ÜBER DIE ARITHMETISCHE REDUKTION DER FORMENSCHAREN.

VON

P. J. MYRBERG

in HELSINGFORS.

Einleitung.

In seiner Arbeit »*Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres*» hat HERMITE[1] eine allgemeine Methode zur arithmetischen Untersuchung der Formen gegeben, durch welche die von GAUSS, DIRICHLET und deren Nachfolgern entwickelte Theorie der quadratischen Formen auf Formen beliebiger Ordnung übertragen werden kann. Freilich hat HERMITE selbst sich auf die binären und allgemeiner auf die in lineare Faktoren zerlegbaren Formen beschränkt, seine Methode behält jedoch auch bei den allgemeinen Formen mehrerer Variablen ihre Gültigkeit, wie JORDAN[2] und POINCARÉ[3] gezeigt haben.

In der arithmetischen Formentheorie nimmt die *Reduktion* eine zentrale Stellung ein. Mit Hilfe der Reduktionstheorie hat JORDAN einen Satz von sehr grosser Allgemeinheit bewiesen, der in der Klassifikation der diophantischen Gleichungen eine hervorragende Bedeutung hat. Wir verstehen unter einer Familie bzw. Klasse von Formen die Gesamtheit der Formen, die aus einer gegebenen Form vermittels unimodularer linearer Substitutionen mit beliebigen bzw. ganzen komplexen Koeffizienten erhalten werden, und wir können den Jordanschen Satz in folgender Weise aussprechen:

---

[1] HERMITE, CH. *Oeuvres*, tome I, S. 164.

[2] JORDAN, C. *Mémoire sur l'équivalence des formes*, Journal de l'école polytechnique, tome 47 (1880).

[3] POINCARÉ, H. *Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires*, Journal de l'école polytechnique, tome 50—51 (1881—82).

Es gibt in jeder Familie von Formen mit nichtverschwindender Diskriminante nur endlich viele Klassen von Formen mit ganzen Koeffizienten.

Nach POINCARÉ bleibt der obige Satz auch bei den Formen mit verschwindender Diskriminante gültig, wenn man gewisse spezielle Fälle ausschliesst.

Die obigen Resultate sind nicht die allgemeinsten, zu denen man mit Hilfe der Hermiteschen Theorie gelangen kann. Der Begriff der Reduktion lässt sich auf Systeme von Formen übertragen, wodurch eine Verallgemeinerung des Jordan-Poincaréschen Satzes gewonnen wird, die für die Systeme diophantischer Gleichungen analoge Dienste leistet wie der ursprünglichste Satz für eine einzige Gleichung. Unseres Wissens liegen bisher noch keine Untersuchungen in der angegebenen Richtung vor.

In einer früheren Arbeit[1] haben wir schon die Systeme quadratischer Formen nach einer speziellen Methode behandelt. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, die betreffenden Resultate auf den allgemeinen Fall zu übertragen, wo die Formen eine beliebige Ordnung haben. In unseren Betrachtungen werden nicht die einzelnen Formen, sondern die durch dieselben definierten kontinuierlichen Formenscharen eine wesentliche Bedeutung haben, weshalb wir unsere Aufgabe als eine arithmetische Untersuchung von Formenscharen charakterisieren können.

Wir beginnen mit der Zusammenstellung einiger bekannten Resultate aus der Invariantentheorie der Formenscharen, von denen namentlich ein Satz von GORDAN[2] über die Kombinanten eine mehrfache Anwendung finden wird. Den Hauptgegenstand unserer Arbeit bildet die Überführung der Hermiteschen Reduktionstheorie auf Formenscharen und deren Anwendung zum Beweis des verallgemeinerten Jordan-Poincaréschen Satzes. Es wird sich zeigen, dass unsere allgemeine Methode bei den quadratischen Formen nicht anwendbar ist, in diesem niedrigsten Fall wird aber eine andere, spezielle Methode zum Ziel führen, wie in dem letzten Kapitel gezeigt wird.

I. Über die Invarianten der Formenscharen.

1. Es sei

$$\varphi_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

ein System von Formen, d. h. homogener ganzer rationaler Funktionen, die linear unabhängig sind und eine und dieselbe Ordnung haben. Wir verstehen unter

[1] MYRBERG, P. J. *Über die simultane Reduktion quadratischer Formen,* Annales academiae scientiarum fennicae, serie A, tom. XXIV, Nr. 7 (1925).

[2] GORDAN, P. *Ueber Combinanten,* Mathematische Annalen, Bd. 5 (1872).

der *Formenschar* $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ oder (φ) die kontinuierliche Mannigfaltigkeit der Formensysteme

$$\bar{\varphi}_\mu = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_{\mu\nu}\varphi_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

wo die Koeffizienten $\alpha_{\mu\nu}$ beliebige komplexe Grössen bezeichnen, deren Determinante gleich Eins ist. Jedes Formensystem (2) bildet eine Basis der Schar (φ), so dass die Scharen $(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots, \bar{\varphi}_m)$ und $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ mit einander identisch sind.

Es sei $(\psi_1, \psi_1, \ldots, \psi_m)$ eine zweite Formenschar, die von derselben Ordnung wie (φ) ist. Wir sagen, dass die Scharen (φ) und (ψ) *algebraisch äquivalent* sind, wenn es eine unimodulare Substitution

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

gibt derart, dass die Schar mit der Basis

$$\varphi_\nu(x_1', x_2', \ldots, x_n') \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \tag{4}$$

identisch mit der Schar (ψ) wird. Sind insbesondere die Koeffizienten a_{ik} der unimodularen Substitution (3) komplexe ganze Zahlen, d. h. Zahlen der Form $a + ib$, wo a und b ganze rationale Zahlen sind, so werden die Scharen (φ) und (ψ) *arithmetisch äquivalent* genannt. Die Gesamtheit der mit der Schar (φ) algebraisch äquivalenten Formenscharen bildet eine *Familie* $\{\varphi\}$, die Gesamtheit der mit der genannten Schar arithmetisch äquivalenten Formenscharen bildet eine *Klasse* $[\varphi]$.

Die Aufstellung der Bedingungen für die algebraische Äquivalenz gehört zum Gebiete der algebraischen Invariantentheorie. Dagegen ist die Untersuchung der arithmetischen Äquivalenz zweier Formenscharen eine rein arithmetische Aufgabe. Dieser Tatsache gemäss besteht die folgende Darstellung aus einer algebraischen und einer arithmetischen Abteilung.

2. Wir verstehen wie üblich unter einer *simultanen Invariante bzw. Kovariante des Formensystems* (1) jede homogene ganze rationale Funktion der Koeffizienten der Formen (1) bzw. jede Form der Variablen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit ganz und rational von den Koeffizienten der Formen (1) abhängigen Koeffizienten, die bis auf einen konstanten Faktor ungeändert bleibt, wenn man die Variablen (x) einer beliebigen linearen Substitution unterwirft. Irgend eine simultane Invariante bzw. Kovariante

des Systems (1) heisst eine *Kombinante,* wenn dieselbe bis auf einen konstanten Faktor ungeändert bleibt, wenn man das System (1) durch ein beliebiges anderes System (2) ersetzt, wo die Determinante der Koeffizienten $\alpha_{\mu\nu}$ von Null verschieden ist. Wenn diese Determinante insbesondere gleich Eins ist, so bleibt jede Kombinante beim Übergang von dem System (1) zum System (2) ungeändert. Die Kombinanten sind also nicht von der Basis, sondern von der Schar selbst allein abhängig. Wir können dieselben daher als *Invarianten* bzw. *Kovarianten der Formenschar* bezeichnen.

3. Um eine Familie von Formenscharen invariantentheoretisch zu charakterisieren, ordnen wir jeder Schar $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ die Gordansche Form

$$G(\varphi) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_m(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \ldots & \varphi_m(y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_m(t) \end{vmatrix} \tag{5}$$

zu, wo die $(x), (y), \ldots, (t)$ kogrediente Variablenreihen bezeichnen. Man bestätigt unmittelbar, dass jeder Formenschar (φ) eine von der Basis unabhängige Gordansche Form entspricht, die nicht identisch Null ist, wenn die Formen (1) linear unabhängig sind; umgekehrt ist jeder nicht identisch verschwindenden Gordanschen Form eindeutig eine Formenschar zugeordnet. Ferner sind die zu zwei algebraisch bzw. arithmetisch äquivalenten Formenscharen gehörigen Gordanschen Formen algebraisch bzw. arithmetisch äquivalent, d. h. sie können ineinander vermittels kogredienter unimodularer Substitution mit beliebigen komplexen bzw. ganzen Koeffizienten transformiert werden.

Offenbar ist jede Invariante bzw. jede nur von den Variablen x abhängige Kovariante der Gordanschen Form eine Invariante bzw. Kovariante der zugeordneten Formenschar. Aber es gilt auch das Umgekehrte: jede Invariante bzw. Kovariante der Schar (φ) ist eine Invariante bzw. Kovariante der Form $G(\varphi)$. Wegen des Beweises dieser Behauptung weisen wir auf die Arbeiten von GORDAN[1] und STROH[2] hin.

4. Wir erinnern ferner an den bekannten Satz, wonach es für die algebraische Äquivalenz zweier Formen notwendig und hinreichend ist, dass die In-

[1] S. die Fussnote S. 356.

[2] STROH, E. *Zur Theorie der Combinanten,* Mathematische Annalen, Bd. 22 (1883).

varianten beider Formen gleiche Werte haben und dass jeder identisch verschwindenden Kovariante der einen Form eine solche Kovariante der anderen Form entspricht (derartige Kovarianten können nur in sehr speziellen Fällen vorkommen). Wegen des oben angegebenen Zusammenhanges zwischen den Formenscharen und den Gordanschen Formen können wir daraus den Schluss ziehen, dass jede Familie von Formenscharen durch die Werte der Invarianten und durch das System der identisch verschwindenden Kovarianten vollständig charakterisiert wird. Zu beachten ist, dass man dabei nur ein volles System von Invarianten und Kovarianten zu berücksichtigen hat, durch welche alle anderen Invarianten bzw. Kovarianten rational darstellbar sind und deren Anzahl nach einem bekannten allgemeinen Satz von HILBERT[1] stets endlich ist.

5. Wir betrachten jetzt insbesondere denjenigen Fall, wo die Formenschar eine Basis hat, deren Formen ganze[2] Zahlen als Koeffizienten haben. Die Invarianten sowie die Koeffizienten der Kovarianten der Schar sind dann ebenfalls ganze Zahlen. Es seien

$$I_\mu = a_\mu + b_\mu i \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, M) \tag{6}$$

die betreffenden Invarianten und

$$C_\nu \equiv 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \tag{6'}$$

die identisch verschwindenden Kovarianten. Die linken Seiten der Gleichungen (6) und (6′) sind ganze rationale Funktionen der Koeffizienten (c) der Formen (1). Nach einem allgemeinen Satz von JORDAN[3] gibt es eine Lösung (c_0) der Gleichungen (6) und (6′), wo die Grössen c_0 dem absoluten Betrage nach unterhalb endlicher Grenzen liegen, die ganze Funktionen der Invarianten $a_\mu + b_\mu i$ sind und die dazu nur von den in den Gleichungen (6)′ auftretenden numerischen Grössen abhängen. Es sei (φ_0) das dem Koeffizientensystem (c_0) zugeordnete Formensystem (1). Nach dem obigen sind die Formenscharen (φ) und (φ_0) algebraisch äquivalent. Wir können daher den folgenden Satz aufstellen.

Satz 1. *Es gibt in jeder Familie von Formenscharen mit ganzen Invarianten eine Schar, die als Basis ein System von Formen* (1) *hat, deren Koeffi-*

---

[1] HILBERT, D. *Über die Theorie der algebraischen Formen*, Mathematische Annalen, Bd. 36 (1890).

[2] Unter ganzen Zahlen werden hier und im Folgenden stets komplexe ganze Zahlen verstanden.

[3] S. die in der Fussnote[2] S. 355 genannte Arbeit S. 113—.

zienten unterhalb endlicher Grenzen liegen, die ganze Funktionen der Invarianten der Familie sind.

Zugleich werden natürlich auch die Koeffizienten der zugeordneten Gordanschen Form in entsprechender Weise beschränkt.

II. Arithmetische Reduktion der Formen mit kogredienten Variablenreihen.

6. Wie schon oben erwähnt, lässt sich die Bestimmung der arithmetischen Äquivalenz von Formenscharen auf diejenige ihrer Gordanschen Formen zurückführen. Wir beginnen daher unsere arithmetischen Betrachtungen, indem wir die Hermite-Jordansche Reduktionstheorie auf Formen von mehreren kogredienten Variablenreihen übertragen.

Es sei

$$f((x), (y), \ldots, (t)) \tag{7}$$

eine solche Form, die in bezug auf jede der Variablenreihen (x), (y), . . ., (t) die Ordnung p habe. Auf diese Formen kann man die Begriffe der algebraischen und der arithmetischen Äquivalenz unmittelbar übertragen, wenn man die Transformierten von (7) vermittels unimodularer Substitutionen

$$x_i' = \sum a_{ik} x_k, \quad y_i' = \sum a_{ik} y_k, \ldots, \quad t_i' = \sum a_{ik} t_k \tag{8}$$

betrachtet, wo die a_{ik} beliebige bzw. ganze komplexe Zahlen bezeichnen.

Um die Frage nach der arithmetischen Äquivalenz zweier Formen (7) zu lösen, wollen wir den Begriff der reduzierten Formen einführen.

Wir betrachten zu diesem Zweck mit JORDAN die definite Hermitesche Form

$$h_0 = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \cdots + x_n \bar{x}_n, \tag{9}$$

wo allgemein $\bar{x}_\nu$ die konjugierte Grösse der komplexen Variablen x_ν bezeichnet. Es sei h eine beliebige aus (9) vermittels einer linearen unimodularen Transformation erhaltene Hermitesche Form. Bekanntlich gibt es dann eine lineare unimodulare Substitution mit ganzen komplexen Koeffizienten, welche die Form h in eine Form der Gestalt

$$\mu_1 |x_1 + \varepsilon_{12} x_2 + \cdots + \varepsilon_{1n} x_n| + \mu_2 |x_2 + \varepsilon_{23} x_3 + \cdots + \varepsilon_{2n} x_n| + \cdots + \mu_n |x_n| \tag{10}$$

transformiert, wo die reellen positiven Zahlen μ und die Zahlen ε den Bedingungen

(11) $$\mu_{k+1} \geqq \frac{1}{2}\mu_k, \quad \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n = 1, \quad |\varepsilon_{ik}| \leqq \frac{1}{2}$$

genügen.

Jede Form (10) soll eine *reduzierte Hermitesche Form* genannt werden. Unter einer *reduzierten Substitution* soll jede unimodulare Substitution verstanden werden, welche die kanonische Hermitesche Form (9) in eine reduzierte Form transformiert.

7. Indem wir hiernach zu unserer allgemeinen Form (7) zurückkehren, wollen wir in der Familie $\{f\}$, d. h. in der Mannigfaltigkeit aller mit f algebraisch äquivalenten Formen irgend eine Form f_0 als *kanonische Form* wählen. Es ist am zweckmässigsten, zur kanonischen Form eine Form der Familie zu wählen, deren Koeffizienten dem absoluten Betrage nach möglichst klein sind. In dem Falle, wo die Invarianten der Familie ganze Zahlen sind, kann man nach Nr. 5 die kanonische Form so definieren, dass ihre Koeffizienten absolut unterhalb endlicher Grenzen liegen, die ganze Funktionen der Invarianten sind.

Unter einer *reduzierten Form der Familie* $\{f\}$ soll jede Form der Familie verstanden werden, die aus der kanonischen Form f_0 vermittels irgend einer reduzierten Substitution erhalten wird.

Der Hauptsatz der Reduktion lautet dann:

Satz 2. *Jede Form f ist mit einer reduzierten Form arithmetisch äquivalent.*

Es sei nämlich T eine beliebige lineare unimodulare Substitution, welche die kanonische Form f_0 in die Form f transformiert. Jede andere derartige Substitution hat dann den Ausdruck τT, wo τ eine Substitution bezeichnet, die f_0 invariant lässt. Es sei nun E diejenige unimodulare ganzzahlige Substitution, welche die Hermitesche Form $h_0 \tau T$ reduziert. Nach der Definition in Nr. 6 ist dann die Substitution

(12) $$\tau T E$$

eine reduzierte Substitution und daher die Form

(13) $$f_0 \tau T E = f E$$

eine reduzierte Form der Familie $\{f_0\}$. Weil dieselbe den Ausdruck fE hat, ist sie mit der Form f arithmetisch äquivalent. Damit ist der obige Satz bewiesen.

Aus der Definition der reduzierten Formen geht unmittelbar hervor, dass es für die arithmetische Äquivalenz der Formen einer und derselben Familie notwendig und hinreichend ist, dass ihre reduzierten Formen miteinander übereinstimmen.

Weil es für jede Hermitesche Form im allgemeinen eine einzige ganzzahlige Substitution gibt, welche dieselbe in eine reduzierte Form (10) transformiert, so ist nach dem Vorhergehenden die Anzahl der mit einer gegebenen Form (7) arithmetisch äquivalenten reduzierten Formen im allgemeinen gleich Eins, wenn die betreffende Form keine von der Identität verschiedene Transformation in sich selbst zulässt. Jedenfalls ist die Anzahl jener reduzierten Formen endlich, wenn die fragliche Form nur durch endlich viele Substitutionen in sich selbst transformiert werden kann.

8. Eine besondere Bedeutung hat die Reduktionstheorie für die Formen mit *ganzen* Koeffizienten. Für diese Formen werden wir folgenden Satz beweisen, der einen analogen Satz von JORDAN und POINCARÉ auf Formen mit mehreren Variablenreihen überträgt.

Satz 3. *Die Anzahl der reduzierten Formen mit ganzen Koeffizienten ist endlich in jeder Familie $\{f\}$, die der folgenden Bedingung genügt:*

Kovariantenbedingung. *Es gibt ein System nur von den Variablen (x) abhängiger Kovarianten*

$$K_1, \quad K_2, \ldots, \quad K_\nu \tag{14}$$

die keinen gemeinsamen Nullpunkt haben.

Es ist zum Beweis des Satzes offenbar hinreichend zu zeigen, dass die ganzen Koeffizienten der reduzierten Formen der Familie $\{f\}$ endliche obere Grenzen haben.

Es sei f_0 die kanonische Form der Familie und F eine reduzierte Form derselben. Jede Substitution, welche f_0 in F transformiert, ist wegen der in Nr. 6 gegebenen Definition der reduzierten Substitutionen in der Gestalt

$$T = T_1 T_2 T_3 \tag{15}$$

darstellbar, wo T_1 eine Substitution bezeichnet, welche die Hermitesche Form h_0 invariant lässt und wo T_2 bzw. T_3 die Ausdrücke

$$(16)\qquad \begin{aligned} T_2:&\qquad x_i' = x_i + \varepsilon_{i,\,i+1}\, x_{i+1} + \cdots + \varepsilon_{i,n}\, x_n \\ T_3:&\qquad x_i' = \sqrt{\mu_i}\, x_i \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

haben. Nach dem Obigen kann man annehmen, dass die Koeffizienten von f_0 unterhalb Grenzen liegen, die ganze Funktionen der Invarianten der Familie sind. Weil ferner die Koeffizienten der Substitutionen T_1 und T_2 unterhalb endlicher numerischer Grössen liegen, werden offenbar die Koeffizienten der Form

$$(17)\qquad f_0\, T_1\, T_2 = \sum A_{\xi\eta\ldots\tau}\, x_1^{\xi_1} \ldots x_n^{\xi_n}\, y_1^{\eta_1} \ldots y_n^{\eta_n} \ldots t_1^{\tau_1} \ldots t_n^{\tau_n}$$

durch die Invarianten der Familie beschränkt. Es sei

$$(18)\qquad F = \sum B_{\xi\eta\ldots\tau}\, x_1^{\xi_1} \ldots x_n^{\xi_n}\, y_1^{\eta_1} \ldots y_n^{\eta_n} \ldots t_1^{\tau_1} \ldots t_n^{\tau_n}$$

der Ausdruck der reduzierten Form F. Weil dieselbe aus der Form (17) vermittels der Substitution T_3 erhalten wird, gelten die Gleichungen

$$(19)\qquad B_{\xi\eta\ldots\tau} = \lambda_1^{\xi_1+\eta_1+\cdots+\tau_1}\, \lambda_2^{\xi_2+\eta_2+\cdots+\tau_2} \ldots \lambda_n^{\xi_n+\eta_n+\cdots+\tau_n}\, A_{\xi\eta\ldots\tau},$$

wo wir $\sqrt{\mu_i} = \lambda_i$ gesetzt haben.

Wir schreiben nun den Koeffizienten des ersten Gliedes $x_1^p\, y_1^p \ldots t_1^p$ kurz B_0, und wir haben nach (19) die Gleichungen

$$(20)\qquad B_0^{n-1}\, B_{\xi\eta\ldots\tau} = (\lambda_1^{p(n-1)}\, \lambda_1^{\xi_1} \ldots \lambda_n^{\xi_n}) . (\lambda_1^{p(n-1)}\, \lambda_1^{\eta_1} \ldots \lambda_n^{\eta_n}) \ldots$$
$$\ldots (\lambda_1^{p(n-1)}\, \lambda_1^{\tau_1} \ldots \lambda_n^{\tau_n}) . A_0^{n-1}\, A_{\xi\eta\ldots\tau}.$$

Wegen der aus (11) erhaltenen Ungleichungen

$$(21)\qquad \mu_1 \leqq 2^{k-1}\, \mu_k, \quad \mu_1\, \mu_2 \ldots \mu_n = 1$$

erhält man für das erste Produkt auf der rechten Seite von (20) die Ungleichung

$$(\lambda_1^{p-\xi_1}\, \lambda_1^{\xi_1})\, (\lambda_1^{p-\xi_2}\, \lambda_2^{\xi_2}) \ldots (\lambda_1^{p-\xi_n}\, \lambda_n^{\xi_n}) \leqq 2^{\frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} (p-\xi_k)(k-1)} \leqq 2^{\frac{1}{4} p\, n\, (n-1)} = C_{n,p}$$

und daher, weil dies für alle Produkte auf der rechten Seite von (20) gilt,

$$(22)\qquad |B_0^{n-1}\, B_{\xi\eta\ldots\tau}| < C_{n,p}^m\, |A_0^{n-1}\, A_{\xi\eta\ldots\tau}|.$$

Hier steht rechts eine Grösse, die eine ganze Funktion der Koeffizienten der kanonischen Form ist und die daher unterhalb einer endlichen Grenze liegt, welche eine ganze Funktion der Invarianten der Familie ist, wenn diese Invarianten ganze Zahlen sind.

9. Wir nehmen nun an, dass die reduzierte Form F ganze Koeffizienten hat, in welchem Falle auch die Invarianten der Familie ganz sind. Dann ist auch B_0 eine ganze Zahl.

Es sei erstens $B_0 \neq 0$. Dann muss

$$|B_0| \geqq 1 \tag{23}$$

sein, und aus (22) erhält man für die Koeffizienten von F die Ungleichungen

$$|B_0| \leqq C_{n,p}^{\frac{m}{n}} |A_0|, \quad |B_{\xi\eta\ldots\tau}| < C_{n,p}^{m} |A_0^{n-1} A_{\xi\eta\ldots\tau}|. \tag{24}$$

Weil es nun endlich viele Systeme ganzer Zahlen unterhalb endlicher Grenzen gibt, so ist die Anzahl der reduzierten ganzzahligen Formen der ersten Kategorie in der gegebenen Familie endlich.

Es sei zweitens $B_0 = 0$. Wegen der Kovariantenbedingung gibt es eine Kovariante von F:

$$K(x) = C_0 x_1^q + \cdots \qquad (C_0 \neq 0), \tag{25}$$

welche für $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$ einen von Null verschiedenen Wert hat. Die Form

$$H = K(x) K(y) \ldots K(t) \tag{26}$$

ist dann eine Kovariante von F, wo der Koeffizient des höchsten Gliedes von Null verschieden ist. Dies ist aber auch mit der Kovariante

$$H' = F^q + H^p \tag{27}$$

der Fall. Es seien H_0 und H'_0 die der kanonischen Form f_0 zugeordneten Kovarianten (26) bzw. (27). Ihre Koeffizienten sind ganze rationale Funktionen der Koeffizienten von f_0 mit ganzen numerischen Koeffizienten. Weil H aus H_0 und H' aus H'_0 durch die nämliche Substitution wie F aus f_0 erhalten wird und weil die Koeffizienten von (25) ganze Zahlen sind und daher $|C_0| \geqq 1$ ist, erhält man wie unter der Bedingung (23) endliche obere Grenzen für die Koeffizienten der

Formen H' und H, dann aber wegen (27) auch für die Koeffizienten der reduzierten Formen F der zweiten Kategorie.

Die Anzahl der reduzierten Formen mit ganzen Koeffizienten ist also unter der Kovariantenbedingung stets endlich, w. z. b. w.

Rechnen wir wie früher in einer Klasse die Gesamtheit aller mit einer gegebenen Form arithmetisch äquivalenten Formen zusammen, so haben wir nach dem Vorhergehenden den

Satz 4. *Jede der Kovariantenbedingung genügende Familie enthält nur endlich viele Klassen von Formen mit ganzen Koeffizienten.*

III. Arithmetische Reduktion der Formenscharen.

10. Wegen der umkehrbar eindeutigen Beziehung, die nach dem Obigen zwischen den Formenscharen und den Gordanschen Formen derselben stattfindet, können die im Vorhergehenden gewonnenen Resultate über die arithmetische Reduktion der Formen mit kogredienten Variablenreihen unmittelbar auf die Formensysteme übertragen werden.

Wir fassen in einer *Klasse* die Gesamtheit der mit einer gegebenen Formenschar arithmetisch äquivalenten Scharen zusammen. Ferner verstehen wir unter einer *reduzierten Schar* jede Schar, deren Gordansche Form eine reduzierte Form in dem oben definierten Sinne ist. Weil die den arithmetisch bzw. algebraisch äquivalenten Scharen entsprechenden Gordanschen Formen arithmetisch bzw. algebraisch äquivalente Formen sind, führt der Satz 3 unmittelbar zum folgenden analogen Satz, welcher den Jordan-Poincaréschen Satz auf die Formenscharen überführt.

Satz 5. *Jede Familie von Formenscharen enthält nur endlich viele reduzierte Scharen, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:*

Kovariantenbedingung für die Formenscharen. *Es gibt ein System von Kovarianten der Schar, die keinen gemeinsamen Nullpunkt haben.*

Daraus folgt unmittelbar der folgende Satz, der dem Satz 4 analog ist.

Satz 6. *Jede der Kovariantenbedingung genügende Familie von Formenscharen enthält nur endlich viele Klassen von Formenscharen, die eine Basis mit ganzen Koeffizienten haben.*

11. Wir wollen jetzt einen Satz aufstellen, der in wichtiger Weise die obigen Resultate ergänzt.

Wir gehen von einer reduzierten Formenschar (φ) aus, die eine Basis mit ganzen Koeffizienten besitzt. Nach der Definition ist die zugeordnete Gordansche Form eine reduzierte Form mit ganzen Koeffizienten. Ihre Koeffizienten haben nach Nr. 5 obere Grenzen, die ganze Funktionen der Invarianten der Familie sind. Wir werden nun im folgenden die Existenz einer gewissen *reduzierten Basis* nachweisen, deren kommenzurable Koeffizienten in analoger Weise beschränkt werden.

Indem wir in der Gordanschen Form unserer Schar (φ) den Variablenreihen $(y), \ldots, (t)$ irgend welche ganze Werte geben, geht dieselbe in eine Form p:ter Ordnung

(28) $$\sum d_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}$$

der Variablen (x) über, die den Ausdruck

(29) $$c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \cdots + c_m \varphi_m(x)$$

hat. Wir werden zeigen, dass man m solche ganze Systeme der Zahlen $(y), \ldots, (t)$ finden kann, dass die Determinante der zugeordneten m^2 Koeffizienten c von Null verschieden ist und dass die absoluten Werte der Koeffizienten d in den zugeordneten Formen (28) endliche, nur von den Invarianten der Familie $\{\varphi\}$ abhängige obere Grenzen haben werden. Der Kürze halber werden wir den Beweis für $m=2$ ausführen, in welchem Falle die Gordansche Form den Ausdruck

(30) $$G(x; y) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) \end{vmatrix}$$

hat.

Wir setzen in $\varphi_1(y)$ der Reihe nach für y_1 die Werte

(31) $$0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots, \ \pm \left[\frac{p+1}{2}\right]$$

ein. Weil $\varphi_1(y)$ ein Polynom p:ter Ordnung ist, gibt es unter (31) einen Wert y_1^0, für welchen $\varphi_1(y) \neq 0$ ist. Wählen wir hiernach $y_1 = y_1^0$ in $\varphi_1(y)$ und setzen wir für y_2 der Reihe nach die Werte (31) ein, so finden wir wie oben einen Wert y_2^0, für welchen $\varphi_1(y) \neq 0$ ist. Indem wir so fortfahren, können wir ein

System zwischen den Grenzen $\pm \left[\frac{p+1}{2}\right]$ liegender ganzer Zahlen $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ finden, für welches $\varphi_1(y)$ einen von Null verschiedenen ganzen Wert α annimmt. Es sei β der zugeordnete ganze Wert von $\varphi_2(y)$. Wir können wie oben aus den Zahlen (31) ein neues System (y') bilden, für welches

$$\varphi_2(y')\,\varphi_1(y^0) - \varphi_1(y')\,\varphi_2(y^0) = \varDelta \neq 0$$

ist. Wird $\varphi_1(y') = \gamma$ und $\varphi_2(y') = \delta$ gesetzt, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} G(x; y^0) &= -\beta\,\varphi_1(x) + \alpha\,\varphi_2(x) \\ G(x; y') &= -\delta\,\varphi_1(x) + \gamma\,\varphi_2(x), \end{aligned} \tag{32}$$

wo α, β, γ und δ ganze Zahlen sind, deren Determinante den von Null verschiedenen Wert $\varDelta$ hat.

Nach der Annahme ist (30) eine reduzierte Form, und ihre Koeffizienten besitzen daher obere Grenzen, die ganze Funktionen der Invarianten der Schar sind. Dies ist dann aber auch mit den Koeffizienten der Formen (32) und daher mit denjenigen der Formen

$$\frac{1}{\sqrt{\varDelta}}\, G(x; y^0), \qquad \frac{1}{\sqrt{\varDelta}}\, G(x; y') \tag{33}$$

der Fall, welche eine Basis der Schar (φ_1, φ_2) bilden.

Indem wir das obige Resultat auf den Fall beliebig vieler Formen übertragen, gelangen wir zum

Satz 7. *Jede reduzierte Formenschar, die eine Basis mit ganzen Koeffizienten besitzt, hat auch eine Basis der Gestalt*

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\varDelta}}\, \psi_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m), \tag{34}$$

wo die Formen ψ_ν ganze Koeffizienten haben, die dem absoluten Betrage nach unterhalb gewisser nur von den Invarianten der Schar abhängiger Grenzen liegen, und wo $\varDelta$ eine ganze Zahl ist.

12. Unser Satz führt zu einem wichtigen Resultat in der Theorie der diophantischen Gleichungssysteme. Wir definieren solche Systeme durch Nullsetzen der Formen mit ganzen Koeffizienten:

$$\varphi_1=0, \quad \varphi_2=0, \ldots, \quad \varphi_m=0 \qquad (m<n-1). \tag{35}$$

Indem wir das Formensystem (φ) durch irgend ein anderes System

$$\varphi_i=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\,\varphi_k \qquad (i=1, 2, \ldots, m) \tag{35'}$$

ersetzen, wo a_{ik} ganze Zahlen mit einer von Null verschiedenen Determinante sind, erhalten wir ein neues Gleichungssystem, welches mit (35) als identisch anzusehen ist, weil es dieselben Lösungen wie (35) hat.

Wir wenden nun auf die Variablen (x) irgend eine unimodulare Substitution mit ganzen Koeffizienten an. Dadurch gelangen wir zu einem neuen System diophantischer Gleichungen, das wir mit dem gegebenen System arithmetisch äquivalent nennen. Jeder ganzzahligen Lösung des einen Systems entspricht in der Tat eine ganzzahlige Lösung des anderen und umgekehrt, wobei die beiden Lösungen aus einander durch die oben angewandte Substitution erhalten werden können. Der Satz 7 kann dann offenbar in folgender Form ausgesprochen werden.

Satz 8. *Es gibt für jedes System diophantischer Gleichungen* (35) *ein arithmetisch äquivalentes System, dessen Koeffizienten nach Ausführung einer ganzzahligen linearen Transformation der Formen* (φ) *unterhalb endlicher Grenzen liegen werden, die ganze Funktionen der Kombinanten des Systems* (φ) *sind. Vorausgesetzt wird dabei, dass die Kovariantenbedingung erfüllt ist.*

13. Wir wollen im Folgenden etwas näher auf die geometrische Bedeutung unserer Kovariantenbedingung eingehen, wobei wir uns auf die Betrachtung von Formenpaaren beschränken.

Es seien φ_1 und φ_2 die betreffenden Formen und

$$G(\varphi_1, \varphi_2)=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) \end{vmatrix} \tag{36}$$

die zugeordnete Gordansche Form. Wir erhalten eine Anzahl von Kovarianten der Schar (φ_1, φ_2), wenn wir in (36) die (x) als konstant betrachten und die Invarianten der so erhaltenen Form der Variablen (y) bilden. Angenommen, dass die Kovariantenbedingung nicht erfüllt ist, müssen alle Kovarianten der Schar für ein gewisses Wertsystem (x^0) verschwinden, oder, was desselbe ist, es müssen alle Invarianten der Form

$$\varphi_2(x^0)\,\varphi_1(y)-\varphi_1(x^0)\,\varphi_2(y) \tag{37}$$

gleich Null sein.

Wir nehmen nun erstens an, dass $\varphi_1(x^0)$ und $\varphi_2(x^0)$ nicht beide gleich Null sind. Dann enthält die Schar

$$\alpha\,\varphi_1(x)+\beta\,\varphi_2(x) \tag{38}$$

eine Nullform, d. i. eine Form, deren Invarianten alle gleich Null sind. Ist dies nicht der Fall, so muss also

$$\varphi_1(x^0)=0, \qquad \varphi_2(x^0)=0$$

sein, d. h. der Punkt (x^0) ist ein Basispunkt des Büschels

$$\alpha\,\varphi_1(x)+\beta\,\varphi_2(x)=0. \tag{39}$$

14. Wir nehmen von jetzt ab an, dass φ_1 und φ_2 ternäre Formen sind. Dann stellt (39) ein Kurvenbüschel dar, und wir haben nach dem Obigen den

Satz 9. *Damit die Kovariantenbedingung bei einem ternären Formenpaare nicht erfüllt sei, muss wenigstens einer der folgenden Fälle auftreten:*

1°. *Die Schar* (38) *enthält eine Nullform.*

2°. *Jede Kovariante der Schar hat einen gewissen Basispunkt des Büschels* (39) *zum Nullpunkt.*

Hinsichtlich dieser letzteren Bedingung werden wir den folgenden Satz beweisen.

Satz 10. *Der Fall* 2° *kann nur dann auftreten, wenn die Kurven des Büschels* (39) *entweder einander in einem Basispunkte berühren oder diesen Punkt als einen singulären Punkt haben.*

Zum Beweis bilden wir die Funktionaldeterminante

$$J=\frac{\partial(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \tag{40}$$

der Funktionaldeterminanten

$$\Delta_1 = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_2, x_3)}, \qquad \Delta_2 = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_3, x_1)}, \qquad \Delta_3 = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_1, x_2)}, \tag{41}$$

welche offenbar eine Kovariante unserer Formenschar (φ_1, φ_2) ist. Um die Bedingung dafür aufzustellen, dass die Formen

$$\varphi_1, \varphi_2, J \tag{42}$$

einen gemeinsamen Nullpunkt (x^0) hätten, denken wir uns eine lineare Transformation ausgeführt, durch welche der Punkt (x^0) in den Punkt $(x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=1)$ übergeführt wird. Dann können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 \psi_1(x) + x_2 \psi_2(x) \\ \varphi_2(x) &= x_1 \chi_1(x) + x_2 \chi_2(x), \end{aligned} \tag{43}$$

wo die ψ und χ Polynome bezeichnen. Werden die Werte der Funktionen für (x^0) mit dem oberen Index Null versehen, so erhält man:

$$\Delta_1^0 = 0, \qquad \Delta_2^0 = 0, \qquad \Delta_3^0 = \begin{vmatrix} \psi_1^0 & \psi_2^0 \\ \chi_1^0 & \chi_2^0 \end{vmatrix} \tag{44}$$

und dann aus dem Ausdrucke

$$J = \frac{1}{x_3} \begin{vmatrix} \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_2} & \Delta_1 \\ \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_2} & \Delta_2 \\ \frac{\partial \Delta_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta_3}{\partial x_2} & \Delta_3 \end{vmatrix} \tag{45}$$

von (40):

$$J^0 = \Delta_3^0 \begin{vmatrix} \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}^0 = (\Delta_3^0)^3.$$

Damit $J^0=0$ sei, d. h. damit die Formen (42) einen gemeinsamen Nullpunkt haben, muss also $\Delta_3^0=0$, d. h. $\begin{vmatrix} \psi_1^0 & \psi_2^0 \\ \chi_1^0 & \chi_2^0 \end{vmatrix}=0$ sein, welche Gleichung die Bedingung dafür ausdrückt, dass der Basispunkt (x^0) ein Berührungspunkt oder ein singulärer Punkt der Kurven (39) ist. Damit ist der obige Satz bewiesen.

15. Wir betrachten als Beispiele die niedrigsten Fälle.

Was die quadratischen Formenpaare betrifft, verlieren die obigen Resultate bei ihnen ihre Bedeutung, weil es dann in jeder Schar Nullformen gibt, nämlich die Formen mit der Diskriminante Null. Es ist aber in diesem niedrigsten Falle möglich, auf einem anderen Wege das Bestehen des verallgemeinerten Jordan-Poincaréschen Satzes zu bestätigen, wie wir im folgenden Kapitel zeigen werden.

Betrachten wir hiernach die ternären kubischen Formenpaare.

Bekanntlich hat die ternäre kubische Form zwei unabhängige Invarianten vom Grade vier bzw. sechs, die für die kanonische Form

$$\varphi = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + 6\, a\, x_1 x_2 x_3 \tag{46}$$

die Ausdrücke

$$\begin{aligned} I_1(\varphi) &= a\,(a_1 a_2 a_3 - a^3) \\ I_2(\varphi) &= a_1^2 a_2^2 a_3^2 - 20\, a_1 a_2 a_3 - 8\, a^6 \end{aligned} \tag{47}$$

haben. Damit die Form $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$ der Schar (38) eine Nullform sei, müssen die Gleichungen

$$I_1(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = 0, \qquad I_2(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = 0 \tag{48}$$

eine gemeinsame Wurzel λ haben. Die Bedingung dafür wird in gewöhlicher Weise durch Nullsetzen der Resultante der Formen ausgedrückt:

$$R = 0. \tag{49}$$

Ferner gibt die Resultante der Formen

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}$$

gleich Null gesetzt:

$$R_1 = 0 \tag{50}$$

die Bedingung für die Berührung der Kurven $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$. Ist weder die Gleichung (49) noch die Gleichung (50) erfüllt, so ist nach dem Vorhergehenden unsere Kovariantenbedingung richtig, und die daraus abgeleiteten Sätze sind also gültig.

IV. Die quadratischen Formenpaare.

16. Wir haben oben bemerkt, dass unsere allgemeine Methode bei den quadratischen Formenpaaren ihre Gültigkeit verliert, weil dann keine hinreichende Anzahl von Kovarianten der Schar vorhanden ist. Man kann sich jedoch in diesem Falle einer anderen Methode bedienen, die auf einer geringeren Anzahl von Voraussetzungen beruht.

Es seien

$$\varphi_1, \quad \varphi_2 \tag{51}$$

quadratische Formen der n Variablen (x). Neben diesen Formen betrachten wir die Form

$$z_1 \varphi_1 + z_2 \varphi_2, \tag{52}$$

wo z_1 und z_2 willkürliche Parameter sind. Die Determinante der quadratischen Form (52):

$$\Delta(z_1, z_2) \tag{53}$$

ist eine binäre Form n:ter Ordnung von z_1 und z_2. Dieselbe soll im Folgenden die *Δ-Form* des Formenpaares $(\varphi_1; \varphi_2)$ genannt werden. Die Koeffizienten von (53) sind simultane Invarianten der Formen (51), d. h. sie bleiben ungeändert, wenn man die Variablen (x) irgend einer unimodularen Transformation (3) unterwirft. Zu beachten ist, dass die Koeffizienten von (53) ganze Zahlen sind, wenn dies mit den Koeffizienten der Formen (51) der Fall ist.

Wir gehen nun vermittels der unimodularen Substitution

$$\varphi_1 = \alpha \psi_1 + \beta \psi_2, \qquad \varphi_2 = \gamma \psi_1 + \delta \psi_2 \tag{54}$$

zu dem neuen quadratischen Formenpaar $(\psi_1; \psi_2)$ über. Dadurch wird die Form (52) in die Form

$$z'_1 \psi_1 + z'_2 \psi_2 \tag{55}$$

transformiert, wo

$$z'_1 = \alpha z_1 + \gamma z_2, \qquad z'_2 = \beta z_1 + \delta z_2 \tag{56}$$

ist. Wird die Determinante von (55) mit $\Delta'(z'_1, z'_2)$ bezeichnet, so ist

$$\Delta'(z'_1, z'_2) = \Delta(z_1, z_2). \tag{57}$$

Die Formen Δ und Δ' sind also algebraisch äquivalent. Wenn die Koeffizienten in der binären Substitution (54) insbesondere ganze Zahlen sind, so findet zwischen den betreffenden Formen auch eine arithmetische Äquivalenz statt.

Indem wir sowohl die Variablen (x) als die Formen (φ) den unimodularen Transformationen (3) bzw. (54) unterwerfen, gelangen wir zu Formenpaaren, die durch die Gleichungen

$$\varphi_1(x') = \alpha\psi_1(x) + \beta\psi_2(x), \qquad \varphi_2(x') = \gamma\psi_1(x) + \delta\psi_2(x) \tag{58}$$

voneinander abhängen und die Basen algebraisch bzw. arithmetisch äquivalenter Formenscharen bilden. Für solche Formenpaare erhält man aus dem Obigen den

Satz 11. *Die den Basen algebraisch bzw. arithmetisch äquivalenter Formenscharen zugeordneten Δ-Formen sind algebraisch bzw. arithmetisch äquivalente binäre Formen der Parameter z_1, z_2.*

17. Offenbar ist jede Invariante der Form (53) eine Kombinante der Formen (55), d. h. eine Invariante der Schar (φ_1, φ_2). Unter diesen Invarianten spielt im Folgenden eine wichtige Rolle eine gewisse irrationale Invariante, die in folgender Weise definiert wird.

Es seien

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \tag{59}$$

die Wurzeln der Gleichung

$$\Delta(z, 1) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{60}$$

wo $a_0 \neq 0$ ist. Ferner seien

$$t_1, t_2, \ldots, t_n \tag{61}$$

reelle Grössen. Der Ausdruck

$$f(z_1, z_2) = \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu^2 \,|z_1 - \xi_\nu z_2|$$ (62)

definiert dann eine quadratische definite Hermitesche Form, deren Determinante δ eine ganze rationale Funktion der Parameter (61) ist. Wir bilden nun den Ausdruck

$$(63) \qquad \frac{|a_0|\,\delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2\, t_2^2 \ldots t_n^2}$$

und wir lassen die Parameter (61) voneinander unabhängig alle reellen Werte durchlaufen. Dann hat (63) ein von Null verschiedenes Minimum Θ, welches wir mit HERMITE *Determinante der Form* (53) nennen.[1] Dasselbe ist eine im allgemeinen irrationale Invariante der Form (53), die in dem niedrigsten Falle $n=2$, d. h. bei den quadratischen Formen

$$a z_1^2 + b z_1 z_2 + c z_2^2$$

mit dem Modul der Determinante im gewöhnlichen Sinne: b^2-4ac identisch ist.

Die Bedeutung der Determinante in der Arithmetik der binären Formen geht aus dem folgenden Satz hervor.

Satz 12. *Jede binäre Form mit ganzzahligen Koeffizienten ist mit einer anderen solchen Form arithmetisch äquivalent, deren Koeffizienten unterhalb Grenzen liegen, die nur von der Determinante der Form abhängen.*

Diese letzteren Formen werden reduzierte Formen genannt. Bei gegebener Determinante ist also die Anzahl der reduzierten Formen mit ganzen Koeffizienten endlich.

18. Indem wir zu unserem Formenpaar (51) zurückkehren, wollen wir die Determinante der zugeordneten Δ-Form als Invariante der Formenschar (φ_1, φ_2) die *Determinante der Schar* (φ_1, φ_2) nennen. Wir nehmen an, dass unsere Formenschar eine Basis $(\varphi_1; \varphi_2)$ besitzt, wo die Formen φ_1 und φ_2 ganze Koeffizienten haben, in welchem Falle auch die Koeffizienten der zugeordneten Δ-Form ganze Zahlen sind. Es sei (56) diejenige unimodulare ganzzahlige Substitution, welche die betreffende Δ-Form reduziert. Durch die entsprechende Substitution (54) wird dann eine neue Basis $(\psi_1; \psi_2)$ der Schar gewonnen, die ebenfalls ganze Koeffizienten hat. Wir nennen die neue Basis eine *reduzierte Basis* der Schar. Die Δ-Form unserer reduzierten Basis

[1] JULIA, G., *Étude sur les formes binaires non quadratiques à indéterminées réelles ou complexes, ou à indéterminées conjuguées,* Thèse, Paris (1917), S. 96—.

$$\Delta(z_1, z_2) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu z_1^{n-\nu} z_2^\nu = \prod_{\nu=0}^{n} (a_\nu z_1 + b_\nu z_2) \tag{64}$$

ist also eine reduzierte Form, deren Koeffizienten nach dem Obigen durch die Determinante der Schar beschränkt sind.

Es soll jetzt ein für allemal angenommen werden, dass die Wurzeln der Gleichung, die durch Nullsetzen der Δ-Form irgend einer Basis der Schar erhalten werden, einfach sind. Dies ist dann auch mit den Wurzeln der Gleichung

$$\Delta(z, 1) = 0 \tag{65}$$

der Fall. Bekanntlich gibt es dann eine lineare unimodulare Substitution (3), die das Formenpaar $(\psi_1;\ \psi_2)$ in das Formenpaar

$$\bar{\psi}_1 = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^2, \qquad \bar{\psi}_2 = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu x_\nu^2 \tag{66}$$

überführt und die bis auf die Transformation

$$x_i' = k_i x_i \qquad\qquad k_1 k_2 \ldots k_n = 1$$

bestimmt ist. Wir wählen die Grössen k_i so, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} (|a_\nu| + |b_\nu|)$$

ein Minimum wird und erhalten

$$|a_\nu| + |b_\nu| = \sqrt[n]{D} \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo

$$D = \prod_{\nu=1}^{n} (|a_\nu| + |b_\nu|) \tag{67}$$

eine ganze Funktion der Koeffizienten d_ν der Form (64) ist. Der Wert von (67) und daher auch die absoluten Werte der Koeffizienten der Formen (66) werden dann unterhalb endlicher Grenzen liegen, die nur von der Determinante der gegebenen Schar abhängen.

19. Wir behaupten, dass man das Formenpaar $(\psi_1; \psi_2)$ durch eine unimodulare ganzzahlige Substitution (3) in ein anderes Paar transformieren kann, dessen Koeffizienten unterhalb endlicher, nur von Θ abhängiger Grenzen liegen.

Den Beweis hierfür geben uns die Ergebnisse des Kap. II. Wir wollen zu diesem Zweck zunächst zeigen, dass das Formenpaar $(\psi_1; \psi_2)$ ein System von $n+1$ Kovarianten besitzt, die keinen gemeinsamen Nullpunkt haben.

Wir verstehen allgemein unter der adjungierten Form von

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k \tag{68}$$

die Form

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0 \end{vmatrix}. \tag{69}$$

Es seien χ_1 und χ_2 die adjungierten Formen von ψ_1 bzw. ψ_2. Die adjungierte Form von $\lambda_1\chi_1 + \lambda_2\chi_2$ hat dann den Ausdruck

$$\lambda_1^{n-1}\, h_0 + \lambda_1^{n-2}\,\lambda_2\, h_1 + \cdots + \lambda_2^{n-1}\, h_{n-1}, \tag{70}$$

wo die Formen

$$h_0,\ h_1, \dots, h_{n-1} \tag{71}$$

quadratische Kovarianten des Formenpaares $(\psi_1; \psi_2)$ sind und wo insbesondere h_0 und h_{n-1} bis auf konstante Faktoren mit ψ_1 bzw. ψ_2 übereinstimmen. Für die Formen (66) haben unsere Kovarianten Ausdrücke der Gestalt

$$\bar{h}_k = \sum_{i=1}^{n} d_i^{(k)}\, y_i^2 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1), \tag{71'}$$

wobei die Determinante

$$|d_i^{(k)}| = \pm \left\{\prod_{k=1}^{n} a_k\, b_k\right\}^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{i,j-1}^{n}{}' (a_i\, b_j - a_j b_i) \tag{72}$$

einen von Null verschiedenen Wert hat, wenn die Wurzeln von (65) einfach und die Determinanten der beiden Formen (66) von Null verschieden sind. Diese letztere Bedingung wird aber erfüllt, wenn man das Formenpaar $(\psi_1; \psi_2)$ durch ein geeignetes Formenpaar

$$\alpha \psi_1 + \beta \psi_2, \qquad \gamma \psi_1 + \delta \psi_2$$

ersetzt. Unter der betreffs der Wurzeln von (65) gemachten Voraussetzung werden also die Formen (71) keinen gemeinsamen Nullpunkt haben. Sie bilden ein System von Kovarianten der verlangten Art.

20. Um den Jordan-Poincaréschen Satz auf den vorliegenden Fall anzuwenden, wählen wir das Formenpaar (66) als kanonisches Formenpaar in der Familie $\{\psi_1; \psi_2\}$ aller Formenpaare, die aus dem Formenpaar $(\psi_1; \psi_2)$ durch unimodulare Substitutionen (3) erhalten werden. Ferner soll wie in Nr. 7 unter einem reduzierten Formenpaar jedes der Familie $\{\psi_1; \psi_2\}$ gehörige Paar von Formen verstanden werden, das aus dem kanonischen Paar (66) durch irgend eine reduzierte Substitution erhalten wird. Wie in Nr. 9 zeigt man, dass bei jedem reduzierten Paare von Formen mit ganzen Koeffizienten diese Koeffizienten dem absoluten Betrage nach unterhalb endlicher, nur von den Koeffizienten des kanonischen Formenpaares abhängiger Grenzen liegen. Dies gilt zunächst für diejenigen reduzierten Formenpaare, bei denen der Koeffizient von x_1^2 von Null verschieden ist. Um dasselbe für die anderen reduzierten Formenpaare zu leisten, hat man ψ_1, ψ_2 oder diese beiden Formen durch $\psi_1 + \lambda h$ bzw. $\psi_2 + \lambda h$ zu ersetzen, wo λ eine ganze Zahl und h eine Kovariante ist, für welche der Koeffizient von x_1^2 nicht Null ist, welcher Bedingung wenigstens eine der Kovarianten (71) genügt. Weil schliesslich die Koeffizienten des kanonischen Formenpaares (66) nach dem obigen unterhalb endlicher, nur von der Determinante Θ abhängiger Grenzen liegen, so gilt der

Satz 13. *Die Koeffizienten der reduzierten Formenpaare besitzen endliche obere Grenzen, die nur von der Determinante Θ abhängen. Die Anzahl der reduzierten quadratischen Formenpaare mit einer gegebenen Determinante ist also endlich.*

21. Nach dem Vorhergehenden kann man von einem beliebigen Paar $(\varphi_1; \varphi_2)$ von quadratischen Formen mit ganzen Koeffizienten zu einem reduzierten Formenpaar $(\psi'_1; \psi'_2)$ mit zwei Schritten übergehen: erstens hat man eine binäre ganzzahlige Substitution (54) auszuführen, welche die gegebene Basis $(\varphi_1; \varphi_2)$ in eine reduzierte Basis $(\psi_1; \psi_2)$ derselben Schar transformiert, und zweitens ist das so erhaltene Formenpaar durch eine unimodulare ganzzahlige Substitution (3) zu

reduzieren, wodurch schliesslich das Formenpaar $(\psi_1'; \psi_2')$ erhalten wird. Die beiden Formenpaare $(\varphi_1; \varphi_2)$ und $(\psi_1'; \psi_2')$ sind Basen arithmetisch äquivalenter Formenscharen. Wir haben also den folgenden Satz, welcher dem Satz 7 analog ist.

Satz 14. *Jedes Paar von quadratischen Formen mit ganzen Koeffizienten lässt sich durch eine unimodulare ganzzahlige Substitution der Variablen und Formen in ein Formenpaar überführen, dessen Koeffizienten unterhalb endlicher, nur von der Determinante der gegebenen Schar abhängiger Grenzen liegen. Die Anzahl der Klassen der Scharen von ganzzahligen quadratischen Formenpaaren mit einer gegebenen Determinante ist also endlich. Vorausgesetzt wird dabei, dass die Wurzeln der Gleichung* (65) *einfach sind.*