ARKIV FÖR MATEMATIK Band 5 nr 25

1.64 04 2 Communiqué le 26 Février 1964

Sur une propriété des unités d'un corps algébrique

Par Trygve Nagell

§ 1. Introduction

Dans certains problèmes de la théorie des équations diophantiennes on est conduit à la question de résoudre l'équation

$$1+E+E_1=0 \tag{1}$$

en unités E et E_1 d'un corps algébrique $\boldsymbol{K}$. Ainsi, dans un travail sur la représentation des nombres entiers par une forme binaire cubique, j'ai eu besoin de déterminer les solutions de l'équation (1) dans un corps cubique à discriminant négatif; voir Nagell [1][1], Hilfssatz IV. De plus, le problème de déterminer les points exceptionnels d'une certaine classe de cubiques appartenant au corps algébrique $\boldsymbol{K}$ exige qu'on détermine les solutions de l'équation (1) dans $\boldsymbol{K}$; voir Nagell [2] p. 346–355 et [3], p. 176–179.

Dans ces travaux j'ai déterminé toutes les solutions de (1) dans certains cas simples où le rang r du groupe des unités de $\boldsymbol{K}$ est $\leqslant 1$. En effet, j'ai établi les résultats suivants :

Théorème 1. *Soit $\boldsymbol{K}$ un corps quadratique. Alors une relation de la forme* (1), *où E et E_1 sont des unités de $\boldsymbol{K}$, ne peut exister que dans les cas suivants :*

1°) $$1+\varrho+\varrho^2=0,$$

où $\boldsymbol{K}$ est engendré par ϱ, c'est-à-dire par $\sqrt{-3}$;

2°) $$1+\varepsilon-\varepsilon^2=0, \quad 1-\varepsilon+\varepsilon^{-1}=0, \quad 1-\varepsilon^{-1}-\varepsilon^{-2}=0,$$

où $\boldsymbol{K}$ est engendré par ε, c'est-à-dire par $\sqrt{5}$.

Pour la démonstration voir le travail [2].

Théorème 2. *Soit $\boldsymbol{K}$ un corps cubique à discriminant négatif. Alors une relation de la forme* (1), *où E et E_1 sont des unités de $\boldsymbol{K}$, ne peut exister que dans les cas suivants :*

1°) *$\boldsymbol{K}$ est engendré par une racine θ de l'équation $x^3+x^2-1=0$, et les relations possibles sont*

[1] Les numéros figurant entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

$$1-\theta^2-\theta^3=0, \quad 1-\theta-\theta^5=0, \quad 1+\theta^{-1}-\theta^{-3}=0,$$
$$1+\theta-\theta^{-2}=0, \quad 1+\theta^4-\theta^{-1}=0, \quad 1+\theta^{-4}-\theta^{-5}=0.$$

2°) ***K*** *est engendré par une racine* θ *de l'équation* $x^3+x-1=0$, *et les relations possibles sont*

$$1-\theta-\theta^3=0, \quad 1+\theta^{-2}-\theta^{-3}=0, \quad 1+\theta^2-\theta^{-1}=0.$$

La démonstration se fera aisément à l'aide de certains résultats obtenus dans [1] et [2].

Théorème 3. *Soit* ***K*** *un corps biquadratique jouissant des propriétés suivantes : Tous les quatre corps conjugués sont imaginaires.* ***K*** *ne contient aucune racine de l'unité différente de* ± 1 *et* $\pm i$. ***K*** *admet un sous-corps quadratique réel différent de* $\mathbf{R}(\sqrt{5})$. *Alors, la relation* (1) *n'admet aucune solution en unités* E *et* E_1 *du corps* ***K***.

Pour la démonstration voir le travail [3]; dans ce travail il faut corriger une faute d'impression : dans la ligne 5, p. 176, on doit remplacer $\mathfrak{p}$ par $\mathfrak{j}$.

Dans le théorème 3 le groupe des unités du corps biquadratique a le rang 1. Cependant, le résultat n'embrasse qu'une catégorie particulière de ces corps. Nous allons traiter le cas général dans les chapitres 4 et 5. Il faut d'abord recapituler certains faits sur les corps biquadratiques, ce qui aura lieu dans le paragraphe 3.

Dans le dernier paragraphe nous allons considérer le cas d'un corps algébrique quelconque.

§ 2. Lemmes sur certaines unités

Nous avons besoin des résultats suivants :

Lemme 1. *Il n'y a qu'un nombre fini d'unités* η *ayant les propriétés suivantes :* η *est du quatrième degré; toutes les quatre unités conjuguées sont imaginaires; on a* $1<|\eta|<c$, *où* c *est un nombre réel donné. Toutes ces unités peuvent être déterminées par un nombre fini d'opérations.*

Démonstration. Supposons que η est une racine de l'équation irréductible dans $\boldsymbol{R}$ (1), corps des nombres rationnels,

$$x^4-Px^3+Qx^2-Rx+1=0, \tag{2}$$

où P, Q et R sont des nombres entiers rationnels. Désignons par η, η', ζ et ζ' les racines de (2) de façon que $\eta\eta'$ et $\zeta\zeta'$ soient réels et positifs. A l'aide des inégalités

$$1<|\eta|<c, \quad c^{-1}<|\zeta|<1$$

nous aurons les bornes suivantes pour les coefficients P, Q et R dans (2)

$$|P|=|\eta+\eta'+\zeta+\zeta'|\leqslant 2|\eta|+2|\zeta|<2c+2,$$
$$|Q|=|\eta\eta'+\eta\zeta+\eta\zeta'+\eta'\zeta+\eta'\zeta'+\zeta\zeta'|<c^2+4c+1,$$
$$|R|=|\eta^{-1}+(\eta')^{-1}+\zeta^{-1}+(\zeta')^{-1}|<2c+2.$$

Cela démontre le lemme, qui est, bien entendu, un cas particulier d'un théorème plus général.

Lemme 2. *Soit ε l'unité fondamentale d'un corps quadratique réel, choisie >1. Alors on a $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. Si $N(\varepsilon) = +1$, on a $\varepsilon \geqslant 2+\sqrt{3}$. Si $N(\varepsilon) = +1$ et $\varepsilon > 2+\sqrt{3}$, on a $\varepsilon \geqslant 4+\sqrt{15}$. Si 2ε est un carré dans le corps et $\varepsilon > 2+\sqrt{3}$, on a $\varepsilon \geqslant 5+2\sqrt{6}$.*

Démonstration. C'est un fait bien connu que $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ est la plus petite unité >1. Soit ε l'unité fondamentale du corps quadratique réel $\boldsymbol{R}(\sqrt{\Delta})$, où le nombre naturel Δ n'est divisible par aucun carré >1. Si $\varepsilon > 1$ et $N(\varepsilon) = +1$, il est évident qu'on a

$$\varepsilon > v\sqrt{\Delta} \quad \text{pour} \quad \varepsilon = \tfrac{1}{2}(u+v\sqrt{\Delta})$$

et

$$\varepsilon > 2v\sqrt{\Delta} \quad \text{pour} \quad \varepsilon = u+v\sqrt{\Delta},$$

u et v étant des nombres naturels. Alors, on vérifiera les assertions du lemme à l'aide d'un tableau des unités.

Lemme 3. *La seule solution de l'équation*

$$1+\varrho+\varrho_1=0$$

en racines de l'unité ϱ et ϱ_1 est donnée par la relation

$$1+\varrho+\varrho^2=0.$$

Démonstration. Il est évident qu'aucun des nombres ϱ et ϱ_1 ne peut être réel. Alors, l'équation en question entraîne évidemment

$$1+\varrho^{-1}+\varrho_1^{-1}=0.$$

En éliminant ϱ_1 entre les deux équations on obtient

$$(1+\varrho^{-1})^{-1}=1+\varrho,$$

d'où $1+\varrho+\varrho^2=0$.

§ 3. Classification des corps biquadratiques du rang 1

Dans cette section $\boldsymbol{K}$ signifie toujours un corps biquadratique du premier rang, c'est-à-dire : tous les quatre corps conjugués sont imaginaires. Il est évident que l'unité fondamentale η du corps $\boldsymbol{K}$ peut être choisie de façon qu'on ait $|\eta| \geqslant 1$. Ici le signe d'égalité peut être omis, vu que η n'est pas une racine de l'unité (Théorème de Kronecker). Il peut arriver que $\boldsymbol{K}$ admet un sous-corps $\boldsymbol{U}$ quadratique réel. Dans ce cas nous désignons par ε l'unité fondamentale de $\boldsymbol{U}$; nous choisissons celle-ci >1.

Dans la suite nous désignons par μ le nombre des sous-corps quadratiques réels et par ν le nombre des sous-corps quadratiques imaginaires. Les corps en question se répartissent en quatorze classes caractérisées de la façon suivante :

1°) $\mu=\nu=0$. Racines de l'unité : seulement ± 1. Toutes les unités, sauf ± 1, sont du quatrième degré.

2°) $\mu=0$; $\nu=1$. Racines de l'unité : seulement ± 1. Toutes les unités, sauf ± 1, sont du quatrième degré.

3°) $\mu=0$; $\nu=1$. Racines de l'unité : ± 1 et $\pm i$. Toutes les unités, sauf ± 1 et $\pm i$, sont du quatrième degré.

4°) $\mu=0$; $\nu=1$. Racines de l'unité : ± 1, $\pm \varrho$ et $\pm \varrho^2$, où $\varrho=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$. Toutes les unités, sauf ± 1, $\pm \varrho$ et $\pm \varrho^2$, sont du quatrième degré.

5°) $\mu=1$; $\nu=0$. Racines de l'unité : seulement ± 1. On aura $\eta=\varepsilon$. Toutes les unités, sauf ± 1, sont du second degré.

6°) $\mu=1$; $\nu=0$. Le corps est engendré par une racine cinquième primitive de l'unité. Les racines de l'unité sont $\pm \varrho$, où ϱ parcourt les racines de l'équation $x^5-1=0$. Le sous-corps quadratique est engendré par $\sqrt{5}$. On peut prendre pour unité fondamentale $\eta=\varepsilon=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. Corps cyclique.

7°) $\mu=1$; $\nu=2$. Racines de l'unité : seulement ± 1. L'unité fondamentale $\eta=\varepsilon$. Toutes les unités, sauf ± 1, sont du second degré. Corps abelién.

8°) $\mu=1$; $\nu=2$. Racines de l'unité : seulement ± 1. L'unité fondamentale $\eta=\sqrt{-\varepsilon}$, du quatrième degré. Dans ce cas la norme de ε doit être positive. D'après le Lemme 2 du § 2 on a $\varepsilon \geqslant 2+\sqrt{3}$. Corps abelién.

9°) $\mu=1$; $\nu=2$. Racines de l'unité : ± 1 et $\pm i$. L'unité fondamentale $\eta=\varepsilon$. Le corps est abélien; ne peut pas contenir $\sqrt{3}$.

10°) $\mu=1$; $\nu=2$. Racines de l'unité : ± 1 et $\pm i$. L'unité fondamentale $\eta=\sqrt{\varepsilon i}$. La condition nécessaire et suffisante pour ce cas est que le nombre 2ε soit un carré dans le sous-corps réel. Donc, la norme de ε doit être positive. La plus petite valeur possible de ε est $5+2\sqrt{6}$ (d'après le Lemme 2 du § 2). Le corps est abélien, ne peut pas contenir $\sqrt{3}$.

11°) $\mu=1$; $\nu=2$. Racines de l'unité : ± 1, $\pm \varrho$ et $\pm \varrho^2$, où $\varrho=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$. L'unité fondamentale $\eta=\varepsilon$. Le corps est abélien; ne peut pas contenir $\sqrt{3}$.

12°) $\mu=1$; $\nu=2$. Racines de l'unité : ± 1, $\pm \varrho$ et $\pm \varrho^2$, où $\varrho=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$. L'unité fondamentale $\eta=\sqrt{-\varepsilon}$. Dans ce cas la norme de ε doit être positive. On a $\varepsilon \geqslant 4+\sqrt{15}$ (d'après le Lemme 2 du § 2). Le corps est abélien; ne peut pas contenir $\sqrt{3}$.

13°) $\mu=1$; $\nu=2$. Le corps est engendré par une racine huitième primitive de l'unité. Les sous-corps quadratiques sont engendrés par les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{-2}$ et i. Les racines de l'unité sont les racines ϱ de l'équation $x^8-1=0$. L'unité fondamentale $\eta=\varepsilon=\sqrt{2}+1$. Corps abélien.

14°) $\mu=1$; $\nu=2$. Le corps est engendré par une racine douzième primitive de l'unité. Les sous-corps quadratiques sont engendrés par les nombres $\sqrt{3}$, $\sqrt{-3}$ et i. Les racines de l'unité sont les racines ϱ de l'équation $x^{12}-1=0$. L'unité fondamentale $\eta=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(1+i)$. Corps abelién.

A propos de ces résultats voir Nagell [4], p. 351–361. Il faut observer que la classification que nous venons de donner ici, est différente de celle que nous avons proposée dans le travail [4].

Nous profitons de l'occasion pour aviser les corrections suivantes au travail [4]: Dans le Lemme 2, p. 357, il faut ajouter dans la deuxième ligne entre (18). et Ainsi : Nous excluons ici les trois corps engendrés par les nombres

$$e^{\frac{2\pi i}{5}}, \quad e^{\frac{2\pi i}{8}} \quad \text{et} \quad e^{\frac{2\pi i}{12}}.$$

De plus, il faut supprimer les dernières huit lignes, p. 358–359, de la démonstration de ce lemme. La ligne 12, p. 350, doit être $\beta_1 = \beta\gamma$,.

§ 4. Le problème dans le cas biquadratique

Nous dirons qu'un corps algébrique est du rang r lorsque le groupe des unités du corps (les racines de l'unité à part) a le rang r; on a $r = 0$ seulement pour $\boldsymbol{R}$ (1) et $\boldsymbol{R}(\sqrt{\Delta})$, $\Delta < 0$.

Le but principal de cette section est d'établir le résultat suivant :

Théorème 4. *Si* $\boldsymbol{K}$ *est un corps biquadratique du rang* 1, *l'équation* (1) *n'a qu'un nombre fini de solutions en unités* E *et* E_1 *dans* $\mathbf{K}$. *On peut reconnaître s'il y a des solutions ou non, et les solutions eventuelles peuvent être déterminées par un nombre fini d'opérations.*

Remarque. En vertu des Théorèmes 1 et 2 ce résultat est donc vrai pour tous les corps algébriques d'un rang $r \leqslant 1$.

Comme dans le paragraphe précédent $\boldsymbol{K}$ désigne un corps biquadratique du rang 1.

Soit η l'unité fondamentale du corps $\boldsymbol{K}$, choisie de façon qu'on ait $|\eta| > 1$. Alors il s'agit de l'équation

$$1 + \varrho\eta^M + \varrho_1\eta^N = 0, \tag{3}$$

où ϱ et ϱ_1 sont des racines de l'unité appartenant à $\boldsymbol{K}$, et où M et N sont des nombres entiers rationnels. Il est évident que $M = N = 0$ peut arriver seulement pour $1 + \varrho + \varrho^2 = 0$ et $\varrho_1 = \varrho^2$ (d'après le Lemme 3).

Dans cette section, nous excluons les trois corps cyclotomiques engendrés par les nombres

$$e^{\frac{2\pi i}{5}}, \quad e^{\frac{2\pi i}{8}} \quad \text{et} \quad e^{\frac{2\pi i}{12}}. \tag{4}$$

Alors les nombres ϱ et ϱ_1 dans (3) sont des racines de l'une ou de l'autre des équations $x^4 - 1 = 0$ et $x^6 - 1 = 0$.

Si nous supposons $M = N \neq 0$, nous aurons

$$\eta^{-M} = -\varrho - \varrho_1.$$

Or, on vérifie aisément que cette relation est impossible pour toutes les combinaisons des nombres ϱ et ϱ_1, vu que l'unité η n'est pas une racine de l'unité. D'une façon analogue on voit que $N = 0$ est impossible. En effet, cette hypothèse entraîne la relation

$$\eta^M = -\varrho^{-1} - \varrho^{-1}\varrho_1,$$

qui est impossible pour toutes les valeurs en question des nombres ϱ et ϱ_1.

Ainsi nous pouvons supposer que $MN(M-N) \neq 0$ et en outre que $M > N$. Soit N négatif. Alors, en multipliant (3) par $\eta^{-N}\varrho_1^{-1}$ nous aurons

$$1 + \varrho_1^{-1}\eta^{-N} + \varrho\varrho_1^{-1}\eta^{M-N} = 0,$$

où les exposants $-N$ et $M-N$ sont positifs. Nous en concluons qu'il suffit, dans (3), de considérer les cas où M et N sont tous les deux positifs. Ainsi on a $M > N \geqslant 1$.

Considérons d'abord l'équation

$$1 \pm \eta^M \pm \eta^N = 0, \tag{5}$$

où les signes sont indépendants entre eux, et où $M \geqslant 2$. Si $M = 2$, $N = 1$, il est évident qu'il n'y a que la seule possibilité $1 + \eta - \eta^2 = 0$. Abstraction faite de ce cas, η est évidemment du quatrième degré (d'aprés le Théorème 1). Donc $M \geqslant 4$. Nous obtenons de (5)

$$1 = |\eta^M \pm \eta^N| \geqslant |\eta|^M - |\eta|^N \geqslant |\eta|^M - |\eta|^{M-1} \geqslant |\eta|^4 - |\eta|^3. \tag{6}$$

Or, la fonction $x^4 - x^3$ est positive et croissante pour tous les $x > 1$. Donc, si nous supposons que $|\eta| \geqslant \sqrt{2}$, nous aurons

$$|\eta|^4 - |\eta|^3 \geqslant 4 - \sqrt{8} > 1.$$

Cela est en contradiction avec (6), et nous en concluons que la relation (6) est impossible pour $M > N \geqslant 1$ lorsque $|\eta| \geqslant \sqrt{2}$, exception faite du cas $1 + \eta - \eta^2 = 0$. Pour que l'équation (5) soit possible il faut donc que $1 < |\eta| < \sqrt{2}$. D'après le Lemme 1 il n'y a qu'un nombre fini d'unités η satisfaisant à ces inégalités, et celles-ci peuvent être déterminées par un nombre fini d'opérations. Ensuite, à l'aide de (6), on aura la borne supérieure de l'exposant M rendue par l'inégalité

$$|\eta|^{M-1} \leqslant \frac{1}{|\eta| - 1}. \tag{7}$$

Considérons ensuite l'équation

$$1 + \varrho\eta^M + \varrho_1\eta^N = 0, \tag{8}$$

où un au moins des nombres ϱ et ϱ_1 est imaginaire. Il en résulte aisément que η ne peut pas être réel. (Il faut observer que ϱ et ϱ_1 sont des racines ou de l'équation $x^4 - 1 = 0$ ou de l'équation $x^6 - 1 = 0$.) Donc, η est du quatrième degré. Nous aurons de (8), vu que $M \geqslant 2$ et $M > N \geqslant 1$:

$$1 = |\varrho\eta^M + \varrho_1\eta^N| \geqslant |\eta|^M - |\eta|^N \geqslant |\eta|^M - |\eta|^{M-1} \geqslant |\eta|^2 - |\eta|. \tag{9}$$

Or, la fonction $x^2 - x$ est positive et croissante pour tous les $x > 1$. Donc, si nous supposons que $|\eta| > \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$, nous aurons

$$|\eta|^2 - |\eta| > 1.$$

Cela est en contradiction avec (9) et nous concluons que la relation (8) est impossible pour $M > N \geqslant 1$ lorsque $|\eta| > \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

Pour que l'équation (8) soit possible il faut donc que $1 < |\eta| \leqslant \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. Ici le signe d'égalité peut être supprimé, vu que η est du quatrième degré. D'après le Lemme 1 il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour ces valeurs de η, et celles-ci peuvent être trouvées par un nombre fini d'opérations. Enfin, pour limiter l'exposant M on aura l'inégalité (7).

Ainsi le Théorème 4 se trouve établi pour tous les corps en question, sauf pour les trois corps engendrés par les nombres (4).

En outre, les résultats obtenus nous permettent d'énoncer les propositions plus précises que voici :

Théorème 5. *Dans les corps appartenant à une quelconque des classes* 5, 7, 8, 9, 10, 11 *et* 12 *il n'y a aucune solution de l'équation* (1), *exception faite des quatre possibilités indiquées dans le Théorème* 1 *dont la première existe toujours dans les classes* 11 *et* 12 *et seulement dans ces classes.*

Théorème 6. *Dans les corps appartenant à l'une ou l'autre des deux classes* 1 *et* 2, *il n'y a aucune solution de l'équation* (1) *si* $|\eta| \geqslant \sqrt{2}$.

Dans les corps appartenant à l'une ou l'autre des deux classes 3 *et* 4, *il n'y a aucune solution de l'équation* (1) *si* $|\eta| \geqslant \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. *Exception : La possibilité* $1+\varrho+\varrho^2=0$ *existe toujours dans la classe* 4 *et seulement dans ce cas.*

Pour la démonstration il suffit d'observer : Dans la classe 8 on a $\eta = \sqrt{-\varepsilon}$, donc (d'après le § 3)

$$|\eta| = |\sqrt{\varepsilon}| \geqslant \sqrt{2+\sqrt{3}} > \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Dans la classe 10 on a $\eta \doteq \sqrt{\varepsilon i}$, donc (d'après le § 3)

$$|\eta| = |\sqrt{\varepsilon}| \geqslant \sqrt{5+2\sqrt{6}} > \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Dans la classe 12 on a $\eta = \sqrt{-\varepsilon}$, donc (d'après le § 3)

$$|\eta| = |\sqrt{\varepsilon}| \geqslant \sqrt{4+\sqrt{15}} > \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Ainsi l'équation (8) est impossible pour toutes les valeurs de η dans ces classes.

Le Théorème 3 est contenu dans le Théorème 5. Dans le paragraphe suivant nous allons traiter les corps des classes 6, 13 et 14 que nous avons exclues dans cette section-ci.

§ 5. Le problème dans les corps des classes 6, 13 et 14

Il s'agit des trois corps cyclotomiques engendrés par les racines des équations suivantes : $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ (classe 6), $x^4+1=0$ (classe 13) et $x^4-x^2+1=0$ (classe 14). Dans chacun de ces corps nous allons déterminer toutes les solutions de l'équation

$$1+\varrho\eta^M+\varrho_1\eta^N=0, \tag{10}$$

où η est l'unité fondamentale du corps en question, où ϱ et ϱ_1 sont des racines de l'unité appartenant au corps, et où M et N sont des nombres entiers rationnels. D'après le Lemme 3 nous savons que le cas $M=N=0$ entraîne $1+\varrho+\varrho^2=0$ et $\varrho_1=\varrho^2$ (classe 14).

Les cas dans lesquels $MN(M-N)\neq 0$ peuvent être traités en commun pour les trois corps. En effet, on montre précisément comme dans le paragraphe précédent qu'il suffit de supposer que $M>N\geqslant 1$. Soit dans (10) ϱ et ϱ_1 réels ($=\pm 1$). Si η est du second degré (classes 6 et 13), il est évident, d'après le Théorème 1, que la seule possibilité est donnée par $1+\eta-\eta^2=0$ (classe 6). Si η est du quatrième degré (classe 14) on a $M\geqslant 4$. Donc on aura

$$1=|\eta^M\pm\eta^N|\geqslant|\eta|^M-|\eta|^N\geqslant|\eta|^4-|\eta|^3.$$

Or, vu que $|\eta|=|\sqrt{\varepsilon i}|=\sqrt{2+\sqrt{3}}$, on a

$$|\eta|^4-|\eta|^3>1.$$

Donc, il n'y a aucune solution dans la classe 14.

Considérons ensuite le cas où un au moins des nombres ϱ et ϱ_1 est imaginaire. Supposons d'abord que $\eta=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$, $M=2$ et $N=1$. Dans ce cas l'équation (10) peut s'écrire

$$1+\xi^a(1+\eta)+\xi^b\eta=0, \tag{11}$$

où $\xi=e^{\frac{\pi i}{5}}$ et où les exposants a et b sont des entiers tels que $|a|\leqslant 4$ et $|b|\leqslant 4$. Vu que η est réel on aura de (11)

$$1+\xi^{-a}(1+\eta)+\xi^{-b}\eta=0.$$

En éliminant η entre cette équation et l'équation (11) on obtient

$$(\xi^a+\xi^b)(1+\xi^{-a})=(\xi^{-a}+\xi^{-b})(1+\xi^a),$$

d'où

$$\sin\frac{\pi a}{5}+\sin\frac{\pi b}{5}=\sin\frac{\pi(a-b)}{5},$$

et par conséquent

$$\sin\frac{\pi(a+b)}{10}=\sin\frac{\pi(a-b)}{10},$$

ce qui est évidemment impossible.

En supposant $\eta=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ et $M\geqslant 3$ on aura

$$1\geqslant|\eta|^M-|\eta|^N\geqslant|\eta|^3-|\eta|^2.$$

Or, cette inégalité est absurde vu que

$$|\eta|^3-|\eta|^2=\eta^3-\eta^2=\eta>1.$$

Donc, il n'y a aucune solution dans la classe 6.

Considérons enfin les classes 13 et 14. Alors

$$1 \geqslant |\eta|^M - |\eta|^N \geqslant |\eta|^2 - |\eta|.$$

Or, cette inégalité n'est pas exacte. En effet, dans la classe 13 on a

$$|\eta|^2 - |\eta| = \eta^2 - \eta = 2 + \sqrt{2} > 1;$$

et dans la classe 14 on a

$$|\eta|^2 - |\eta| = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{2 + \sqrt{3}} > 1.$$

Nous en concluons : Si $MN(M-N) \neq 0$ il n'y a aucune solution, sauf $1 + \eta - \eta^2 = 0$. Dans la suite nous traiterons les trois classes séparément.

Il reste encore à examiner les cas $M = N \neq 0$ et $N = 0$ (les cas $M = 0$ inclus).

La classe 6. Nous posons $\xi = e^{\frac{\pi i}{5}}$. Supposons que $M = N \neq 0$. Alors, vu que $\eta = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ est réel, il résulte de (10)

$$\eta^{-M} = -\varrho - \varrho_1 = \xi^a + \xi^b = 2 \cos \frac{\pi a}{5},$$

où a et b sont des nombres entiers rationnels. On en conclut : Les seules possibilités sont $M = -1$ pour $a = 1$ et $M = +1$ pour $a = 2$. L'hypothèse $N = 0$ entraîne

$$\eta^M = -\varrho^{-1} - \varrho^{-1}\varrho_1 = \xi^c + \xi^d,$$

c et d étant des nombres entiers rationnels. Or, nous venons de montrer que cette équation est possible seulement pour $M = +1$ et $M = -1$. Cela correspond aux relations

$$\eta = \xi + \xi^{-1} \quad \text{et} \quad \eta^{-1} = \xi^2 + \xi^{-2}.$$

Il en résulte : Dans la classe 6 il y a les neuf solutions suivantes

$$1 + \xi^2 - \xi\eta = 0, \quad 1 - \xi\eta^{-1} - \xi^{-1}\eta^{-1} = 0, \quad 1 + \xi^{-2} - \xi^{-1}\eta = 0,$$

$$1 - \xi^{-1} - \xi^2\eta^{-1} = 0, \quad 1 - \xi^2\eta - \xi^{-2}\eta = 0, \quad 1 - \xi - \xi^{-2}\eta^{-1} = 0,$$

$$1 + \eta - \eta^2 = 0, \quad 1 - \eta + \eta^{-1} = 0, \quad 1 - \eta^{-1} - \eta^{-2} = 0.$$

La classe 13. Nous posons $\xi = e^{\frac{\pi i}{4}}$. Supposons que $M = N \neq 0$. Alors il résulte de (10), vu que $\eta = \sqrt{2} + 1$ est réel,

$$\eta^{-M} = -\varrho - \varrho_1 = \xi^a + \xi^b = 2 \cos \frac{\pi a}{4} = \sqrt{2},$$

ce qui est impossible. L'hypothèse $N = 0$ conduit à

$$\eta^M = -\varrho^{-1} - \varrho^{-1}\varrho_1 = \xi^a + \xi^b.$$

Or, nous venons de voir que cette relation est impossible. Donc, il n'y a aucune solution de (10) dans la classe 13.

La classe 14. Nous posons $\xi = e^{\frac{\pi i}{6}}$. Les racines douzièmes primitives de l'unité sont ξ, ξ^{-1}, $\xi^5 = -\xi^{-1}$, $\xi^{-5} = -\xi$. Nous allons déterminer toutes les solutions de l'équation

$$\eta^M = \xi^a + \xi^b, \tag{12}$$

où M, a et b sont des nombres entiers rationnels. Supposons, dans cette équation, que $M \geqslant 2$. Alors, il vient

$$1 = |\eta^M - \xi^a| \geqslant |\eta|^2 - 1.$$

Or, cela est impossible vu que

$$|\eta|^2 = 2 + \sqrt{3} > 2.$$

Donc, si, dans (12), M est positif on a $M = 1$, et l'équation (12) aura la forme

$$\eta = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)(1 + i) = \xi^a + \xi^b.$$

On en conclut

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)(1 - i) = \xi^{-a} + \xi^{-b},$$

et par addition

$$\sqrt{3} + 1 = 2 \cos \frac{\pi a}{6} + 2 \cos \frac{\pi b}{6}.$$

Il en résulte que $a = 1$ et $b = 2$ (ou $a = 2$ et $b = 1$). Donc, la seule solution de (12) pour M positif est donnée par

$$\eta = \xi + \xi^2.$$

Supposons ensuite que, dans (12), M est négatif. Vu que

$$\eta^{-1} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)(1 - i),$$

on obtient de (12)

$$[\tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)(1 - i)]^{-M} = \xi^a + \xi^b$$

En y passant, simultanément, de $+\sqrt{3}$ à $-\sqrt{3}$ et de $+i$ à $-i$, nous aurons

$$(-\eta)^{-M} = \xi^{7a} + \xi^{7b}.$$

Ici l'exposant $-M$ est positif. D'après ce que nous venons de montrer il faut que $-M = 1$. Il en résulte

$$\eta = -\xi^{7a} - \xi^{7b} = \xi^{7a+6} + \xi^{7b+6},$$

où $7a + 6 \equiv 1 \pmod{12}$ et $7b + 6 \equiv 2 \pmod{12}$. Donc, nous pouvons prendre $a = 1$ et $b = -4$. La seule solution de (12) pour M négatif est donnée par

$$\eta^{-1} = \xi + \xi^{-4} = \xi - \xi^2.$$

En posant dans (10) $M = N \neq 0$ on aura

$$\eta^{-M} = -\varrho - \varrho_1 = \xi^a + \xi^b,$$

et en posant $N = 0$ on obtient

$$\eta^M = -\varrho^{-1} - \varrho^{-1}\varrho_1 = \xi^c + \xi^d.$$

Or, nous venons de montrer que cela est possible seulement pour $M = +1$ et pour $M = -1$.

Par conséquent, nous concluons : Dans la classe 14 toutes les solutions de l'équation (10) sont données par le tableau suivant :

$$1 + \xi^{-1} - \xi^{-2}\eta = 0, \quad 1 + \xi - \xi^{-1}\eta = 0, \quad 1 - \xi\eta^{-1} - \xi^2\eta^{-1} = 0, \quad 1 - \xi\eta + \xi^2\eta = 0,$$

$$1 - \xi - \xi^{-1}\eta^{-1} = 0, \quad 1 - \xi^{-1} + \xi^{-2}\eta^{-1} = 0, \quad 1 + \varrho + \varrho^2 = 0.$$

Nous résumons les résultats de cette section comme il suit.

Théorème 7. *Dans le corps de la classe* 6 *il y a neuf solutions de l'équation* (1). *Dans le corps de la classe* 13 *il n'y a aucune solution de* (1). *Dans le corps de la classe* 14 *il y a sept solutions de* (1). *Les solutions existantes sont indiquées plus haut.*

Avec ce résultat la démonstration du Théorème 4 est complète. Nous avons aussi déterminé toutes les solutions du problème, sauf pour les corps des deux classes 1 et 2 lorsque $1 < |\eta| < \sqrt{2}$ et pour les corps des deux classes 3 et 4 lorsque $1 < |\eta| < \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Cependant, il résulte de la démonstration dans le § 4 comment on peut déterminer toutes les solutions même dans les derniers cas. Pour cela il faillait un grand nombre de calculs numériques. Nous nous contenterons d'illustrer cela par l'exemple suivant.

Soit η une racine de l'équation $x^4 - x + 1 = 0$ telle que $|\eta| > 1$. On montrera aisément que η est l'unité fondamentale du corps $\boldsymbol{K}(\eta)$. Ce corps appartient à la classe 1, et dans celui-ci l'équation (1) est résoluble par $E = \eta^4$ et $E_1 = -\eta$. Donc, d'après le Théorème 6 il résulte que $|\eta| < \sqrt{2}$. De la manière usuelle on trouvera $1{,}16 < |\eta| < 1{,}2$. De l'inégalité (7) on aura alors $M \leqslant 6$. On vérifiera enfin que les valeurs $M = 6$ et $M = 5$ sont impossibles, et ainsi les solutions du problème sont données par :

$$1 - \eta + \eta^4 = 0, \quad 1 - \eta^3 - \eta^{-1} = 0, \quad \text{et} \quad 1 - \eta^{-3} + \eta^{-4} = 0.$$

§ 6. Le cas d'un corps algébrique quelconque

Nous avons besoin d'un cas particulier d'un résultat de Siegel sur les équations diophantiennes dans les corps algébriques; voir Siegel [5]. En posant dans son Satz 5 (p. 199–201) : $h = 1$, $d = 3$ nous obtenons le

Lemme 4. *Soient donnés le corps algébrique* $\mathbf{K}$ *et les nombres entiers* α, β, γ $(\neq 0)$ *dans* $\mathbf{K}$. *Alors l'équation diophantienne*

$$\alpha X^3 + \beta Y^3 = \gamma \tag{13}$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers X et Y appartenant à $\boldsymbol{K}$. L'exposant 3 dans (13) peut être remplacé par le nombre naturel $N \geqslant 3$.

Supposons que le groupe des unités du corps algébrique $\boldsymbol{K}$ a le rang r, et soit $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ un système fondamental d'unités. Considérons l'équation

$$1+E+E_1=0, \tag{14}$$

où E et E_1 sont des unités dans $\boldsymbol{K}$. Alors nous pouvons poser

$$E=\varrho\eta_1^{x_1}\eta_2^{x_2}\ldots\eta_r^{x_r} \quad \text{et} \quad E_1=\varrho_1\eta_1^{y_1}\eta_2^{y_2}\ldots\eta_r^{y_r}, \tag{15}$$

où ϱ et ϱ_1 sont des racines de l'unité appartenant à $\boldsymbol{K}$, et où $x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_r$ sont des nombres entiers rationnels. Posons pour $i=1, 2, \ldots, r$,

$$x_i=\mu_i+3\varkappa_i \quad \text{et} \quad y_i=\nu_i+3\lambda_i,$$

où $\varkappa_i, \lambda_i, \mu_i$ et ν_i sont des entiers rationnels tels que $0 \leqslant \mu_i \leqslant 2$ et $0 \leqslant \nu_i \leqslant 2$. Si nous posons ensuite

$$\alpha=\varrho\eta_1^{\mu_1}\eta_2^{\mu_2}\ldots\eta_r^{\mu_r} \quad \text{et} \quad \beta=\varrho_1\eta_1^{\nu_1}\eta_2^{\nu_2}\ldots\eta_r^{\nu_r},$$

$$X=\eta_1^{\varkappa_1}\eta_2^{\varkappa_2}\ldots\eta_r^{\varkappa_r} \quad \text{et} \quad Y=\eta_1^{\lambda_1}\eta_2^{\lambda_2}\ldots\eta_r^{\lambda_r},$$

l'équation (14) sera remplacée par 3^{2r} équations de la forme

$$\alpha X^3+\beta Y^3=-1. \tag{16}$$

Désignons par s le nombre des racines de l'unité dans $\boldsymbol{K}$. En variant les nombres ϱ et ϱ_1 dans (15) on aura donc un nombre total d'équations de la forme (16) égal à $3^{2r}s^2$.

D'après le Lemme 4 chacune des équations (16) n'admet qu'un nombre limité de solutions en nombres entiers X et Y appartenant à $\boldsymbol{K}$. Par conséquent, nous avons démontré le

Théorème 8. *Si $\boldsymbol{K}$ est un corps algébrique quelconque, l'équation* (14) *n'admet qu'un nombre fini de solutions en unités E et E_1 dans $\boldsymbol{K}$.*

Cependant, cette démonstration ne donne aucun moyen pour résoudre complètement le problème. Pour cela il fallait 1° un critère pour reconnaître si l'équation (16) est résoluble ou non, et 2° un algorithme pour déterminer toutes les solutions, s'il y en a.

Dans les cinq premiers paragraphes nous avons vu comment on peut, par une méthode différente, résoudre le problème complètement lorsque le rang $r \leqslant 1$. Il n'est pas vraisemblable que la même méthode s'appliquera aux cas d'un rang >1.

En modifiant un peu la démonstration du Théorème 8 on peut évidemment obtenir le résultat suivant plus général :

Théorème 9. *Soient donnés le corps algébrique $\boldsymbol{K}$ et les nombres entiers α, β, γ $(\neq 0)$ dans $\boldsymbol{K}$. Alors l'équation diophantienne*

$$\alpha\cdot\Xi+\beta\cdot\mathrm{H}=\gamma \tag{17}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers Ξ *et* H *dans* $\boldsymbol{K}$ *tels que les valeurs absolues des normes* $|N(\Xi)|$ *et* $|N(\mathrm{H})|$ *soient inférieures à une borne donnée.*

En effet, il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux principaux dans $\boldsymbol{K}$ dont la norme ne surpasse pas la borne donnée. Dans chacun de ces idéaux nous prenons un nombre ξ_k tel que $|N(\xi_k)|$ soit la norme de l'idéal. Alors, en remplaçant les équations (15) par

$$\Xi = \xi_h \varrho \eta_1^{x_1} \dots \eta_r^{x_r} \quad \text{et} \quad \mathrm{H} = \xi_k \varrho_1 \eta_1^{y_1} \dots \eta_r^{y_r}$$

nous aurons, au lieu de (16), un nombre fini d'équations de la forme

$$\alpha \xi_h X^3 + \beta \xi_k Y^3 = \gamma.$$

En employant le Lemme 4 on aura donc le Théorème 9.

De plus, on obtiendra aisément le

Théorème 10. *Soient donnés le corps algébrique* $\boldsymbol{K}$ *et le nombre naturel* $n \geqslant 2$. *Alors il n'y a qu'un nombre fini d'unités* E *dans* $\boldsymbol{K}$ *telles qu'on ait*

$$1 + E = X^n, \tag{18}$$

où X *est un nombre entier (variable) dans* $\boldsymbol{K}$.

Démonstration. Lorsque $n \geqslant 3$ on aura seulement à appliquer le Lemme 4 en remplaçant l'exposant 3 par l'exposant n. Soit ensuite $n = 2$. Alors il est évident que les nombres $X+1$ et $X-1$ doivent être des unités dans $\boldsymbol{K}$ tous les deux. Donc

$$X + 1 = E_1, \quad X - 1 = E_2$$

et

$$E_1 - E_2 = 2.$$

D'après le Théorème 9 cette relation n'a qu'un nombre limité de solutions en unités E_1 et E_2 dans $\boldsymbol{K}$.

Le Théorème 10 restera encore vrai si on remplace E par un nombre entier (variable) Y de $\boldsymbol{K}$ tel que la valeur absolue $|N(Y)|$ soit bornée.

Si dans $\boldsymbol{K}$, le rang r ne surpasse pas 1, on peut établir les Théorèmes 9 et 10 sans recourir au Lemme 4, et on peut effectivement déterminer toutes les solutions eventuelles des équations (17) et (18).

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

1 NAGELL, T., Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante, Mathematische Zeitschrift, Bd. 28, Berlin 1928.

2 NAGELL, T., Les points exceptionnels rationnels sur certaines cubiques du premier genre, Acta Arithmetica, 5 (1959), Warszawa.

3 NAGELL, T., Les points exceptionnels sur les cubiques $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$, Acta Scientiarum Mathematicarum, XXI (1960), Szeged.

4 NAGELL, T., Sur quelques questions dans la théorie des corps biquadratiques, Arkiv för Matematik, Bd 4, nr 26, Stockholm 1961.

5 SIEGEL, C., Approximation algebraischer Zahlen, Mathematische Zeitschrift, Bd. 10, Berlin 1921.

Tryckt den 3 september 1964

Uppsala 1964. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB