EINE ANNÄHERUNGSMETHODE IM PROBLEME DER DREI KÖRPER.

VON

HUGO GYLDÉN.

Von dem Problem der drei Körper wird bekanntlich gesagt, dass es noch heut zu Tage ungelöst dasteht und mit den uns gegenwärtig zu Gebote stehenden analytischen Hülfsmitteln nicht gelöst werden kann, wenn nämlich die Lösung im streng mathematischen Sinne aufgefasst wird. Ein derartiger Ausspruch erheischt jedoch eine genaue Fixirung dessen, was man unter »streng mathematisch» zu verstehen hat; denn sonst könnte die Meinung darüber schwankend werden, was die Wissenschaft in Bezug auf das besagte Problem bereits geleistet hat, und was von ihr in der nächsten Zeit erwartet werden darf.

Nennt man nur diejenige Lösung streng mathematisch, welche direct, d. h. ohne fortgesetzte Annäherungen zu den unbedingt geltenden Relationen zwischen der Zeit und den Coordinaten der drei Körper führt, so muss eingeräumt werden, dass wir bis jetzt gar keine Vorstellung davon haben, wie eine solche Lösung zu Stande gebracht werden soll, und dass die Hoffnung, diese demnächst zu erhalten, vorläufig als illusorisch bezeichnet werden muss. Der Ursache nachzuforschen und feststellen zu suchen, woher diese geringen Aussichten entspringen, ist aber nicht nur an und für sich nicht ohne Interesse, sondern für die zukünftige Leistungsfähigkeit der Wissenschaft auf dem Gebiete des betreffenden Problemes von grösster Bedeutung.

Die Beantwortung jener Frage wäre eine leichte, wollte man sich damit begnügen zu sagen, unsere analytischen Hülfsmittel sind gegenwärtig noch nicht in dem Maasse ausgebildet, dass wir mit ihnen die Schwierigkeiten des Problems der drei Körper bewältigen könnten. Eine Erklärung aber wäre hiermit nicht gegeben, sondern die Frage nur auf ein anderes Gebiet übergeführt, nämlich auf das der Metaphysik (der Mathematik). Tiefer liegt also der Grund jenes Unvermögens das Problem zu lösen, aber andrerseits doch erkenntlich genug um nachgewiesen werden zu können. Es dürfte nämlich kaum ernstlichem Widerspruch begegnen, wenn wir sagen, dass die Ursache, weshalb die Lösung des Problems der drei Körper uns so schwierig erscheint, einfach darin liegt, dass uns die Vorstellungen von den Bewegungserscheinungen in einem Systeme von mehr als zwei Körpern noch abgehen oder doch noch sehr wenig geläufig sind. Diese Bewegungserscheinungen sind aber auch voraussichtlich nicht in so einfacher Weise aus denen zusammen zu setzen, die wir in einem Systeme von zwei Körpern beobachten können — und die daher bereits eine Thatsache der Erfahrung sind — dass unser Geist, durch Synthese dieser einfacheren Elemente, sich unmittelbar in die Sphäre jener mehr zusammengesetzten Vorstellungen versetzen könnte.

Die Erscheinungen, die man seit 2000 Jahren im Planetensysteme beobachtete, und die zunächst ihren Ausdruck in den Kepler'schen Gesetzen gefunden haben, waren auch nicht die geeignetsten jene Vorstellungen auszubilden, aus welchen die für die directe Lösung des Problems der drei Körper vorauszusetzenden Begriffe hätten abstrahirt werden können. Im Planetensysteme ist nämlich der Einfluss der Planeten auf einander gegenüber dem der Sonne sehr gering, während Zeiträumen, die mit einem für uns anschaulichen Maasse übersichtlich gemessen werden können. Die Erscheinungen, die wir beobachtet haben, sind also nahezu dieselben, die man in einem Systeme von zwei Körpern beobachtet hätte, und schliessen sich während der historischen Zeit den Kepler'schen Gesetzen einigermassen an. Während Zeiträumen aber, die nach Jahrtausenden gezählt werden müssen, gestalten sich die Erscheinungen der Planetenbewegung wesentlich anders, und man kann wohl sagen, dass die Bahnen der Planeten durchschnittlich Kreisen ähnlicher sind als Kepler'schen Ellipsen, wenn nämlich die Elemente letzterer als konstant angenommen werden. Einem intelligenten Wesen, dem die Zeit eines Jahrtausends etwa vorkäme, wie uns ein Tag, würde die Kepler'sche Ellipse schwerlich wie eine Annäherung an die wirkliche Bahn vorkommen. Es würde nicht die zum Begreifen des Problems der drei Körper erforderlichen Vorstellungen aus Elementen zusammen zu setzen suchen, die ihm die Bewegungen im Systeme von nur zwei Körpern darbieten. In der Natur unserer Existenzbedingungen liegt es also, dass die Vorstellungen, deren Vorhandensein eine Bedingung der Lösung des oben erwähnten Problemes ausmacht, noch nicht entwickelt sind; die mathematische Analyse hat daran wenig Schuld. Mittelst Analyse jedoch eine Erkenntniss erlangen zu wollen, wozu nicht schon vorher der Grund vom menschlichen Geiste erworben wäre, müsste als dem widersprechend erachtet werden, was uns die Theorie der Erkenntniss lehrt.

Die mathematische Analyse ist zunächst nur der Hebel, durch den die construirbaren Vorstellungen, die einen immanenten Character haben, in's Bewusstsein gebracht und zu Urtheilen verarbeitet werden. Ihre Leistung ist derjenigen der logischen Operationen aequivalent; nur verläuft die Kette der Schlussfolgerungen bei ersterer theilweise im Unbewussten, indem sie durch den mathematischen Mechanismus fortgeführt wird, während die logischen Schlüsse sämmtlich bewusst sind oder doch sehr leicht bewusst werden können.

Unsere Vorstellungswelt gründet sich ursprünglich auf Sinneswahrnehmungen, beziehungsweise Beobachtungen; und wie wir auch diese Welt erweitern, immer müssen wir in derselben Sensationen als Elemente wiederentdecken können. Eine Vorstellung, die nicht in der Sphäre des empirisch Gegebenen wurzelt, oder bei der empirische Elemente nicht nachweisbar sind, giebt es nicht. — Umgekehrt aber, können wir aus solchen Elementen doch unsere Vorstellungswelt erweitern, indem wir nämlich die erweiterten Begriffe mit Hülfe der Phantasie veranschaulichen, und bei einem solchen Processe ist wiederum die mathematische Analysis verwendbar, indem sie die Formulirung der Begriffserweiterungen erleichtert.

Erkennen wir nun diesen Weg zur Erweiterung unserer Kenntnisse im allgemeinen als einen wissenschaftlich berechtigten an — und ich wüsste nicht, wie derselbe zu vermeiden wäre — so handelt es sich darum, denselben für das jetzt in Frage stehende Problem zu verwerthen und überhaupt mathematisch zu bezeichnen. Die Synthese aber, welche aus einfacheren Vorstellungselementen zu mehr zusammengesetzten führt, entspricht genau dem Processe, durch den eine Function durch fortgesetzte

Annäherungen gebildet wird, wobei die einzelnen Resultate aus einfacheren, uns bereits bekannten Functionen zusammengesetzt sind. Es ist also der Weg der successiven Annäherungen, den wir verfolgen müssen, der uns aber keineswegs die Aussicht entzieht das Resultat einst in aller Strenge erhalten zu können; denn der Begriff der mathematischen Transcendenz, der diesem Wege im allgemeinen eigenthümlich ist, kann auf die resultirende Functionsform übertragen werden, die schliesslich auch das Resultat der directen Lösung sein muss.

Die vorhergehenden Betrachtungen können wir nun kurz folgendermaassen zusammenfassen: suchen wir eine *einfache* Lösung mittelst uns jetzt bekannter Functionsformen, so stellen wir uns jedenfalls eine widersinnige Aufgabe; wir müssen vielmehr unsern Geist dahin zu entwickeln suchen, dass die Lösung, die für uns einst erreichbar wird, einfach erscheint. Dieser Evolutionsprocess heisst, mathematisch gesprochen, das Anschaulichwerden neuer Functionsformen. — Nicht wie durch einen Zauberschlag oder durch eine unmittelbare Erkenntniss werden wir die Lösung des Problems der drei Körper erlangen, sondern auf einem Pfade, auf dem jeder Schritt nur mit Ueberwindung bedeutender Schwierigkeiten gethan werden kann.

Wenn wir also den Weg der successiven Annäherungen einschlagen, den einzigen auf dem wir gegenwärtig einige Aussicht haben, das betreffende Problem wenigstens in gewissen Fällen lösen zu können, so müssen wir dabei an zwei Bedingungen festhalten: erstens nämlich, dass die Folge der Annäherungen convergent sei, und zweitens, dass die Resultate dieser nie die Zeit, oder Kreisbögen, die mit der Zeit unbegränzt wachsen können, ausserhalb der periodischen Functionszeichen enthalten. Die Nothwendigkeit jene erste Bedingung zu stellen, leuchtet von selbst ein; der zweiten muss aber genügt werden, damit die Lösung eine wirklich unbedingte Gültigkeit habe und der vorausgesetzten Stabilität des Systems entspreche. — Eine jede Lösung, welche den gestellten Bedingungen genügt, nenne ich eine *absolute Lösung,* ohne Rücksicht auf welchem Wege dieselbe auch erlangt worden sei. Man erkennt aber leicht, dass es nur eine einzige absolute Lösung geben kann; so dass, wenn man dieselbe auch unter verschiedener Form findet, die eine aus der andern durch gehörige Entwicklung hervorgehen muss. Das Resultat, welches durch die Methode der successiven Annäherungen gefunden wird, muss also mit dem identisch sein, was einst durch die directe Lösung hervorgehen wird.

Die Lösung des Problems der drei Körper im absoluten Sinne ist eigentlich nur von Lagrange und Laplace in's Auge gefasst worden; was seitdem auf dem Gebiete der Mechanik des Himmels geleistet wurde, ist zwar äusserst werthvoll und für die Astronomie fördernd gewesen; in Bezug auf den absoluten Character der Resultate aber kaum über die Arbeiten jener grossen Männer hinausragend. Von wie grossem Werthe diese Arbeiten aber auch gewesen sind — sie haben in der That doch unsere Vorstellungen über die Bewegungen der Planeten entwickelt — so sind sie doch keineswegs als endgültig anzusehen. Man erinnert sich z. B., dass die gefundenen Ausdrücke der Secularstörungen aus einer begränzten Anzahl von Gliedern bestehen, während diese Anzahl in der Wirklichkeit doch unendlich ist: auch lassen sich gegen die von den genannten Gelehrten aufgestellten Methoden, die Zeit ausserhalb der trigonometrischen Functionszeichen zu eliminiren, Bedenken erheben, welche in der Bemerkung wurzeln, dass wenn einmal die Zeit als Factor in einem intermediären Resultate aufgetreten ist, so hat man möglicherweise das erste Glied einer nicht beständig convergenten Reihenentwicklung vor sich.

Seit einiger Zeit bin ich im Besitze einer Methode, die absolute Lösung des mehrerwähnten Problemes zu finden, welche, wenigstens auf die Untersuchung der Bewegungen in unserem Planetensystem angewendet, jedenfalls den beiden oben näher bezeichneten Bedingungen genügen dürfte. In dem Maasse jedoch, wie die Bahnen der einzelnen Körper des Systems mehr excentrisch werden und die Anziehungen der Hauptkraft im Werthe näher kommen, wird die Anwendung dieser Methode mehr und mehr mühsam, und es lässt sich eine solche Constitution des Systems denken, dass die Anwendbarkeit derselben völlig illusorisch wird. Es scheint, dass wir in der nächsten Zeit in solchen Fällen auf die absolute Lösung verzichten müssen und uns mit einer relativen, für eine begränzte Zeit geltenden begnügen. — Die erwähnte Methode beruht auf Principien, von denen ich einen Theil jetzt darzulegen mir erlauben werde.

Es handelt sich darum, gewisse Grössen aus Differentialgleichungen zu bestimmen, ohne dass in den Resultaten die unabhängige Veränderliche als Factor vorkommt, wiewohl sie als solcher erscheint, wenn man in der ersten Annäherung alle Grössen, welche mit der zweiten Potenz der störenden Masse multiplicirt sind, bei Seite lässt. In den Differentialgleichungen, durch deren Integration man genäherte Werthe der Unbekannten findet, müssen daher vor allen Dingen gewisse Grössen zweiter Ordnung mitgenommen werden. Trotzdem lassen sich die meisten Gleichungen, welche bei der hier in Frage stehenden Untersuchung nach und nach vorkommen, auf die Form der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bringen, und die in diesen Gleichungen vorkommenden bekannten Functionen lassen sich innerhalb gewisser Gränzen willkürlich wählen. Eine solche Gleichung sei

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + X_1 y = X_0\,;$$

die Function X_1 wird als bekannt angenommen und besteht aus zwei Theilen, wovon der eine von der störenden Masse unabhängig ist, der zweite aber mit dieser Masse verschwindet. Die Function X_0 nehmen wir auch als bekannt an, aber nur in der ersten Annäherung; denn sie enthält im Allgemeinen Glieder der Form

$$\Psi_0 + \Psi_2 y^2 + \Psi_3 y^3 + \ldots.$$

und da y als eine Grösse erster Ordnung angesehen wird, und ebenso die Functionen Ψ_0, $\Psi_2, \ldots$, so vernachlässigen wir, wenn X_0 mit Ψ_0 identificirt wird, nur Grössen dritter Ordnung. Und wenn wir zu der angesetzten Reihe noch ein Glied $\Psi_1 y$ fügen, so ist Ψ_1, wenn auch nur mit der ersten Potenz der störenden Masse multiplicirt, doch aus andern Gründen so klein, dass das Product $\Psi_1 y$ zu den Grössen dritter Ordnung gezählt werden darf.

Indem die Function Ψ_1 als gewissermaassen von X_1 abgetrennt anzusehen ist, lässt sich letztere innerhalb gewisser Gränzen beliebig wählen, und ich werde bei der Bestimmung dieser Function der Bedingung zu genügen suchen, dass das Integral der Gleichung

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + X_1 y = 0$$

die Form:

$$(3) \qquad y = C_1 P + C_2 [Q + lxP]$$

annimmt. Hier bedeuten C_1 und C_2 die Integrationsconstanten, P und Q zwei Functionen von x, die nur periodische Glieder enthalten, und endlich l eine zu unserer Verfügung stehende Constante.

Setzen wir:

$$y_1 = P; \quad y_2 = Q + lxP,$$

so müssen bekanntlich y_1 und y_2 der Bedingungsgleichung

$$y_2 y'_1 - y_1 y'_2 = \mu$$

genügen, wo μ eine neue Constante bezeichnet. Aus dieser Bedingungsgleichung lässt sich eine Relation zwischen P und Q herleiten, und es ergiebt sich

$$Q'P - P'Q + lPP = -\mu,$$

woraus folgt

$$Q = P\left\{C_3 - \int\left(\frac{\mu}{PP} + l\right)dx\right\},$$

indem C_3 die Integrationsconstante bezeichnet, die wir aber sofort gleich Null setzen können. — Damit nun Q die angedeutete Eigenschaft besitze, nämlich kein Glied mit dem Factor x zu enthalten, muss die Constante l offenbar so gewählt werden, dass sie sich gegen das constante Glied in der Entwicklung von $\frac{\mu}{PP}$ aufhebt. Wir werden in der Folge die Constante μ gleich $+1$ oder gleich -1 setzen, wodurch die Allgemeinheit der Resultate offenbar nicht gemindert wird.

Dies vorausgesetzt, stellen wir das allgemeine Integral der Gl. (1) folgendermaassen auf

$$y = P\left\{C_1 - \int X_0 [Q + lxP]\, dx\right\}$$
$$+ [Q + lxP]\left\{C_2 + \int X_0 P dx\right\}$$

Weil aber

$$\int xX_0 P dx = x\int X_0 P dx - \int dx \int X_0 P dx,$$

so hat man auch

$$y = C_1 P + C_2 [Q + lxP]$$
$$- P\int X_0 Q dx + Q\int X_0 P dx$$
$$+ lP\int dx \int X_0 P dx$$

Durch die Aufstellung dieser Formel leuchtet die Absicht mit der gewählten Form der Differentialgleichung (1) sofort ein. Findet sich nämlich im Producte $X_0 Q$ oder in dem Integrale

$$\int X_0 P dx$$

ein constantes Glied, so erscheint im Resultate ein Glied von der Form

$$\gamma x P,$$

indem γ einen numerischen Coefficienten bezeichnet. Dieses Glied bringt man aber unmittelbar zum Verschwinden, indem man die Integrationsconstante C_2 in geeigneter Weise bestimmt, die bei den Anwendungen der aufgestellten Integralformeln auf das Problem der drei Körper immer überzählig ist.

Das Product $X_0 P$ enthält entweder gar kein constantes Glied, oder doch nur ein solches von höherer Ordnung, und dies braucht bei der ersten Annäherung nicht mit berücksichtigt zu werden. Indem wir nun die Constante C_2 in der oben bezeichneten Weise bestimmen, die Constante C_1 aber vorläufig unbestimmt lassen, erhalten wir ein Resultat der Form

$$y = C_1 P + C_2 Q + \text{ per. Glieder};$$

und wenn wir von X_0 nur die Glieder dritter Ordnung inclusive berücksichtigen, so haben wir

$$X_0 = \Psi_0 + \Psi_1 [C_1 P + C_2 Q + \ldots] + \Psi_2 [C_1 P + C_2 Q + \ldots]^2$$

und

$$X_0 P = \Psi_0 P + \Psi_1 P [C_1 P + C_2 Q + \ldots] + \ldots.$$

In diesem Ausdrucke muss man nun suchen die Constante C_1 so zu bestimmen, dass kein constantes Glied daselbst nachbleibt. — Würde eine solche Bestimmung indessen nicht gelingen, so wäre hierdurch angezeigt, dass der Erscheinung, welche durch das Integrationsresultat representirt wird, die Stabilität mangelt. Bei der Anwendung der oben bezeichneten Integrationsmethode auf die Bewegungen der Planeten kommen derartige Hindernisse indessen nicht vor; denn, wie schon bemerkt wurde, das Product $X_0 Q$ enthält in der Regel kein constantes Glied, und wenn ein solches vorkommt, so lässt es sich in der angeführten Weise eliminiren.

Der Functionen P, welche dem oben bezeichneten Zwecke entsprechen, giebt es verschiedene. Die einfachsten und zugleich auch in anderer Beziehung geeigneten findet man unter den rationalen Verbindungen einfacher elliptischer Functionen. Wir entnehmen dieser zuerst die allereinfachsten Fälle, indem wir für P der Reihe nach die Werthe $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ und $\operatorname{dn} x$ setzen; es ergeben sich alsdann für Q und l

$$Q = \operatorname{sn} x \frac{H'(x)}{H(x)}; \quad l = -\frac{K-E}{K}.$$

$$Q = \frac{\operatorname{cn} x}{k'^2} \frac{H'_1(x)}{H_1(x)}; \quad l = -\frac{k'^2 K - E}{k'^2 K}$$

$$Q = \frac{\operatorname{dn} x}{k'^2} \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)}; \quad l = \frac{E}{k'^2 K}$$

Die Resultate sind also sehr einfach und dabei in leichter Weise zu verwerthen; sie entsprechen, wie man leicht bemerkt, den Integralen der Lamé'schen Gleichungen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - [2k^2 \operatorname{sn} x^2 - 1 - k^2]\, y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - [2k^2 \operatorname{sn} x^2 - 1 \qquad]\, y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - [2k^2 \operatorname{sn} x^2 \qquad - k^2]\, y = 0$$

In nächster Reihe werden wir für P die Combinationen:

$$\frac{d \operatorname{sn} x}{dx} = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$$

$$-\frac{d \operatorname{cn} x}{dx} = \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x$$

$$-\frac{1}{k^2} \frac{d \operatorname{dn} x}{dx} = \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x$$

substituiren, und finden dann nach einigen Reductionen die folgenden Werthe der Grössen Q und l:

$$Q = \frac{1}{k'^2} \operatorname{sn} x - \frac{1+k^2}{k'^4} \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x; \qquad l = \frac{(1-k^2)K - (1+k^2)E}{k'^4 K}$$

$$Q = -\operatorname{cn} x - \frac{k'^2 - k^2}{k'^2} \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x; \qquad l = \frac{k'^2 K - (k'^2 - k^2)E}{k'^2 K}$$

$$Q = -\operatorname{dn} x - \frac{1+k'^2}{k'^2} \frac{H'_1(x)}{H_1(x)} \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x; \qquad l = \frac{(1 + k'^2 - k^2)K - (1+k^2)E}{k'^2 K}$$

Die Differentialgleichungen, deren Integrale die soeben angeführten Ausdrücke representiren, sind die folgenden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - [2.3k^2 \operatorname{sn} x^2 - 1 - k^2]\, y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [2.3k^2 \operatorname{cn} x^2 - 1 \qquad]\, y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [2.3 \operatorname{dn} x^2 - 1 - k'^2]\, y = 0,$$

und sie gehören sämmtlich zu der Classe der Lamé'schen Gleichungen.

Man könnte leicht die Anzahl jener Resultate beliebig vermehren, allein es erscheint kaum von Interesse, wenigstens nicht für unseren Zweck, hier weiter vorzugehen. Statt dessen werde ich eine andere Form von P anführen, welche gleichfalls den gestellten Bedingungen genügt, die aber nicht zu den elliptischen Functionsformen gehört. Diese Form ist die folgende:

$$P = e^{\lambda \operatorname{Sin} x}$$

wo λ einen constanten Coefficienten bezeichnet. Es findet sich hiermit:

$$Q = e^{\lambda \operatorname{Sin} x} \int [e^{-2\lambda \operatorname{Sin} x} - l]\, dx$$

Dieser Ausdruck muss nun nach den Vielfachen von x entwickelt werden, was leicht mit Hülfe von Cylinderfunctionen geschehen kann. Wir begnügen uns, hier bloss die ersten Glieder hinzusetzen. Es findet sich alsdann:

$$l = 1 + \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{1 \cdot 2} (2\lambda)^2 + \tfrac{3}{8} \tfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (2\lambda)^4 + \ldots$$

$$Q = e^{\lambda \operatorname{Sin} x} \Big\{ \left[2\lambda + \tfrac{3}{4} \tfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2\lambda)^3 + \ldots\right] \operatorname{Cos} x$$

$$- \tfrac{1}{2} \left[\tfrac{1}{2} \tfrac{1}{1 \cdot 2} (2\lambda)^2 + \ldots\right] \operatorname{Sin} 2x$$

$$- \ldots \Big\}$$

Endlich findet sich die Differentialgleichung, welcher durch diese Resultate genügt wird, wie folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [\lambda \operatorname{Sin} x - \lambda^2 \operatorname{Cos} x^2]\, y = 0$$

Die Anwendung der im Vorhergehenden dargestellten Methode werde ich jetzt an einem Beispiele zeigen, was ich mit der Angabe einiger Details hier anführe. Die vorgelegte Differentialgleichung sei:

$$\frac{d^2y}{dv^2} + \alpha^2 \operatorname{Cos} \lambda v \,.\, y = X_0,$$

wo α und λ constante Coefficienten und X_0 eine Function der Form:

$$\Psi_0 + \Psi_1 y + \Psi_2 y^2 + \ldots\ldots$$

bezeichnen mögen. Es werde nun ein Integral der vorgelegten Gleichung ohne willkürliche Constanten verlangt, das aber aus lauter rein periodischen Gliedern bestehen soll.

Statt der Veränderlichen v führe ich eine neue x ein, indem ich setze:

$$\lambda v = 2 \frac{\pi}{2K} x$$

und mir vorbehalte, über den Modul k, von dem das vollständige Integral K abhängt, noch zu disponiren. Hiernach erhalten wir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4\alpha^2}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \operatorname{Cos} 2 \frac{\pi}{2K} x \,.\, y = \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 X_0$$

Um diese Gleichung auf eine der im Vorhergehenden betrachteten Formen zu bringen, bedienen wir uns der Entwicklung:

$$\begin{aligned}\text{Cos}\,2\,\text{am}\,x = &-A\\ &+\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{16q}{k^2(1-q^2)}\,\text{Cos}\,2\,\frac{\pi}{2K}x\\ &+\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{32q^2}{k^2(1-q^4)}\,\text{Cos}\,4\,\frac{\pi}{2K}x\\ &+\ldots\,,\end{aligned}$$

wo die Constante A von der Ordnung der Grösse k^2 ist. Man hat nämlich:

$$A = 1 - \frac{2}{k^2}\frac{K-E}{K}$$

oder

$$A = -\frac{\pi}{2K}\left(\frac{1}{8}k^2 - \frac{3}{64}k^4 + \ldots\right)$$

Aus der angeführten Entwicklung erhalten wir:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \text{Cos}\,2\,\frac{\pi}{2K}x = &\frac{k^2(1-q^2)}{16q}\,\text{Cos}\,2\,\text{am}\,x\\ &-\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{2q(1-q^2)}{1-q^4}\,\text{Cos}\,4\,\frac{\pi}{2K}x\\ &-\ldots\ldots\\ &+\frac{k^2(1-q^2)}{16q}A\end{aligned}$$

Diesen Werth führen wir in die vorgelegte Differentialgleichung ein, und bestimmen dabei den Modul in der Weise, dass der Coefficient von Cos 2 am x gleich k^2 wird. Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} - (2k^2\,\text{sn}\,x^2 - k^2)\,y = &\frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 X_0\\ &-\frac{4\alpha^2}{\lambda^2}\frac{k^2(1-q^2)}{16q}Ay\\ &+\frac{4\alpha^2}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\frac{2q(1-q^2)}{1-q^4}\,\text{Cos}\,4\,\frac{\pi}{2K}x\,.\,y\\ &+\ldots\ldots\\ = &X.\end{aligned}$$

indem wir nämlich der Kürze wegen die Summe der Glieder rechter Hand mit X bezeichnen. Wie man leicht bemerkt, sind die mit y multiplicirten Glieder rechter Hand Grössen dritter Ordnung.

Das Integral dieser Gleichung ist uns aber bekannt; es ist nämlich:

$$y = C_1 \operatorname{dn} x + C_2 \frac{\operatorname{dn} x}{k'^2} \left\{ \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} + \frac{E}{K} x \right\}$$

$$- \frac{\operatorname{dn} x}{k'^2} \int X \operatorname{dn} x \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} dx + \frac{\operatorname{dn} x}{k'^2} \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} \int X \operatorname{dn} x \, dx$$

$$+ \frac{1}{k'^2} \frac{E}{K} \operatorname{dn} x \int dx \int X \operatorname{dn} x \, dx$$

Vermöge der Bedingung, wodurch k bestimmt werden soll, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{k^2(1-q^2)}{16q} \frac{4a^2}{\lambda^2} = k^2,$$

woraus folgt:

$$q^2 + 4 \frac{\lambda^2}{a^2} q - 1 = 0$$

Hieraus ergiebt sich:

$$q = -2 \frac{\lambda^2}{a^2} + \sqrt{4 \frac{\lambda^4}{a^4} + 1}$$

und sieht man sogleich, dass bei jedem Werthe des Verhältnisses $\frac{\lambda}{a}$ die Grösse q kleiner, oder jedenfalls nicht grösser als die Einheit ausfallen muss.

Wenn nun X_0 eine bekannte, aus periodischen Gliedern bestehende Function bedeutet, wo das Argument $2 \frac{\pi}{2K} x$ und die Vielfachen desselben nicht vorkommen, so wird man den Werth des Integrales leicht und sicher ermitteln können, sofern die willkürlichen Constanten C_1 und C_2 gleich Null gesetzt werden dürfen. — Findet sich aber in X_0 ein Glied der Form:

$$l \operatorname{Sin} 2 \frac{\pi}{2K} x,$$

sei es direct, oder in Folge der successiven Annäherungen entstanden, so erscheint im Resultate ein Glied der Form

$$l_1\, x \operatorname{dn} x,$$

was aber unmittelbar weggeschafft werden kann, indem man die Constante C_2 aus der Gleichung

$$C_2 - k'^2 l_1 = 0$$

bestimmt.

Endlich betrachten wir den Fall, wo in X_0 ein Glied der Form

$$h \operatorname{Cos} 2 \frac{\pi}{2K} x$$

vorkommt. Ein solches Glied kann zwar nicht immer weggeschafft werden, aber doch unter gewissen Bedingungen, die eben dem Probleme der drei Körper eigenthümlich sind. Hierzu gehört nämlich, dass der Coefficient h eine Grösse zweiter Ordnung ist, sowie dass in der Function Ψ_1 ein Glied derselben Form vorhanden ist. Nennen wir den Coefficienten dieses Gliedes p, so ist die Constante C_1 so zu bestimmen, dass der Coefficient von $\operatorname{Cos} 2 \frac{\pi}{2K} x$ in der Entwicklung von

$$h \operatorname{Cos} 2 \frac{\pi}{2K} x + p C_1 \operatorname{Cos} 2 \frac{\pi}{2K} x \operatorname{dn} x$$

verschwindet. — Es ist übrigens leicht zu bewirken, dass ein solches Glied in der Function Ψ_1 vorkommt; denn wäre es nicht vorhanden, so hätte man nur nöthig, die ursprüngliche Gleichung in der Gestalt

$$\frac{d^2y}{dv^2} + (\alpha^2 + p) \operatorname{Cos} \lambda v \,.\, y = X_0 + p \operatorname{Cos} \lambda v \,.\, y$$

zu schreiben und $\alpha^2 + p$ statt α^2 in den nachfolgenden Formeln anzuwenden.

Wir haben jetzt gesehen, wie die im Vorhergehenden entwickelte Methode angewendet wird; in Bezug auf ihr Wesen und ihre Bedeutung für die Lösung des Problems der drei Körper seien mir noch einige Bemerkungen gestattet.

Die Glieder, die wir zu vermeiden beabsichtigten, sind als dadurch entstanden anzusehen, dass eine gewisse Grösse gleich Null geworden ist. Das Glied $x \operatorname{Sin} x$ entsteht z. B. dadurch, dass die Grösse δ in dem Ausdrucke

$$\operatorname{Sin} x \int \operatorname{Cos} \delta x \,.\, dx$$

verschwindet. Diesem entsprechend ist auch das Mittel, solche Glieder zu vermeiden, hier gefunden worden. Denn die Lamé'schen Gleichungen, von welchen wir vorhin eine in Anwendung brachten, sind specielle Fälle von allgemeineren Gleichungen, welche von Herrn Hermite zuerst integrirt worden sind. Die hier benutzten Gleichungen entstehen aus den allgemeinen dadurch, dass der von Hermite mit ω bezeichneten Grösse gewisse Specialwerthe zuertheilt werden, nämlich $0, K$ und $K \pm iK'$. Ueberhaupt lassen sich für den hier verfolgten Zweck geeignete Gleichungen finden, indem man die Grösse c in dem Ausdrucke

$$y = z\left(e^{c\int\frac{dx}{z^2}} + e^{-c\int\frac{dx}{z^2}}\right),$$

wo z eine Function von x bedeutet, in Null übergehen lässt. Bekanntlich lassen sich die Integrale vieler Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch eine solche Form darstellen. Durch die angedeutete Specialisirung geht dieselbe, jedoch nicht immer, in solche über, welche wir im Vorhergehenden betrachtet haben.

Umgekehrt aber könnte man, gerade an diese Bemerkung anknüpfend, vermuthen, dass unser Zweck in mehr directer Weise erreicht werden würde, wenn man die Grösse c nicht gleich Null setzte, sondern derselben einen endlichen, wenn auch kleinen Werth gäbe. Dass dieser Punkt genauer, als bisher geschah, untersucht werden muss, ist sicher; indessen hat es doch den Anschein, als ob die Vortheile mehr auf Seite der soeben vorgetragenen Methode liegen.

Die Herstellung der Form, bei der das Argument ausserhalb der trigonometrischen Functionszeichen nicht heraustritt, ist indessen von durchgreifender Bedeutung für die Lösung des Problems der drei Körper. Glieder, die man, ohne diese Form zu erhalten zu suchen, zusammenschlagen konnte, lassen sich nicht mehr vereinigen. Die Glieder

$$A \operatorname{Cos} x + B \operatorname{Cos}[(1+\delta_1)x + D_1] + C \operatorname{Cos}[(1+\delta_2)x + D_2] + \ldots\ldots,$$

wo δ_1, $\delta_2 \ldots\ldots$ kleine Grössen erster Ordnung bedeuten, konnte man z. B. in der Weise vereinigen, dass man nach den Potenzen von diesen Grössen entwickelte und bloss die von den ersten Potenzen abhängigen Glieder beibehielt. Die Summe wurde alsdann auf nur zwei Glieder reducirt. Indem aber nun eine derartige Entwicklung vermieden werden soll, verzichtet man selbstverständlich auf die entsprechende Vereinfachung. Die obigen Glieder lassen sich aber in anderer Weise zusammenziehen, indem man nämlich neue Functionsformen bildet. Wir setzen:

$$\eta \operatorname{Cos} \pi = A + B \operatorname{Cos} (\delta_1 x + D_1) + C \operatorname{Cos} (\delta_2 x + D_2) + \ldots.$$

$$\eta \operatorname{Sin} \pi = - B \operatorname{Sin} (\delta_1 x + D_1) - C \operatorname{Sin} (\delta_2 x + D_2) - \ldots.$$

und erhalten die obige Summe durch den Ausdruck

$$\eta \operatorname{Cos} (x - \pi)$$

representirt.

Die Grössen η und π sind jetzt Functionen von x, die sich sehr langsam ändern, weil die Grössen δ_1, $\delta_2, \ldots.$ sehr klein sind. Verschwinden diese Grössen ganz und gar, so gehen jene Functionen in Constanten über, und in der That entsprechen sie Integrationsconstanten, wenn die störende Masse gleich Null wird. Die Integrationsconstanten der Differentialgleichungen des Problems der drei Körper sind aber nicht Specialwerthe jener Functionen, sondern sind theils in den Coefficienten A, B, $C, \ldots.$ enthalten theils in den Bögen D_1, $D_2, \ldots.$ Dadurch, dass wir die vollständige Form beibehalten, kommen wir aber in die Lage, den Begriff einer absoluten Bahn bilden zu können, d. h. einer Bahn, deren Elemente absolute Constanten sind. Die Abweichungen der wirklichen Bewegungen von dieser Bahn sind immer kleine Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte.