ARKIV FÖR MATEMATIK Band 3 nr 7

Mitgeteilt am 13. Januar 1954 durch T. NAGELL

Über irreduzible Axiomensysteme, die eine endliche abstrakte Gruppe bestimmen

Von BENGT STOLT

§ 1. Einleitung

Die Axiomatik endlicher Gruppen ist nur von wenigen Verfassern behandelt. U. a. wollen wir BAER und LEVI erwähnen, die einige Axiome aufstellen, die die allgemeinen Axiome genannt werden; siehe [1]. Sie bestimmen sämtliche vollständigen irreduziblen Systeme, die aus diesen Axiomen gebildet werden können, und sie bestimmen auch diejenigen Systeme, die nur vollständig sind, wenn die zugrundeliegende Menge endlich ist.

LORENZEN behandelt nicht nur die allgemeinen Axiome sondern auch die sogenannten Eins-Existenzaxiome und die allgemeinen Inversaxiome. Er stellt sämtliche vollständigen irreduziblen Systeme auf, die aus diesen Axiomen gebildet werden können und höchstens vier Axiome enthalten; siehe [2]. In meiner Dissertation habe ich sämtliche vollständigen irreduziblen Systeme bestimmt, die aus den von LORENZEN betrachteten Axiomen gebildet werden können, siehe [3], S. 56.

Weder in [2] noch in [3] wird der Fall behandelt, wo die zugrundeliegende Menge endlich ist. Es ist nun das Ziel der vorliegenden Arbeit, sämtliche vollständigen irreduziblen Systeme zu bestimmen, die aus den von LORENZEN betrachteten Axiomen gebildet werden können und nur vollständig sind, wenn die zugrundeliegende Menge endlich ist. Für Bezeichnungen und Hilfssätze wird an [3] verwiesen.

§ 2. Hilfssätze

Zunächst werden wir zwei Hilfssätze beweisen, die Verallgemeinerungen eines Satzes von BAER–LEVI [1], S. 11, sind.

Hilfssatz 1. *Wenn $lE.J$ und $rU.J$ bestehen, bestehen auch $lU.J$ und $rE.J$.*

Beweis: Wir nehmen an, dass d ein Element mit $lE.J$ und $rU.J$ ist, und betrachten die Produkttafel der zugrundeliegenden endlichen Menge. Nach $lE.J$ kommt d in jeder Kolonne mindestens einmal vor; siehe [3], S. 16. Die Produkttafel enthält also d mindestens n mal. Aber nach $rU.J$ kommt d in jeder Zeile höchstens einmal vor; siehe [3], S. 17. Folglich enthält die Produkttafel d höchstens n mal. Sie enthält also d genau n mal. Jede Zeile und Kolonne enthält dann d genau einmal. Hieraus folgt die Gültigkeit von $lU.J$ und $rE.J$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wir beweisen auch

Hilfssatz 2. *Wenn E und lU oder lE und U bestehen, bestehen die vier Axiome E, lE, U und lU.*

Beweis: Wir werden den Hilfssatz für den Fall beweisen, wo E und lU bestehen. Wenn E besteht, gibt es in jeder Parzelle der Produkttafel mindestens ein Element; siehe [3], S. 15. Eine beliebige Kolonne enthält also mindestens n Elemente. Aber wegen lU kommt jedes Element in jeder Kolonne höchstens einmal vor; siehe [3], S. 15. Folglich müssen sämtliche n Elemente in jeder Kolonne genau einmal vorkommen, d. h. lE besteht. Weil jede Parzelle genau ein Element enthalten muss, besteht auch U. Hiermit ist der Hilfssatz bewiesen.

Der Beweis für den Fall, wo lE und U bestehen, ist wörtlich derselbe wie der obige Beweis, wenn E durch U und lU durch lE ersetzt und die Worte »mindestens« und »höchstens« miteinander vertauscht werden.

§ 3. Vollständige Systeme

In [3] wird gezeigt, dass zwölf Systeme gebildet werden können, die vollständig sind, wenn die zugrundeliegende Menge endlich oder unendlich ist; siehe S. 56. Wir werden nun zeigen, dass die folgenden fünf Systeme vollständig sind, wenn die zugrundeliegende Menge endlich ist.

1) A, lE, U, $rU.i$
2) A, E, lU, $lI(E)$
3) A, E, lU, $rE.i$
4) A, E, lU, $rU.i$
5) A, E, U, $lE.i$, $rU.i$

Vollständigkeitsbeweis von 1) und 4):

Wegen Hilfssatz 2 bestehen A, E, lE, U, lU *und* $rU.i$. Dieses System ist aber vollständig, weil es umfassender als das vollständige System 6) in [3], S. 29, ist.

Vollständigkeitsbeweis von 2):

Wegen Hilfssatz 2 bestehen A, E, lE, U, lU und $lI(E)$. Die Vollständigkeit dieses Systems folgt daraus, dass es umfassender als das vollständige System 1) in [2], S. 323, oder das vollständige System 1) in [3], S. 26, ist.

Vollständigkeitsbeweis von 3):

Wegen Hilfssatz 2 bestehen A, E, lE, U, lU und $rE.i$. Dieses System ist umfassender als das vollständige System 2) in [2], S. 323, oder 2) in [3], S. 27, und folglich ist es vollständig.

Vollständigkeitsbeweis von 5):

Wegen Hilfssatz 1 bestehen A, E, U, $lE.i$, $lU.i$, $rE.i$ und $rU.i$. Dieses System ist umfassender als das vollständige System 6) in [3], S. 29, und folglich ist es vollständig.

§ 4. Unvollständige Systeme

Wir werden nun zeigen, dass die in den folgenden Sätzen aufgestellten Systeme unvollständig sind, wenn eine endliche abstrakte Menge zugrunde liegt.

Satz 1. *Das System* E, lE, rE, U, lU, rU *und* e *ist unvollständig.*
Satz 2. *Das System* A, lE, rE, lU, rU *und* e *ist unvollständig.*
Satz 3. *Das System* A, U, lU, rU, $lE.e$ *und* $rE.e$ *ist unvollständig.*
Satz 4. *Das System* A, E, lE, U, lU *und* $rI(E)$ *ist unvollständig.*
Satz 5. *Das System* A, E, U, $lU.e$, $rU.e$, $lE.I$ *und* $rE.I$ *ist unvollständig.*
Satz 6. *Das System* A, E, lE, rE, $lU.e$ *und* $rU.e$ *ist unvollständig.*

Beweis: Die Sätze 1–4 und 6 sind schon in [3], S. 19, 20, 51 und 53 bewiesen, und man sieht sofort ein, dass diese Beweise für den Fall durchgeführt sind, wo die zugrundeliegende Menge endlich ist.

Die Richtigkeit von 5 geht aus der folgenden Menge hervor, die keine Gruppe ist.

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix}$$

§ 5. Die Irreduzibilität der vollständigen Systeme

Schliesslich werden wir zeigen, dass es keine anderen Systeme als die oben hergeleiteten gibt, die nur dann vollständig sind, wenn die zugrundeliegende Menge endlich ist.

Aus Satz 1–3 und 6 ergibt sich, dass ein vollständiges System mindestens je eines der Axiome A und E, U und E, lE, rE und U, lU, rU enthalten muss. Jedes vollständige System muss also A, E, U oder A, lE, U oder A, E, lU enthalten.

Wenn ein System entweder A, lE, U oder A, E, lU enthält und die zugrundeliegende Menge endlich ist, bestehen wegen Hilfssatz 2 die Axiome A, E, lE, U und lU. Wenn $lI(E)$ oder $rE.i$ oder $rU.i$ hinzugefügt wird, erhält man ein vollständiges System; siehe [3] S. 56. Die Systeme A, lE, U, $lI(E)$ und A, lE, U, $rE.i$ sind auch für eine zugrundeliegende unendliche Menge vollständig; siehe [2] S. 323, oder [3] S. 27. Dagegen ist das System A, lE, U, $rU.i$ nur vollständig, wenn die zugrundeliegende Menge endlich ist; vgl. [2] S. 320, oder [3] S. 52. Auch A, E, lU, $lI(E)$ und A, E, lU, $rE.i$ und A, E, lU, $rU.i$ sind nur für eine zugrundeliegende endliche Menge vollständig; vgl. [2] S. 319, oder [3] S. 50. Wegen Satz 4 ist es nicht möglich, andere Systeme zu bilden, die A, lE, U oder A, E, lU enthalten, für eine zugrundeliegende endliche Menge vollständig sind und weniger umfassend als die eben behandelten Systeme sind.

Aus Satz 4–6 geht hervor, dass wenn ein System nicht lE, rE, lU oder rU enthält, es nur dann vollständig sein kann, wenn es entweder $lE.lI$ oder $lE.i$, $rU.i$ oder stärkere Axiome enthält. Das System A, E, U, $lE.lI$ ist sogar für eine zugrundeliegende unendliche Menge vollständig; siehe [2] S. 320, oder [3] S. 26. Dagegen ist das System A, E, U, $lE.i$, $rU.i$ nur dann vollständig, wenn die zugrundeliegende Menge endlich ist; vgl. [2] S. 320, oder [3] S. 52. Aus Satz 4 folgt, dass das letzte System irreduzibel ist.

Damit ist gezeigt, dass aus den Axiomen Lorenzens nicht mehr als fünf Systeme gebildet werden können, die irreduzibel und nur für eine zugrundeliegende endliche Menge vollständig sind.

LITERATURVERZEICHNIS

[1]. R. Baer–F. Levi, Vollständige irreduzible Systeme von Gruppenaxiomen. S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. 2. Abhandlung 1932, S. 3–12.
[2]. P. Lorenzen, Ein Beitrag zur Gruppenaxiomatik. Math. Z. 49 (1943–44), S. 313–327.
[3]. B. Stolt, Über Axiomensysteme, die eine abstrakte Gruppe bestimmen. Uppsala 1953.

Tryckt den 13 april 1954

Uppsala 1954. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB