NOTE SUR LES INTÉGRALES EULÉRIENNES.

Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite

PAR

L. BOURGUET
à PARIS.

On a d'après M. HEINE:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2i \sin a\pi} \int z^{a-1} e^z dz$$

L'intégration étant faite le long d'un contour qui contient l'origine et qui s'étend indéfiniment vers les x négatifs, le contour pouvant ne pas être fermé. Prenons pour contour deux droites inclinées d'un angle α passant par l'origine et un petit cercle autour de l'origine. L'intégrale le long du petit cercle est nulle pour a ayant une partie réelle comprise entre 0 et 1. L'intégration le long des deux droites donne

$$\Gamma(a) = \frac{1}{\sin a\pi} \int_0^\infty \rho^{a-1} e^{\rho \cos \alpha} \sin(\rho \sin \alpha + a\alpha) d\rho$$

qui peut aussi se mettre sous la forme

$$\Gamma(a) = \frac{1}{\sin a\pi (\sin \alpha)^a} \int_0^\infty \rho^{a-1} e^{\rho \cot \alpha} \sin(\rho + a\alpha) d\rho$$

Cette formule est vraie pour toute valeur de $\alpha \geqq \frac{\pi}{2}$.

Si on fait $\alpha = \frac{\pi}{2}$, elle devient

$$\Gamma(a) = \frac{1}{\sin a\pi} \int_0^\infty \rho^{a-1} \sin\left(\rho + \frac{a\pi}{2}\right) d\rho\,;$$

si on fait $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, elle devient

$$\Gamma(a) = \frac{(\sqrt{2})^a}{\sin a\pi} \int_0^\infty \rho^{a-1} e^{-\rho} \sin\left(\rho + \frac{3a\pi}{4}\right) d\rho$$

si on fait $\alpha = \pi$, elle devient

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty \rho^{a-1} e^{-\rho} d\rho$$