UEBER LINEARE HOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, ZWISCHEN DEREN INTEGRALEN HOMOGENE RELATIONEN HÖHEREN ALS ERSTEN GRADES BESTEHEN

VON

L. FUCHS

IN HEIDELBERG.

Ein Fundamentalsystem von Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung ist dadurch characterisirt, dass zwischen den Elementen des Systems keine homogene Gleichung *ersten* Grades mit constanten Coefficienten stattfinden darf. Man kann aber voraussetzen, dass zwischen den Elementen homogene Relationen *höheren* Grades bestehen. Ist die Ordnung der Differentialgleichung die m^{te}, so ist nur erforderlich, dass die Anzahl solcher Relationen nicht grösser als $m-2$ sei. — Es ist alsdann die besondere Natur der Integrale unter Voraussetzung solcher Relationen zu ergründen.

Im Folgenden habe ich die Lösung dieses Problems für die Differentialgleichungen dritter Ordnung durchgeführt. Für diese kann es nur *eine* Relation der genannten Art geben. Bemerkenswerth sind die Anwendungen, welche wir bei unserer Untersuchung von der Theorie der Abelschen Integrale haben machen können.

Es ist einleuchtend, dass die Differentialgleichungen, welche algebraïsch integrirbar sind, zu der Classe von Differentialgleichungen gehören, zwischen deren Integralen homogene Relationen bestehen.

Wir haben in der folgenden Arbeit auch eine Reihe von Sätzen über algebraïsch integrirbare lineare Differentialgleichungen aufgestellt, von welchen wir in derselben Arbeit Gebrauch machen, die aber auch anderweitige Anwendungen zulassen.

Die Resultate dieser Arbeit habe ich in der auch gegenwärtig festgehaltenen Reihenfolge bereits in den Sitzungsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 8 Juni 1882, veröffentlicht.

1.

Es sei

$$\frac{d^3y}{dz^3} + p\frac{d^2y}{dz^2} + q\frac{dy}{dz} + ry = 0 \tag{A}$$

eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten, gehörig zu der Classe von Differentialgleichungen, welche sich in meiner Arbeit (BORCHARDT's Journal für Mathem. B. 66 S. 146 Gl. 12) characterisirt finden, und es werde vorausgesetzt, dass die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen sind, und dass zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (A) y_1, y_2, y_3 eine irreductible Gleichung

$$f(y_1, y_2, y_3) = 0 \tag{B}$$

stattfinde, wo $f(y_1, y_2, y_3)$ eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades von y_1, y_2, y_3 bedeutet.

Bezeichnen wir mit $H(f)$ die Hessische Covariante von f, so ist $H(f)$ nicht identisch Null, da der Voraussetzung nach f nicht in lineare Factoren zerlegbar ist. (1)

Ein beliebiger Umlauf von z führe $y_\varkappa$ über in

$$y'_\varkappa = a_{\varkappa1}y_1 + a_{\varkappa2}y_2 + a_{\varkappa3}y_3 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3) \tag{1}$$

so geht f, folglich auch $H(f)$ durch denselben Umlauf in sich selbst mit einer Constanten multiplicirt über. Demnach ist $\frac{d \log H(f)}{dz}$ eine eindeutige Function von z. Da ausserdem der vorausgesetzten Natur der

(1) Vergl. GORDAN und NÖTHER, in den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen 13 Dec. 1875, 10 Jan. 1876.

Integrale der Gleichung (A) wegen diese Function für jeden im Endlichen gelegenen Punct p in der z-Ebene mit einer bestimmten Potenz von $z-p$, und für $z=\infty$ mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{z}$ multiplicirt endlich und stetig wird, so ist dieselbe eine rationale Function. Da $H(f)$ ebenfalls für jeden im Endlichen befindlichen Punkt p mit einer bestimmten Potenz von $z-p$ und für $z=\infty$ mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{z}$ multiplicirt endlich und stetig wird, so ist demnach

$$H(f) = X(z) \tag{2}$$

Wurzel einer rationalen Function von z.

Setzen wir

$$\frac{y_2}{y_1} = \eta, \qquad \frac{y_3}{y_1} = \zeta \tag{3}$$

$$H(f) = y_1^{3n-6}\; H_1(\eta, \zeta)$$

so verwandelt sich die Gl. (2) in

$$\left[y_1 X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}\right]^{3n-6} H_1(\eta, \zeta) = 1 \tag{4}$$

Ist z ein beliebiger Werth, und nimmt auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (A) für $z=z_1$ je einen gleichen Werth an wie für $z=z$, so folgt aus der Gleichung (4), dass auf denselben Wegen $y_1 \,.\, X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}$ in z_1 einen Werth annimmt, welcher aus dem für z durch Multiplication mit einer Einheitswurzel λ hervorgeht. Da jeder Quotient zweier Integrale für $z=z_1$ denselben Werth wie für z annimmt, so folgt, dass auch $y_2 \,.\, X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}$, $y_3 \,.\, X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}$ für $z=z_1$ Werthe annehmen, welche aus denen für z durch Multiplication mit λ hervorgehen.

Substituirt man daher in (A)

$$y = X(z)^{\frac{1}{3n-6}} \cdot v,$$

wodurch dieselbe in

$$\frac{d^3v}{dz^3} + p' \cdot \frac{d^2v}{dz^2} + q' \cdot \frac{dv}{dz} + r'v = 0 \tag{A'}$$

übergehen möge, so hat das y_1, y_2, y_3 entsprechende Fundamentalsystem von Integralen v_1, v_2, v_3 der Gleichung (A′) die Eigenschaft für $z = z_1$ Werthe anzunehmen, welche aus denen für z durch Multiplication mit derselben Einheitswurzel λ hervorgehen.

Zwischen v_1, v_2, v_3 findet die Gleichung

$$\text{(B}'\text{)} \qquad f(v_1, v_2, v_3) = 0$$

statt.

Sei

$$v_1 = \varphi_1(z), \qquad v_2 = \varphi_2(z), \qquad v_3 = \varphi_3(z),$$

so ist der Voraussetzung gemäss, wenn man von z auf geeigneten Wegen nach z_1 geht,

$$(5) \qquad \varphi_\varkappa(z_1) = \lambda \cdot \varphi_\varkappa(z), \qquad \varkappa = 1, 2, 3,$$

wo λ eine Einheitswurzel bedeutet.

Die Functionen $\varphi_\varkappa(z_1)$ genügen der Gleichung

$$(6) \qquad \frac{d^3v}{dz_1^3} + p'(z_1)\frac{d^2v}{dz_1^2} + q'(z_1)\frac{dv}{dz_1} + r'(z_1)\, v = 0$$

Es sei

$$z = \psi(z_1), \qquad \frac{d^iz}{dz_1^i} = \psi^{(i)}(z_1).$$

Transformirt man Gl. (6) in die unabhängige Variable z, so folgt

$$(6\,\text{a}) \quad \frac{d^3v}{dz^3}\psi'^3 + [3\psi'\cdot\psi'' + p'(z_1)\psi'^2]\frac{d^2v}{dz^2} + [\psi^{(3)} + p'(z_1)\psi^{(2)} + q'(z_1)\psi']\frac{dv}{dz} + r'(z_1)v = 0$$

Dividirt man diese Gleichung durch ψ'^3, so muss dieselbe wegen Gleichung (5) mit Gleichung (A′) übereinstimmen. Man erhält also

$$(7) \qquad \begin{aligned} \frac{3\psi^{(2)}}{\psi'^2} + \frac{p'(z_1)}{\psi'} &= p'(z) \\ \frac{\psi^{(3)}}{\psi'^3} + p'(z_1)\frac{\psi^{(2)}}{\psi'^3} + \frac{q'(z_1)}{\psi'^2} &= q'(z) \\ \frac{r'(z_1)}{\psi'^3} &= r'(z) \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

$$\psi'^3 = C \cdot \frac{\Delta'(z_1)}{\Delta'(z)}, \tag{8}$$

wo

$$\Delta'(z) = e^{-\int p'(z)dz} \tag{9}$$

gesetzt ist, und C eine Constante bedeutet. Diese Constante ist von Null verschieden, da ψ' nicht identisch verschwinden darf.

Aus der letzten der Gleichungen (7) und aus Gleichung (8) erhält man

$$r'(z_1) = C \cdot \frac{\Delta'(z_1)}{\Delta'(z)} \cdot r'(z) \tag{10}$$

Aus den Gleichungen (7) ergiebt sich ferner

$$\left[q'(z) - \frac{1}{3}\frac{dp'(z)}{dz} - \frac{2}{9}p'(z)^2\right]^3 \cdot \frac{C^2}{\Delta'(z)^2} = \tag{11}$$

$$= \left[q'(z_1) - \frac{1}{3}\frac{dp'(z_1)}{dz_1} - \frac{2}{9}p'(z_1)^2\right]^3 \cdot \frac{1}{\Delta'(z_1)^2}$$

Da der vorausgesetzten Natur der Gleichung (A) gemäss Δ' Wurzel einer rationalen Function ist, so findet demnach nach Gleichung (10) oder (11) zwischen z und z_1 eine algebraïsche Gleichung statt, *wenn nicht*

$$\left[q'(z) - \frac{1}{3}\frac{dp'(z)}{dz} - \frac{2}{9}p'(z)^2\right]^3 = C' \,.\, \Delta'(z)^2 \tag{12}$$

und zugleich

$$r'(z) = C'' \cdot \Delta'(z), \tag{13}$$

wo C' und C'' Constanten bedeuten.

Nach Gl. (9) ist

$$p'(z) = -\frac{d \log \Delta'(z)}{dz} \tag{14}$$

und aus Gl. (12) ergiebt sich

$$q'(z) = -\frac{1}{3}\frac{d^2 \log \Delta'}{dz^2} + \frac{2}{9}\left(\frac{d \log \Delta'}{dz}\right)^2 + \gamma \cdot \Delta'^{\frac{2}{3}} \tag{15}$$

wo γ eine Constante bedeutet.

Setzt man

$$\frac{d \log v}{dz} = \omega, \tag{16}$$

so folgt aus Gleichung (A′)

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + 3\frac{d\omega}{dz} \cdot \omega + \omega^3 + p'(z)\left[\frac{d\omega}{dz} + \omega^2\right] + q'(z) \cdot \omega + r'(z) = 0 \tag{17}$$

Die Gleichung (17) wird aber, unter der Voraussetzung dass $p'(z)$, $q'(z)$, $r'(z)$ die durch die Gleichungen (14), (15), (13) gegebenen Werthe haben, befriedigt durch

$$\omega = \mu \cdot \Delta'(z)^{\frac{1}{3}} \tag{18}$$

wo μ eine Wurzel der Gleichung

$$\mu^3 + \gamma \cdot \mu + C'' = 0 \tag{19}$$

Ist $C'' = 0$, so ist nach Gl. (13) $r'(z) = 0$.

In diesem Falle wird die Gleichung (A′) befriedigt durch

$$v_1 = \int \Delta'^{\frac{1}{3}}(z) dz$$

Ein zweites Integral v_2 ergiebt sich

$$v_2 = v^2_1 + \text{Const.}$$

Da ein drittes Integral $v_3 = 1$ genügt, so findet also in diesem Falle zwischen v_1, v_2, v_3 die Gleichung zweiten Grades

$$v_2 v_3 = v^2_1 + \text{Const. } v^2_3$$

statt.

Es kann $\Delta'(z)$ nicht constant sein, da sonst nach den Gleichungen (13), (14), (15) $p'(z)$, $q'(z)$, $r'(z)$ constant wären, die Gleichung (A′) also durch eine Function der Form $e^{\varkappa z}$ befriedigt würde, wo constant; dieses widerspricht aber der vorausgesetzten Natur der Gleichung (A). Es muss demnach Δ' für einen singulären Punkt a der Gleichung (A′) oder für $z = \infty$ unendlich werden. Es wird aber die logarithmische Ableitung eines Integrals v der Gl. (A′) nicht unendlich für $z = \infty$.

Wenn demnach C'' von Null verschieden ist, so folgt aus Gleichung (18) dass $\Delta'(z)$ nur für die singulären Punkte a der Gl. (A') unendlich werden kann. Nun aber ist $\omega(z-a) = (z-a)\dfrac{d\log v}{dz}$ für $z = a$ gleich einer rationalen Zahl.

Es sei daher in der Umgebung von $z = a$

$$\Delta'(z)^{\frac{1}{3}} = \alpha_0(z-a)^{-1} + \ldots .$$

alsdann muss nach Gleichung (18), $\mu\alpha_0$ eine rationale Zahl sein. Hieraus ergiebt sich zunächst, dass γ nicht verschwinden darf, da sonst gleichzeitig $\mu\alpha_0$, $\mu\varepsilon\alpha_0$, $\mu\varepsilon^2\alpha_0$ rationale Zahlen sein müssten, wenn μ eine der Wurzeln der Gleichung $\mu^3 + C'' = 0$, ε eine primitive dritte Wurzel der Einheit bezeichnet; was nicht möglich ist.

Es ergiebt sich daher aus den Gll. (12), (13)

$$r'(z) = g(z)^3, \tag{20}$$

wo $g(z)$ eine rationale Function von z bedeutet.

Der vorausgesetzten Natur der Gl. (A) zu Folge ist in der Umgebung eines singulären Punktes a der Gleichung (A')

$$r'(z) = \frac{\zeta_{-3}}{(z-a)^3} + \frac{\zeta_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{\zeta_{-1}}{(z-a)} + \zeta_0 + \zeta_1(z-a) + \ldots .$$

folglich ist, wenn $a_1, a_2, \ldots . a_\varkappa$ die Gesammtheit der singulären Punkte der Gleichung (A') bedeuten,

$$r'(z)(z-a_1)^3(z-a_2)^3 \cdots (z-a_\varkappa)^3 = h(z)^3$$

wo $h(z)$ eine ganze rationale Function bedeutet.

Aus demselben Grunde muss in der Umgebung von $z = \infty$

$$r'(z) = \frac{\eta_3}{z^3} + \frac{\eta_4}{z^4} + \cdot\cdot$$

sein.

Also ist $r'(z) . z^3$ für $z = \infty$ nicht unendlich, und demnach $h(z)$ höchstens vom Grade $\varkappa - 1$, also

$$g(z) = \frac{h(z)}{(z-a_1)\cdots(z-a_\varkappa)} = \frac{\varepsilon_1}{z-a_1} + \frac{\varepsilon_2}{z-a_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_\varkappa}{z-a_\varkappa} \tag{21}$$

Aus den Gleichungen (13), (20), (21), (18) folgt demnach

$$\omega = \frac{\mu}{C''^{\frac{1}{3}}}\left[\frac{\varepsilon_1}{z-a_1}+\frac{\varepsilon_2}{z-a_2}+\cdots+\frac{\varepsilon_\varkappa}{z-a_\varkappa}\right]$$

Aus dem oben Bemerkten ergiebt sich dass $\frac{\mu}{C''^{\frac{1}{3}}}\cdot\varepsilon_i$ rationale Zahlen sind, und demnach

$$(22)\qquad v=\left[(z-a_1)^{\varepsilon_1}(z-a_2)^{\varepsilon_2}\cdots(z-a_\varkappa)^{\varepsilon_\varkappa}\right]^{\frac{\mu}{C''^{\frac{1}{3}}}}$$

eine Wurzel einer rationalen Function darstellt.

Von den Wurzeln der Gleichung (19) sind wenigstens zwei μ_1, μ_2 von einander verschieden. Setzt man in (22) $\mu=\mu_1$ und $\mu=\mu_2$, so erhält man zwei Integrale von (A′) v_1, v_2, deren Quotient nicht constant. Substituirt man v_1, v_2 in Gl. (B′), so folgt, dass auch v_3 eine algebraïsche Function von z wird.

Aus den vorhergehenden Entwickelungen folgt, dass die Gleichungen (12) und (13) nur stattfinden dürfen, wenn entweder $n=2$ oder die Gleichung (A) algebraïsch integrirbar ist.

Wir fanden oben, dass wenn die Gleichungen (12) und (13) nicht bestehen, zwischen z und z_1 eine algebraïsche Gleichung stattfindet. Ist daher η gegeben, so folgen aus Gl. (B) für ζ n Werthe $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$. Den n Werthepaaren (η, ζ_1), $(\eta, \zeta_2), \ldots (\eta, \zeta_n)$ entspricht demnach nur eine endliche Anzahl von Werthen z, d. h.

Einem gegebenen Werthe von η entspricht nur eine endliche Anzahl von Werthen z. Es findet also eine Gleichung der Form

$$(23)\qquad z^l + A_1 z^{l-1} + \cdots + A_l = 0$$

statt, wo $A_1, A_2, \ldots A_l$ eindeutige Functionen von η sind.

Setzt man in Gl. (A)

$$y = y_1\int\omega dz,$$

so erhält man

$$\frac{d^2\omega}{dz^2}+\left(\frac{3d\log y_1}{dz}+p\right)\frac{d\omega}{dz}+\left[\frac{3}{y_1}\frac{d^2y_1}{dz^2}+2p\,\frac{d\log y_1}{dz}+q\right]\omega=0$$

Von dieser Gleichung bilden $\frac{d\eta}{dz}$, $\frac{d\zeta}{dz}$ ein Fundamentalsystem von Integralen. Es ist also ([1])

$$\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 \frac{d}{dz}\left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right) = \frac{\Delta}{y_1^{\,3}},$$

wo

$$\Delta = \sum \pm\, y_1 \frac{dy_2}{dz} \frac{d^2 y_3}{dz^2} = e^{-\int p\,dz}$$

oder

(24)
$$\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^3 \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{\Delta}{y_1^{\,3}}$$

Durch die Substitution (3) gehe (B) in

(B″)
$$F(\eta,\ \zeta) = 0$$

über. Aus dieser Gleichung ergiebt sich $\frac{d^2\zeta}{d\eta^2}$ als rationale Function von η und ζ

(25)
$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = G(\eta,\ \zeta)$$

Aus Gleichung (4) folgt

(26)
$$y_1 = \sqrt[3n-6]{\frac{X(z)}{H_1(\eta,\ \zeta)}}$$

Also ergiebt Gl. (24)

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{\sqrt[3]{\Delta}}{\sqrt[3n-6]{X(z)}} \cdot \frac{\sqrt[3n-6]{H_1(\eta,\ \zeta)}}{\sqrt[3]{G(\eta,\ \zeta)}}$$

oder

(27)
$$\sqrt[3n-6]{\frac{\Delta^{n-2}}{X(z)}} \cdot dz = \sqrt[3n-6]{\frac{G(\eta,\ \zeta)^{n-2}}{H_1(\eta,\ \zeta)}}\, d\eta$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass wenn η in einen willkürlichen Werth β einrückt, und b einen zugehörigen Werth von z bedeutet, in der Umgebung dieser Werthe zwischen z und η eine Gleichung besteht der Form

---

([1]) S. meine Abh. B. 66 des Borch. Journ. p. 123

(28) $$\sum_{\mathfrak{a}} c_{\mathfrak{a}}(z-\alpha)^{\frac{\mathfrak{a}}{\alpha}} = \sum_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}}(\eta-\beta)^{\frac{\mathfrak{a}}{\beta}},$$

wo α, β positive ganze Zahlen bedeuten, und wo die unendlichen Reihen auf beiden Seiten nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten. Aus dieser Gleichung ergiebt sich aber bekanntlich $z-b$ dargestellt durch eine nach Potenzen von $(\eta-\beta)^{\frac{1}{\gamma}}$ fortschreitende Reihe, mit nur einer endlichen Anzahl negativer Potenzen dieser Grösse, wo γ eine positive ganze Zahl bedeutet. Daher kann z als Function von η nicht wesentlich singuläre Punkte besitzen. Derselbe Schluss gilt auch, wenn $\eta=\infty$ oder $z=\infty$ wird. In der Gleichung (23) sind demnach die Coefficienten *rationale* Functionen von η.

Es ist also η, folglich auch ζ eine algebraische Function von z, und die Gleichung (26) ergiebt, dass y_1 die gleiche Eigenschaft besitzt.

Die vorhergehenden Schlüsse sind nur in dem Falle nicht zulässig, dass $n=2$, weil alsdann $H(f)$ constant, und daher die Gleichung (4) nicht existirt.

Man erhält also den Satz:

Findet zwischen den Integralen der Gleichung (A) *eine Gleichung* (B) *höheren als zweiten Grades statt, so ist die Gleichung* (A) *algebraisch integrirbar.*

2.

Bezeichnen wir mit u_1, u_2, u_3 das y_1, y_2, y_3 entsprechende Fundamentalsystem von Integralen der zu (A) adjungirten Differentialgleichung

$$\frac{d^3u}{dz^3}-\frac{d^2(pu)}{dz^2}+\frac{d(qu)}{dz}-ru=0$$

derart dass

$$u_1=\left(y_2\frac{dy_3}{dz}-y_3\frac{dy_2}{dz}\right)\frac{1}{\Delta}$$
$$u_2=\left(y_3\frac{dy_1}{dz}-y_1\frac{dy_3}{dz}\right)\frac{1}{\Delta}$$
$$u_3=\left(y_1\frac{dy_2}{dz}-y_2\frac{dy_1}{dz}\right)\frac{1}{\Delta}\ (^1)$$

(1) Vergleiche über die Definition adjungirter Differentialgleichungen meine Arbeit in BORCHARDTS Journ. B. 76, S. 183, und eine Arbeit des Herrn FROBENIUS in demselben Journ. B. 77, S. 245.

so folgt aus den Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\cdot y_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y_2}\cdot y_2 + \dfrac{\partial f}{\partial y_3}\cdot y_3 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{dy_1}{dz} + \dfrac{\partial f}{\partial y_2}\dfrac{dy_2}{dz} + \dfrac{\partial f}{\partial y_3}\dfrac{dy_3}{dz} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{d^2y_1}{dz^2} + \dfrac{\partial f}{\partial y_2}\dfrac{d^2y_2}{dz^2} + \dfrac{\partial f}{\partial y_3}\dfrac{d^2y_3}{dz^2} = M \end{cases}$$

wo

$$M = -\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial y_1{}^2}\left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2{}^2}\left(\frac{dy_2}{dz}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_3{}^2}\left(\frac{dy_3}{dz}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_3}\frac{dy_2}{dz}\frac{dy_3}{dz} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_3 \partial y_1}\frac{dy_3}{dz}\frac{dy_1}{dz} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{dy_1}{dz}\frac{dy_2}{dz} \right\}$$

$$(\mathrm{C})\qquad \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} = M\cdot u_\varkappa, \qquad \varkappa = 1,\ 2,\ 3.$$

Es sei allgemein $\Phi(y_1, y_2, y_3)$ eine ganze rationale und homogene Function der Variablen y_1, y_2, y_3, welche durch die Substitution

$$(2)\qquad \alpha_{\varkappa 1}y_1 + \alpha_{\varkappa 2}y_2 + \alpha_{\varkappa 3}y_3 \text{ für } y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1,\ 2,\ 3)$$

in $j\Phi$ übergeführt wird, wo j eine von y_1, y_2, y_3 unabhängige Grösse, und bezeichnet man mit $\Phi', \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_\varkappa}\right)$ das was aus Φ resp. $\frac{\partial \Phi}{\partial y_\varkappa}$ nach Ausübung der Substitution (2) wird, so folgt aus der Gleichung

$$(3)\qquad \Phi' = j\Phi$$

$$(4)\qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_\varkappa}\right) = j\left[\beta_{\varkappa 1}\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + \beta_{\varkappa 2}\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + \beta_{\varkappa 3}\frac{\partial \Phi}{\partial y_3}\right], \qquad \varkappa = 1,\ 2,\ 3$$

wo $\beta_{\varkappa\iota}$ die Elemente der zu (2) inversen Substitution bedeuten.

Irgend einem Umlaufe von z möge nun die auf y_1, y_2, y_3, wenn diese Grössen wieder die Integrale der Gleichung (A) bedeuten, ausgeübte Substitution (2) entsprechen, so ist:

$$(5)\qquad f(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 + \cdots) = f' = jf(y_1, y_2, y_3),$$

wo j eine Constante. Dieses ergiebt sich daraus dass die Function f' mit der Function f wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung

(B) einen gemeinschaftlichen von f verschiedenen Factor nicht besitzen kann, während y_1, y_2, y_3 der Gleichung $f' = 0$ genügen müssen. Wenn demnach diese Functionen nicht bis auf einen constanten Factor identisch wären, so würden die beiden Gleichungen $f = 0, f' = 0$ constante Werthe der Verhältnisse $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}$ liefern, was nicht möglich ist.

Da die Gleichung (5) also erfüllt ist, so kann man in Gl. (4) $\Phi = f$ setzen. Andererseits geht durch denselben Umlauf von z u_x in

$$\beta_{x1}u_1 + \beta_{x2}u_2 + \beta_{x3}u_3, \qquad x = 1, 2, 3$$

über. Demnach führt die Gleichung (4) für $\Phi = f$ zu dem Schlusse, dass M durch den genannten Umlauf von z in jM übergeht. Hieraus ergiebt sich wie für $H(f)$ in vor. N:o

dass M Wurzel einer rationalen Function von z ist.

Ist insbesondere $n = 2$, so ist $\frac{\partial f}{\partial y_x}$ als lineare homogene Function von y_1, y_2, y_3, Integral der Gleichung (A). Es muss demnach, wenn man in (A) die Substitution

$$y = Mu \tag{6}$$

ausführt, die resultirende Differentialgleichung mit der adjungirten zur Gleichung (A) übereinstimmen. Dieses drückt sich durch die Gleichungen

$$\frac{3M' + pM}{M} = -p$$

$$\frac{3M^{(2)} + 2pM' + qM}{M} = -2p' + q$$

$$\frac{M^{(3)} + pM^{(2)} + qM' + rM}{M} = -p^{(2)} + q' - r,$$

aus, wo die oberen Accente Ableitungen andeuten.

Von diesen liefert die erste

$$M = e^{-\frac{2}{3}\int p dz} \tag{7}$$

Die zweite wird durch die Gleichung (7) von selbst erfüllt, während die dritte unter Anwendung der Gleichung (7) übergeht in:

$$2r = -\tfrac{1}{3}p^{(2)} - \tfrac{2}{3}pp' - \tfrac{4}{27}p^3 + \tfrac{2}{3}pq + q' \tag{8}$$

Findet umgekehrt diese Gleichung statt, und wählt man M der Gleichung (7) gemäss, so ist die durch die Substitution (6) aus (A) entstehende Gleichung mit ihrer adjungirten identisch, und es folgt aus der Gleichung

$$y_x = Mu_x$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0 \tag{9}$$

Demnach ist die Gleichung (S) die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür dass zwischen y_1, y_2, y_3 eine homogene Gleichung zweiten Grades besteht.

Bestimmt man zwei Functionen p_1, p_0 aus den Gleichungen

$$3p_1 = p, \qquad 2p_1^2 + p'_1 + 4p_0 = q, \tag{10}$$

wo

$$p'_1 = \frac{dp_1}{dz},$$

so folgt aus Gleichung (8)

$$r = 4p_0p_1 + 2p'_0, \tag{11}$$

wo

$$p'_0 = \frac{dp_0}{dz}.$$

Die Gleichung (A) ist also in diesem Falle übereinstimmend mit

$$\frac{d^3y}{dz^3} + 3p_1\frac{d^2y}{dz^2} + (2p_1^2 + p'_1 + 4p_0)\frac{dy}{dz} + (4p_0p_1 + 2p'_0)y = 0 \tag{12}$$

Bestimmt man aber die Differentialgleichung, welcher das Quadrat jedes Integrals der Gl.:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p_1\frac{dy}{dz} + p_0y = 0 \tag{13}$$

genügt, so ergiebt sich ebenfalls die Gl. (12).

Ist demnach $n = 2$, so ist die Gleichung (A) übereinstimmend mit derjenigen Differentialgleichung, welcher das Quadrat jedes Integrals einer Differentialgleichung zweiter Ordnung (13) genügt. [1]

---

[1] Nach dem Ercheinen meines obengenannten Aufsatzes in den Sitzungsber. der Akad. 8 Juni 1882 machte mich Herr BRIOSCHI durch ein Schreiben vom 22 Juli des-

3.

Es seien die sämmtlichen Integrale der Gleichung

$$\frac{d^m y}{dz^m} + f_1(z)\frac{d^{m-1}y}{dz^{m-1}} + \cdots + f_m(z)y = 0 \tag{1}$$

mit rationalen Coefficienten, algebraïsch. Ferner werde vorausgesetzt, dass für einen willkürlichen Werth von z jeder Quotient zweier Integrale von (1) auf geeigneten Wegen in z_1 denselben Werth annehme wie in z. Alsdann muss das Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \ldots y_m$ auf denselben Wegen in $vy_1, vy_2, \ldots vy_m$ übergehen, wo v eine bestimmte Function von z.

Es möge

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_my_m,$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_m$ willkürliche Constanten, der irreductiblen Gleichung

$$y^r + \varphi_1(z)y^{r-1} + \cdots + \varphi_r(z) = 0 \tag{2}$$

genügen, wo $\varphi_x(z)$ rationale Function von z. Dann ist der Voraussetzung gemäss

$$v^ry^r + \varphi_1(z_1)v^{r-1}y^{r-1} + \cdots + \varphi_r(z_1) = 0$$

oder

$$y^r + \frac{\varphi_1(z_1)}{v}\cdot y^{r-1} + \cdots + \frac{\varphi_r(z_1)}{v^r} = 0 \tag{3}$$

Die Wurzeln der Gleichungen (2) und (3) sind übereinstimmend. Ist daher $\varphi_i(z)$ der erste Coefficient in (2) welcher nicht identisch verschwindet, so ist

$$\varphi_i(z) = \frac{\varphi_i(z_1)}{v^i}$$

selben Jahres auf eine in dem Bulletin de la société mathématique de France t. VII 1879 enthaltene Notiz aufmerksam, worin Herr Brioschi auf einem von dem unsrigen verschiedenen Wege die Bedingungen herleitet, unter welchen eine Differentialgleichung dritter Ordnung durch die Quadrate der Integrale einer Diffg. zweiter Ordnung befriedigt wird. In derselben Notiz leitet Herr Brioschi auch die Bedingungen ab, dafür dass einer Gleichung vierter Ordnung die Cuben der Integrale einer Gleichung zweiter Ordnung genügen.

oder

$$v^i = \frac{\varphi_i(z_1)}{\varphi_i(z)} \tag{4}$$

Also ist, wenn man setzt

$$y = F(z)$$

$$\frac{F(z_1)^i}{\varphi_i(z_1)} = \frac{F(z)^i}{\varphi_i(z)}$$

oder

$$\left[\frac{F(z_1)}{\sqrt[i]{\varphi_i(z_1)}}\right]^i = \left[\frac{F(z)}{\sqrt[i]{\varphi_i(z)}}\right]^i \tag{5}$$

I. *Setzt man also*

$$y = \sqrt[i]{\varphi_i(z)} \cdot \omega \tag{6}$$

so genügt ω *einer linearen homogenen Differentialgleichung* m^{ter} *Ordnung mit rationalen Coefficienten*

$$\frac{d^m\omega}{dz^m} + g_1(z)\frac{d^{m-1}\omega}{dz^{m-1}} + \cdots + g_m(z)\omega = 0, \tag{7}$$

deren Integrale für z_1 *auf geeigneten Wegen Werthe annehmen, welche sich von denen in* z *nur um eine und dieselbe Einheitswurzel als Factor unterscheiden.*

Sind $z_1, z_2, \ldots z_{\sigma-1}$ *genau die sämmtlichen Werthe, von der Beschaffenheit, dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (1) oder was dasselbe ist der Gleichung (7) in* $z_1, z_2, \ldots z_{\sigma-1}$ *je einen gleichen Werth annimmt wie in* z, *so erhält ein willkürliches Integral der Gleichung (7) auf denselben Wegen in* $z_1, z_2, \ldots z_{\sigma-1}$ *Werthe, die sich von dem Werthe desselben in* z *nur durch Einheitswurzeln als Factoren unterscheiden.*

II. *Es sei*

$$t = (a - z)(a - z_1) \cdots (a - z_{\sigma-1}) = \varphi(z, a) \tag{8}$$

wo a *eine willkürliche Grösse ist, so ist* $\varphi(z, a)$ *eine rationale Function von* z.

Denn da $z_1, z_2, \ldots z_{\sigma-1}$ die Gesammtheit der Werthe darstellt, welche jedem Quotienten zweier Integrale der Gl. (1) denselben Werth verschaffen wie für z, so können durch irgend einen Umlauf von z nur

$z_1, z_2, \dots . z_{\sigma-1}$ eine Vertauschung unter einander erfahren. Da überdiess vorausgesetzt ist, dass Gl. (1) algebraïsch integrirbar sei, so sind $z_1, z_2, \dots . z_{\sigma-1}$ von z algebraïsch abhängig, daher ist t eine algebraïsche Function von z, welche durch Umläufe von z nicht verändert wird, d. h. eine rationale Function von z.

III. *Die Function* $\varphi(z, \alpha)$ *hat die Eigenschaft*

$$\varphi(z_\varkappa, \alpha) = \varphi(z, \alpha). \tag{9}$$

Denn es möge für $z = z_\varkappa, z_1, z_2, \dots . z_{\sigma-1}$ resp. in $z'_1, z'_2, \dots . z'_{\sigma-1}$ übergehen. Wenn nicht $z_\varkappa, z'_1, z'_2, \dots . z'_{\sigma-1}$ abgesehen von der Reihenfolge mit $z_1, z_2, \dots . z_{\sigma-1}, z$ übereinstimmten, so müsste jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (1) für mehr als σ Werthe von z je einen gleichen Werth annehmen, gegen unsere Voraussetzung.

IV. *Zu einem bestimmten willkürlichen Werthe von t der Gleichung* (8) *gehören genau die Werthe* $z, z_1, z_2, \dots . z_{\sigma-1}$ *von* z.

In der That wird nach Satz III die Gleichung

$$t = \varphi(z, \alpha)$$

durch $z = z$, $z = z_1$, $z = z_2, \dots . z = z_{\sigma-1}$ befriedigt. Ist andererseits z' ein von diesen verschiedener Werth von z, so kann nicht die Gleichung

$$\varphi(z, \alpha) = \varphi(z', \alpha)$$

bestehen, wegen der Willkürlichkeit von α.

Durch einen beliebigen Umlauf von t muss dem Satze IV gemäss z in einen der Werthe $z, z_1, z_2, \dots . z_{\sigma-1}$ übergehen. Ist $\omega_1, \omega_2, \dots . \omega_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (7) zugehörig dem Werthenpaare (t, z), so erhält $\omega_\varkappa$ durch einen beliebigen Umlauf von t, d. h. dem Werthenpaare $(t, z_\varkappa)$ entsprechend, nach Satz I den Werth $\omega'_\varkappa$

$$\omega'_\varkappa = j[a_{\varkappa 1}\omega_1 + \cdots + a_{\varkappa m}\omega_m], \qquad \varkappa = 1, 2, \cdots m \tag{10}$$

wo j eine Einheitswurzel bedeutet.

Transformiren wir daher die Gleichung (7) in eine Gleichung

$$\frac{d^m\omega}{dt^m} + h_1(t)\frac{d^{m-1}\omega}{dt^{m-1}} + \cdots + h_m(t)\cdot\omega = 0 \tag{11}$$

mit der unabhängigen Variabeln t.

Nun ist[1] für das Werthsystem (t, z)

$$h_i(t) = -\frac{\Delta_i}{\Delta}, \tag{12}$$

wo

$$\Delta = \sum \pm \omega_1 \frac{d\omega_2}{dz} \frac{d^2\omega_3}{dz^2} \cdots \frac{d^{m-1}\omega_m}{dz^{m-1}}$$

und Δ_i aus Δ hervorgeht, wenn man die $m - i^{te}$ Horizontalreihe in Δ durch $\frac{d^m\omega_1}{dz^m}, \frac{d^m\omega_2}{dz^m}, \ldots \frac{d^m\omega_m}{dz^m}$ ersetzt.

In gleicher Weise ist für (t, z_x)

$$h_i(t) = -\frac{\Delta'_i}{\Delta'}, \tag{13}$$

wo Δ' und Δ'_i aus Δ resp. Δ_i erhalten werden, wenn man ω_x durch ω'_x ersetzt. Aus Gleichung (10) ergiebt sich aber:

$$\frac{\Delta'_i}{\Delta'} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \tag{14}$$

das heisst:

V. *Die Coefficienten der Differentialgleichung (11) sind rationale Functionen von t.*

VI. *Ist t ein willkürlicher Werth, so giebt es* **nicht** *einen davon verschiedenen Werth t_1 von der Beschaffenheit, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (11) auf geeigneten Wegen je einen gleichen Werth wie in t annehmen könnte.*

Wenn nämlich jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (11) in t und t_1 je einen gleichen Werth annimmt, so kommt dieselbe Eigenschaft jedem Quotienten zweier Integrale der Gleichung (7) zu. Dieses ist jedoch nicht möglich. Denn es mögen dem willkürlichen Werthe t die Werthe $z, z_1, z_2, \ldots z_{\sigma-1}$ von z nach Gl. (8) entsprechen. Alsdann sind die dem Werthe t_1 nach derselben Gleichung entsprechenden Werthe $z', z'_1, z'_2, \ldots z'_{\sigma-1}$ von z sämmtlich von den Werthen $z, z_1, z_2, \ldots z_{\sigma-1}$ verschieden. Wäre nämlich einer der ersteren mit z_x übereinstimmend, so wäre

$$t_1 = \varphi(z_x, a) = \varphi(z, a) = t$$

---

[1] Siehe meine Arbeit B. 66 des Borch. Journ. S. 143.

nach Satz III. Es müsste demnach für das Werthsystem $z, z_1, z_2, \ldots z_{\sigma-1}, z'_1, z'_2, \ldots z'_{\sigma-1}$ jeder Quotient zweier Integrale je einen gleichen Werth annehmen. Der Voraussetzung gemäss soll dieses nur für σ Werthe stattfinden.

Es seien $U_0, U_1, \ldots U_{\sigma-1}$ die Umläufe von z, für welche ein willkürliches Integral der Gleichung (1), y resp. in $y, y', y'', \ldots y^{(r-1)}$ übergeht, derart dass nicht der Quotient zweier dieser Werthe constant, während jeder andere Umlauf von z jeden dieser Werthe nur in einen derselben mit einem constanten Factor multiplicirten Werthe überführt.

Im Anschluss an eine Bezeichnung, welche ich in meiner Arbeit über algebraïsch integrirbare Differentialgleichungen zweiter Ordnung (1) eingeführt habe, will ich im Folgenden $y, y', y'', \ldots y^{(r-1)}$ *ein reducirtes Werthsystem* des Integrals y nennen. Die Elemente eines reducirten Werthsystems sind demnach nur bis auf Einheitswurzeln als Factoren bestimmt.

Ein Umlauf s von t führe z in $z_\varkappa$ über auf einem Wege S, welcher das allgemeine Integral ω in $j\omega$ verwandle, wo j eine Einheitswurzel, so werden die Wege $SU_0, SU_1, SU_2, \ldots SU_{\sigma-1}$ ω resp. in $j\omega, j\omega', j\omega'', \ldots j\omega^{(r-1)}$ verwandeln, wo $SU_\varkappa$ den aus S und $U_\varkappa$ zusammengesetzten Weg von z bezeichnet, und wo nach Satz I $\omega, \omega', \omega'', \ldots \omega^{(r-1)}$ abgesehen von Einheitswurzeln als Factoren durch dieselben Substitutionen aus $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ hervorgehen wie $y, y', \ldots y^{(r-1)}$ aus $y_1, y_2, \ldots y_m$. Die Wege $SU_0, SU_1, \ldots SU_{\sigma-1}$ bringen alle denselben Werth von t hervor, und die Quotienten zweier der Werthe $j\omega, j\omega', \ldots j\omega^{(r-1)}$ sind nicht constant. Alle anderen Wege, welche von z nach $z_\varkappa$ überführen, bringen nur Werthe von ω hervor, welche von den zuletzt genannten sich um constante Factoren unterscheiden. Also alle Umläufe von t, welche von z in $z_\varkappa$ überführen, bringen genau r Werthe hervor, deren Quotienten nicht constant. Die Umläufe von t aber, welche von z nach z_l führen, wo l von $\varkappa$ verschieden, bringen nach demselben Schlusse nur Werthe $j'\omega, j'\omega', j'\omega'', \ldots j'\omega^{(r-1)}$ hervor, wo j' eine von j verschiedene Einheitswurzel sein kann. Dasselbe gilt von den Umläufen von t, welche $z_\varkappa$ in sich selbst überführen. Demnach ist $\omega, \omega', \omega'', \ldots \omega^{(r-1)}$ ein reducirtes Werthsystem des willkürlichen Integrals ω der Gleichung (11), und man erhält den Satz:

VII. *Die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems eines*

---

(1) Borch. Journ. B. 81, S. 111.

willkürlichen Integrals der Gleichung (11) ist übereinstimmend mit der Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems eines willkürlichen Integrals der Gleichung (1).

4.

I. *Es sei W ein Umlauf der unabhängigen Variabeln z, durch welchen jeder Quotient zweier Integrale der beliebigen Differentialgleichung*

$$\frac{d^m y}{dz^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0 \tag{1}$$

mit rationalen Coefficienten unverändert bleibt, so wird durch denselben Umlauf jedes Integral in sich selbst multiplicirt mit einer und derselben Constanten übergeführt.

Es sei in der That $y_1, y_2, \ldots y_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1), so ist

$$\sum \pm\, y_1 \frac{dy_2}{dz} \frac{d^2 y_3}{dz^2} \cdots \frac{d^{m-1} y_m}{dz^{m-1}} = e^{-\int p_1 dz} \text{ (1)} \tag{2}$$

Der Voraussetzung gemäss gehen nach Vollzug des Umlaufes W die Integrale $y_1, y_2, \ldots y_m$ resp. in $y_1 v, y_2 v, \ldots y_m v$ über. Daher ist nach Gleichung (2)

$$\sum \pm\, (vy_1) \frac{d(vy_2)}{dz} \frac{d^2(vy_3)}{dz^2} \cdots \frac{d^{m-1}(vy_m)}{dz^{m-1}} = je^{-\int p dz} \tag{3}$$

wo j eine Constante bedeutet. Nun aber ergiebt sich identisch

$$\sum \pm\, (vy_1) \frac{d(vy_2)}{dz} \cdots \frac{d^{m-1}(vy_m)}{dz^m} = v^m \sum \pm\, y_1 \frac{dy_2}{dz} \cdots \frac{d^{m-1} y_m}{dz^{m-1}} \tag{4}$$

Aus den Gleichungen (2), (3), (4) folgt demnach

$$v^m = j \tag{5}$$

womit unser Satz erwiesen ist.

---

(1) S. meine Abhandlung B. 66 des Borch. Journ. S. 128.

Es sei die Differentialgleichung

$$\frac{d^m v}{dt^m} + q_2(t)\frac{d^{m-2}v}{dt^{m-2}} + \cdots + q_m(t)\cdot v = 0 \tag{6}$$

mit in t rationalen Coefficienten, von welchen der mit $\frac{d^{m-1}v}{dt^{m-1}}$ multiplicirte verschwindet, algebraïsch integrirbar. Setzt man

$$t = \frac{1}{\xi}$$

so verwandelt sich die Gleichung (6) in

$$\frac{d^m v}{d\xi^m}\cdot\xi^{2m} + m(m-1)\frac{d^{m-1}v}{d\xi^{m-1}}\cdot\xi^{2m-1} + \cdots = 0 \tag{6 a}$$

Bezeichnen wir mit $s_1, s_2, \ldots. s_m$ die Wurzeln der zu $t = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so ergiebt sich aus Gl. (6 a)

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_m = -\frac{m(m-1)}{2} \tag{7}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass wenigstens eine der Grössen $s_1, s_2, \ldots. s_m$ negativ und absolut grösser als $\frac{m-1}{2}$, da nicht zwei derselben einander gleich sein können in Folge der Voraussetzung, dass Gleichung (6) algebraïsch integrirbar. ([1])

Ein willkürliches Integral v der Gleichung (6) hat die Form

$$v = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_m\eta_m, \tag{8}$$

wo $c_1, c_2, \ldots. c_m$ willkürliche Constanten, $\eta_1, \eta_2, \ldots. \eta_m$ das zu $t = \infty$ gehörige Fundamentalsystem von Integralen bedeuten. Daher ist v für $t = \infty$ unendlich wie eine Potenz t^r, deren Exponent r grösser als $\frac{m-1}{2}$.

Nach einem beliebigen Umlaufe von t gehe v über in v', wo

$$v' = c'_1\eta_1 + c'_2\eta_2 + \cdots + c'_m\eta_m \tag{9}$$

$$c'_x = c_1\alpha_{1x} + c_2\alpha_{2x} + \cdots + c_m\alpha_{mx},$$

([1]) S. meine Abhdl. Borch. Journ. B. 66, S. 157.

wenn durch denselben Umlauf η_x in η'_x übergeführt wird, wo

$$\eta'_x = a_{x1}\eta_1 + a_{x2}\eta_2 + \cdots + a_{xm}\eta_m.$$

Da die Grössen $c_1, c_2, \ldots c_m$ willkürlich angenommen wurden und die Determinante der Grössen α_{ix} nicht verschwindet, so kann man $c_1, c_2 \ldots c_m$ so wählen, dass auch in v' das Glied, welches wie t^r unendlich wird, nicht herausfällt. Daher ist auch v' für $t = \infty$ unendlich wie t^r.

Bildet man daher das Product der μ verschiedenen Werthe von v, welche allen Umläufen von t entsprechen, so ist dasselbe für $t = \infty$ unendlich wie $t^{\mu r}$. Es ist daher die irreductible algebraïsche Gleichung, welcher das allgemeine Integral v genügt, mindestens vom Grade $r\mu$, also höheren als $\frac{\mu(m-1)}{2}^{\text{ten}}$ Grades in Bezug auf t.

Wir wollen jetzt von der Gleichung (6) voraussetzen, dass für einen willkürlichen Werth von t nicht ein zweiter Werth t_1 existirt, von der Beschaffenheit, dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale derselben Gleichung je einen gleichen Werth wie in t annehmen könnte.

Es mögen nun einem beliebigen Werthe eines willkürlichen Integrals v_1 der Gl. (6) ξ verschiedene Werthe von t, nämlich $t, t_1, t_2, \ldots t_{\xi-1}$ entsprechen. Alsdann gehören zwei Werthenpaaren (v_1, t_x), (v_1, t_l), wo $x \lesseqgtr l$ zwei verschiedene Werthe eines von v_1 verschiedenen willkürlichen Integrals v_2 zu, da sonst jeder Quotient zweier Integrale für zwei verschiedene Werthe von t gleiche Werthe annehmen müsste, gegen unsere Voraussetzung. Demnach entsprechen einem Werthe von v_1 genau ξ Werthe von v_2, und einem Werthe von v_2 genau ξ Werthe von v_1, und es findet zwischen v_1, v_2 eine irreductible algebraïsche Gleichung

(10) $$\varphi(v_1, v_2) = 0$$

statt, vom Grade ξ sowohl in Bezug auf v_1 als auch in Bezug auf v_2. Da v_1, v_2 nur gleichzeitig, nämlich für singuläre Punkte der Gl. (6) oder für $t = \infty$ unendlich werden, so ist der Coefficient von v_1^ξ eine Constante, die Coefficienten aller übrigen Potenzen von v_1 ganze rationale Functionen von v_2, und zwar der Coefficient von v_1^0 vom Grade ξ in v_2, die übrigen Coefficienten von niedrigerem Grade in v_2. Umgekehrt ist der Coefficient von v_2^ξ eine Constante, die Coefficienten der übrigen Potenzen von v_2 ganze rationale Functionen von v_1, der Coefficient von v_2^0 vom

Grade ξ in v_1, die übrigen Coefficienten vom niedrigeren Grade in v_1. Wir setzen zunächst voraus, dass nicht für einen Werth von t jedes willkürliche Integral verschwinde. Dann enthält die Gleichung (10) ein von v_1, v_2 *freies* Glied.

Wir substituiren nun in Gl. (10)

$$v_2 = v_1 u, \tag{11}$$

wodurch diese Gleichung in

$$\psi(u, v_1) = 0 \tag{12}$$

übergeführt werde. Die Gleichung (12) ist sowohl in Bezug auf u als auch in Bezug auf v_1 vom Grade ξ. Da die Gleichung (12) in Bezug auf v_1, v_2 irreductibel ist, so kommt diese Eigenschaft auch der Gleichung (12) in Bezug auf u und v_1 zu. Es entsprechen daher einem willkürlichen Werthe von u genau ξ Werthe von v_1.

Wenn es Umläufe von t giebt, welche ein willkürliches Integral v der Gl. (6) in jv überführen, so ist nach Satz I j eine Constante, und zwar, weil v eine algebraïsche Function von z, eine Einheitswurzel. Die zu allen solchen Umläufen gehörigen Werthe von j genügen daher einer Gleichung

$$x^\lambda = 1 \tag{13}$$

wo λ eine ganze Zahl.

Nach Satz I werden v_1^λ und u durch dieselben Umläufe von t verändert und nicht verändert, daher ist v_1^λ eine rationale Function von t und u. Es mögen nun einem willkürlichen Werth von u α verschiedene Werthe von t entsprechen, so entsprechen also demselben Werthe von u höchstens $\lambda\alpha$ verschiedene Werthe von v_1. Es ist also

$$\lambda\alpha \geqq \xi. \tag{14}$$

Nach einem Satze meiner Abhandlung über algebraïsch integrirbare Differentialgleichungen (1) haben die Exponenten von v_1 in der irreductiblen Gleichung zwischen v_1 und t den grössten gemeinschaftlichen Theiler λ.

(1) S. Borch. Journ. B. 81, p. 112.

Ist daher ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des willkürlichen Integrals v_1, so ist

$$\mu = \lambda \cdot \nu \tag{15}$$

Nach den obigen Entwickelungen ist

$$\xi > \frac{\mu(m-1)}{2} \tag{16}$$

Aus den Gleichungen (14), (15), (16) ergiebt sich demnach

$$\alpha > \frac{\nu(m-1)}{2} \tag{17}$$

Wenn es Werthe von t giebt, für welche jedes Integral der Gleichung (6) verschwindet, so gehören dieselben zu den singulären Punkten dieser Gleichung.

Es sei in diesem Falle

$$\omega_1 = v_1 + \varkappa_1, \qquad \omega_2 = v_2 + \varkappa_2, \tag{18}$$

wo $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ willkürliche Constanten bedeuten. Die Functionen ω_1, ω_2 werden für $t = \infty$ und für diejenigen singulären Punkte der Gleichung (6) für welche v_1, v_2 unendlich werden, gleichzeitig unendlich. Für die singulären Punkte derselben Gleichung, für welche v_1, v_2 gleichzeitig verschwinden, erhalten sie die von Null verschiedenen Werthe $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Sie werden aber auch nicht für irgend einen anderen Werth von t gleichzeitig Null, da man $\varkappa_2$ so wählen kann, dass für diejenigen Werthe von t, für welche v_1 den Werth $-\varkappa_1$ erhält, v_2 *nicht* gleich $-\varkappa_2$ werde. Setzt man daher in Gl. (10) $\omega_1 - \varkappa_1$, $\omega_2 - \varkappa_2$ resp. für v_1, v_2, so erhält man eine in Bezug auf ω_1, ω_2 irreductible Gleichung

$$\varphi_1(\omega_1, \omega_2) = 0 \tag{10 a}$$

vom Grade ξ sowohl in Bezug auf ω_1 als auch in Bezug auf ω_2. Die Coefficienten von ω_2^ξ und von ω_1^ξ sind Constanten, während die Coefficienten der übrigen Potenzen von ω_1, ω_2 resp. in Bezug auf ω_2, ω_1 von niedrigerem Grade als dem ξ^{ten} sind. Die Gleichung (10 a) enthält ein von ω_1, ω_2 *freies* Glied.

Setzt man daher in diese Gleichung

$$\omega_2 = p \cdot \omega_1, \tag{11 a}$$

so geht sie in die in Bezug auf p und ω_1 irreductible Gleichung

$$\psi_1(p, \omega_1) = 0 \tag{12 a}$$

über, welche in Bezug auf jede der Variabeln p und ω_1 vom Grade ξ ist. Es entsprechen daher einem willkürlichen Werthe von p genau ξ Werthe von ω_1.

Da $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ willkürlich gewählte Grössen bedeuten, so folgt, dass alle Umläufe von t, welche p ungeändert lassen, gleichzeitig v_1, v_2 also auch ω_1, ω_2 ungeändert lassen. Demnach ist ω_1 eine rationale Function von p und t. Ist daher β die Anzahl der verschiedenen Werthe von t, welche einem willkürlichen Werthe von p entsprechen, so ist die Anzahl der Werthe ω, welche demselben Werthe von p zugehören, nicht grösser als β. Demnach ist

$$\xi \leqq \beta \tag{14 a}$$

oder

$$\beta > \frac{\mu(m-1)}{2}. \tag{16 a}$$

Die Anzahl der allen möglichen Umläufen von t entsprechenden Werthe von v_1 und v_2, folglich auch von p ist gleich μ. Daher genügt p einer irreductiblen Gleichung

$$p^\mu + B_1 p^{\mu-1} + \cdots + B_\mu = 0 \tag{19}$$

Da einem willkürlichen Werthe von p β verschiedene Werthe von t entsprechen, so erhält p als rationale Function von t und v_1 an mindestens β Stellen der Riemannschen Fläche (t, v_1) einen gleichen Werth. Diese Function wird also auch in mindestens β Stellen dieser Fläche Null und unendlich. Da aber p nur für das System derjenigen endlichen nicht singulären Werthe von t unendlich wird, für welche ω_1 verschwindet, und nur für diejenigen endlichen nicht singulären Werthe von t Null wird, für welche ω_2 verschwindet, diese beiden Werthsysteme aber kein gemeinschaftliches Element besitzen, so folgt, dass

$$B_\mu = \frac{G(t)}{H(t)} \tag{20}$$

wo $G(t)$, $H(t)$ ganze rationale Functionen, ohne gemeinschaftlichen Theiler, beide mindestens vom Grade β.

Nun sei

$$u^\nu + A_1 u^{\nu-1} + \cdots + A_\nu = 0 \tag{19 a}$$

die irreductible Gleichung, welcher u genügt, und setzen wir

$$A_\nu = \frac{G_1(t)}{H_1(t)} \tag{20 a}$$

wo $G_1(t)$, $H_1(t)$ ganze rationale Functionen ohne gemeinschaftlichen Theiler. Es bedeute ρ den höheren der beiden Grade derselben.

Setzt man in (19) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, so wird $p = u$, und es werden je λ Wurzeln dieser Gleichung, welche solchen Umläufen von t entsprechen, durch die ein willkürliches Integral v der Gleichung (6) mit einer Einheitswurzel j multiplicirt wurde, einander gleich. Es ist demnach

$$(u^\nu + A_1 u^{\nu-1} + \cdots + A_\nu)^\lambda = u^\mu + B_1^{(0)} u^{\mu-1} + \cdots + B_\mu^{(0)}, \tag{21}$$

wo $B_i^{(0)}$ den Werth von B_i für $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ bedeutet. Hieraus folgt

$$A_\nu^\lambda = B_\mu^{(0)} \tag{22}$$

Die Werthsysteme für welche p unendlich oder Null wird, gehen für $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ in Werthsysteme über, für welche u resp. unendlich oder Null wird. Da u nur für endliche nicht singuläre Werthe von t unendlich oder Null wird, so enthalten auch die beiden letzteren Werthsysteme kein gemeinschaftliches Element. Bezeichnet man daher mit $G^{(0)}(t)$, $H^{(0)}(t)$ die Resultate der Substitution von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ in $G(t)$, $H(t)$, so haben $G^{(0)}(t)$, $H^{(0)}(t)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler, und es folgt aus Gl. (22) oder

$$\left[\frac{G_1(t)}{H_1(t)}\right]^\lambda = \frac{G^{(0)}(t)}{H^{(0)}(t)}$$

dass die Grade von $G^{(0)}(t)$, $H^{(0)}(t)$ genau das λ-fache resp. vom Grade von $G_1(t)$, $H_1(t)$ sind. Daher ist

$$\lambda\rho \geqq \beta,$$

also nach Gleichung (16 a)

$$\rho > \frac{\nu(m-1)}{2} \tag{23}$$

Aus (17) und (23) folgt, *dass die Anzahl der verschiedenen Werthe von t, welche einem willkürlichen Werthe von u entsprechen, grösser als* $\frac{\nu(m-1)}{2}$ *ist.*

Ist

$$\frac{d^m y}{dt^m} + h_1(t)\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} + \cdots + h_m(t)y = 0 \tag{24}$$

eine beliebige lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welche nur algebraïsche Integrale besitzt. Setzt man

$$y = e^{-\frac{1}{m}\int h_1(t)dt} \cdot v \tag{25}$$

so erhält man für v eine wie (6) beschaffene Differentialgleichung.

Setzen wir voraus, dass für einen willkürlichen Werth von t *nicht* ein zweiter Werth t_1 existirt von der Beschaffenheit dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (24) in t_1 denselben Werth wie in t annehme, so besitzt die wie Gl. (6) beschaffene Gleichung dieselbe Eigenschaft. Es ist daher die Anzahl der verschiedenen Werthe von t, welche dem Werthe des Quotienten zweier willkürlichen Integrale der wie (6) beschaffenen Gleichung entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$, wenn ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals dieser Gleichung bedeutet. Aus Gl. (25) ergiebt sich, dass ν auch die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (24) bedeutet. Da andererseits für zwei Werthe von t, für welche ein Quotient zweier willkürlicher Integrale der wie (6) beschaffenen Gleichung gleiche Werthe annimmt, auch der Quotient zweier willkürlicher Integrale der Gl. (24) gleiche Werthe erhält, und umgekehrt, so folgt, *dass auch die Anzahl der verschiedenen Werthe von t, welche einem willkürlichen Werthe des Quotienten zweier willkürlichen Integrale der Gleichung (24) entsprechen, grösser als* $\frac{\nu(m-1)}{2}$ *ist, wo* ν *die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (24) bedeutet.*

Unter Berücksichtigung der Sätze I, VI, VII der N° 3 erhält man daher das folgende Theorem.

II. *Ist* ν *die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals einer beliebigen linearen homogenen algebraïsch integrir-*

baren Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten, so ist die Anzahl der verschiedenen Werthe der unabhängigen Variabeln, welche einem willkürlichen Werthe des Quotienten zweier willkürlichen Integrale derselben Differentialgleichung entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$.

5.

Wir betrachten die Gleichung (B) als eine algebraïsche Gleichung zwischen η, ζ und bezeichnen nach Riemann mit p die Classe dieser algebraïschen Gleichung, d. h. die Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung, welche zu derselben gehören.

Seien $J_1, J_2, \ldots J_p$ solche linear unabhängige Integrale erster Gattung, in der Form, welche nach dem Vorgange des Herrn Aronhold ([1]) von Clebsch und Herrn Gordan ([2]) eingeführt worden ist, so dass also

$$(1) \qquad dJ_\varkappa = \frac{\varphi_\varkappa(y_1, y_2, y_3)}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}} \cdot \sum \pm c_1 y_2 dy_3 \qquad \varkappa = 1, \ldots p,$$

wo $\varphi_\varkappa = 0$ eine Curve $n - 3^{ter}$ Ordnung darstellt, welche durch die sämmtlichen Doppelpunkte und Rückkehrpunkte der Curve (B) hindurchgeht.

Nach N° 2 ist

$$(2) \qquad \sum \pm c_1 y_2 dy_3 = (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3)\, \varDelta\, dz$$

und nach Gleichung (C)

$$(3) \qquad c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) M$$

folglich ist

$$(4) \qquad \frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}} = \frac{\varDelta}{M} dz$$

Nach N° 1 Gl. (24) ist

$$(5) \qquad \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^3 \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{\varDelta}{y_1^3}.$$

([1]) Monatsberichte der K. Akademie der Wissensch. zu Berlin, April 1861.

([2]) Theorie der Abelschen Functionen, S. 2.

Andererseits ist nach Gl. (C)

$$(6) \qquad \frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{d\zeta}{dz} : \frac{d\eta}{dz} = -\frac{u_2}{u_3} = -\frac{f_2}{f_3},$$

wenn man zur Abkürzung f_x für $\frac{\partial f}{\partial y_x}$ setzt. Bezeichnet man ferner $\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_x}$ mit f_{ix}, und mit F_{ix} den Coefficienten von f_{ix} in der Hessischen Covariante von f, so folgt

$$d\frac{d\zeta}{d\eta} = [F_{11}(y_2 dy_3 - y_3 dy_2) + F_{12}(y_3 dy_1 - y_1 dy_3) + F_{13}(y_1 dy_2 - y_2 dy_1)] \cdot \frac{1}{(n-1)f_3^2}$$

also

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{(F_{11}u_1 + F_{12}u_2 + F_{13}u_3)y_1^2}{u_3(n-1)f_3^2},$$

demnach nach Gl. (C)

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{(F_{11}f_1 + F_{12}f_2 + F_{13}f_3)\,y_1^2}{f_3^3(n-1)}$$

also endlich

$$(7) \qquad \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{1}{(n-1)^2} \cdot \frac{H(f)y_1^2}{f_3^3}$$

Substituirt man diesen Werth in (5) und setzt ausserdem für $\frac{d\eta}{dz}$ seinen Werth

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{\Delta}{y_1^2} u_3 = \frac{\Delta}{y_1^2} \cdot \frac{f_3}{M},$$

so folgt

$$(8) \qquad \frac{1}{M^3} = \frac{(n-1)^2}{\Delta^2 X(z)},$$

also ist nach Gl. (4)

$$(9) \qquad \frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}} = (n-1)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{\Delta}{X}}$$

In den Gll. (4) und (9) sind Δ, M, X Wurzeln rationaler Functionen von z, und zwar hat X dieselbe Bedeutung wie in Gl. (2) N° 1, M dieselbe Bedeutung wie in Gl. (C), während

$$(10) \qquad \Delta = e^{-\int p\,dz}$$

Durch einen beliebigen Umlauf von z möge y_x in y'_x übergehen, wo

$$y'_x = a_{x1}y_1 + a_{x2}y_2 + a_{x3}y_3, \qquad x = 1,\ 2,\ 3, \tag{11}$$

so genügen y'_1, y'_2, y'_3 der irreductiblen Gleichung

$$f(y'_1,\ y'_2,\ y'_3) = 0. \tag{12}$$

Es sind demnach $\varphi_x(y'_1, y'_2, y'_3) = 0$ Curven $n - 3^{\text{ter}}$ Ordnung in y'_1, y'_2, y'_3, welche durch die Doppel- und Rückkehrpunkte von (12) hindurchgehen. Daher sind

$$J'_x = \int \frac{\varphi_x(y'_1,\ y'_2,\ y'_3) \sum c_1 y'_2 dy'_3}{c_1 \dfrac{\partial f}{\partial y'_1} + c_2 \dfrac{\partial f}{\partial y'_2} + c_3 \dfrac{\partial f}{\partial y'_3}} \qquad x = 1,\ 2, \cdots p$$

die p linear unabhängigen Integrale erster Gattung, welche zu der Gleichung (12) gehören. Diese Integrale als Functionen von z sind demnach für keinen Werth von z unendlich. Setzt man für y'_1, y'_2, y'_3 ihre Werthe aus Gl. (11) in $\varphi_x(y'_1, y'_2, y'_3)$, so wird

$$\varphi_x(y'_1,\ y'_2,\ y'_3) = \psi_x(y_1,\ y_2,\ y_3),$$

wo ψ_x eine ganze rationale und homogene Function $n - 3^{\text{ten}}$ Grades ist. Ferner hat man nach Gl. (4) oder Gl. (9)

$$\frac{\sum \pm c_1 y'_2 dy'_3}{c_1 \dfrac{\partial f}{\partial y'_1} + c_2 \dfrac{\partial f}{\partial y'_2} + c_3 \dfrac{\partial f}{\partial y'_3}} = j \frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1 \dfrac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \dfrac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \dfrac{\partial f}{\partial y_3}}$$

wo j eine Einheitswurzel bedeutet, folglich ist

$$J'_x = j \int \frac{\psi_x(y_1,\ y_2,\ y_3)}{c_1 \dfrac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \dfrac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \dfrac{\partial f}{\partial y_3}} \cdot \sum \pm c_1 y_2 dy_3$$

Da J'_x für keinen Werth von z, folglich auch für kein Werthsystem y_1, y_2, y_3 unendlich wird, so ist J'_x ein Integral erster Gattung gehörig zur Gleichung (B). Hieraus ergiebt sich, dass $\psi_x(y_1, y_2, y_3) = \varphi_x(y'_1, y'_2, y'_3)$ durch eine lineare homogene Function von $\varphi_1(y_1, y_2, y_3), \dots \varphi_p(y_1, y_2, y_3)$ dargestellt wird, oder

I. *Die Functionen* $\varphi_1(y_1, y_2, y_3), \dots, \varphi_p(y_1, y_2, y_3)$ *genügen einer linearen homogenen Gleichung* p^{ter} *Ordnung*

$$\text{(D)} \qquad \frac{d^p\omega}{dz^p} + Q_1\frac{d^{p-1}\omega}{dz^{p-1}} + \dots + Q_p\omega = 0$$

mit in z *rationalen Coefficienten.*

Es sei U ein Umlauf der Variabeln z, durch welchen ein Quotient λ zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D) ungeändert bleibt, *ohne* dass gleichzeitig $\frac{y'_2}{y'_1} = \frac{y_2}{y_1}$, $\frac{y'_3}{y'_1} = \frac{y_3}{y_1}$, wo y'_1, y'_2, y'_3 die Functionen bedeuten, in welche resp. y_1, y_2, y_3 durch denselben Umlauf übergehen, nämlich

$$\text{(13)} \qquad y'_x = a_{x1}y_1 + a_{x2}y_2 + a_{x3}y_3, \qquad x = 1, 2, 3.$$

Ist alsdann $y_1 = b_1, y_2 = b_2, y_3 = b_3$ ein Werthsystem, für welches λ Null oder Unendlich wird, und setzt man

$$\text{(14)} \qquad b'_x = a_{x1}b_1 + a_{x2}b_2 + a_{x3}b_3, \qquad x = 1, 2, 3,$$

so wird λ auch für $y_1 = b'_1$, $y_2 = b'_2$, $y_3 = b'_3$ Null resp. unendlich. Fixirt man daher $p-1$ willkürliche Werthsysteme b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} von $y_1, y_2, y_3 (i = 1, 2, \dots p-1)$, für welche λ unendlich wird, so wird λ auch für die $p-1$ Werthsysteme

$$\text{(15)} \qquad b'_{ix} = a_{x1}b_{i1} + a_{x2}b_{i2} + a_{x3}b_{i3}, \qquad x = 1, 2, 3 \qquad i = 1, 2 \cdots p-1$$

von y_1, y_2, y_3 unendlich.

Nach der Voraussetzung ist *nicht* gleichzeitig $\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}} = \frac{b_{i2}}{b_{i1}}$ und $\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}} = \frac{b_{i3}}{b_{i1}}$. Andererseits ist auch *nicht* gleichzeitig $\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}} = \frac{b'_{l2}}{b'_{l1}}$ und $\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}} = \frac{b'_{l3}}{b'_{l1}}$ $l \gtrless i$ oder $\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}} = \frac{b_{l2}}{b_{l1}}$, $\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}} = \frac{b_{l3}}{b_{l1}}$; da man die Werthe von z, welche zu einem Systeme b_{l1}, b_{i2}, b_{i3} und zu einem Systeme b_{l1}, b_{l2}, b_{l3} gehören, vollständig von einander unabhängig gewählt hat. Demnach constituiren die Werthsysteme b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} und die Werthsysteme $b'_{i1}, b'_{i2}, b'_{i3}$ $2p-2$ verschiedene Werthsysteme, für welche λ unendlich wird.

Bezeichnet man die durch zweimalige Wiederholung der Substitution (13) aus b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} hervorgehenden Werthe mit $b''_{i1}, b''_{i2}, b''_{i3}$, so ist erstlich *nicht* gleichzeitig $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}}=\frac{b''_{l2}}{b''_{l1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}}=\frac{b''_{l3}}{b''_{l1}}$, oder $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}}=\frac{b'_{l2}}{b'_{l1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}}=\frac{b'_{l3}}{b'_{l1}}$, oder $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}}=\frac{b_{l2}}{b_{l1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}}=\frac{b_{l3}}{b_{l1}}$, $i \gtrless l$, aus denselben Gründen wie oben. Andererseits ist auch, weil wir die zu b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} gehörigen Werthe von z willkürlich gewählt haben, *nicht* gleichzeitig $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}}=\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}}=\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}}$, *ohne* dass auch gleichzeitig

$$\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}}=\frac{b_{i2}}{b_{i1}} \quad \text{und} \quad \frac{b''_{i3}}{b''_{i1}}=\frac{b_{i3}}{b_{i1}} \tag{16}$$

Da nun λ durch den Umlauf von U ungeändert bleibt, so muss diese Function auch für die Werthsysteme b''_{i1}, b''_{i2}, b''_{i3} unendlich werden. Nun aber kann λ ausser für die $2p-2$ verschiedenen Werthsysteme (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}), $(b'_{i1}, b'_{i2}, b'_{i3})$ nicht mehr unendlich werden, da bekanntlich der Quotient der Differentiale zweier Integrale erster Gattung der Classe p für nicht mehr als $2p-2$ Stellen der Riemann'schen Fläche unendlich wird;[1] es müssen demnach die Gll. (16) stattfinden. Dieselben liefern wegen der willkürlichen Wahl der zu b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} gehörigen Werthe von z den Satz

II. *Giebt es einen Umlauf U von z, welcher y_1, y_2, y_3 überführt resp. in y'_1, y'_2, y'_3, und zugleich den Quotienten λ zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D) unverändert lässt, ohne dass gleichzeitig $\frac{y'_2}{y'_1}=\frac{y_2}{y_1}$ und $\frac{y'_3}{y'_1}=\frac{y_3}{y_1}$, so muss eine zweimalige Anwendung dieses Umlaufes $\frac{y_2}{y_1}$, $\frac{y_3}{y_1}$ ungeändert lassen.*

Wenn ausser dem Umlaufe U noch ein anderer $\overline{U}$ die Eigenschaft hat, dass durch dessen Anwendung λ ungeändert bleibt, *ohne* dass zugleich der Quotient zweier willkürlicher Integrale der Gl. (A) ungeändert bleibt, so ergiebt sich wiederum aus dem Umstande, dass λ nur für $2p-2$ Werthsysteme von y_1, y_2, y_3 unendlich werden kann, wenn man mit $\overline{b_{i\varkappa}}$ den durch Anwendung der $\overline{U}$ entsprechenden Substitution aus $b_{i\varkappa}$ hergeleiteten Werth bezeichnet, dass

$$\frac{\overline{b_{i2}}}{\overline{b_{i1}}}=\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}}, \qquad \frac{\overline{b_{i3}}}{\overline{b_{i1}}}=\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}}, \tag{17}$$

[1] Riemann, Abelsche Functionen, in Borchardts Journ. B. 54.

d. h. wegen der willkürlichen Wahl der zu $b_{i\varkappa}$ gehörigen Werthe von z, der Umlauf $\overline{U}$ führt den Quotienten zweier willkürlicher Integrale der Gl. (A) in denselben Werth über wie U, oder was nach dem Satze I N° 4 dasselbe ist, der Umlauf $\overline{U}$ führt y_1, y_2, y_3 resp. in jy'_1, jy'_2, jy'_3 über, wenn U dieselben Functionen resp. in y'_1, y'_2, y'_3 überführt, und wo j eine Einheitswurzel bedeutet.

Es seien S_0, S_1, S_2, ... $S_{\sigma-1}$ diejenigen Umläufe von z, welche ein reducirtes Werthsystem eines willkürlichen Integrals ω der Gl. (D), nämlich ω, ω', ω'', ... $\omega^{(\sigma-1)}$ hervorbringen. Jeder andere Umlauf bringt also nur einen dieser Werthe mit einer Einheitswurzel multiplicirt hervor. Den Umläufen S_0, S_1, ... $S_{\sigma-1}$ entsprechen die Werthe y, y', y'', ... $y^{(\sigma-1)}$ eines willkürlichen Integrals y der Gleichung (A). Es können nicht zwei der letztgenannten Werthe ein constantes Verhältniss besitzen, da sonst auch zwei entsprechende Werthe der Reihe ω, ω', ω'', ... $\omega^{(\sigma-1)}$ ein constantes Verhältniss hätten. — Die Umläufe $S_0 U$, $S_1 U$,.... $S_{\sigma-1} U$ erzeugen die Werthe $y^{(\sigma)}$, $y^{(\sigma+1)}$, ... $y^{(2\sigma-1)}$, während dieselben ω, ω', ... $\omega^{(\sigma-1)}$ nur mit constanten Factoren multipliciren. Die Werthe $y^{(\sigma)}$, $y^{(\sigma+1)}$, ... $y^{(2\sigma-1)}$ unterscheiden sich der Voraussetzung nach von y, y', y'', ... $y^{(\sigma-1)}$ nicht bloss um constante Factoren. Jeder andere Umlauf von z bringt aber nach dem obigen nur Werthe hervor, welche gleich sind einem der Werthe der Reihe y, y', y'', ... $y^{(2\sigma-1)}$ multiplicirt mit einer Constanten. Diese letztere Reihe ist also ein reducirtes Werthsystem von y.

Giebt es aber keinen Umlauf der Art U, so ist y, y', y'', ... $y^{(\sigma-1)}$ ein reducirtes Werthsystem von y. Man erhält also den Satz

III. *Ist ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (A), so ist $\frac{1}{2}\nu$ oder ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (D), je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt.*

Es seien (η_i, ζ_i), $i = 1, 2, \ldots. 2p-2$ die $2p-2$ Stellen der Riemann'schen Fläche (η, ζ), in welchen λ einen willkürlich vorgeschriebenen Werth annimmt. Von diesen Stellen können $p-1$ willkürlich gegeben sein. Wir bezeichnen die letzteren mit (η_1, ζ_1), ... $(\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$; dieselben können so gewählt werden, dass sie zu $p-1$ verschiedenen Werthen von z gehören. Wenn zu einer der übrigen Stellen (η_p, ζ_p), ... $(\eta_{2p-2}, \zeta_{2p-2})$ ein Werth von z gehört, welcher auch einer der ersteren $p-1$ Stellen entspricht, wenn z. B. $(\eta_{p+\varkappa}, \zeta_{p+\varkappa})$ zu demselben z gehört, wie (η_l, ζ_l), so gäbe es einen Umlauf von z, welcher η_l, ζ_l resp. in $\eta_{p+\varkappa}$, $\zeta_{p+\varkappa}$ überführte. Da durch denselben Umlauf λ in sich selbst übergeführt wird, und bei willkürlicher Wahl von $(\eta_1, \zeta_1) \dots (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$ die Gleichungen $\eta_{p+\varkappa} = \eta_l$, $\zeta_{p+\varkappa} = \zeta_l$ *nicht gleichzeitig* erfüllt sind, so wäre dieser Umlauf der Art U.

Giebt es also keinen Umlauf der Art U, so gehören zu einem willkürlichen Werthe von λ genau $\varepsilon(2p - 2)$ verschiedene Werthe von z, wenn man mit ε die Anzahl der verschiedenen Werthe von z bezeichnet für welche gleichzeitig jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) je einen gleichen Werth annimmt.

Wenn es aber einen Umlauf der Art U giebt, so mögen mit η', ζ' die Werthe bezeichnet werden, in welche derselbe η, ζ überführt. Es nimmt alsdann λ für $(\eta'_1, \zeta'_1), \dots (\eta'_{p-1}, \zeta'_{p-1})$ denselben Werth an wie für $(\eta_1, \zeta_1), \dots \dots (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$. Da diese letzteren Stellen untereinander verschieden sind, so sind es auch die ersteren. Der Voraussetzung gemäss ist auch keiner der ersteren mit einem der letzteren übereinstimmend. Es fallen demnach $(\eta_p, \zeta_p), \dots \dots (\eta_{2p-2}, \zeta_{2p-2})$ mit $(\eta'_1, \zeta'_1) \dots (\eta'_{p-1}, \zeta'_{p-1})$ zusammen. Da die Werthe von z, welche zu den verschiedenen Stellen $(\eta_1, \zeta_1) \dots (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$ gehören, von einander verschieden sind, so ergiebt sich, dass in dem Falle der Existenz eines Umlaufes der Art U zu einem willkürlichen Werthe von λ genau $\varepsilon(p - 1)$ verschiedene Werthe von z gehören. Man erhält also den Satz:

IV. *Je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt, ist die Anzahl der verschiedenen Werthe von z, welche zu einem willkürlichen Werthe des Quotienten zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D) gehören, $\varepsilon(p - 1)$ oder $2\varepsilon(p - 1)$, wenn ε die Anzahl der verschiedenen Werthe von z bedeutet, für welche gleichzeitig jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) je einen gleichen Werth annimmt.*

Besitzt die Gl. (A) die Eigenschaft, dass *nicht* zu einem willkürlichen Werthe z ein Werth z_1 gehört der Art, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) in z und z_1 je einen gleichen Werth annimmt, so ist $\varepsilon = 1$. Es folgt alsdann nach Satz II N° 4, Satz III u. Satz IV dieser N°

$$p - 1 \geqq \frac{p-1}{2} \cdot \frac{1}{2} \nu \tag{E}$$

oder

$$2(p - 1) \geqq \frac{p-1}{2} \cdot \nu$$

je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt.

In beiden Fällen folgt für $p > 1$

$$\nu \leqq 4. \tag{F}$$

Wenn zu einem willkürlichen Werthe z ein Werth z_1 gehört von der Art, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) in z und z_1 je einen gleichen Werth annimmt, so kann man, da $n > 2$, also die Gleichung (A) algebraïsch integrirbar vorausgesetzt ist, nach N° 3 durch Multiplication der abhängigen Variabeln y mit einer Wurzel einer rationalen Function von z und Transformation der unabhängigen Variabeln z in eine Veränderliche t die Gleichung (A) in eine Gleichung überführen der Form

$$\frac{d^3\omega}{dt^3} + h_1(t)\frac{d^2\omega}{dt^2} + h_2(t)\frac{d\omega}{dt} + h_3(t)\omega = 0 \qquad \text{(s. dort Gl. (11))} \tag{A''}$$

mit rationalen Coefficienten, welche die Eigenschaft besitzt, dass *nicht* zu einem willkürlichen Werthe von t ein Werth t_1 gehört der Art, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A″) in t und t_1 je einen gleichen Werth annimmt. (Satz VI N° 3).

Die Natur der Transformationen welche von (A) zu (A″) führen bringt es mit sich, dass die Gleichung (B) auch für ein Fundamentalsystem ω_1, ω_2, ω_3 von Integralen der Gl. (A″) bestehen bleibt, dass also

$$f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0 \tag{18}$$

Bildet man die zu (18) gehörigen Integrale erster Gattung, so ist demnach die Anzahl der linear unabhängigen ebenfalls p. Da ferner nach Satz VII N° 3 die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A″) mit der Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A) übereinstimmt, so ergiebt sich, *dass die Gleichungen (E) und (F) auch bestehen bleiben, wenn für einen willkürlichen Werth von z und noch andere Werthe z_1 jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) je einen gleichen Werth annimmt.*

Das durch (F) ausgedrückte Resultat lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

V. *Ist die Classe p der Gleichung (B) grösser als Eins, so ist die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (A) nicht grösser als vier, oder, was dasselbe ist, die Anzahl* *der reducirten Wurzeln* (1) *der algebraïschen Gleichung, welcher dieses allgemeine Integral genügt, ist nicht grösser als vier.*

6.

Für

$$p = 1$$

gehört zur Gl. (B) nur *ein* Integral erster Gattung J. Es sei wie in N° 5

$$(1) \qquad dJ = \frac{\varphi(y_1, y_2, y_3)\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial y_3}}$$

Führt man auf der rechten Seite die Variabeln η, ζ ein, so erhält man

$$(2) \qquad dJ = \varphi_1(\eta, \zeta)d\eta$$

wo φ_1 eine rationale Function von η, ζ. Andererseits sind ζ und $\frac{d\eta}{dz}$ rationale Functionen von η, z. Folglich erhält man für die unabhängige Variable z

$$(3) \qquad dJ = \psi(z, \eta)dz$$

wo ψ eine rationale Function von z, η.

Nach N° 5 wird entsprechend einem Umlauf von z, welcher y_1, y_2, y_3 resp. in y'_1, y'_2, y'_3 überführt,

$$(4) \qquad \varphi(y'_1, y'_2, y'_3) = j\varphi(y_1, y_2, y_3),$$

wo j eine Constante und zwar, weil für $n > 2$ $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ eine algebraïsche Function von z ist, eine Einheitswurzel bedeutet. Demnach ist $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ eine Wurzel einer rationalen Function von z. Aus dieser Bemerkung und aus Gleichung (4) oder Gl. (9) N° 5 ergiebt sich demnach, dass auch

$$(5) \qquad dJ = Rdz,$$

wo R Wurzel einer rationalen Function von z bedeutet.

(1) Ueber die Bedeutung dieser Bezeichnung s. meine Arbeit in Borchardt's Journal B. 81, S. 111, N° 9.

Setzen wir voraus, dass die Gleichung (A) so beschaffen sei, dass *nicht* für einen willkürlichen Werth von z und noch für andere Werthe von z jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) je einen gleichen Werth annimmt, so ist demnach z eine rationale Function von η, ζ. Da wir vorausgesetzt haben, dass J das zu (η, ζ) gehörige Integral erster Gattung sei, so sind η, ζ eindeutige Functionen von J, folglich ist auch z eine eindeutige Function von J.

Demnach ergiebt sich aus dem Bestehen der Gleichung (5) nach den Untersuchungen der Herren Briot und Bouquet,(¹) *dass R^4 oder R^6 eine rationale Function von z sein müsse.*

Unter derselben Voraussetzung über die Gl. (A) ergiebt sich auch, dass η, z eindeutige Functionen von J. Demnach ist auch die Classe der algebraïschen Function η von z gleich Eins, und $\psi(z, \eta)$ nach Gleichung (3) die Ableitung des zu (z, η) gehörigen Integrals erster Gattung.

Der Ausdruck

$$\frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}}$$

bleibt ungeändert, wenn man an die Stelle von y_x setzt $b_{x1}y_1 + b_{x2}y_2 + b_{x3}y_3$, wo $b_{x\lambda}$ beliebige Constanten bedeuten, d. h. der genannte Ausdruck ist von der Wahl des Fundamentalsystems y_1, y_2, y_3 unabhängig. Gleichermassen ist $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ bis auf einen constanten Factor von der Wahl dieses Fundamentalsystems unabhängig, folglich ist auch bis auf einen constanten Factor R von der Wahl dieses Fundamentalsystems unabhängig.

Aus (3) und (5) folgt

$$R = \psi(z, \eta) \tag{6}$$

d. h. es ist R eine rationale Function von η, z. Wir behaupten aber, dass auch umgekehrt η eine rationale Function von z, R ist. Denn gäbe es einen Umlauf von z, welcher R ungeändert liesse, dagegen η in η' verwandelte, so würde in den beiden Blättern η, η' der Riemann'schen Fläche der algebraïschen Function η von z die Function R für dasselbe z denselben Werth annehmen. Wir können aber das Fundamentalsystem

(¹) Journal de l Ecole polytechnique t. 21, p. 222.

y_1, y_2, y_3 so wählen, dass für $z = z_1$, wo z_1 ein willkürlicher Werth, in den beiden genannten Blättern η denselben Werth η_1 erhält. Dann ist

$$(7) \qquad \int_{(z_1, \eta_1)}^{(z, \eta)} \psi(z, \eta) dz \equiv \int_{(z_1, \eta_1)}^{(z, \eta')} \psi(z, \eta) dz$$

d. h. gleich bis auf Vielfache von Periodicitätsmoduln, für Integrationswege, welche in den beiden Blättern η, η' übereinander laufen. Es ist demnach in der genannten RIEMANN'schen Fläche

$$(8) \qquad \int_{(z, \eta)}^{(z, \eta')} \psi(z, \eta) dz \equiv 0$$

d. h. gleich bis auf Vielfache von Periodicitätsmoduln. Aus Gl. (8) folgt nach einem bekannten Satze, dass es eine rationale Function von z, η giebt, welche für einen beliebig gegebenen Werth und nur für diesen unendlich wird, dass demnach die Classe der algebraïschen Function η von z gleich Null sei. Da aber nach dem oben Bewiesenen diese Classe gleich Eins, so folgt dass es keinen Umlauf von z giebt, welcher R ungeändert lässt, ohne gleichzeitig η ungeändert zu lassen, dass also η eine rationale Function von z, R ist.

Da eine gewisse Potenz jedes Integrals der Gleichung (A) eine rationale Function von η, z ist, so ergiebt sich auch, dass eine gewisse Potenz jedes solchen Integrals durch eine rationale Function von z, R dargestellt werden kann.

Es ist daher, wenn λ eine gewisse ganze Zahl bedeutet,

$$(9) \qquad y^\lambda = \alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2 R^2 + \alpha_3 R^3, \text{ oder } y^\lambda = \beta_0 + \beta_1 R + \cdots + \beta_5 R^5,$$

je nachdem R^4 oder R^6 rationale Function von z wird, wenn man mit α_x und β_x rationale Functionen von z bezeichnet.

Die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A) wird daher durch eine der Zahlen 2, 3, 4, 6 gegeben.

Da nach S. VII N° 3 die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A) stets gleich ist derselben Anzahl für eine Differentialgleichung dritter Ordnung, welche die Eigenschaft hat, dass *nicht* für einen willkürlichen Werth der unabhängigen Variabeln und noch andere Werthe derselben jeder Quotient zweier Integrale derselben je einen gleichen Werth annimmt, und für welche gleichzeitig dieselbe Gleichung (B) erfüllt ist, so folgt allgemein der Satz:

I. *Ist $p = 1$, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraïschen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A) genügt, durch eine der Zahlen 2, 3, 4, 6 gegeben.*

Es sei endlich

$$p = 0.$$

Alsdann giebt es bekanntlich eine rationale Function s von η, ζ

$$s = \varphi(\eta, \zeta) \tag{10}$$

von der Beschaffenheit, dass

$$\eta = \frac{f_2(s)}{f_1(s)} \qquad \zeta = \frac{f_3(s)}{f_1(s)}, \tag{11}$$

wo $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ ganze rationale Functionen n^{ten} Grades der Variabeln s, ohne einen allen gemeinschaftlichen Theiler.

Ein beliebiger Umlauf der Variabeln z führe η, ζ resp. in η', ζ' über, so ist

$$\eta' = \frac{a_{21} + a_{22}\eta + a_{23}\zeta}{a_{11} + a_{12}\eta + a_{13}\zeta}, \qquad \zeta' = \frac{a_{31} + a_{32}\eta + a_{33}\zeta}{a_{11} + a_{12}\eta + a_{13}\zeta} \tag{12}$$

Setzt man in die aus (11) sich ergebende Gleichung

$$s' = \varphi(\eta', \zeta'),$$

wo also s' den Werth bezeichnet in welchen s durch den genannten Umlauf übergeht, die Werthe aus (12) ein, so ergiebt sich nach Gl. (11), *dass s' eine rationale Function von s.* Da aber auch umgekehrt s eine rationale Function von s' sein muss, so folgt:

Zwischen s und s' findet eine Gleichung der Form

$$ass' + bs + cs' + d = 0 \tag{13}$$

statt, wo a, b, c, d Constanten sind.

Wir setzen

$$\xi_1^{\,2} = \frac{dz}{ds}, \qquad \xi_2 = \xi_1 \cdot s \tag{14}$$

Aus Gl. (13) folgt:

$$\frac{ds'}{dz} = \frac{bc - ad}{(as+c)^2}\frac{ds}{dz}. \tag{15}$$

Da s nicht constant, so ist $bc - ad$ von Null verschieden.

Nach dem genannten Umlaufe von z mögen ξ_1, ξ_2 resp. in ξ'_1, ξ'_2 übergehen, so ergiebt sich aus (14) und (15)

$$\xi_1'^2 = \frac{dz}{ds'} = \frac{1}{bc - ad}(as + c)^2 \cdot \xi_1^2$$

$$\xi_2'^2 = \frac{1}{bc - ad} \cdot \xi_1^2 (bs + d)^2$$

also

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= \frac{1}{\sqrt{bc - ad}}(a\xi_2 + c\xi_1) \\ \xi'_2 &= \frac{1}{\sqrt{bc - ad}}(b\xi_2 + d\xi_1). \end{aligned} \tag{16}$$

Da aber s, folglich auch ξ_1, ξ_2 algebraïsche Functionen von z sind, so lässt sich dieses Resultat auch folgendermassen aussprechen:

Es ist s der Quotient zweier Integrale ξ_1, ξ_2 einer linearen homogenen algebraïsch integrirbaren Differentialgleichung zweiter Ordnung, mit der unabhängigen Variabeln z und mit in z rationalen Coefficienten.

Es sei

$$f_x(s) \cdot \xi_1^n = \psi_x(\xi_1, \xi_2), \qquad x = 1, 2, 3 \tag{17}$$

wo ψ_x ganze rationale und homogene Functionen von ξ_1, ξ_2 n^{ten} Grades bedeuten.

Aus den Gleichungen (11) folgt alsdann

$$y_x = \rho \cdot \psi_x(\xi_1, \xi_2), \qquad x = 1, 2, 3 \tag{18}$$

Wenn nach einem Umlaufe von z, ρ, ξ_1, ξ_2, y_x resp. in ρ', ξ'_1, ξ'_2, y'_x übergehen, so dass

$$y'_x = a_{x1}y_1 + a_{x2}y_2 + a_{x3}y_3, \qquad x = 1, 2, 3$$

und nach Gl. (16)

$$\psi_x(\xi'_1, \xi'_2) = \chi_x(\xi_1, \xi_2),$$

wo χ_x ebenfalls eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades von ξ_1, ξ_2 bezeichnet, so ergiebt sich aus (18)

$$(19) \qquad \rho'\chi_x(\xi_1, \xi_2) = \rho[a_{x1}\phi_1 + a_{x2}\phi_2 + a_{x3}\phi_3]$$

Demnach ist $\frac{\rho'}{\rho}$ eine rationale Function von s.

Wenn die Function $\frac{\rho'}{\rho}$ für einen Werth von s verschwindet, so muss für denselben Werth

$$a_{x1}f_1 + a_{x2}f_2 + a_{x3}f_3 = 0 \qquad \text{für } x = 1, 2, 3$$

sein, d. h. da die Determinante der Grössen α_{xl} nicht verschwindet

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0$$

sein, was nicht möglich ist, da $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen.

Demnach ist $\frac{\rho'}{\rho}$ eine Constante. Da aber ρ eine algebraïsche Function von z ist, so folgt, *dass ρ Wurzel einer rationalen Function von z.* Also

II. *Im Falle $p = 0$ ist das allgemeine Integral der Gleichung (A) abgesehen von einer Wurzel einer rationalen Function als Factor durch eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades des Fundamentalsystems von Integralen ξ_1, ξ_2 einer algebraïsch integrirbaren linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten, darstellbar* (¹).

Betrachten wir nunmehr die Gl. (B) für den Fall $n = 2$.

Es sei

$$(20) \qquad a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + 2a_{12}y_1y_2 + 2a_{13}y_1y_3 + 2a_{23}y_2y_3 = 0$$

diese Gleichung, so ergiebt sich, wenn man mit η_0, ζ_0 ein beliebiges Werthsystem von η, ζ bezeichnet welches derselben genügt, und wenn man setzt

$$(21) \qquad s = \frac{\zeta - \zeta_0}{\eta - \eta_0},$$

$$(22) \qquad \eta = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}, \qquad \zeta = \frac{b'_0 + b'_1 s + b'_2 s^2}{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}.$$

(¹) Ueber solche Differentialgleichungen zweiter Ordnung vergl. meine Abhandl. in Borch. Journ. B. 81, S. 97 und B. 85, S. 1.

Aus den Gll. (21), (22) ergiebt sich analog wie aus den Gll. (10), (11), dass zwischen zwei Zweigen s und s' der Function s von z eine bilineare Gleichung von der Form (13) stattfindet.

Aus dieser Gleichung folgert man wie oben, dass s der Quotient zweier Integrale ξ_1, ξ_2 einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten ist, jedoch mit dem Unterschiede, dass *hier die Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht algebraïsch integrirbar zu sein braucht*, da s nicht algebraïsch sein muss. Auch für diesen Fall gelten die Gll. (18), und in diesen sind die Functionen ψ_x ganze rationale Functionen zweiten Grades, während ρ constant wird. Dieses Resultat ist mit dem in N° 2 Gegebenen übereinstimmend.

7.

Für die lineare homogene Differentialgleichung (A), zwischen deren Integralen eine Gleichung (B) besteht, ergeben sich nach dem Vorhergehenden folgende Resultate:

I. Ist der Grad n der Gleichung (B) gleich zwei, so ist die Gleichung (A) übereinstimmend mit der Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher das Quadrat jedes Integrals einer beliebigen linearen homogenen Differentialgleichung *zweiter* Ordnung mit rationalen Coefficienten genügt.

II. Ist n grösser als zwei, so sind die Integrale der Gleichung (A) algebraïsche Functionen von z.

Hierbei ergeben sich drei Fälle:

a) Ist die Classe p der algebraïschen Gleichung (B) grösser als Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraïschen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A) genügt, nicht grösser als *vier*.

b) Ist p gleich Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln zwei, drei, vier oder sechs.

c) Ist p gleich Null, so sind die Integrale der Gleichung (A) abgesehen von einer Wurzel einer rationalen Function als einem für alle gültigen Factor, rationale ganze und homogene Functionen n^{ten} Grades des Fundamentalsystems von Integralen ξ_1, ξ_2 einer algebraïsch integrirbaren linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten.

Da jede algebraïsch integrirbare Gleichung (A) die Eigenschaft hat, dass zwischen den Elementen des Fundamentalsystems y_1, y_2, y_3 eine Gleichung (B) besteht, so sind durch diese Resultate auch alle die Fälle erschöpft, in welchen eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten nur algebraïsche Integrale besitzt.

Heidelberg 1882.