\alpha = y_1 + \eta,$$

x_1 et y_1 étant les coordonnées d'un point de la figure d'équilibre exprimées en fonction de α, et ξ et η les différences très petites qu'il y a entre les coordonnées de la position qu'occupe à l'instant t le point du fil où la tangente fait avec l'axe Ox un angle α et les coordonnées de la position qu'occupe dans l'équilibre le point où la tangente fait avec l'axe Ox le même angle. En faisant les quadratures qui donnent ξ et η

$$\xi = \int d\sigma \cos\alpha, \qquad \eta = \int d\sigma \sin\alpha$$

il faudra ajouter aux seconds membres des fonctions arbitraires de t.

Comme on a en général

$$s = p + p'',$$

on aura

$$s_1 + \sigma = p_1 + p_1'' + \varepsilon + \varepsilon'', \qquad \sigma = \varepsilon + \varepsilon'',$$

relation qui donnera ε quand on connaîtra σ en α et t.

10. *Exemple.* Supposons que la seule force extérieure soit la pesanteur: alors

$$\Phi = -g\sin\alpha, \qquad \Psi = -g\cos\alpha$$
$$\Psi' + \Phi = 0, \qquad \Psi - \Phi' = 0.$$

Les équations d'équilibre donnent

$$\mathfrak{T}_1 = K, \qquad R_1 = \frac{1}{\sqrt{m_1\rho_1}} = G\cos\alpha,$$

K et G désignant des constantes. Puis les équations (30) du mouvement oscillatoire deviennent

$$\frac{KG^2}{2}\left[\tau'\cos^3\alpha + \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(\tau'\cos^3\alpha)\right] + \cos\alpha\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2} = 0$$

$$2G\cos\alpha\frac{\partial V}{\partial\alpha} = -\frac{1}{m_1}\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}.$$

Si l'on effectue la différentiation $\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(\tau'\cos^3\alpha)$ indiquée dans la première équation et si l'on divise tous les termes par $\cos\alpha$, on peut écrire cette équation

$$\frac{KG^2}{2}(\tau'''\cos^2\alpha - 3\tau''\sin 2\alpha - 4\tau'\cos 2\alpha + 2\tau') + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2} = 0.$$

Cette équation est immédiatement intégrable et donne

$$(31)\qquad \frac{KG^2}{2}(\tau''\cos^2\alpha - 2\tau'\sin 2\alpha + 2\tau) + \frac{\partial V}{\partial\alpha} = \frac{G}{2}F(t),$$

$F(t)$ désignant une fonction arbitraire de t. La seconde équation s'écrit, en remplaçant $\frac{1}{m_1}$ par sa valeur $G^2\rho_1\cos^2\alpha$,

$$(32)\qquad \frac{\partial V}{\partial\alpha} = -\frac{G\rho_1\cos\alpha}{2}\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}.$$

On a ainsi deux équations donnant V et τ. L'élimination de $\frac{\partial V}{\partial\alpha}$ donne pour déterminer τ l'équation du second ordre

$$(33)\qquad KG(\tau''\cos^2\alpha - 2\tau'\sin 2\alpha + 2\tau) - \rho_1\cos\alpha\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2} = F(t).$$

Connaissant τ, on a V par une quadrature. La tension T est liée à $\mathfrak{T}$ par la relation

$$\mathfrak{T}\sqrt{m\rho} = T:$$

si l'on appelle, comme plus haut, T_1 la tension dans l'équilibre et $T_1 + W$ la tension pendant les oscillations, on aura

$$\mathfrak{T}_1 + V = \frac{T_1 + W}{\sqrt{m_1\rho_1} + \tau'}, \qquad \mathfrak{T}_1 = \frac{T_1}{\sqrt{m_1\rho_1}},$$

d'où, en développant et remplaçant $\frac{1}{\sqrt{m_1\rho_1}}$ par sa valeur $G\cos\alpha$,

$$(34)\qquad V = G\cos\alpha . W - \frac{KG^2}{2}\cos^2\alpha . \tau',$$

équation qui donnera W.

Dans l'ouvrage intitulé: *Advanced rigid Dynamics*, by E. J. Routh (London, Macmillan and Co., 1884) la question des oscillations planes d'un fil homogène pesant autour d'une position d'équilibre se trouve traitée par une méthode particulière, conduisant aux résultats suivants (loc. cit. p. 311). M. Routh prend pour variables indépendantes le temps t et l'angle α que fait la tangente en un point P du fil avec l'axe des coordonnées x *dans la position d'équilibre*. Soit φ l'angle que fait la tangente au point P à l'instant t avec la position qu'occupe cette tangente dans l'équilibre, U la variation que subit la tension au point P quand on passe de l'équilibre au mouvement. Les quantités φ et U sont des fonctions de α et t qui restent très petites pendant le mouvement. M. Routh donne pour déterminer ces fonctions les deux équations

$$\frac{\rho_1}{\cos\alpha}\frac{d^2\varphi}{dt^2} - g\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = 2\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{U\cos\alpha}{w}\right) \tag{35}$$

$$2g\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{U\cos\alpha}{w}\right)$$

dont la seconde est immédiatement intégrable et donne

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{U\cos\alpha}{w}\right) = 2g\varphi + C, \tag{36}$$

C désignant une fonction arbitraire de t. Dans ces équations w est une constante et ρ_1 désigne le rayon de courbure de la position d'équilibre exprimé en fonction de α.

Pour comparer ces équations à celles que fournit la méthode générale dans le cas où la seule force extérieure est la pesanteur, cherchons comment les variables que nous avons appelées τ et V sont liées à φ et U. Dans nos équations l'arc s est une fonction de α et t

$$s = s_1 + \sigma = s_1(\alpha) + \sigma(\alpha, t)$$

en mettant les variables en évidence. Dans l'équilibre la longueur de l'arc jusqu'au point P est

$$s = s_1(\alpha)$$

puisque σ est alors nul. Pendant le mouvement l'angle α que fait la tangente au même point P avec l'axe Ox est $\alpha + \varphi$; on a donc aussi, à l'instant t

$$s = s_1(\alpha + \varphi) + \sigma(\alpha + \varphi\,, t),$$

d'où, en développant par rapport aux puissances de φ et ne conservant que les termes du premier ordre

$$s = s_1(\alpha) + \rho_1 \varphi + \sigma(\alpha\,, t).$$

En égalant cette expression de s à la précédente, on a

$$\rho_1 \varphi + \sigma(\alpha\,, t) = 0,$$

$$\varphi = -\frac{\sigma}{\rho_1} = -\frac{m_1 \sigma}{m_1 \rho_1} = -\frac{\tau}{m_1 \rho_1}.$$

Mais, dans la position d'équilibre on a

$$m_1 \rho_1 = \frac{1}{G^2 \cos^2 \alpha},$$

donc enfin φ et τ sont liés par la relation

$$(37) \qquad \varphi = -G^2 \tau \cos^2 \alpha.$$

De même en appelant T_1 ou $T_1(\alpha)$ la tension dans l'état d'équilibre en fonction de α, nous avons posé pour le mouvement

$$T = T_1 + W = T_1(\alpha) + W(\alpha\,, t);$$

donc, au point P où la tangente fait avec Ox un angle $\alpha + \varphi$, on a

$$T = T_1(\alpha + \varphi) + W(\alpha + \varphi\,, t) = T_1(\alpha) + \varphi \frac{dT_1}{d\alpha} + W(\alpha\,, t).$$

Cette valeur de la tension est ce que M. Routh appelle $T_1 + U$; on a donc

$$U = \varphi \frac{dT_1}{d\alpha} + W,$$

ou bien, comme

$$T_1 = \frac{K}{G \cos \alpha}, \qquad \varphi = -G^2 \tau \cos^2 \alpha,$$

$$U = -KG\tau \sin \alpha + W.$$

Si l'on multiplie cette relation par $G\cos\alpha$ en tenant compte de la relation (34) qui lie W à V, on a

$$GU\cos\alpha = -KG^2\tau\sin\alpha\cos\alpha + \frac{KG^2\tau'\cos^2\alpha}{2} + V$$

ou

$$GU\cos\alpha = V + \frac{KG^2}{2}\frac{d}{d\alpha}(\tau\cos^2\alpha)$$

et enfin, d'après la relation (37),

$$GU\cos\alpha = V - \frac{K}{2}\frac{d\varphi}{d\alpha}. \tag{38}$$

Ces formules (37) et (38) donnent nos variables τ et V en fonction des variables φ et U de M. ROUTH: elles permettent de passer de nos équations à celles de M. ROUTH ou inversement, comme on s'en assure aisément en donnant aux constantes les valeurs correspondantes

$$w = \frac{1}{G^2}, \qquad g = KG.$$

Remarque. Quoique notre variable α ne soit pas la même que celle que M. ROUTH désigne par la même lettre, les équations obtenues avec les deux systèmes de variables sont identiques parce que ce sont des *équations approchées*. En effet appelons α l'angle que fait la tangente au fil en un point P avec Ox dans la position d'équilibre, et α' ce que devient cet angle au temps t: on aura

$$\alpha' = \alpha + \varphi.$$

Dans les équations de M. ROUTH les variables indépendantes sont α et t, dans les nôtres α' et t. Si donc F est une fonction de α' et t on pourra l'exprimer en α et t en y remplaçant α' par sa valeur $\alpha + \varphi$ et l'on aura, si l'on désigne par la lettre ∂ les dérivées partielles dans le système de variable α, t et par d les dérivées partielles dans le système des variables α', t

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha} = \frac{dF}{d\alpha'}\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right), \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dF}{dt} + \frac{dF}{d\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Mais si F est une fonction qui reste très petite pendant toute la durée du mouvement, comme les fonctions appelées U, V, W, σ, τ, φ, on aura en négligeant les termes du second ordre

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{dF}{d\alpha'}, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dF}{dt}$$

comme si les variables α et α' étaient les mêmes. Aussi, dans tout ce qui suit, nous continuerons à désigner ces deux variables par la même lettre α en les confondant l'une avec l'autre.

11. *Etude de l'équation différentielle.* En faisant comme plus haut

$$\varphi = - G^2 \tau \cos^2 \alpha$$

et désignant par $f(t)$ une fonction arbitraire de t, on ramène l'équation (33) à la forme donnée par M. Routh

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + 4\varphi - \frac{\rho_1}{g \cos \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = f(t), \tag{40}$$

ρ_1 étant une fonction connue de α.

Tout d'abord, si φ est une solution de cette équation pour une certaine détermination de la fonction $f(t)$, la fonction $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ est une solution de l'équation obtenue en remplaçant $f(t)$ par la dérivée $\frac{df}{dt}$; de même la fonction $\int \varphi\, dt$ est une solution de l'équation obtenue en remplaçant $f(t)$ par l'intégrale $\int f(t) dt$, à condition que la fonction arbitraire de α qui figure dans l'intégrale $\int \varphi\, dt$ soit convenablement déterminée. Si φ_1 et φ_2 sont deux solutions correspondant aux déterminations $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de la fonction arbitraire $f(t)$, la fonction

$$\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$$

sera une solution correspondant à la détermination $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ de la fonction f, λ_1 et λ_2 désignant des constantes quelconques. La combinaison de ces deux propriétés permet de déduire de chaque détermination de $f(t)$ pour laquelle on connaît une solution de l'équation, une infinité d'autres déterminations de cette même fonction avec des solutions correspondantes.

Cherchons si l'équation (40) peut admettre une intégrale de la forme

$$\varphi = A\theta$$

A désignant une fonction de α et θ une fonction de t dont les dérivées respectives seront appelées A', A'', θ', θ''. Nous aurons en substituant

$$\theta(A'' + 4A) - \frac{\rho_1}{g\cos\alpha} A\theta'' - f(t) = 0,$$

équation qui rentre dans la forme (12). Suivant la méthode employée au sujet des équations de cette forme dans le N° 5, deux cas sont à distinguer

1°) Supposons qu'il y ait une relation linéaire à coefficients constants entre les fonctions de α

$$(41) \qquad A'' + 4A, \qquad \rho_1 \frac{A}{g\cos\alpha}, \qquad 1,$$

relation de la forme

$$k_1(A'' + 4A) + k_2\rho_1 \frac{A}{g\cos\alpha} + k_3 = 0,$$

l'on devra avoir

$$\frac{\theta}{k_1} = -\frac{\theta''}{k_2} = -\frac{f(t)}{k_3};$$

d'où en écartant le cas de $k_3 = 0$ c'est à dire de $f(t) = 0$, cas que nous examinerons à part,

$$f(t) = \lambda\cos\varkappa t + \mu\sin\varkappa t, \qquad \theta = -\frac{k_1}{k_3}(\lambda\cos\varkappa t + \mu\sin\varkappa t)$$

où $\varkappa$ est la quantité

$$\varkappa = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

et λ, μ des constantes. Comme l'on peut, sans changer la solution $\varphi = A\theta$ remplacer A par $-A\frac{k_1}{k_3}$ et θ par $-\theta\frac{k_3}{k_1}$, on voit que, si $f(t)$ est de la forme $\lambda\cos\varkappa t + \mu\sin\varkappa t$ on aura une solution en prenant pour θ la quantité $\lambda \cos \varkappa t + \mu \sin \varkappa t$ et pour A une intégrale de l'équation linéaire avec second membre

$$A'' + 4A + \varkappa^2 \frac{\rho_1}{g \cos \alpha} A = 1. \tag{42}$$

On en conclut une intégrale de l'équation aux dérivées partielles pour le cas plus général où $f(t)$ serait de la forme

$$f(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \cos \varkappa_i t + \mu_i \sin \varkappa_i t,$$

λ_i, μ_i, $\varkappa_i$ étant des constantes. Cette solution sera

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=n} A_i (\lambda_i \cos \varkappa_i t + \mu_i \sin \varkappa_i t)$$

où A_i est une intégrale de l'équation (42) dans laquelle $\varkappa$ possède la valeur $\varkappa_i$.

2°) Supposons qu'il y ait, entre les fonctions (41), deux relations linéaires homogènes à coefficients constants

$$A'' + 4A = k_1, \qquad \frac{\rho_1 A}{g \cos \alpha} = k_2.$$

Alors, en intégrant la première on a

$$4A = k_1 + \lambda \cos 2\alpha + \mu \sin 2\alpha$$

$$\rho_1 = \frac{4 g k_2 \cos \alpha}{k_1 + \lambda \cos 2\alpha + \mu \sin 2\alpha}. \tag{43}$$

Ce cas ne peut donc se présenter que si la densité du fil suit une loi d'après laquelle l'équation intrinsèque de la figure d'équilibre soit de la forme (43); c'est ce qui arrive par exemple si la figure d'équilibre est une cycloïde ($\lambda = \mu = 0$). Les fonctions θ, θ'' et $f(t)$ sont, dans l'hypothèse actuelle, liées par la relation unique

$$k_1 \theta - k_2 \theta'' - f(t) = 0$$

qui donne immédiatement θ quand on a choisi $f(t)$, car cette relation est, par rapport à θ, une équation différentielle linéaire à coefficients constants avec second membre.

Cas particuliers. Supposons que la figure d'équilibre du fil soit symétrique par rapport à une verticale et que les deux points d'attache du fil soient à la même hauteur: alors, si les conditions initiales sont symétriques par rapport à cette même verticale, la symétrie persistera pendant toute la durée du mouvement. Dans ce cas la fonction arbitraire $f(t)$ est nulle comme le montre M. ROUTH. En effet φ est alors une fonction impaire de α, ρ_1 une fonction paire de α: ce qui exige $f(t) = 0$. L'équation devient donc dans ce cas

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + 4\varphi - \frac{\rho_1}{g \cos \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{44}$$

Si l'on pose, comme ci-dessus

$$\varphi = A\theta$$

A dépendant de α seul et θ de t seul, on aura nécessairement

$$A'' + A\left(4 - \frac{k\rho_1}{g \cos \alpha}\right) = 0 \tag{45}$$

$$\theta'' - k\theta = 0$$

k désignant une constante arbitraire. Soit

$$A = \tilde{\omega}(\alpha, k)$$

une intégrale impaire en α de l'équation (45), l'équation aux dérivées partielles (44) admettra l'intégrale impaire en α

$$\varphi = \int_{k_0}^{k_1} \tilde{\omega}(\alpha, k) \cos t\sqrt{-k}\, f_1(k) dk + \int_{k_0}^{k_1} \tilde{\omega}(\alpha, k) \sin t\sqrt{-k}\, f_2(k) dk$$

avec deux fonctions arbitraires f_1 et f_2.

Parmi les cas où l'équation (45) se ramène à des formes connues, les plus simples sont les suivants

1) $\rho_1 = a \cos \alpha$. La figure d'équilibre est une cycloïde; ce cas se trouve examiné dans l'ouvrage de M. ROUTH (loc. cit. p. 313).

2) $\frac{\rho_1}{g} = \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \cos \alpha + h \cos \alpha$, $\varkappa$ étant le module de la fonction elliptique $\operatorname{sn} \alpha$ et k ayant la valeur $-n(n+1)$, n désignant un entier quelconque. L'équation (45) est alors une équation de LAMÉ

$$A'' = [-n(n+1)\varkappa^2 \operatorname{sn}^2 \alpha + kh - 4]A \tag{46}$$

et θ possède la valeur

$$\theta = \lambda_n \cos t\sqrt{n(n+1)} + \mu_n \sin t\sqrt{n(n+1)}.$$

Soit d'après la méthode de M. HERMITE $f_n(\alpha)$ une solution de l'équation de LAMÉ (46); la fonction $f_n(-\alpha)$ sera une autre solution et

$$f_n(\alpha) - f_n(-\alpha)$$

sera une solution *impaire* de l'équation. Alors la série

$$\varphi = \sum_{n=0}^{n=\infty} [\lambda_n \cos t\sqrt{n(n+1)} + \mu_n \sin t\sqrt{n(n+1)}][f_n(\alpha) - f_n(-\alpha)]$$

définit une *fonction impaire* de α satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles: pour $t = 0$ cette fonction et sa dérivée par rapport à t se réduisent aux valeurs

$$(\varphi)_0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda_n [f_n(\alpha) - f_n(-\alpha)],$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mu_n \sqrt{n(n+1)}[f_n(\alpha) - f_n(-\alpha)].$$

Comme, d'après les conditions initiales $(\varphi)_0$ et $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0$ sont donnés en fonction de α, on connaîtra les coefficients λ_n et μ_n de ces développements et, par suite, l'intégrale φ.

Soient

$$(\varphi)_0 = F(\alpha), \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0 = F_1(\alpha)$$

ces fonctions seront impaires en α à cause de la symétrie supposée. On est donc ramené à ce problème d'analyse: *développer une fonction impaire de α donnée entre les limites $-\alpha_0$, $+\alpha_0$ en série de la forme*

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda_n [f_n(\alpha) - f_n(-\alpha)]$$

convergente entre ces limites.

3°) $\rho_1 = \dfrac{B + C\sin\alpha + D\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$, B, C, D étant des constantes; dans ce cas, l'équation (45) prend la forme

$$A'' + \frac{a + b\sin\alpha + c\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} A = 0,$$

a, b, c étant de nouvelles constantes; et cette dernière équation se réduit facilement à celle de la série hypergéométrique de GAUSS. En effet, en faisant d'abord un changement de fonction et posant

$$A = \cos^\lambda\alpha \,.\, \mathrm{tg}^\mu\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right). Z,$$

Z étant la nouvelle fonction inconnue, on pourra déterminer les exposants λ et μ de façon que, dans l'équation en Z, le coefficient de Z soit égal à celui de Z'' multiplié par une constante ν; il suffira pour cela de vérifier les trois équations

$$\mu^2 - \lambda = \nu - a, \qquad \mu - 2\lambda\mu = -b, \qquad \lambda^2 = -\nu - c$$

qui déterminent λ, μ et ν. L'élimination de ν et μ conduit, pour calculer λ, à une équation du quatrième degré qu'on abaisse au second degré en prenant pour inconnue $\lambda^2 - \lambda$. Les constantes λ, μ et ν étant ainsi déterminées, l'équation qui donne Z prend la forme

$$Z'' + 2\frac{\mu - \lambda\sin\alpha}{\cos\alpha} Z' + \nu Z = 0$$

et se réduit à l'équation de la série hypergéométrique si l'on fait le changement de variable indépendante

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = u.$$