ARKIV FÖR MATEMATIK Band 7 nr 38

1.68 04 2 Communiqué le 28 Février 1968

Quelques propriétés des nombres algébriques du quatrième degré

Par Trygve Nagell

§ 1. Introduction

1. Dans les pages qui suivent les nombres algébriques sont toujours supposés entiers. Par le discriminant $D(\alpha)$ du nombre algébrique α nous comprenons le discriminant dans le corps engendré par α. Le nombre d'unités dans un système fondamental d'unités sera appelé le rang du corps. Un corps est primitif s'il ne possède aucun sous-corps irrationnel.

Si le nombre algébrique α possède le discriminant D, il existe évidemment une infinité de nombres dans le corps $\mathbf{K}(\alpha)$ ayant le même discriminant D. Dans des mémoires antérieurs nous avons commencé une étude sur les nombres algébriques de discriminant donné; pour les nombres du second, du troisième et du quatrième degrés nous y avons montré qu'il existe un nombre fini de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tels que tout nombre de discriminant donné puisse s'écrire sous la forme $\pm\alpha_i + k$, où k est un nombre entier rationnel quelconque; voir Nagell [1](1), § 5, et aussi [2] et [6], § 4.

Cependant, il a fallu exclure les nombres du quatrième degré engendrant des corps primitifs d'un rang >1. Cela dépend du fait que la méthode de démonstration a été basée sur l'existence d'un (au moins) sous-corps quadratique. Dans le cas d'un sous-corps quadratique imaginaire cette méthode nous a même fourni d'un algorithme pour effectivement déterminer, par un nombre fini d'opérations, un système de tels nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, dont nous venons de parler.

Grâce à un théorème de C. Chabauty nous avons pu montrer que le résultat reste encore vrai lorsque les corps biquadratiques en question sont primitifs et du premier rang.

Dans ce travail-ci nous allons compléter nos résultats sur les nombres du quatrième degré. En employant une méthode qui ne distingue pas entre les différents types de corps biquadratiques, nous allons établir un résultat qui embrasse tous les nombres biquadratiques sans exception.

§ 2. Les discriminants dans le cas biquadratique

2. Le but principal de ce travail-ci est d'établir le

Théorème 1. *Désignons par Φ le domaine consistant de tous les nombres entiers du quatrième degré. Soit D le discriminant d'un nombre de Φ. Alors il existe dans*

(1) Les numéros figurant entre crochets renvoient à l'Index bibliographique placé à la fin de ce travail.

Φ un nombre fini de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, jouissant de la propriété suivante : Tout nombre dans Φ ayant le discriminant D est de la forme $\pm\alpha_i + k$, $i = 1, 2, \ldots, m$, où k est un nombre entier rationnel quelconque.

Pour la démonstration nous considérons la formule générale donnant le discriminant $D = D(\theta)$ d'un nombre algébrique θ du quatrième degré. Soit θ une racine de l'équation

$$z^4 - Pz^3 + Uz^2 - Vz + W = 0, \tag{1}$$

où les coefficients P, U, V et W sont des nombres entiers rationnels. Alors, on a pour D la relation

$$2^4 3^3 D = X^3 - Y^2, \tag{2}$$

où X et Y ont les valeurs suivantes :

$$X = 48W - 12PV + 4U^2, \tag{3}$$

$$Y = 288UW + 36PUV - 8U^3 - 108V^2 - 108P^2W. \tag{4}$$

Comparez pour ces formules Nagell [3], p. 481.

D'après un théorème célèbre d'Axel Thue (voir [4]), l'équation (2) n'admet qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers rationnels X et Y, lorsque D est donné.

Dans la suite les coefficients U, V et W seront considérés comme variables. Vu que les nombres α et $\alpha + k$, pour k entier rationnel, ont le même discriminant, le coefficient P peut être considéré comme constant; il suffit en effet de supposer que P prenne les quatre valeurs 0, ± 1 ou 2. Nous venons de voir que les nombres X et Y ont un nombre limité de valeurs.

En éliminant W entre les deux équations (3) et (4) nous aurons la relation entre U et V que voici :

$$\left.\begin{aligned} Y = & -32U^3 + 9P^2U^2 + 6XU + 108PUV \\ & -108V^2 - 27P^3V - \tfrac{9}{4}P^2X. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Cette équation représente une cubique plane $F(U, V) = 0$ en coordonnées cartésiennes U et V. Nous allons montrer que cette courbe est du premier genre.

§ 3. Démonstration du Théorème 1

3. On peut homogénéiser l'équation (5) en remplaçant U par U/Z et V par V/Z. Alors on constate immédiatement qu'il n'y a aucun point double de la courbe (5) sur la droite $Z = 0$. Donc, on peut prendre $Z = 1$.

En différentiant partiellement nous aurons

$$\frac{\partial F}{\partial U} = -96U^2 + 18P^2U + 6X + 108PV,$$

$$\frac{\partial F}{\partial V} = 108PU - 216V - 27P^3.$$

En éliminant V entre les deux équations

$$\frac{\partial F}{\partial U}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial V}=0 \tag{6}$$

on aura évidemment

$$X=16U^2-12P^2U+\tfrac{9}{4}P^4. \tag{7}$$

Puis on peut éliminer X et V entre les quatre équations (5), (6) et (7); et l'on obtiendra alors pour Y l'expression suivante:

$$Y=64U^3-72P^2U^2+27P^4U-\tfrac{27}{8}P^6. \tag{8}$$

On vérifie aisément qu'on a

$$X=(4U-\tfrac{3}{2}P^2)^2, \quad Y=(4U-\tfrac{3}{2}P^2)^3.$$

Il en résulte que

$$Y^2=X^3.$$

Or, cela entraîne que $D=0$. Par conséquent, la courbe (5) n'admet aucun point double. Elle est donc du premier genre pour toutes les valeurs (en nombre fini) de P, X et Y. Ainsi, d'après un théorème célèbre de C. Siegel la courbe (5) n'admet qu'un nombre fini de points à coordonnées entières U et V; voir Siegel [5]. L'équation (3) donnera alors un nombre fini de valeurs entières de W. Le Théorème 1 se trouve ainsi démontré.

Cependant, la démonstration ne donne pas de méthode dans le cas général pour déterminer un système $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, dont nous avons montré l'existence. Dans le travail [2], § 4, nous avons déterminé les systèmes α_i dans quelques corps cyclotomiques du quatrième degré.

§ 4. Les unités de discriminant donné

4. Dans des mémoires antérieurs nous avons montré que le nombre d'unités algébriques du second et du troisième degrés de discriminant donné est limité; voir Nagell [1], théorèmes 18, 19bis et 20, ainsi que [6]. Pour les unités du quatrième degré nous avons établi le résultat particulier que voici :

Désignons par Φ le domaine des corps biquadratiques admettant un sous-corps imaginaire. Parmi les unités du quatrième degré appartenant à Φ il n'y a qu'un nombre limité de discriminant donné. Ces unités peuvent être déterminées par un nombre fini d'opérations.

Pour la démonstration voir Nagell [1], théorème 21. Nous allons généraliser ce résultat en démontrant le

Théorème 2. *Il n'y a qu'un nombre limité d'unités du quatrième degré possédant le même discriminant D.*

Démonstration. Nous avons besoin du lemme suivant :

Étant donné le nombre algébrique α le nombre $\alpha+k$ ne peut être une unité que pour un nombre fini de valeurs rationnelles entières de k.

En effet, si θ est racine de l'équation

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

et si $k - \theta$ est une unité, le nombre k doit satisfaire à l'équation

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = \pm 1.$$

Soient maintenant D le discriminant donné et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ un système satisfaisant à la condition du Théorème 1. Alors, d'après le lemme ci-dessus, il n'y a qu'un nombre fini d'unités parmi les nombres

$$\pm \alpha_1 + k_1, \ \pm \alpha_2 + k_2, \ \dots, \ \pm \alpha_m + k_m,$$

où $k_1, k_2, \dots, k_m$ sont des entiers rationnels quelconques. Cela démontre le Théorème 2.

Cependant, même ici il manque de méthode dans le cas général pour déterminer toutes les unités de discriminent donné. D'ailleurs, nous avons vu tout à l'heure qu'il existe une telle méthode dans le cas particulier où les corps biquadratiques en question possèdent un sous-corps imaginaire.

5. Exemple numérique. Nous allons déterminer toutes les unités ε du quatrième degré possèdant le discriminant $D = 272 = 16 \cdot 17$. Supposons d'abord que les corps $\mathbf{K}(\varepsilon)$ admettent un sous-corps imaginaire et appliquons la méthode indiquée dans le mémoire [1], théorème 21, p. 176.

Soit ε une racine de l'équation

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + 1 = 0, \tag{9}$$

où les coefficients p, q et r sont des entiers rationnels. Supposons que le corps biquadratique $\mathbf{K}(\varepsilon)$ possède le sous-corps imaginaire $\mathbf{U}$ engendré par $\sqrt{-\Delta}$, où Δ est un nombre naturel qui n'est divisible par aucun carré >1. L'unité ε est racine d'une équation quadratique $x^2 - ax + b = 0$ irréductible dans $\mathbf{U}$, où a et b sont des entiers dans $\mathbf{U}$; b est une unité dans $\mathbf{U}$. Soit ε'' l'autre racine de cette équation quadratique.

Considérons d'abord le cas où $-\Delta$ est ou$\equiv 2$ ou$\equiv 3 \pmod 4$. Alors nous avons

$$\varepsilon + \varepsilon'' = u + v\sqrt{-\Delta}, \quad \varepsilon\varepsilon'' = u_1 + v_1\sqrt{-\Delta}, \tag{10}$$

où u, v, u_1 et v_1 sont des entiers rationnels. Pour les coefficients de (9) on aura les relations

$$\left.\begin{aligned} p &= 2u, \quad q = u^2 + \Delta v^2 + 2u_1, \\ r &= 2uu_1 + 2\Delta vv_1 \quad 1 = u_1^2 + \Delta v_1^2. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Il suffit évidemment de supposer que $u \geqslant 0$ et $v \geqslant 0$. Pour le discriminant $D = D(\varepsilon)$ on obtiendra la formule

$$D = 16\Delta^2 D_1 D_2 = 16 \cdot 17, \tag{12}$$

où

$$D_1 = (u^2 - \Delta v^2 - 4u_1)^2 + \Delta(2uv - 4v_1)^2, \tag{13}$$

$$D_2 = (uvv_1 - v_1^2 - u_1 v^2)^2. \tag{14}$$

Pour la démonstration de ces formules voir Nagell [3], § 3.

Il résulte de l'équation (12) qu'on a $\Delta=1$, $D_1=17$ et $D_2=1$; D_2 étant un carré on ne peut pas avoir $D_2=17$. Donc, l'équation $1=u_1^2+\Delta v_1^2=u_1^2+v_1^2$ entraîne ou $u_1=\pm 1$, $v_1=0$ ou $u_1=0$, $v_1=\pm 1$. De l'équation (13) on obtient

$$u^2-v^2-4u_1=\pm 1, \quad 2uv-4v_1=\pm 4, \tag{15}$$

et de l'équation (14)

$$uvv_1-v_1^2-u_1v^2=\pm 1. \tag{16}$$

Si $u_1=\pm 1$, $v_1=0$, on aura de (15) et de (16) le système

$$u^2-v^2\pm 4=\pm 1, \quad uv=2, \quad v^2=1.$$

Ce système entraîne $u=2$, $v=1$ et $u_1=+1$; donc on aura $p=4$, $q=7$ et $r=4$. Ainsi, l'unité ε est racine de l'équation

$$x^4-4x^3+7x^2-4x+1=0. \tag{17}$$

Si $u_1=0$, $v_1=\pm 1$, on aura de (15) et de (16) le système

$$u^2-v^2=\pm 1, \quad 2uv\pm 4=\pm 4, \quad \pm uv-1=\pm 1.$$

Ce système entraîne ou $u=0$, $v=1$, ou $u=1$, $v=0$. Alors, si nous choisissons $v_1=+1$, l'unité ε est racine de l'équation

$$x^4+x^2-2x+1=0 \tag{18}$$

ou de l'équation inverse de celle-ci.

Le cas $-\Delta\equiv 1 \pmod 4$ ne peut pas se présenter vu que 272 n'est divisible par aucun carré impair >1; d'après (12) D est divisible par Δ^2.

On vérifie aisément que si ε est une racine de l'équation (18), le nombre $1-\varepsilon$ est une racine de l'équation (17).

Nous sommes donc arrivés au résultat suivant :

Les unités biquadratiques de discriminant 272 *sont données par les nombres*

$$\pm\varepsilon, \ \pm\varepsilon^{-1}, \ \pm(1-\varepsilon), \tag{19}$$

et leurs conjugués, lorsque ε *signifie une racine de l'équation* (18).

Nous avons imposé sur les unités la condition restrictive suivante : Les corps engendrés par les unités doivent contenir un sous-corps imaginaire. Cependant cette restriction peut être éloignée. En effet, par la méthode courante il est possible de montrer qu'il n'existe aucun corps biquadratique dont le discriminant a une des valeurs 272, 68 ou 17, exception faite des corps engendrés par l'équation (18). Par conséquent :

Toutes les unités du quatrième degré de discriminant 272 *sont données par les nombres* (19) *et leurs conjugués, indépendamment des corps engendrés par les unités.*

On voit qu'il y a exactement 24 unités de discriminant 272. Nous avons omis les unités $\pm(1-\varepsilon)^{-1}$ vu que $1-\varepsilon$ et $(1-\varepsilon)^{-1}$ sont conjuguées.

6. A l'aide des théorèmes 7, 8 et 9 dans le travail [2], § 4, on peut aisément établir des résultats analogues sur les unités de discriminant 125, 256 ou 144. Par exemple, à l'aide du théorème 8 dans [2] on obtient aisément :

Il y a exactement 4 unités du quatrième degré de discriminant 256, savoir

$$\pm\xi \text{ et } \pm\xi^{-1},$$

où $\xi = e^{\pi i/4}$.

Dans le travail [7], § 4, j'ai montré qu'il y a au moins 96 unités du quatrième degré ayant le discriminant 229. On voit aisément qu'il n'y a qu'un seul quadruplet de corps biquadratiques possédant ce discriminant; ces corps sont primitifs et du premier rang.

§ 5. Remarques sur le cas cubique

7. Revenons dans ce paragraphe sur nos résultats rélatifs aux nombres du troisième degré de discriminant donné dont nous avons parlé plus haut. Soit 1, ω, ω_1 une base des entiers du corps cubique $\mathbf{K}(\theta)$, où $\theta = u + v\omega + w\omega_1$ est un nombre entier avec des coefficients entiers rationnels u, v et w. Le discriminant $D(\theta)$ est évidemment indépendant de u et l'on a

$$D(\theta) = D(v\omega + w\omega_1) = [f(v, w)]^2 D^*, \tag{20}$$

où D^* est le discriminant du corps $\mathbf{K}(\theta)$, et où $f(v, w)$ estune forme binaire cubique en v et w à coefficients entiers rationnels, irréductible et primitif. Supposons maintenant que $D(\theta) = D$ est donné. Alors, D^* est limité par D et d'après le théorème de Thue l'équation

$$f(v, w) = \pm\sqrt{D/D^*} \tag{21}$$

n'a qu'un nombre limité de solutions en nombres entiers rationnels v et w. Cela montre que le Théorème 1 est vrai aussi dans le cas cubique.

Donc, pour déterminer les nombres de discriminant D il faut procéder ainsi qu'il suit : On détermine d'abord toutes les possibilités pour D^*. Pour chaque corps cubique correspondant à une valeur de D^* on détermine une base 1, ω, ω_1 et ensuite la forme $f(v, w)$. Alors, le problème revient à trouver toutes les représentations de $\sqrt{D/D^*}$ par $f(v, w)$. Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre le dernier problème. Lorsque $D < 0$ on peut le faire dans des cas particuliers; comparez Nagell [8]. Ljunggren a esquissé une méthode de résolution dans le cas où $D > 0$; voir [9]. Siegel a montré que, pour $D > 0$, le nombre de solutions de (21) est au plus égal à 18, si D surpasse une certaine limite D_0; voir [5], § 10. Ainsi, lorsque h désigne le nombre de possibilités pour D^*, le nombre des nombres α_i sera au plus égal à $18h \leqslant 18\sqrt{D}$ pour $D > D_0$. Cependant, on ne connaît pas la valeur de D_0.

8. On peut aussi appliquer la méthode adaptée dans le cas biquadratique pour la démonstration du Théorème 1. Soit θ un nombre du troisième degré de discriminant D et racine de l'équation

$$z^3 - pz^2 + qz - r = 0, \tag{22}$$

les coefficients p, q et r étant des entiers rationnels. Alors nous avons évidemment

$$2^4 3^3 D = X^3 - Y^2, \tag{23}$$

où X et Y ont les valeurs suivantes :

$$X = 4p^2 - 12q, \tag{24}$$

$$Y = 108r - 36pq + 8p^3. \tag{25}$$

D'après le théorème de Thue l'équation (23) n'admet qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers rationnels X et Y lorsque D est donné. Le coefficient p peut être considéré comme constant; il suffit en effet de supposer que p prenne les trois valeurs 0 et ± 1. Chaque triplet de valeurs p, X et Y détermine univoquement les coefficients q et r.

Le Théorème 2 sur les unités de discriminant donné est aussi vrai dans le cas cubique; nous l'avons montré dans des travaux antérieurs; voir [6], pp. 57–64, [1] et aussi [7], § 4. Pour les discriminants négatifs le problème est complètement résolu par le théorème suivant :

Soit donné le nombre entier négatif D. Les unités ε du troisième degré, réelles, positives et <1, ayant le discriminant D, peuvent être caractérisées de la manière suivante.

Soient $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_n$ tous les anneaux entiers ordinaires réels du troisième degré possédant le discriminant D, et désignons par ξ_k l'unité fondamentale de $\mathbf{R}_k$ avec $0<\xi_k<1$.

1° *Soit d'abord D différent des nombres -23, -31 et -44. Alors, les unités ε sont ceux des nombres ξ_k qui ont le discriminant D. Seulement dans le cas où ξ_k est racine d'une équation $z^3 = 1 - qz$ (q nombre naturel $\geqslant 2$) il y a une deuxième unité de discriminant D, à savoir ξ_k^2.*

2° *Il y a deux unités de discriminant $D = -44$, à savoir*

$$\xi \text{ et } \xi^3, \quad \text{où } \xi^3 = -\xi^2 - \xi - 1.$$

3° *Il y a quatre unités de discriminant $D = -31$, à savoir*

$$\xi,\ \xi^2,\ \xi^3 \text{ et } \xi^5, \quad \text{où } \xi^3 = 1 - \xi.$$

4° *Il y a six unités de discriminant $D = -23$, à savoir*

$$\xi,\ \xi^2,\ \xi^3,\ \xi^4,\ \xi^5 \text{ et } \xi^9, \quad \text{où } \xi^3 = 1 - \xi^2.$$

Comparez Nagell [6], § 4 et aussi [1], théorème 21. Un anneau est réel lorsqu'il est constitué de nombres réels seulement; il est entier lorsqu'il ne contient que des nombres entiers; il est ordinaire lorsqu'il contient le nombre 1. Si l'unité ε a le discriminant D il en est de même pour les unités $-\varepsilon$ et $\pm\varepsilon^{-1}$, ainsi que pour les unités conjuguées; cela fait déjà 12 unités de discriminant D.

Il n'y a pas de résultat analogue dans le cas d'un discriminant positif. Cependant, dans un petit nombre de cas particuliers il est possible de résoudre le problème complètement.

9. Exemple numérique. Nous allons traiter le cas $D = 81$. On montre d'abord par la méthode courante qu'il n'existe aucun corps cubique de discriminant 9 et ensuite qu'il existe un seul corps cubique de discriminant 81, à savoir le corps abélien engendré par une racine η de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$. Dans le corps $\mathbf{K}(\eta)$ on peut choisir pour base des entiers le triplet $1, \eta, \eta^{-1}$. Le discriminant du corps est $= D(\eta) = 81$. Si nous posons dans l'équation (21) $v = x$ et $3v + w = y$, et si nous prenons le signe inférieur, nous aurons la relation

$$x^3-3xy^2-y^3=+1.$$

Ljunggren (voir [9]) a montré que cette équation n'admet que les six solutions suivantes en nombres entiers rationnels :

$$x=1,\quad y=0;\quad x=0,\quad y=-1;\quad x=-1,\quad y=1;$$

$$x=1,\quad y=3;\quad x=-3,\quad y=2;\quad x=2,\quad y=1.$$

Nous aurons ainsi six nombres α_i dans le système dont nous venons de montrer l'existence dans le Théorème 1 (cas cubique). Par des petits calculs numériques on vérifie aisément que les nombres α_i de ce système peuvent être choisis de la manière suivante :

$$\eta,\ \eta^{-1},\ \eta',\ (\eta')^{-1},\ \eta'',\ (\eta'')^{-1}, \tag{26}$$

où η' et η'' sont les nombres conjugués de η. Donc, si θ est un nombre du troisième degré ayant le discriminant 81 on a $\theta=\pm\alpha_i+a$, où α_i signifie l'un des nombres (26) et a un entier rationnel.

Nous pouvons maintenant déterminer toutes les unités du troisième degré ayant le discriminant 81. Pour cela il suffit évidemment de déterminer tous les entiers rationnels a tels que les nombres $\eta-a$ et $\eta^{-1}-a$ soient des unités. Pour que $\eta-a$ soit une unité il faut que $a^3-3a-1=\pm 1$; donc $a=0$, -1 ou 2. Le nombre $\eta^{-1}-a$ est une unité si $a^3+3a^2-1=\pm 1$, ce qui est possible seulement pour $a=0$ et $a=-1$. Il en résulte le théorème :

Toutes les unités du troisième degré et de discriminant 81 *sont données par le tableau suivant :*

$$\pm\eta,\ \pm\eta^{-1},\ \pm\eta',\ \pm(\eta')^{-1},\ \pm\eta'',\ \pm(\eta'')^{-1},$$

$$\pm(\eta-2),\ \pm(\eta'-2),\ \pm(\eta''-2),$$

$$\pm(\eta-2)^{-1},\ \pm(\eta'-2)^{-1},\ \pm(\eta''-2)^{-1}.$$

Pour vérifier cela il faut observer que $\eta+1$ est racine de l'équation $x^3-3x^2+1=0$ et que $\eta^{-1}+1$ est racine de l'équation $x^3-3x+1=0$. C'est la cause qu'on ne trouve pas les nombres $\eta+1$ et $\eta^{-1}+1$ dans le tableau. On voit qu'il y a exactement 24 unités de discriminant 81.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

1. NAGELL, T., Contributions à la théorie des modules et des anneaux algébriques, *Arkiv för matematik*, Bd. 6, nr. 9, Stockholm 1965.
2. NAGELL, T., Sur les discriminants des nombres algébriques, *Arkiv för matematik*, Bd. 7, nr. 19, Stockholm 1967.
3. NAGELL, T., Sur les représentations de l'unité par les formes binaires biquadratiques du premier rang, *Arkiv för matematik*, Bd. 5, nr. 33, Stockholm 1965.
4. THUE, A., Über die Unlösbarkeit der Gleichung $ax^2+bx+c=dy^n$ in grossen ganzen Zahlen x und y, *Archiv f. matem. og naturvid*, BXXXIV, Nr. 16, Kristiania 1917.
5. SIEGEL, C. L., Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, *Abhandl. Preuss. Akad. d. Wissensch. Berlin*, Jahrg. 1929, *Phys. Math. Klasse*, Nr. 1.
6. NAGELL, T., Zur Theorie der kubischen Irrationalitäten, *Acta Mathematica*, Bd. 55, Stockholm 1929.

7. NAGELL, T., Sur les unités dans les corps biquadratiques primitifs du premier rang, *Arkiv för matematik*, Bd. 7, nr. 27, Stockholm 1968.
8. NAGELL, T., Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante, *Mathematische Zeitschrift*, Bd. 28, Berlin 1928. (Reçu par ce journal le 8 février 1926.)
9. LJUNGGREN, W., Einige Bemerkungen über die Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit positiver Diskriminante, *Acta mathematica*, t. 75, Stockholm 1942.

Tryckt den 30 augusti 1968

Uppsala 1968. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB