OPERATORTHEORETISCHE BEHANDLUNG UND VERALLGEMEINERUNG EINES PROBLEMKREISES IN DER KOMPLEXEN FUNKTIONENTHEORIE (*)

VON

BÉLA SZ.-NAGY und ADAM KORÁNYI

Universität Szeged (Ungarn) und University of Chicago (Ill., U.S.A.)

Teil I. Komplexwertige Funktionen

1. Einleitung

Die in der Frage stehenden Probleme sind folgender Art. Gegeben seien zwei abgeschlossene Kreisbereiche D und D' in der komplexen Zahlebene (d.h. ein Kreis mit seinem Inneren oder mit seinem Äusseren, oder eine abgeschlossene Halbebene). Gegeben sei ferner eine auf einer Teilmenge S von D definierte Funktion, deren Werte in D' fallen. Unter welchen Bedingungen lässt sich diese Funktion zu einer im ganzen Inneren von D definierten, holomorphen, und auch in gewissen Punkten der Begrenzung von D stetigen Funktion erweitern, deren Werte in D' fallen? Da die Kreisbereiche durch geeignete gebrochen-lineare Abbildungen ineinander übergehen, genügt es spezielle Kreisbereiche in Betracht zu nehmen, etwa die Einheitskreisscheibe, die obere oder die rechte Halbebene. Wir betrachten die folgenden Hauptfälle des Problems gesondert: A) S liegt ganz im Inneren von D und es wird von der holomorphen Erweiterung nichts an der Begrenzung von D verlangt; B) S liegt ganz im Inneren von D, aber es werden von der holomorphen Erweiterung in gewissen Punkten der Begrenzung von D gewisse Stetigkeitsvoraussetzungen gemacht; C) S liegt ganz an der Begrenzung von D. Im Fall A) sei für D die Einheitskreisscheibe, für D' die

(*) Vorliegende Arbeit gibt eine einheitliche und systematische Darstellung von Resultaten der Verfasser, über die teils schon in den Aufsätzen [2], [7] („Problem C") und [8] („Problem A") berichtet wurde.

rechte Halbebene gewählt, in den Fällen B) und C) seien aber D und D' beide die obere Halbebene. Genauer gestellt, lauten unsere Probleme folgendermassen:

PROBLEM A. *Es sei S eine im Inneren des Einheitskreises der komplexen Ebene liegende Punktmenge und $f(s)$ eine auf S definierte komplexwertige Funktion. Die Definition von $f(s)$ soll auf das ganze Innere des Einheitskreises derart erweitert werden, dass die erhaltene Funktion $g(z)$ holomorph und von nicht-negativem Reellteil sei.*

PROBLEM B. *Es sei S eine im Inneren der oberen Halbebene liegende Punktmenge und $f(s)$ eine auf S definierte komplexwertige Funktion. Die Definition von $f(s)$ soll auf die ganze (offene) obere Halbebene derart erweitert werden, dass die erhaltene Funktion $g(z)$ holomorph und von nicht-negativem Imaginärteil, ferner $g(z)/z$ in jedem Winkelraum*

$$C(\varphi)=\{\varphi \leqslant \arg z \leqslant \pi-\varphi\} \quad \textit{mit} \quad 0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$$

beschränkt sei.

PROBLEM C. *Es sei S ein Intervall der reellen Achse und $f(s)$ eine auf S definierte reellwertige Funktion. Die Definition von $f(s)$ soll auf die (offene) obere Halbebene erweitert werden, derart, dass die erhaltene Funktion $g(z)$ in dieser Halbebene holomorph und von nicht-negativem Imaginärteil, und auch in den Punkten von S stetig sei.*

Problem A wurde zuerst in Arbeiten von G. PICK [14] und R. NEVANLINNA [12] untersucht; PICK gibt im Fall einer endlichen Menge S eine notwendige und hinreichende Bedingung, NEVANLINNA lässt auch unendliche Mengen S zu und betrachtet auch die Frage der Eindeutigkeit der Erweiterung; beide bedienen sich von algebraischen und funktionentheoretischen Hilfsmitteln. Das Picksche Kriterium wurde auf den Fall beliebiger Mengen S zuerst von M. KREIN und P. RECHTMAN [4] ausgedehnt, sie führen das Problem auf ein gewisses Momentenproblem zurück. Dieses Kriterium lautet wie folgt:

SATZ A. *Für die Lösbarkeit des Problems A ist notwendig und hinreichend, dass die auf der Menge $S\times S$ definierte Funktion*

$$k(s,t)=\frac{f(s)+\overline{f(t)}}{2(1-s\bar{t})} \tag{1}$$

positiv definit ist.

Für eine beliebige Menge X wird die auf der Menge $X\times X$ definierte Funktion $k(x,y)$ *positiv definit* genannt, wenn für beliebige, endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_N$ von X und komplexe Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ gilt:

$$\sum_m \sum_n k(x_m, x_n)\,\alpha_m \bar{\alpha}_n \geqslant 0.$$

Für Satz A werden wir in dieser Arbeit einen neuen Beweis geben, der nur auf einige einfache Eigenschaften des Hilbertschen Raumes bezug nimmt.

Was Problem B anbetrifft, werden wir folgendes beweisen:

SATZ B. *Ist die gegebene Teilmenge S der oberen Halbebene so beschaffen, dass sie mit mindestens einem Winkelraum $C(\varphi)$ $\left(0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ einen sich am Punkte 0 häufenden Durchschnitt besitzt, so ist für die Lösbarkeit des Problems* B *notwendig und hinreichend, dass die auf der Menge $S\times S$ definierte Funktion*

$$k(s,t)=\frac{f(s)-\overline{f(t)}}{s-\bar{t}} \tag{2}$$

positiv definit ist und $|f(\sigma_n)/\sigma_n|$ für mindestens eine, aus S genommene, und in einem Winkelraum $C(\varphi)$ $\left(0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ gegen 0 strebende Punktfolge $\{\sigma_n\}$ unterhalb einer von n unabhängigen Schranke M bleibt.

Problem C tritt in den Untersuchungen von K. LÖWNER [6] über monotone Matrixfunktionen auf. LÖWNER beweist folgenden

SATZ C. *Sei S das Intervall $(-1,1)$ der reellen Achse. Für die Lösbarkeit des Problems* C *ist notwendig und hinreichend, dass die Funktion $f(s)$ auf S stetig differenzierbar und die auf der Menge $S\times S$ definierte Funkion*

$$k(s,t)=\begin{cases}\dfrac{f(s)-f(t)}{s-t} & (s\neq t)\\ f'(s) & (s=t)\end{cases} \tag{3}$$

positiv definit ist.

In seinem Beweis macht LÖWNER von seinen tiefliegenden Ergebnissen über die Interpolation durch monotone Matrixfunktionen Gebrauch. Ein Beweis von BENDAT und SHERMAN [1] lehnt sich an einem Satz von S. BERNSTEIN und an Sätzen über das Hamburgersche Momentenproblem. WIGNER und VON NEUMANN [17] haben das Problem im Zusammenhang mit der Quantentheorie der Stösse betrachtet und für den Satz einen Beweis gegeben, der sich von Sätzen über unendliche Kettenbrüche bedient.

In dieser Arbeit werden wir auch für diesen Satz einen neuen, verhältnismässig einfachen Beweis angeben, der Hilfsmittel aus der Theorie des Hilbertschen Raumes benutzt. Die Bedingung des Satzes kann übrigens etwas gelindert werden, man braucht z. B. keine Stetigkeit von $f'(s)$ fordern.

Im Laufe unserer Beweise erhalten wir für die, der gestellten Bedingungen genügenden Funktionen $f(s)$ der Reihe nach die folgenden Darstellungen ($s\in S$):

$$f(s) = i\,b + \left(\frac{U+sI}{U-sI}\,\varepsilon_0,\, \varepsilon_0\right) \tag{A}$$

mit einer reellen Konstanten b, einem unitären Operator U eines Hilbertschen Raumes $\mathfrak{R}$ und einem Vektor $\varepsilon_0 \in \mathfrak{R}$;

$$f(s) = \left(\frac{sI}{I-sA}\,\varepsilon_0,\, \varepsilon_0\right) \tag{B}$$

mit einem selbstadjungierten, im allgemeinen nichtbeschränkten Operator A eines Hilbertschen Raumes $\mathfrak{R}$ und einem Vektor $\varepsilon_0 \in \mathfrak{R}$;

$$f(s) = a + \left(\frac{sI}{I-sA}\,\varepsilon_0,\, \varepsilon_0\right) \tag{C}$$

mit einer reellen Konstanten a, einem selbstadjungierten und durch 1 beschränkten Operator A eines Hilbertschen Raumes $\mathfrak{R}$ und einem Vektor $\varepsilon_0 \in \mathfrak{R}$.

Die Existenz der Erweiterung $g(z)$ mit den geforderten Eigenschaften folgt dann leicht aus diesen Darstellungen. Der Beweis von (A) und (B) ist elementar in dem Sinne, dass kein Gebrauch von der Spektralzerlegung von U oder A gemacht wird. Macht man aber auch von den entsprechenden Spektralzerlegungen

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda}\, dE(\lambda), \quad A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda) \quad \text{bzw. } A = \int_{-1-0}^{1} \lambda\, dE(\lambda)$$

Gebrauch, wobei $\{E(\lambda)\}$ in jedem Falle eine von rechts stetige Spektralschar ist, so gelangt man der Reihe nach zu den Darstellungen

$$f(s) = i\,b + \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda}+s}{e^{i\lambda}-s}\, dm(\lambda) \quad (b \text{ reell}); \tag{A'}$$

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{1-s\lambda}\, dm(\lambda); \tag{B'}$$

$$f(s) = a + \int_{-1-0}^{1} \frac{s}{1-s\lambda}\, dm(\lambda) \quad (a \text{ reell}), \tag{C'}$$

wobei $m(\lambda)$ $(=(E(\lambda)\,\varepsilon_0, \varepsilon_0))$ in jedem Falle eine beschränkte, reelle nichtfallende Funktion ist.

(A′) ist die Rieszsche kanonische Integraldarstellung [15] der im Einheitskreise holomorphen Funktionen mit nicht-negativem Reellteil. Für die in der oberen Halbebene holomorphen Funktionen mit nicht-negativem Imaginärteil und mit $\sup_{y>0} |f(iy)/y| < \infty$ hat die Darstellung (B′) NEVANLINNA [13] bewiesen. Endlich ist (C′) die kanonische Integraldarstellung derjenigen, in der längs der Halbgeraden $-\infty < x \leqslant -1$, $1 \leqslant x < \infty$ aufgeschnittenen komplexen Zahlebene holomorphen Funktionen, die in der oberen Halbebene einen nicht-negativen und in der unteren einen nicht-positiven Imaginärteil besitzen (und im Intervall $(-1, 1)$ der reellen Achse dann notwendig reell sind); für einen einfachen direkten Beweis verweisen wir auf [3].

2. Die Notwendigkeit der Bedingungen

Ad A. Es sei $g(z)$ eine im Einheitskreise holomorphe Funktion mit nicht-negativem Reellteil. Sind $z_1, \ldots, z_N$ Punkte im Einheitskreise, so wähle man eine Zahl r mit

$$\max |z_k| < r < 1$$

und wende man die Cauchy-Poissonsche Integralformal

$$g(z) = i \operatorname{Im} g(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z} p(r, \varphi)\, d\varphi \qquad (|z| < r < 1)$$

an, wobei $p(r, \varphi) = \operatorname{Re} g(re^{i\varphi}) \geqslant 0$ ist. Hieraus erhält man für beliebige komplexe Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$:

$$\sum_m \sum_n \frac{g(z_m) + \overline{g(z_n)}}{2(r^2 - z_m \bar{z}_n)} \alpha_m \bar{\alpha}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_m \frac{\alpha_m}{re^{i\varphi} - z_m} \right|^2 p(r, \varphi)\, d\varphi \geqslant 0.$$

Lässt man r gegen 1 streben, so erhält man hieraus als Grenzfall:

$$\sum_m \sum_n \frac{g(z_m) + \overline{g(z_n)}}{2(1 - z_m \bar{z}_n)} \alpha_m \bar{\alpha}_n \geqslant 0.$$

Damit ist die Notwendigkeit der Positivdefinitheit der Funktion (2) bewiesen.

Ad B. Es sei $g(z)$ eine in der oberen Halbebene holomorphe Funktion mit nicht-negativem Imaginärteil. Wir betrachten die Abbildung $w = \frac{z-i}{z+i} \equiv a(z)$ dieser Halbebene auf das Innere des Einheitskreises der w-Ebene, und ihre Inverse: $z = -i\frac{w+1}{w-1} \equiv b(w)$. Die Funktion

$$G(w) = -i\, g(b(w))$$

ist im Inneren des Einheitskreises holomorph und von nicht-negativem Reellteil, daher ist die Funktion

$$K(w, v) = \frac{G(w) + \overline{G(v)}}{2(1 - w\bar{v})}$$

nach dem soeben Bewiesenen positiv definit. Nun besteht der Zusammenhang

$$K(w, v) = \frac{g(z) - \overline{g(u)}}{z - \bar{u}} \cdot \frac{z+i}{2} \cdot \frac{\overline{u+i}}{2}$$

mit $w = a(z)$, $v = a(u)$. Wenn also $z_1, \ldots, z_N$ Punkte der oberen Halbebene und $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ beliebige komplexe Zahlen sind, dann hat man mit $w_j = a(z_j)$ und $\beta_j = \frac{2\alpha_j}{z_j + i}$ $(j = 1, \ldots, N)$:

$$\sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{g(z_m) - \overline{g(z_n)}}{z_m - \bar{z}_n} \alpha_m \bar{\alpha}_n = \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} K(w_m, w_n) \beta_m \bar{\beta}_n \geqq 0, \tag{4}$$

womit auch die Notwendigkeit der Positivdefinitheit der Funktion (2) bewiesen wurde. Die Notwendigkeit der anderen Bedingung ist klar.

Ad C. Wir nehmen an, dass die im Intervall $S = (-1, 1)$ der reellen Achse definierte, reellwertige Funktion $f(s)$ eine stetige Fortsetzung $g(z)$ in das Innere der oberen Halbebene zulässt, so dass $g(z)$ im Inneren der oberen Halbebene holomorph und von nicht-negativem Imaginärteil ist. Nach dem Spiegelungssatz von H. A. SCHWARZ lässt sich dann $g(z)$ durch S auch in das Innere der unteren Halbebene analytisch fortsetzen, folglich ist $f(s)$ in S notwendig analytisch und a fortiori stetig differenzierbar. Nun machen wir von neuem vom Zusammenhang (4) Gebrauch. Wenn wir die Punkte $z_1, \ldots, z_N$ der oberen Halbebene der Reihe nach gegen die Punkte $s_1, \ldots, s_N$ des Intervalls $S = (-1, 1)$ konvergieren lassen und bemerken, dass dann

$$\frac{g(z_m) - \overline{g(z_n)}}{z_m - \bar{z}_n}$$

für jede feste m, n gegen $k(s_m, s_n)$ strebt, wobei $k(s, t)$ die durch (3) definierte Funktion bedeutet[1], dann erhalten wir, dass auch diese Funktion $k(s, t)$ notwendig positiv definit ist.

---

[1] Man beachte, dass wegen des Spiegelungssatzes $g(z) = \overline{g(\bar{z})}$ gilt.

3. Zusammenhang positiv definiter Funktionen mit Hilberträumen

Den Beweis des Hinreichens der gestellten Bedingungen werden wir mit Hilfe des folgenden bekannten Lemmas vorführen (¹):

LEMMA. *Jede auf der Menge $X \times X$ definierte positiv definierte Funktion $k(x, y)$ lässt sich in der Form*

$$k(x, y) = (\varepsilon_x, \varepsilon_y)$$

darstellen, wobei die ε_x $(x \in X)$ Vektoren eines geeignet konstruierten Hilbertraumes $\mathfrak{K}$ sind und rechts das innere Produkt der Vektoren ε_x und ε_y steht; man kann annehmen, dass der Raum $\mathfrak{K}$ durch die Vektoren ε_x $(x \in X)$ aufgespannt wird.

Der Vollständigkeit halber führen wir den Beweis an:

Wir ordnen jedem Punkt x von X je ein Symbol ε_x zu und betrachten die formal gebildeten endlichen Summen mit komplexen Koeffizienten:

$$\sum_m c_m \varepsilon_{x_m}.$$

Mit der natürlichen Definition der Multiplikation mit komplexen Zahlen und der Addition bilden diese Summen eine Linearmannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$. Für beliebige zwei Elemente von $\mathfrak{L}$,

$$\varphi = \sum c_m \varepsilon_{x_m} \quad \text{und} \quad \psi = \sum d_n \varepsilon_{y_n},$$

definieren wir:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_m \sum_n k(x_m, y_n)\, c_m \bar{d}_n. \tag{5}$$

Dieser Ausdruck ist linear in φ und konjugiert-linear in ψ, und wegen der Positivdefinitheit der Funktion $k(x, y)$ gilt

$$\langle \varphi, \varphi \rangle \geqslant 0.$$

Diese Eigenschaften haben die Gültigkeit der Schwarzschen Ungleichung zur Folge:

$$|\langle \varphi, \psi \rangle|^2 \leqslant \langle \varphi, \varphi \rangle \langle \psi, \psi \rangle.$$

Hieraus aber folgt, dass die Bedingungen

$$\text{(i)} \ \langle \varphi, \varphi \rangle = 0, \qquad \text{(ii)} \ \langle \varphi, \psi \rangle = 0 \ \text{für jedes} \ \psi \in \mathfrak{L}$$

miteinander äquivalent sind. Nun ist die Bedingung (ii) in Bezug auf φ offenbar linear, folglich bilden die φ mit $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$ eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}_0$ in $\mathfrak{L}$. Gilt $\varphi_1 - \varphi_2 \in \mathfrak{L}_0$, $\psi_1 - \psi_2 \in \mathfrak{L}_0$, so hat man

$$\langle \varphi_1, \psi_1 \rangle = \langle \varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 \rangle + \langle \varphi_2, \psi_1 - \psi_2 \rangle + \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle = \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle.$$

(¹) Vgl. z. B. [5] § 1.

Wenn wir also je zwei Elemente von $\mathfrak{L}$ als *gleich* betrachten, falls ihre Differenz zu $\mathfrak{L}_0$ gehört, dann wird der Ausdruck $\langle\varphi, \psi\rangle$ auf $\mathfrak{L}$ eindeutig bleiben, aber $\langle\varphi, \varphi\rangle$ wird dann und *nur dann* gleich 0 sein, wenn φ in dem soeben gegebenen Sinne gleich 0 ist.

Mit $\langle\varphi, \psi\rangle$ als „innerem Produkt" wird also $\mathfrak{L}$ ein (im allgemeinem nicht-vollständiger) sog. „prae-Hilbertraum". $\mathfrak{K}$ sei der aus $\mathfrak{L}$ durch Vervollständigung erhaltene Hilbertraum.

Aus der Konstruktion ist es klar, dass $\mathfrak{K}$ durch seine Vektoren ε_x aufgespannt wird und dass wegen (5) speziell

$$\langle\varepsilon_x, \varepsilon_y\rangle = k(x, y)$$

gilt.

Wir dürfen das innere Produkt in $\mathfrak{K}$ offenbar statt $\langle\varphi, \psi\rangle$ mit (φ, ψ) bezeichnen.

4. Das Hinreichen der Bedingungen von Satz A

Wir nehmen zuerst an, dass der Punkt 0 zu S gehört; wir werden sehen, dass dies keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Es sei

$$k(s, t) = (\varepsilon_s, \varepsilon_t) \qquad (s, t \in S)$$

die Darstellung von $k(s, t)$ im Sinne des Lemmas, durch die Vektoren ε_s eines Hilbertraumes $\mathfrak{K}$. Für $s \neq 0$ setzen wir

$$\varepsilon_s' = \frac{1}{s}(\varepsilon_s - \varepsilon_0).$$

Sind s, t von 0 verschiedene Punkte in S, so hat man

$$\begin{aligned}(\varepsilon_s', \varepsilon_t') &= \frac{1}{s\bar{t}}[(\varepsilon_s, \varepsilon_t) - (\varepsilon_s, \varepsilon_0) - (\varepsilon_0, \varepsilon_t) + (\varepsilon_0, \varepsilon_0)] = \\ &= \frac{1}{s\bar{t}}[k(s, t) - k(s, 0) - k(0, t) + k(0, 0)] = \\ &= \frac{1}{2s\bar{t}}\left[\frac{f(s) + \overline{f(t)}}{1 - s\bar{t}} - (f(s) + \overline{f(0)}) - (f(0) + \overline{f(t)}) + (f(0) + \overline{f(0)})\right] = \\ &= \frac{f(s) + \overline{f(t)}}{2(1 - s\bar{t})} = k(s, t) = (\varepsilon_s, \varepsilon_t),\end{aligned}$$

woraus für jeden endlichen Linearausdruck $\sum c_m \varepsilon_{s_m}$ mit $s_m \in S$, $s_m \neq 0$ folgt:

$$\left\|\sum c_m \varepsilon_{s_m}'\right\| = \left\|\sum c_m \varepsilon_{sm}\right\|.$$

Diese Linearausdrücke bilden eine Linearmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ im Raum $\mathfrak{K}$. Der durch

$$V \sum c_m \varepsilon_{s_m} = \sum c_m \varepsilon'_{s_m}$$

für die Elemente von $\mathfrak{M}$ definierte Operator V ist also isometrisch (und folglich auch eindeutig und linear), sein Wertebereich ist eine Linearmannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{K}$. Wir setzen V durch Abschliessen zu einem Operator fort, der den durch $\mathfrak{M}$ aufgespannten Unterraum $[\mathfrak{M}]$ auf den durch $\mathfrak{N}$ aufgespannten Unterraum $[\mathfrak{N}]$ isometrisch abbildet(¹). Wegen der Definition von V hat man

$$(I - sV)\,\varepsilon_s = \varepsilon_s - s\,\frac{1}{s}\,(\varepsilon_s - \varepsilon_0) = \varepsilon_0 \qquad (s \in S,\ s \neq 0). \tag{6}$$

Es sei nun $\tilde{V}$ eine beliebige lineare Fortsetzung von V auf den ganzen Raum $\mathfrak{K}$ mit der Eigenschaft $\|\tilde{V}\| \leqslant 1$ (²). Dann hat der Operator $\mathrm{I} - z\tilde{V}$ für jede komplexe Zahl z mit $|z| < 1$ einen (in $\mathfrak{K}$ überall definierten und beschränkten) inversen Operator und dieser kann durch die in Norm konvergente Neumannsche Reihe dargestellt werden:

$$(I - z\tilde{V})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tilde{V}^n.$$

Es besteht der Zusammenhang

$$(I + z\tilde{V})\,(I - z\tilde{V})^{-1} = 2\,(I - z\tilde{V})^{-1} - I.$$

Wegen (6) gilt
$$(I - s\tilde{V})^{-1}\,\varepsilon_0 = \varepsilon_s \qquad (s \in S) \tag{7}$$

und zwar nicht nur für $s \neq 0$, sondern (auf triviale Weise) auch für $s = 0$. Folglich hat man

$$((I + s\tilde{V})\,(I - sV)^{-1}\,\varepsilon_0, \varepsilon_0) = 2\,(\varepsilon_s, \varepsilon_0) - (\varepsilon_0, \varepsilon_0) = 2\,k\,(s, 0) - k\,(0, 0) =$$
$$= [f(s) + \overline{f(0)}] - \tfrac{1}{2}\,[f(0) + \overline{f(0)}] = f(s) - i\ \mathrm{Im}\ f(0),$$

also
$$f(s) = ib + \left(\frac{I + s\tilde{V}}{I - s\tilde{V}}\,\varepsilon_0, \varepsilon_0\right) \qquad (s \in S) \tag{8}$$

mit
$$b = \mathrm{Im}\ f(0).$$

Hieraus sieht man, dass $f(s)$ sich zur im ganzen Inneren des Einheitskreises holomorphen Funktion

---

(¹) $\mathfrak{M}$ und der Vektor ε_0 spannen offenbar den ganzen Raum $\mathfrak{K}$ auf. Wegen $\varepsilon_s = s\,\varepsilon'_s + \varepsilon_0$ $(s \neq 0)$ spannen $\mathfrak{N}$ und ε_0 den Raum $\mathfrak{K}$ ebenfalls auf. Also ist entweder $[\mathfrak{M}] = \mathfrak{K}$, oder ist $\mathfrak{K} \ominus [\mathfrak{M}]$ von der Dimension 1, und gleiche Fälle sind auch für $\mathfrak{N}$ möglich.

(²) Im Falle $[\mathfrak{M}] = \mathfrak{K}$ ist $\tilde{V} = V$, und im Falle $[\mathfrak{M}] \neq \mathfrak{K}$ kann man $\tilde{V}$ z. B. derart fortsetzen, dass für die auf $\mathfrak{M}$ orthogonalen Vektoren ψ, $\tilde{V}\psi$ gleich 0 wird.

$$g(z) = i\,b + \left(\frac{I + z\tilde{V}}{I - z\tilde{V}}\,\varepsilon_0,\ \varepsilon_0\right) = i\,b + (\varepsilon_0, \varepsilon_0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{V}^n \varepsilon_0, \varepsilon_0)\, z^n \tag{9}$$

erweitern lässt. Diese besitzt auch die Eigenschaft $\operatorname{Re} g(z) \geqq 0$. In der Tat, wenn man den Vektor $(I - z\tilde{V})^{-1}\varepsilon_0$ mit η_z bezeichnet, dann gilt

$$\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{Re}\,((I + z\tilde{V})\,\eta_z,\ (I - z\tilde{V})\,\eta_z) = (1 - |z|^2)\,(\eta_z, \eta_z) \geqq 0.$$

Damit haben wir das Hinreichen der Bedingung in Satz A bewiesen, in dem Falle, dass der Punkt 0 zu S gehört. Der entgegengesetzte Fall kann aber zu diesem zurückgeführt werden, indem man das Innere des Einheitskreises durch eine gebrochenlineare Funktion auf sich derart abbildet, dass ein beliebig gewählter Punkt s_0 von S in den Punkt 0 übergeht. Ist diese Abbildung

$$\sigma = \frac{s - s_0}{1 - s\bar{s}_0} \equiv l(s),$$

so genügt die durch die Gleichung $\varphi(\sigma) = f(s)$ definierte Funktion φ auf der Menge $\Sigma = l(S)$ der Bedingung der Positivdefinitheit, man erhält nämlich durch einfache Rechnung:

$$\sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(\sigma_m) + \overline{\varphi(\sigma_n)}}{2(1 - \sigma_m \bar{\sigma}_n)}\, \alpha_m \bar{\alpha}_n = \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{f(s_m) + \overline{f(s_n)}}{2(1 - s_m \bar{s}_n)}\, \beta_m \bar{\beta}_n \geqq 0$$

mit

$$\sigma_j = l(s_j) \quad \text{und} \quad \beta_j = \frac{1 - s_j \bar{s}_0}{1 - s_0 \bar{s}_0}\,\alpha_j \qquad (j = 1, \dots, N).$$

Folglich kann nach dem schon Bewiesenen $\varphi(\sigma)$ zu einer im Einheitskreise holomorphen Funktion $\psi(\zeta)$ mit nicht-negativem Reellteil erweitert werden. Dann ist aber die Funktion $g(z) = \psi(l(z))$ die gewünschte Erweiterung von $f(s)$.

Damit haben wir den Satz A vollständig bewiesen.

Wir fügen einige ergänzende Bemerkungen hinzu.

Wie es sich nachträglich herausgestellt hat, kann der Punkt 0 immer zur Menge S adjungiert werden und so ist die Darstellung (8) immer möglich. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir also annehmen, dass der Punkt 0 schon ursprünglich zu S gehört.

Ist die Menge S *endlich*, so ist die Dimension des Raumes eine endliche Zahl r (r ist höchstens gleich der Anzahl der Vektoren ε_s, also der Anzahl der in S enthaltenen Punkte). Dann haben die Unterräume $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ die gleiche Dimension (beide die Dimension r oder beide die Dimension $r - 1$), und so kann V insbesondere zu einem *unitären* Operator $\tilde{V}$ von $\mathfrak{K}$ fortgesetzt werden (im Falle $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}=\mathfrak{K}$ ist $\tilde{V}=V$; im entgegengesetzen Falle wähle man einen zu $\mathfrak{M}$ orthogonalen Einheitsvektor φ_0 und einen zu $\mathfrak{N}$ orthogonalen Einheitsvektor ψ_0 und definiere man $\tilde{V}\varphi_0=\psi_0$). Ist dann $\xi_1, \ldots, \xi_r$ ein vollständiges orthonormales System von Eigenvektoren des unitären Operators $U=\tilde{V}^{-1}$ mit den entsprechenden Eigenwerten $e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_r}$, so folgt aus (9), dass es unter den gewünschten Erweiterungen $g(z)$ von $f(s)$ auch *rationale* Funktionen gibt, nämlich

$$g(z)=ib+\sum_{k=1}^{r}\frac{e^{i\theta_k}+z}{e^{i\theta_k}-z}p_k \qquad \text{mit } p_k=|(\varepsilon_0, \xi_k)|^2 \geqslant 0.$$

Ist dagegen die Menge S *unendlich*, so haben $\mathfrak{K}\ominus\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{K}\ominus\mathfrak{N}$ nicht notwendigerweise die gleiche Dimension, folglich kann man nicht behaupten, dass V in $\mathfrak{K}$ eine unitäre Fortsetzung besitzt. Eine unitäre Fortsetzung existiert aber in einem geeignet gewählten Erweiterungsraum $\tilde{\mathfrak{K}}$. Es sei z.B. $\tilde{\mathfrak{K}}$ der Hilbertsche Raum der aus den Elementen von $\mathfrak{K}$ gebildeten Paare $\{\varphi, \psi\}$, mit der üblichen Definition der Addition, Skalarmultiplikation und des inneren Produkts:

$$\{\varphi_1, \psi_1\}+\{\varphi_2, \psi_2\}=\{\varphi_1+\varphi_2, \psi_1+\psi_2\}, \quad c\{\varphi, \psi\}=\{c\varphi, c\psi\},$$
$$(\{\varphi_1, \psi_1\}, \{\varphi_2, \psi_2\})=(\varphi_1, \varphi_2)+(\psi_1, \psi_2);$$

durch Identifizieren von φ mit dem Paare $\{\varphi, 0\}$ wird $\mathfrak{K}$ zu einem Unterraum von $\tilde{\mathfrak{K}}$; $[\mathfrak{M}]$ und $[\mathfrak{N}]$ werden dann auch Unterräume von $\tilde{\mathfrak{K}}$. Bezeichnet man die Operatoren der orthogonalen Projektion auf die Unterräume $[\mathfrak{M}]$ und $[\mathfrak{N}]$ mit P bzw. Q, so wird der durch

$$\tilde{V}\{\varphi, \psi\}=\{VP\varphi+(I-Q)\psi, \quad V^{-1}Q\psi+(I-P)\varphi\}$$

in $\tilde{\mathfrak{K}}$ definierte Operator $\tilde{V}$ eine unitäre Fortsetzung von V. Das lässt sich einfach verifizieren. Nun gelten die Beziehung (7) und ihre Folgerungen offenbar auch dann, wenn $\tilde{V}$ eine Fortsetzung von V in einem Erweiterungsraum ist (sobald $\|\tilde{V}\|\leqslant 1$ besteht), also gelten sie insbesondere für den soeben konstruierten unitären Operator $\tilde{V}$. Nach (8) gilt also die Darstellung (A) (§ 1) mit dem unitären Operator $U=\tilde{V}^{-1}$.

Unsere Betrachtungen sichern nur die *Existenz* der gewünschten Erweiterungen $g(z)$ von $f(s)$, nicht aber ihre *Unizität.* Es besteht Unizität insbesondere dann, wenn die Menge S einen Häufungspunkt im Inneren des Einheitskreises besitzt, denn dann wird die holomorphe Funktion $g(z)$ durch ihre Werte in S, d.h. durch die Funktion $f(s)$, eindeutig bestimmt.

5. Das Hinreichen der Bedingungen von Satz B

Die durch (2) definierte Funktion $k(s, t)$ stellen wir nach dem Lemma in der Form $(\varepsilon_s, \varepsilon_t)$ dar. Nach Voraussetzung gibt es in S eine Punktfolge $\{\sigma_n\}$ mit $\sigma_n \to 0$, $\varphi \leq \arg \sigma_n \leq \pi - \varphi$ $\left(0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$ und mit $|\sigma_n^{-1} f(\sigma_n)| \leq M$. Dann gilt aber auch

$$f(\sigma_n) \to 0, \quad k(\sigma_n, \sigma_n) = \frac{\operatorname{Im} f(\sigma_n)}{\operatorname{Im} \sigma_n} \leq \frac{M}{\sin \varphi}.$$

Hieraus folgt, dass für einen beliebigen festen Punkt $s \in S$ gilt:

$$(\varepsilon_s, \varepsilon_{\sigma_n}) = \frac{f(s) - \overline{f(\sigma_n)}}{s - \bar{\sigma}_n} \to \frac{f(s)}{s}, \quad (\varepsilon_{\sigma_n}, \varepsilon_{\sigma_n}) \leq \frac{M}{\sin \varphi}.$$

Da die Vektoren ε_s den Raum $\mathfrak{K}$ aufspannen, folgt hieraus weiter, dass die Folge $\{\varepsilon_{\sigma_n}\}$ schwach konvergent ist; der schwache Limes sei mit ε_0 bezeichnet. Man hat also

$$(\varepsilon_s, \varepsilon_0) = \frac{f(s)}{s} \quad (s \in S).$$

Wir setzen wieder
$$\varepsilon_s' = \frac{1}{s}(\varepsilon_s - \varepsilon_0) \quad (s \in S)$$

(man beachte, dass S jetzt nur Punkte der oberen Halbebene enthält, also den Punkt 0 nicht). Für $s, t \in S$ hat man dann

$$(\varepsilon_s', \varepsilon_t) = \frac{1}{s}[(\varepsilon_s, \varepsilon_t) - (\varepsilon_0, \varepsilon_t)] = \frac{f(s)/s - \overline{f(t)/t}}{s - \bar{t}}, \tag{10}$$

woraus man sieht, dass $(\varepsilon_s', \varepsilon_t) = (\varepsilon_s, \varepsilon_t')$ gilt. Ist $\mathfrak{M}$ die Menge der endlichen Linearkombinationen der Vektoren ε_s $(s \in S)$ und sind

$$\varphi = \sum_m c_m \varepsilon_{s_m}, \quad \psi = \sum_n d_n \varepsilon_{t_n}$$

zwei beliebige Elemente von $\mathfrak{M}$, so gilt mit

$$\varphi' = \sum c_m \varepsilon_{s_m}', \quad \psi' = \sum d_n \varepsilon_{t_n}':$$

$$(\varphi', \psi) = \sum_m \sum_n c_m \bar{d}_n (\varepsilon_{s_m}', \varepsilon_{t_n}) = \sum_m \sum_n c_m \bar{d}_n (\varepsilon_{s_m}, \varepsilon_{t_n}') = (\varphi, \psi'). \tag{11}$$

Aus $\varphi = 0$ folgt also $(\varphi', \psi) = 0$ für beliebige $\psi \in \mathfrak{M}$, und da $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{K}$ dicht ist, $\varphi' = 0$. Hieraus folgt, dass der durch

$$A_0 \varphi = \varphi'$$

definierte Operator A_0 eindeutig, linear und nach (11) symmetrisch ist. (Der Definitionsbereich von A_0 ist die in $\mathfrak{K}$ dichte Linearmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, sein Wertbereich liegt in $\mathfrak{K}$, aber nicht notwendigerweise in $\mathfrak{M}$.) Aus der Definition von A_0 folgt:

$$(I - s A_0)\,\varepsilon_s = \varepsilon_0 \qquad (s \in S). \tag{12}$$

Nun kann der symmetrische Operator A_0 immer zu einem selbstadjungierten Operator A fortgesetzt werden, wenn auch nicht notwendigerweise im Raum $\mathfrak{K}$ selber, aber jedenfalls in einem geeigneten Erweiterungsraum $\tilde{\mathfrak{K}}$(¹). Dann existiert aber $(I - zA)^{-1}$ für jede komplexe, nicht-reelle Zahl z, und ist ein in $\tilde{\mathfrak{K}}$ überall definierter, beschränkter Operator, der als Funktion von z sowohl in der oberen, wie in der unteren (offenen) Halbebene holomorph ist (also um jeden Punkt z_0 in eine Potenzreihe entwickelt werden kann). Aus (12) erhält man für $s \in S$

$$\varepsilon_s = (I - sA)^{-1}\,\varepsilon_0$$

und folglich
$$f(s) = s(\varepsilon_s, \varepsilon_0) = s((I - sA)^{-1}\,\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

Somit sind wir zur Darstellung (B) (§ 1) gelangt.

Aus dieser Darstellung folgt, dass die Funktion

$$g(z) = z((I - zA)^{-1}\,\varepsilon_0, \varepsilon_0)$$

eine holomorphe Fortsetzung von $f(s)$ auf die ganze (offene) obere Halbebene liefert. Sie besitzt auch die übrigen gewünschten Eigenschaften. Setzt man nämlich $\eta_z = (I - zA)^{-1}\,\varepsilon_0$, so hat man zuerst

$$g(z) = z(\eta_z, (I - zA)\,\eta_z) = z(\eta_z, \eta_z) - |z|^2 (\eta_z, A\,\eta_z),$$

also
$$\operatorname{Im} g(z) = \operatorname{Im} z \cdot (\eta_z, \eta_z) \geqslant 0 \qquad \text{für } \operatorname{Im} z \geqslant 0;$$

weiter gilt für $\varphi \leqslant \arg z \leqslant \pi - \varphi$ $\left(0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left|\frac{g(z)}{z}\right| = |(\eta_z, \varepsilon_0)| \leqslant \frac{\|\varepsilon_0\|^2}{\sin \varphi};$$

letztere Ungleichung folgt daraus, dass wegen

$$\|\eta_z\|\;\|\varepsilon_0\| \geqslant |(\eta_z, \varepsilon_0)| = |(\eta_z, (I - zA)\,\eta_z)| = (\eta_z, \eta_z)\left|1 - \bar{z}\,\frac{(\eta_z, A\,\eta_z)}{(\eta_z, \eta_z)}\right| \geqslant \|\eta_z\|^2 \sin \varphi\,(^2)$$

(¹) Satz von NEUMARK, vgl. z. B. [9] § 2. Der Beweis geht, mittels der Benützung der Cayleyschen Transformierten, im wesentlichen darauf hin, dass jeder isometrische Operator in einem geeigneten Erweiterungsraum eine unitäre Fortsetzung besitzt, vgl. § 4.

(²) Man hat ja für jedes reelle λ: $|1 - \bar{z}\lambda| \geqslant |\sin \arg z|$.

gilt:
$$\|\eta_z\| \leqslant \frac{\|\varepsilon_0\|}{\sin \varphi}.$$

Damit haben wir das Hinreichen der Bedingungen des Satzes B bewiesen. Die Unizität der Erweiterung $g(z)$ haben wir auch hier nicht untersucht, sie besteht insbesondere dann, wenn S einen Häufungspunkt im Inneren der oberen Halbebene besitzt.

Im Falle, dass der Operator A_0 beschränkt oder mindestens halbbeschränkt ist, existiert eine selbstadjungierte Fortsetzung A bekanntlich im Raume $\mathfrak{K}$ selber, und zwar mit denselben (oberen bzw. unteren) Schranken. Bezeichnet $k'(s, t)$ die an der rechten Seite von (10) stehende Funktion, so folgt aus (10) und (11), dass A_0 dann und nur dann die obere Schranke M, oder die untere Schranke m, bzw. gleichzeitig beide Schranken M und m besitzt, wenn

$$M \cdot k(s, t) - k'(s, t), \qquad \text{oder} \qquad k'(s, t) - m \cdot k(s, t),$$

bzw. beide Funktionen gleichzeitig positiv definit sind. Dann lässt sich also auch die selbstadjungierte Fortsetzung A mit denselben Schranken wählen. In der Integraldarstellung (B′) kann man dann entsprechend die obere, oder die untere Integrationsgrenze, bzw. beide Integrationsgrenzen gleichzeitig durch die endlichen Grössen M bzw. m ersetzen.

6. Das Hinreichen der Bedingungen von Satz C

Jetzt ist S das Intervall $(-1, 1)$ der reellen Achse. Die durch (3) definierte Funktion $k(s, t)$ stellen wir in der Form $(\varepsilon_s, \varepsilon_t)$ dar und wir setzen wieder

$$\varepsilon_s' = \frac{1}{s}(\varepsilon_s - \varepsilon_0) \qquad \text{für } s \in S,\ s \neq 0.$$

Dann gilt für $s \neq 0,\ t \neq 0,\ s \neq t$

$$(\varepsilon_s', \varepsilon_s) = \frac{1}{s}(\varepsilon_s, \varepsilon_s) - \frac{1}{s}(\varepsilon_0, \varepsilon_t) = \frac{f(s) - f(t)}{s(s-t)} + \frac{f(0) - f(t)}{st} = \frac{f(s)/s - f(t)/t}{s-t} + \frac{f(0)}{st},$$

und hieraus folgt
$$(\varepsilon_s', \varepsilon_t) = (\varepsilon_s, \varepsilon_t'). \tag{13}$$

Da das innere Produkt $(\varepsilon_s', \varepsilon_t)$ reellwertig ist, besteht (13) auch für $s = t$.

Die Menge $\mathfrak{M}$ der endlichen Linearkombinationen der Vektoren ε_s mit $s \neq 0$ ist auch in diesem Falle dicht in $\mathfrak{K}$. Dazu genügt es zu zeigen, dass der Vektor ε_0 in $[\mathfrak{M}]$ enthalten ist. Es gilt sogar die Gleichung $\varepsilon_0 = \lim\limits_{s \to 0} \varepsilon_s$, da wegen der Stetigkeit von $f'(s)$ im Punkte $s = 0$

$$\|\varepsilon_s - \varepsilon_0\|^2 = (\varepsilon_s, \varepsilon_s) - 2 \operatorname{Re} (\varepsilon_s, \varepsilon_0) + (\varepsilon_0, \varepsilon_0) = f'(s) - 2\frac{f(s)-f(0)}{s} + f'(0) \to 0$$

besteht.

Aus (13) folgt, wie im vorigen Paragraphen, dass der für die Vektoren von $\mathfrak{M}$ durch

$$A_0 \sum c_m \varepsilon_{s_m} = \sum c_m \varepsilon'_{s_m}$$

definierte Operator A_0 eindeutig, linear und symmetrisch ist.

Für die endlichen Linearkombinationen der Vektoren ε_s (s darf jetzt auch gleich 0 sein) definieren wir die „Konjugation"

$$J \sum c_m \varepsilon_{s_m} = \sum \bar{c}_m \varepsilon_{s_m}.$$

Wegen der Reellwertigkeit des inneren Produkts $(\varepsilon_s, \varepsilon_t)$ sind die für eine Konjugation charakteristischen Bedingungen

$$(J\varphi, J\psi) = (\psi, \varphi) \quad \text{und} \quad J^2 = I$$

erfüllt und diese gelten dann auch für die stetige Fortsetzung von J auf den ganzen Raum $\mathfrak{K}$. Der symmetrische Operator A_0 ist *reell* in Bezug auf die Konjugation J in dem Sinne, dass aus $\varphi \in \mathfrak{M}$ auch $J\varphi \in \mathfrak{M}$ und $A_0 J \varphi = J A_0 \varphi$ folgt. Hieraus folgt aber(¹), dass A_0 in $\mathfrak{K}$ eine (eventuell nicht beschränkte) selbstadjungierte Fortsetzung A besitzt.

Für $s \neq 0$ gilt

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_s - s\frac{1}{s}(\varepsilon_s - \varepsilon_0) = (I - sA_0)\varepsilon_s = (I - sA)\varepsilon_s, \tag{14}$$

und für $t \neq 0$, $s \neq t$ gilt auf Grund von (14)

$$(I - sA_0)\varepsilon_t = \left[\frac{s}{t}(I - tA_0) + \left(1 - \frac{s}{t}\right)I\right]\varepsilon_t = \frac{s}{t}\varepsilon_0 + \left(1 - \frac{s}{t}\right)\varepsilon_t = \frac{s}{t}(I - sA_0)\,\varepsilon_s + \left(1 - \frac{s}{t}\right)\varepsilon_t,$$

woraus

$$\varepsilon_t = \frac{1}{1 - s/t}\left[(I - sA)\varepsilon_t - \frac{s}{t}(I - sA)\varepsilon_s\right] = (I - sA)\frac{t\varepsilon_t - s\varepsilon_s}{t - s} \tag{15}$$

folgt. Die Gleichungen (14) und (15) zeigen, dass der Wertebereich von $I - sA$ alle Vektoren ε_t mit $t \neq s$ enthält. Da aber wegen der Stetigkeit von $f'(s)$

$$\|\varepsilon_t - \varepsilon_s\|^2 = f'(t) - 2\frac{f(t) - f(s)}{t - s} + f'(s) \to 0 \qquad \text{für } t \to s$$

gilt, so enthält die Abschliessung des Wertebereichs von $I - sA$ auch den Vektor ε_s und somit fällt sie mit dem ganzen Raum $\mathfrak{K}$ zusammen; dies gilt offenbar auch im Fall

(¹) Siehe z. B. [10], S. 40–41.

$s=0$. Folglich existiert $(I-sA)^{-1}$ für jedes $s \in S$ und ist ein (nicht notwendigerweise beschränkter) selbstadjungierter Operator [1], und nach (14) gilt

$$(I-sA)^{-1}\varepsilon_0=\varepsilon_s \qquad (|s|<1). \tag{16}$$

Für jede reelle Zahl x mit $|x|>1$ folgt hieraus

$$\|(xI-A)^{-1}\varepsilon_0\|^2=\frac{1}{|x|^2}\left\|\left(I-\frac{1}{x}A\right)^{-1}\varepsilon_0\right\|^2=\frac{1}{|x|^2}\|\varepsilon_{1/x}\|^2=\frac{1}{|x|^2}f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Da $f'(s)$ in $(-1,1)$ stetig ist, so gibt es zu jeder Zahl $\omega>1$ eine Zahl M_ω derart, dass die rechts stehende Funktion auf der Menge $|x|\geqslant\omega$ unterhalb M_ω bleibt. Ist nun $\{E(\lambda)\}$ die Spektralschar von A, so gilt

$$\|(xI-A)^{-1}\varepsilon_0\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-\lambda)^2}\,dm(\lambda)\leqslant M_\omega \qquad \text{für } |x|\geqslant\omega$$

mit

$$m(\lambda)=(E(\lambda)\varepsilon_0,\varepsilon_0).$$

Sei insbesondere $\omega\leqslant a<b$, $x=\dfrac{a+b}{2}$, so erhält man hieraus

$$M_\omega\geqslant\int_a^b\frac{1}{(x-\lambda^2)}\,dm(\lambda)\geqslant\left(\frac{2}{b-a}\right)^2\int_a^b dm(\lambda)=\frac{4}{(b-a)^2}[m(b)-m(a)],$$

d. h.

$$\frac{m(b)-m(a)}{b-a}\leqslant\frac{M_\omega}{4}(b-a).$$

Da a, b beliebig sind, ergibt dies $m'(\lambda)=0$ für $\lambda>\omega$, und da auch ω beliebig (grösser als 1) sein kann, so hat man $m'(\lambda)=0$ für $\lambda>1$. Ebenso sieht man ein, dass $m'(\lambda)=0$ für $\lambda<-1$ ist. Also ist $m(\lambda)$ auf den Halbgeraden $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$ konstant. Wenn also $\Delta=[\lambda_1,\lambda_2]$ ein im Inneren der einen oder der anderen Halbgeraden enthaltenes Intervall ist, so gilt mit $E(\Delta)=E(\lambda_2)-E(\lambda_1)$:

$$(E(\Delta)\varepsilon_0,\varepsilon_0)=m(\lambda_2)-m(\lambda_1)=0, \qquad \text{also } E(\Delta)\varepsilon_0=0.$$

Auf Grund von (16) folgt hieraus weiter für jedes $s\in S$:

$$E(\Delta)\varepsilon_s=E(\Delta)(I-sA)^{-1}\varepsilon_0=(I-sA)^{-1}E(\Delta)\varepsilon_0=0.$$

Da die Vektoren ε_s den Raum $\mathfrak{K}$ aufspannen, so ist $E(\Delta)=0$. Dies bedeutet, dass das Spektrum von A ganz im Intervall $[-1,1]$ liegt, also gilt

$$\|A\|\leqslant 1.$$

(1) Siehe z. B. [10], S. 35.

Auf Grund von (16) hat man ferner

$$((I-sA)^{-1}\varepsilon_0,\varepsilon_0)=(\varepsilon_s,\varepsilon_0)=\frac{f(s)-f(0)}{s},$$

und so sind wir zur Darstellung der Funktion $f(s)$ in der Form (C) bzw. (C′) (§ 1) gelangt.

Von der Funktion

$$g(z)=f(0)+((I-zA)^{-1}\varepsilon_0,\varepsilon_0)=f(0)+\int\limits_{-1-0}^{1}\frac{z}{1-z\lambda}\,dm(\lambda)$$

sieht man unmittelbar leicht ein, dass sie in der längs der Halbgeraden $(-\infty,-1]$, $[1,\infty]$ aufgeschnittenen komplexen Ebene holomorph und in der oberen Halbebene von nichtnegativem Imaginärteil ist([1]). Also ist diese Funktion $g(z)$ eine Erweiterung von $f(z)$ mit den gewünschten Eigenschaften. Sie ist übrigens die einzige solche Erweiterung, da die Menge S Häufungspunkte im Inneren des Holomorphiebereiches besitzt.

7. Verschärfung des Satzes C

Wir werden zeigen, dass im Satz C die Bedingung der stetig-Differenzierbarkeit von $f(s)$ mit der folgenden schwächeren ersetzt werden kann: *Die Funktion $f(s)$ ist im Intervall $S=(-1,1)$ stetig und in einer, den Punkt 0 enthaltenden Teilmenge S' von S von vollem Mass (d. h. vom Mass 2) differenzierbar, ferner ist die durch die Gleichungen*

$$k(s,t)=\frac{f(s)-f(t)}{s-t}\quad(s\neq t),\quad k(s,s)=f'(s)$$

auf der Menge $S'\times S'$ definierte Funktion $k(s,t)$ positiv definit.

Wir brauchen nur das Hinreichen der Bedingung zu beweisen. Das tun wir durch Zurückführung auf die bisher betrachtete stärkere Bedingung.

Sei $\mu>0$ und sei ν ein das Intervall $(-\mu,\mu)$ durchlaufender reeller Parameter. Sind $s_1,\ldots,s_N$ gegebene Punkte von S, so liegen die Punkte

$$s_n(\nu)=(1+\mu)^{-1}(s_n+\nu)\qquad(n=1,\ldots,N)$$

für fast alle Werte des Parameters ν in S'. Das ist eine einfache Konsequenz davon, dass die Menge $S-S'$ vom Mass 0 ist. Also ist für fast alle Werte von ν und für beliebige komplexe Zahlen $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}k(s_m(\nu),s_n(\nu))\,\alpha_m\bar{\alpha}_n\geqslant 0.$$

([1]) Nämlich ist $\operatorname{Im} z(1-z\lambda)^{-1}=|1-z\lambda|^{-2}\operatorname{Im} z$.

Hieraus folgt durch Integration

$$\sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \int_{-\mu}^{\mu} k(s_m(\nu), s_n(\nu))\, d\nu \cdot \alpha_m \bar{\alpha}_n \geqslant 0. \tag{17}$$

Wir setzen $$f_\mu(s) = \frac{1}{2\mu} \int_{-\mu}^{\mu} f\left(\frac{s+\nu}{1+\mu}\right) d\nu = \frac{1+\mu}{2\mu} \int_{\frac{s-\mu}{1+\mu}}^{\frac{s+\mu}{1+\mu}} f(\sigma)\, d\sigma \qquad (s \in S).$$

Diese Funktion ist schon stetig differenzierbar in S, man hat nämlich

$$f'_\mu(s) = \frac{1}{2\mu}\left[f\left(\frac{s+\mu}{1+\mu}\right) - f\left(\frac{s-\mu}{1+\mu}\right)\right], \tag{18}$$

und die entsprechende Funktion $k_\mu(s, t)$ ist die folgende:

$$k_\mu(s, t) = \frac{1}{1+\mu} \frac{1}{2\mu} \int_{-\mu}^{\mu} k\left(\frac{s+\nu}{1+\mu}, \frac{t+\nu}{1+\mu}\right) d\nu,$$

diese ist aber nach (17) positiv definit auf $S \times S$.

Folglich gilt für $f_\mu(s)$ die Darstellung (C′) (§ 1):

$$f_\mu(s) = f_\mu(0) + \int_{-1-0}^{1} \frac{s}{1 - s\lambda}\, dm_\mu(\lambda) \tag{19}$$

mit einer beschränkten, monoton nicht-fallenden, rechtsstetigen Funktion $m_\mu(\lambda)$, für die $m_\mu(-1-0) = 0$ ist.

Auf Grund von (19) gilt

$$f'_\mu(0) = \lim_{s \to 0} \frac{f_\mu(s) - f_\mu(0)}{s} = \lim_{s \to 0} \int_{-1-0}^{1} \frac{1}{1 - s\lambda}\, dm(\lambda) = \int_{-1-0}^{1} dm_\mu(\lambda) = m_\mu(1),$$

andererseits folgt aus (18)

$$f'_\mu(0) \to f'(0) \qquad \text{für } \mu \to 0.$$

Also hat man $$m_\mu(1) \to f'(0) \qquad \text{für } \mu \to 0,$$

und so kann man den Hellyschen Auswahlsatz anwenden: es gibt eine Folge $\{\mu_n\}$, $0 < \mu_n \to 0$, und eine nicht-fallende, rechtsstetige, den Bedingungen $m(-1-0) = 0$, $m(1) = f'(0)$ genügende Funktion $m(\lambda)$ derart, dass für jede stetige Funktion $u(\lambda)$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1-0}^{1} u(\lambda)\, dm_{\mu_n}(\lambda) = \int_{-1-0}^{1} u(\lambda)\, dm(\lambda).$$

Wählt man insbesondere

$$u(\lambda) = u_s(\lambda) = \frac{s}{1 - s\lambda} \qquad \text{mit } s \in S$$

und bemerkt man, dass wegen der Stetigkeit von $f(s)$

$$\lim_{\mu \to 0} f_\mu(s) = f(s)$$

gilt, so erhält man auf Grund von (19):

$$f(s) = f(0) + \int_{-1-0}^{1} \frac{s}{1 - s\lambda}\, dm(\lambda).$$

Aus dieser Darstellung folgt aber, wie schon gezeigt, die Existenz der gewünschten Erweiterung $g(z)$ von $f(s)$.

Teil II. Operatorwertige Funktionen

8. Die zu beweisenden Sätze

Die oben bewiesenen Sätze lassen sich auf den Fall verallgemeinern, dass an Stelle der komplexwertigen Funktionen solche treten, deren Werte Operatoren eines Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ sind. Dazu braucht man zuerst die Positivdefinitheit für solche Funktionen zu erklären.

Eine auf der Menge $X \times X$ definierte operatorwertige Funktion $K(x, y)$ nennen wir *stark positiv definit,* falls für beliebige, endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_N$ aus X und Vektoren $h_1, \ldots, h_N$ aus dem Raum $\mathfrak{H}$

$$\sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} (K(x_m, x_n)\, h_m, h_n) \geqslant 0 \tag{20}$$

gilt. Wenn wir diese Bedingung immer nur für Systeme gleichgerichteter Vektoren, d. h. für Vektoren $h_n = \alpha_n h$ (mit $h \in \mathfrak{H}$ und komplexen α_n; $n = 1, \ldots, N$) fordern, also mit anderen Worten, wenn wir nur

$$\sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} K(x_m, x_n)\, \alpha_m \bar{\alpha}_n \geqslant O \tag{21}$$

voraussetzen, so sagen wir, $K(x, y)$ sei *schwach positiv definit.*

Aus der Definition folgt, dass jede stark positiv definite Funktion auch schwach positiv definit ist, das Umgekehrte gilt aber im allgemeinen nicht.

Wir werden die folgenden Verallgemeinerungen der Sätze A–C, oder, genauer gesagt, der Darstellungen (A)–(C) beweisen:

SATZ A*. *Es sei S eine im Inneren des Einheitskreises der komplexen Ebene liegende Punktmenge, welche den Punkt 0 enthält und einen Häufungspunkt im Inneren des Einheitskreises besitzt. Auf S sei eine Funktion $F(s)$ gegeben, deren Werte beschränkte lineare Operatoren des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ sind. Dann und nur dann kann $F(s)$ in der Form*

$$F(s) = \mathrm{pr}\, \frac{U + sI}{U - sI} \text{ (1)} \tag{22}$$

mit einem unitären Operator U eines geeigneten Hilbertschen Erweiterungsraumes $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ dargestellt werden, wenn die auf der Menge $S \times S$ definierte, operatorwertige Funktion

$$K(s, t) = \frac{F(s) + F^*(t)}{2(1 - s\bar{t})} \tag{23}$$

schwach positiv definit ist, und $$F(0) = I \tag{24}$$

gilt.

SATZ A**. *Satz A* bleibt auch dann gültig, wenn S keinen Häufungspunkt im Inneren des Einheitskreises besitzt, aber $K(s, t)$ stark positiv definit ist.*

SATZ B*. *Es sei S eine Teilmenge der oberen Halbebene, die in mindestens einem Winkelraum $C(\varphi)$ $\left(0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ einen sich am Punkte 0 häufenden Durchschnitt besitzt und die ausserdem noch mindestens einen Häufungspunkt im Inneren der Halbebene hat. Auf S sei eine Funktion $F(s)$ gegeben, deren Werte beschränkte lineare Operatoren des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ sind. Dann und nur dann kann $F(s)$ in der Form*

$$F(s) = \mathrm{pr}\, s(I - sA)^{-1} \qquad (s \in S) \tag{25}$$

durch einen selbstadjungierten Operator A eines geeigneten Hilbertschen Erweiterungsraumes $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ dargestellt werden, wenn die auf der Menge $S \times S$ definierte, operatorwertige Funktion

$$K(s, t) = \frac{F(s) - F^*(t)}{s - \bar{t}} \tag{26}$$

---

(1) Ist T ein Operator des Hilbertraumes $\mathfrak{H}$ und $\tilde{T}$ ein Operator des den Raum $\mathfrak{H}$ als einen Unterraum enthaltenden Hilbertraumes $\tilde{\mathfrak{H}}$, so sagt man, T sei die „Projektion" von $\tilde{T}$, im Zeichen $T = \mathrm{pr}\, \tilde{T}$, falls Th für jeden Vektor $h \in \mathfrak{H}$ gleich der (orthogonalen) Projektion des Vektors $\tilde{T}h$ auf den Raum $\mathfrak{H}$ ist; siehe [9].

schwach positiv definit ist und für mindestens eine, aus S gewählte, in einem Winkelraum $C(\varphi)$ $\left(0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ gegen den Punkt 0 strebende Punktfolge $\{\sigma_n\}$ gilt:

$$\sigma_n^{-1}F(\sigma_n)\rightharpoonup I(^1). \tag{27}$$

Der Operator A kann dann und nur dann mit der oberen Schranke M, oder mit der unteren Schranke m, bzw. gleichzeitig mit beiden Schranken M und m gewählt werden, wenn die operatorwertige Funktion

$$M\cdot K(s,t)-K'(s,t), \quad \text{oder} \quad K'(s,t)-m\cdot K(s,t),$$

bzw. gleichzeitig beide Funktionen schwach positiv definit sind; dabei wird $K'(s,t)$ durch

$$K'(s,t)=\frac{F(s)/s-F^*(t)/\bar{t}}{s-\bar{t}}$$

definiert.

Satz B**. *Satz B* bleibt auch dann gültig, wenn S keinen Häufungspunkt im Inneren der oberen Halbebene besitzt, aber $K(s,t)$, und im Falle der letzten Behauptung die Funktionen $M\cdot K(s,t)-K'(s,t)$ bzw. $K'(s,t)-m\cdot K(s,t)$ stark positiv definit sind.*

Satz C*. *Es sei $F(s)$ eine im Intervall $S=(-1,1)$ der reellen Achse definierte Funktion, deren Werte beschränkte selbstadjungierte Operatoren des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ sind. Dann und nur dann kann $F(s)$ in der Form*

$$F(s)=\operatorname{pr} s(I-sA)^{-1} \qquad (s\in S) \tag{28}$$

durch einen selbstadjungierten Operator A, mit $\|A\|\leqslant 1$, eines geeigneten Hilbertschen Erweiterungsraums $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ dargestellt werden, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) *$F(s)$ ist schwach stetig in S und schwach differenzierbar in einer, den Punkt 0 enthaltenden Teilmenge S' von S von vollem Mass* (²),

b) $F(0)=O,\ F'(0)=I,$

c) *die auf der Menge $S'\times S'$ durch die Gleichungen*

$$K(s,t)=\frac{F(s)-F(t)}{s-t}\ (s\neq t), \quad K(s,s)=F'(s) \tag{29}$$

definierte Funktion ist schwach positiv definit.

(¹) Schwache Konvergenz.

(²) D. h. $F(s)\rightharpoonup F(t)$ für $s,t\in S$, $s\to t$, und $\frac{F(s)-F(t)}{s-t}\rightharpoonup F'(t)$ für $s\in S$, $t\in S'$, $s\to t$; $F'(t)$ ist ein notwendigerweise beschränkter linearer Operator.

Aus der Darstellung (22) bzw. (25) folgt übrigens, dass die entsprechende Funktion (23) bzw. (26) immer sogar stark positiv definit ist.

Im Hinblick auf die enge Verknüpfung der Operatoren $\frac{U+sI}{U-sI}$ und $\frac{sI}{I-sA}$ mit den Resolventen $R^U(z)=(U-zI)^{-1}$ und $R^A(z)=(A-zI)^{-1}$, können durch unsere Sätze diejenigen Operatorscharen charakterisiert werden, die aus den Resolventen eines unitären, eines allgemeinen selbstadjungierten, oder eines selbstadjungierten, mit 1 beschränkten Operator durch „Projektion" entstehen (1).

Unter Benützung des Begriffes des „reellen" und „imaginären Teiles" eines Operators in $\mathfrak{H}$, könnten wir die Sätze A, B, C auch in ihren ursprünglichen Form verallgemeinern. Im Falle von Satz A folgt dies auf Grund folgender Behauptung (vgl. NEUMARK [11]):

Die Klasse der im Einheitskreise holomorphen operatorwertigen Funktionen $F(z)$ mit $\mathrm{Re}\, F(z) \geqslant O$ *und* $F(0)=I$, *ist identisch mit der Klasse der Funktionen* $\mathrm{pr}\, \frac{U+zI}{U-zI}$, *wo U ein unitärer Operator in einem beliebigen Erweiterungsraum von $\mathfrak{H}$ ist.*

Ein Beweis dieser Behauptung folgt unmittelbar durch Vergleichung der Sätze A, A*, A**.

In Bezug auf die Verallgemeinerungen der Probleme B und C ergeben sich, wie man sich leicht überzeugt, analoge Behauptungen.

9. Beweis von Satz A*.

Ist $F(z)$ in der Form (22) durch einen unitären Operator U darstellbar, so ist (24) klar, und wegen der Beziehung

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-s\bar{t}}\left[\frac{U+sI}{U-sI}+\frac{U^*+\bar{t}I}{U^*-\bar{t}I}\right]=(U^*-\bar{t}I)^{-1}(U-sI)^{-1}$$

ist die durch (23) definierte Funktion $K(s,t)$ stark positiv definit:

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}(K(s_m,s_n)h_m,h_n)=\left\|\sum_{m=1}^{N}(U-s_mI)^{-1}h_m\right\|^2\geqslant 0 (^2).$$

Zum Beweis des Hinreichens der gestellten Bedingungen gehen wir von der Bemerkung aus, dass für jeden festen Vektor $h\in\mathfrak{H}$ die komplexwertige Funktion $(F(s)h,h)$

(1) Die „Projektionen" der Resolventen selbstadjungierter Operatoren wurden im Aufsatz [16] auf andere Weise charakterisiert.

(2) Hier und im Folgenden machen wir mehrmals von der Tatsache Gebrauch, dass die Beziehung $T=\mathrm{pr}\,\tilde{T}$ (T ein Operator im Raum $\mathfrak{H}$, $\tilde{T}$ ein Operator im Raum $\tilde{\mathfrak{H}}\supseteq\mathfrak{H}$) gleichwertig mit der Beziehung $(Th,h')=(\tilde{T}h,h')$ (h, h' beliebige Vektoren von $\mathfrak{H}$) ist.

den Bedingungen von Satz A genügt und für $s=0$ den Wert (h, h) annimmt. Also gilt für diese Funktion die Darstellung (A′) (§ 1), d. h. man hat

$$(F(s)h, h) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda}+s}{e^{i\lambda}-s}\, dm(h;\lambda) \qquad (s \in S) \tag{30}$$

mit einer monoton nicht-fallenden, rechtsstetigen Funktion $m(h;\lambda)$ von λ,

$$m(h;0)=0, \quad m(h;2\pi)=\int_0^{2\pi} dm(h;\lambda) = (F(0)h, h) = (h, h).$$

Seien nun h, h' zwei (nicht notwendig verschiedene) Vektoren aus $\mathfrak{H}$. Wir machen von den folgenden Beziehungen Gebrauch:

$$\left.\begin{aligned} 4(F(s)h, h') &= (F(s)(h+h'), h+h') - (F(s)(h-h'), h-h') + \\ &\quad + i(F(s)(h+ih'), h+ih') - i(F(s)(h-ih'), h-ih'), \\ 4(F(s)h', h) &= (F(s)(h+h'), h+h') - (F(s)(h-h'), h-h') - \\ &\quad - i(F(s)(h+ih'), h+ih') + i(F(s)(h-ih'), h-ih'). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Auf Grund dieser Beziehungen gewinnen wir aus (30) die folgenden Integraldarstellungen:

$$\left.\begin{aligned} (F(s)h, h') &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda}+s}{e^{i\lambda}-s}\, d\mu(\lambda), \\ (F(s)h', h) &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda}+s}{e^{i\lambda}-s}\, \overline{d\mu(\lambda)} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

mit

$$\mu(\lambda) = \mu(h, h';\lambda) = \tfrac{1}{4}\,[m(h+h';\lambda) - m(h-h';\lambda) + i\,m(h+ih';\lambda) - i\,m(h-ih';\lambda)] \text{(1)}.$$

Wegen

$$\frac{e^{i\lambda}+s}{e^{i\lambda}-s} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\lambda} s^n,$$

wobei diese Entwicklung für festes $s \in S$ gleichmässig in Bezug auf das reelle λ konvergiert, ergibt sich aus (32):

$$(F(s)h, h') = c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n s^n, \quad (F(s)h', h) = \bar{d}_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \bar{d}_n s^n \tag{33}$$

mit

$$c_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\lambda}\, d\mu(\lambda), \quad d_n = \int_0^{2\pi} e^{in\lambda}\, d\mu(\lambda) \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{34}$$

---

(1) Man beachte, dass die Funktion $m(h;\lambda)$ reellwertig ist.

Die Funktionen $(F(s)h, h)$ und mit ihnen auch die in (31) vorkommenden Funktionen besitzen holomorphe Erweiterungen auf das ganze Innere des Einheitskreises, und da S einen Häufungspunkt im Inneren des Einheitskreises hat, sind diese Erweiterungen eindeutig bestimmt. Hieraus folgt, dass die Funktionen $(F(s)h, h')$, $(F(s)h', h)$ die Koeffizienten ihrer Potenzreihenentwicklungen (33) eindeutig bestimmen. Auf Grund der Gleichungen (34) bestimmen aber diese Koeffizienten die komplexwertige Funktion $\mu(\lambda)$ von beschränkter Schwankung eindeutig, wenn wir diese durch die Bedingungen der Rechtsstetigkeit und der Gleichung $\mu(0) = 0$ normieren (trigonometrisches Momentenproblem).

Also bestimmen die Gleichungen (32) unter dieser Normierung die Funktion $\mu(\lambda) = \mu(h, h'; \lambda)$ eindeutig. Hieraus folgt aber, dass, für jedes feste λ, $\mu(h, h'; \lambda)$ linear in h und konjugiert-linear in h' ist und der Bedingung $\mu(h', h; \lambda) = \overline{\mu(h, h'; \lambda)}$ genügt, ferner gilt

$$\mu(h, h; \lambda) = m(h; \lambda) \leqslant m(h; 2\pi) = (h, h).$$

Bekanntlich folgt aus diesen Eigenschaften, dass $\mu(h, h'; \lambda)$ in der Form

$$\mu(h, h'; \lambda) = (B(\lambda)h, h') \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi) \tag{35}$$

dargestellt werden kann, wobei $\{B(\lambda)\}$ eine nicht-fallende, rechtsstetige, einparametrige Schar von beschränkten selbstadjungierten Operatoren des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ ist, mit

$$B(0) = O \quad \text{und} \quad B(2\pi) = I.$$

Aus einem Satz von M. Neumark (1) folgt aber, dass $B(\lambda)$ in der Form

$$B(\lambda) = \operatorname{pr} E(\lambda) \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi) \tag{36}$$

durch eine gewöhnliche Spektralschar $\{E(\lambda)\}$ eines geeigneten Erweiterungsraumes $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{H}$ dargestellt werden kann, mit $E(0) = O$, $E(2\pi) = I$. Nach (32), (35) und (36) folgt hieraus die gewünschte Darstellung (22) von $F(s)$ mit Hilfe des unitären Operators

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda}\, dE(\lambda).$$

Somit haben wir den Beweis von Satz A* vollendet.

Bemerkung. Die Bedingung, dass S im Inneren des Einheitskreises einen Häufungspunkt besitzt, wurde wesentlich benutzt, als wir zeigten, dass die Funktion $\mu(\lambda) = \mu(h, h'; \lambda)$ durch die Gleichungen (32) eindeutig bestimmt ist, woraus wir auf

(1) Siehe [11] oder [9] § 2.

die Darstellbarkeit dieser Funktion in der Form (35) geschlossen haben. Ob Satz A* auch dann gültig ist, wenn S keinen Häufungspunkt im Inneren des Einheitskreises besitzt, bleibt unentschieden.

10. Beweis von Satz A**

Wir haben nur das Hinreichen der Bedingungen zu beweisen. Das werden wir in Analogie zum Beweis von Satz A vorführen.

Zuerst ordnen wir, ebenso wie im Beweis des Lemmas (§ 3), jedem Punkt $s \in S$ je ein Symbol ε_s zu, und dann betrachten wir die aus diesen gebildeten endlichen formalen Summen

$$\sum_m h_m \varepsilon_{s_m},$$

deren Koeffizienten h_m Vektoren aus dem Raum $\mathfrak{H}$ sind. Definiert man für diese Summen die Multiplikation mit komplexen Zahlen und die Addition auf die natürliche Weise, so bilden diese Summen eine Linearmannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$. Für zwei Elemente von $\mathfrak{L}$

$$\varphi = \sum h_m \varepsilon_{s_m}, \quad \psi = \sum h'_n \varepsilon_{t_n},$$

definieren wir:
$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_m \sum_n (K(s_m, t_n) h_m, h'_n).$$

Dieser Ausdruck ist linear in φ und konjugiert-linear in ψ, und wegen der starken Positivdefinitheit von $K(s, t)$ ist $\langle \varphi, \varphi \rangle \geqslant 0$. Man sieht ebenso wie im Beweise des Lemmas ein, dass wenn man zwei Elemente φ_1, φ_2 von $\mathfrak{L}$ immer gleichsetzt, falls $\langle \varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0$ ist, dann die Definition von $\langle \varphi, \psi \rangle$ eindeutig bleibt. So wird $\mathfrak{L}$ zu einem „prae-Hilbertraum" mit dem inneren Produkt $\langle \varphi, \psi \rangle$; $\mathfrak{K}$ sei der aus $\mathfrak{L}$ durch Abschliessen entstandene Hilbertraum. Nach Definition wird $\mathfrak{K}$ durch seine Elemente von der Form $h \varepsilon_s$ ($s \in S$, $h \in \mathfrak{H}$) aufgespannt, und es gilt speziell

$$\langle h \varepsilon_s, h' \varepsilon_t \rangle = (K(s, t) h, h'). \tag{36}$$

Wegen (24) ist $K(0, 0) = I$, also

$$\langle h \varepsilon_0, h' \varepsilon_0 \rangle = (h, h').$$

Hieraus sieht man, dass die offenbar *lineare* Abbildung

$$h \to h \varepsilon_0$$

von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{K}$ auch *isometrisch* ist. Es ist also gestattet, den Vektor h von $\mathfrak{H}$ mit dem Element $h \varepsilon_0$ von $\mathfrak{K}$ zu identifizieren und somit $\mathfrak{H}$ als einen Unterraum in $\mathfrak{K}$ einzubetten. Im folgenden bezeichnen wir das innere Produkt in $\mathfrak{K}$ statt $\langle \varphi, \psi \rangle$ mit (φ, ψ).

Bedeute $\mathfrak{M}$ die Menge der endlichen Linearkombinationen der Elemente $h\varepsilon_s$ von $\mathfrak{K}$ mit $s \neq 0$, $h \in \mathfrak{H}$. Für solche Elemente $h\varepsilon_s$ setzen wir

$$V(h\varepsilon_s) = \frac{1}{s}(h\varepsilon_s - h\varepsilon_0). \tag{37}$$

Auf analoge Weise wie in § 3 zeigt man, dass V zu einem isometrischen Operator fortgesetzt werden kann, mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{M}$ und einem Wertebereich $\mathfrak{N}$ $(\subseteq \mathfrak{K})$. In einem geeigneten Erweiterungsraum $\tilde{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$ kann V sogar zu einem unitären Operator $\tilde{V}$ fortgesetzt werden. Auf Grund von (37) hat man

$$(I - s\tilde{V})(h\varepsilon_s) = h\varepsilon_0 = h, \tag{38}$$

und dies gilt offenbar auch für $s = 0$.

Für zwei beliebige Vektoren $h, h' \in \mathfrak{H}$ erhält man aus (36) und (38), wenn man auch (24) beachtet, folgenden Zusammenhang:

$$\left(\frac{I + s\tilde{V}}{I - s\tilde{V}} h, h'\right) = 2((I - s\tilde{V})^{-1} h, h') - (h, h') = 2(h\varepsilon_s, h'\varepsilon_0) - (h, h') =$$
$$= 2(K(s, 0)h, h') - (h, h') = ((F(s) + I)h, h') - (h, h') = (F(s)h, h').$$

Dies ist gleichwertig mit der Beziehung

$$F(s) = \mathrm{pr}\,(I + s\tilde{V})(I - s\tilde{V})^{-1}.$$

Der unitäre Operator $U = \tilde{V}^{-1}$ liefert also die gewünschte Darstellung (22) von $F(s)$.

Damit ist der Beweis von Satz A** fertig.

11. Beweis von Satz B*

Wenn $F(s)$ in der Form (25) durch einen selbstadjungierten Operator A dargestellt ist, so folgen aus den Beziehungen

$$\frac{1}{s - \bar{t}}[s(I - sA)^{-1} - \bar{t}(I - \bar{t}A)^{-1}] = (I - \bar{t}A)^{-1}(I - sA)^{-1},$$

$$\frac{1}{s - \bar{t}}[(I - sA)^{-1} - (I - \bar{t}A)^{-1}] = (I - \bar{t}A)^{-1} A (I - sA)^{-1}$$

die Identitäten

$$\sum_m \sum_n (K(s_m, s_n)h_m, h_n) = \|\sum_m (I - s_m A)^{-1} h_m\|^2,$$

$$\sum_m \sum_n (K'(s_m, s_n)h_m, h_n) = (A \sum_m (I - s_m A)^{-1} h_m, \sum_m (I - s_m A)^{-1} h_m)$$

($s_m \in S$, $h_m \in \mathfrak{H}$). Aus diesen folgt sogleich sogar die *starke* Positivdefinitheit von $K(s, t)$, und für $A \leqslant MI$ oder $mI \leqslant A$ die starke Positivdefinitheit von $M \cdot K(s, t) - K'(s, t)$ bzw. $K'(s, t) - m \cdot K(s, t)$.

Ist $\{E(\lambda)\}$ die zum Operator A gehörige Spektralschar, so gilt ferner für jeden Vektor $h \in \mathfrak{H}$:

$$\| s^{-1} F(s) h - h \|^2 \leqslant \| (I - sA)^{-1} h - h \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | (1 - s\lambda)^{-1} - 1 |^2 \, d \| E(\lambda) h \|^2 \to 0$$

falls s in einem Winkelraum $C(\varphi)$ $\left(0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ gegen 0 strebt; dies folgt daraus, dass die unter dem Integralzeichen stehende Funktion $|(1 - s\lambda)^{-1} - 1|$ in jedem Punkte λ gegen 0 strebt und unterhalb der von s unabhängigen Schranke $\frac{1}{\sin \varphi} + 1$ bleibt (also kann man den Konvergenzsatz von Lebesgue anwenden). Wenn also s in einem solchen Winkelraum gegen 0 strebt, so strebt der Operator $s^{-1} F(s)$ sogar *stark* gegen I.

Damit haben wir die Notwendigkeit der Bedingungen des Satzes B* sogar in verschärfter Form bewiesen.

Nun kehren wir zum Beweis des Hinreichens dieser Bedingungen.

Wir fangen mit der Bemerkung an, dass für jedes feste $h \in \mathfrak{H}$ die komplexwertige Funktion $(F(s) h, h)$ den Bedingungen von Satz B genügt und infolgedessen für sie die Darstellung (B′) gilt, d. h. man hat

$$(F(s) h, h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{1 - s\lambda} \, dm(h; \lambda) \qquad (s \in S) \tag{39}$$

mit einer reellwertigen, monoton nicht-fallenden, rechtsstetigen Funktion $m(h; \lambda)$, die noch den Bedingungen

$$m(h; -\infty) = 0, \qquad m(h; \infty) = (h, h)$$

genügt; die zweite dieser Gleichungen folgt daraus, dass wenn $\{\sigma_n\}$ die im Satz genannte, in einem Winkelraum $C(\varphi)$ $\left(0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ gegen 0 strebende Punktfolge aus S ist, dann

$$(h, h) = \lim_{n \to \infty} (\sigma_n^{-1} F(\sigma_n) h, h) = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \sigma_n \lambda)^{-1} \, dm(h; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dm(h; \lambda) = m(h; \infty)$$

gilt, weil $|(1 - \sigma_n \lambda)^{-1}| \leqslant \frac{1}{\sin \varphi}$ und $\lim_{n \to \infty} (1 - \sigma_n \lambda)^{-1} = 1$ ist.

Aus (39) folgt weiter für beliebige zwei Vektoren h, h'

$$(F(s)h, h') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{1-s\lambda} d\mu(\lambda), \quad (F(s)h', h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{1-s\lambda} \overline{d\mu(\lambda)} \quad (s \in S) \tag{40}$$

mit einer komplexwertigen, rechtsstetigen und der Bedingung $\mu(-\infty) = 0$ genügenden Funktion von beschränkter Schwankung $\mu(\lambda) = \mu(h, h'; \lambda)$ (ähnlicher Schluss wie im Beweis vom Satz A*).

Unter den angeführten Normierungsbedingungen ist die Funktion $\mu(\lambda)$ durch die Gleichungen (40) eindeutig bestimmt. Dazu bemerke man zunächst, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-\lambda} d\mu(\lambda)$$

in der oberen und in der unteren Halbebene je eine holomorphe Funktion $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ darstellt und dass wegen (40) die Gleichungen

$$\Phi^+(z) = \left(h, F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) h'\right) \quad \left(\text{für } \frac{1}{\bar{z}} \in S\right),$$

$$\Phi^-(z) = \left(F\left(\frac{1}{z}\right) h, h'\right) \quad \left(\text{für } \frac{1}{z} \in S\right)$$

gelten. Also sind die Werte dieser Funktionen in je einer, im Inneren des Holomorphiebereiches einen Häufungspunkt besitzenden Punktmenge bestimmt, woraus folgt, dass diese Funktionen selbst eindeutig bestimmt sind. Infolge der von STIELTJES stammenden bekannten Inversionsformeln

$$\frac{\mu(b)+\mu(b-0)}{2} - \frac{\mu(a)+\mu(a-0)}{2} = -\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b [\Phi^+(x+i\varepsilon) - \Phi^-(x-i\varepsilon)]\, dx$$

ist dann auch die Funktion $\mu(\lambda)$ eindeutig bestimmt.

Aus der eindeutigen Bestimmtheit der Funktion $\mu(\lambda) = \mu(h, h'; \lambda)$ durch die Gleichungen (40) und aus der Ungleichung

$$\mu(h, h; \lambda) = m(h; \lambda) \leqq m(h; \infty) = (h, h)$$

folgt, ebenso wie im Beweise von Satz A*, dass diese Funktion in der Form

$$\mu(h, h'; \lambda) = (E(\lambda)h, h') \qquad (-\infty < \lambda < \infty)$$

dargestellt werden kann, wobei $\{E(\lambda)\}$ eine Spektralschar in einem geeigneten Hilbertschen Erweiterungsraum $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ ist. Wegen (40) gilt also die gewünschte Darstellung

$$F(s) = \text{pr } s(I - sA)^{-1}$$

mit dem selbstadjungierten Operator

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d E(\lambda).$$

Wenn die erste oder die zweite der Funktionen $M \cdot K(s,t) - K'(s,t)$, $K'(s,t) - - m \cdot K(s,t)$, bzw. beide (schwach) positiv definit sind, so folgt aus der Bemerkung zu Satz B, Ende §5, dass die Funktionen $m(h;\lambda)$ im Intervall (M, ∞), bzw. im Intervall $(-\infty, m)$, bzw. in beiden Intervallen konstant sind. Aus der obigen Konstruktion des selbstadjungierten Operators A folgt dann, dass A die entsprechenden Schranken besitzt.

Damit haben wir den Satz B* bewiesen.

12. Beweis von Satz B**

Wir sollen nur noch das Hinreichen der Bedingungen beweisen. Mit dem im Beweis von Satz A** angewendeten Verfahren gewinnen wir zuerst für die stark positiv definite Funktion (26) die Darstellung

$$(K(s,t)h, h) = \langle h\varepsilon_s, h\varepsilon_t \rangle \qquad (s, t \in S).$$

Ist $\{\sigma_n\}$ die im Satz genannte Punktfolge aus dem Winkelraum $C(\varphi)$, so folgt aus der schwachen Konvergenz der Operatoren $\sigma_n^{-1} F(\sigma_n)$, dass sie gleichmässig beschränkt sind:

$$\| \sigma_n^{-1} F(\sigma_n) \| \leqslant M.$$

Hieraus folgt einerseits $\| F(\sigma_n) \| \to 0$, also

$$\langle h\varepsilon_s, h'\varepsilon_{\sigma_n} \rangle = (K(s, \sigma_n)h, h') = \left(\frac{F(s) - F^*(\sigma_n)}{s - \bar{\sigma}_n} h, h' \right) \to \left(\frac{F(s)}{s} h, h' \right), \tag{41}$$

andererseits

$$\langle h'\varepsilon_{\sigma_n}, h'\varepsilon_{\sigma_n} \rangle = (K(\sigma_n, \sigma_n)h', h') = \frac{\operatorname{Im}\,(F(\sigma_n)h', h')}{\operatorname{Im}\,\sigma_n} \leqslant \frac{M}{\sin\varphi} (h', h'). \tag{42}$$

Da die Elemente $h\varepsilon_s$ $(s \in S, h \in \mathfrak{H})$ den ganzen Raum $\mathfrak{K}$ aufspannen, so folgt aus (41) und (42), dass die Folge $\{h'\varepsilon_{\sigma_n}\}$ für jedes feste h' schwach gegen ein Element von $\mathfrak{K}$ konvergiert, das wir mit $\varepsilon_0(h')$ bezeichnen wollen. Dieses hängt von h' offenbar linear ab, und nach (41) hat man

$$\langle h\varepsilon_s, \varepsilon_0(h') \rangle = \left(\frac{F(s)}{s} h, h' \right). \tag{43}$$

Im Hinblick auf die Bedingung (27) folgt hieraus weiter

$$\langle \varepsilon_0(h), \varepsilon_0(h') \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle h\varepsilon_{\sigma_n}, \varepsilon_0(h') \rangle = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{F(\sigma_n)}{\sigma_n} h, h' \right) = (h, h').$$

Also ist die Abbildung $$h \to \varepsilon_0(h)$$

von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{K}$ nicht nur linear, sondern auch isometrisch. Es ist also gestattet, den Vektor h von $\mathfrak{H}$ mit dem Element $\varepsilon_0(h)$ von $\mathfrak{K}$ zu identifizieren und $\mathfrak{H}$ auf diese Weise als einen Unterraum in $\mathfrak{K}$ einzubetten. Das innere Produkt in $\mathfrak{K}$ werden wir weiterhin mit dem gleichen Zeichen (,) wie in $\mathfrak{H}$ bezeichnen.

Man setze für $s \in S$

$$A_0(h\varepsilon_s) = \frac{1}{s}(h\varepsilon_s - \varepsilon_0(h)) = \frac{1}{s}(h\varepsilon_s - h); \tag{44}$$

ebenso wie im Beweise des Satzes B kann gezeigt werden, dass A_0 eine selbstadjungierte Fortsetzung A in einem geeigneten Erweiterungsraum $\tilde{\mathfrak{K}}$ besitzt. Nach (44) gilt

$$h = (I - sA)(h\varepsilon_s) \qquad (s \in S,\ h \in \mathfrak{H})$$

und so folgt aus (43) für beliebige Vektoren $h, h' \in \mathfrak{H}$:

$$\left(\frac{F(s)}{s}h, h'\right) = ((I - sA)^{-1}h, h');$$

das ist aber mit der Gleichung

$$F(s) = \mathrm{pr}\ s(I - sA)^{-1}$$

gleichwertig.

Die Behauptungen über die Schranken von A folgen, ebenso wie in Satz B, auf Grund der Identität

$$c\|\varphi\|^2 - (A_0\varphi, \varphi) = \sum_m \sum_n ([cK(s_m, s_n) - K'(s_m, s_n)]h_m, h_n)$$

mit $\varphi = \sum_m h_m \varepsilon_{s_m}$.

Damit haben wir den Satz B** bewiesen.

13. Beweis von Satz C*

Kann der Operator $F(s)$ für $s \in S = (-1, 1)$ in der Form (28) durch einen selbstadjungierten Operator A mit $\|A\| \leqslant 1$ dargestellt werden, so folgt aus der Beziehung

$$\frac{1}{s-t}[s(I - sA)^{-1} - t(I - tA)^{-1}] = (I - tA)^{-1}(I - sA)^{-1} \qquad (t \neq s)$$

sogar die starke Positivdefinitheit der durch (29) definierten Funktion $K(s, t)$; man hat nämlich

$$\sum_m \sum_n (K(s_m, s_n)h_m, h_n) = \|\sum_n (I - s_m A)^{-1}h_m\|^2 \geqslant 0.$$

Die Bedingungen a) und b) sind offenbar auch erfüllt.

Zum Beweis des Hinreichens der Bedingungen bemerke man zunächst, dass für jedes feste $h \in \mathfrak{H}$ die komplexwertige Funktion $(F(s)h, h)$ den Bedingungen des Satzes C, in ihrer in § 7 verallgemeinerten Form genügen. Infolgedessen gilt für diese Funktion die Darstellung (C′), d. h. man hat (wegen $F(0) = O$)

$$(F(s)h, h) = \int_{-1-0}^{1} \frac{s}{1 - s\lambda} \, dm(h; \lambda), \tag{45}$$

wobei $m(h; \lambda)$ eine reelle, monoton nicht-fallende, rechtsstetige Funktion ist, mit

$$m(h; -1-0) = 0, \quad m(h; 1) = (F'(0)h, h) = (h, h).$$

Aus (45) folgt weiter für zwei beliebige Vektoren h, h'

$$(F(s)h, h') = \int_{-1-0}^{1} \frac{s}{1 - s\lambda} \, d\mu(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1} \int_{-1-0}^{1} \lambda^n \, d\mu(\lambda) \quad (s \in S) \tag{46}$$

mit einer komplexwertigen, rechtsstetigen und der Bedingung $\mu(-1-0) = 0$ genügenden Funktion von beschränkter Schwankung $\mu(\lambda) = \mu(h, h'; \lambda)$. Unter diesen Normierungsbedingungen ist diese Funktion durch die Gleichung (46) eindeutig bestimmt. Denn die Funktion $(F(s)h, h')$ bestimmt ja die Koeffizienten ihrer Potenzreihenentwicklung eindeutig, und da diese gleich den Momenten der Funktion $\mu(\lambda)$ sind, bestimmen sie die Funktion $\mu(\lambda)$ eindeutig.

Aus der eindeutigen Bestimmtheit der Funktion $\mu(h, h'; \lambda)$ durch die Gleichung (46) und aus $\mu(h, h; \lambda) = m(h; \lambda) \leq m(h; 1) = (h, h)$ folgt, ebenso wie im Beweis des Satzes A*, dass sie in der Form

$$\mu(h, h'; \lambda) = (E(\lambda)h, h')$$

durch eine Spektralschar $\{E(\lambda)\}$ eines geeigneten Erweiterungsraums $\mathfrak{K}$ $(\supseteq \mathfrak{H})$ darstellbar ist, für die $E(-1-0) = O$, $E(1) = I$ gilt.

Der selbstadjungierte Operator

$$A = \int_{-1-0}^{1} \lambda \, dE(\lambda)$$

liefert aber dann wegen (46) die gewünschte Darstellung

$$F(s) = \mathrm{pr}\; s(I - sA)^{-1} \qquad (s \in S = (-1, 1)),$$

womit auch der Beweis des Satzes C* beendet wurde.

Literatur

[1]. J. BENDAT & S. SHERMAN, Monotone and convex operator functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 79 (1955), 58–71.

[2]. A. KORÁNYI, On a theorem of Löwner and its connections with resolvents of selfadjoint transformations, *Acta Sci. Math. Szeged*, 17 (1956), 63–70.

[3]. ——, Note on the theory of monotone operator functions, *Acta Sci. Math. Szeged*, 16 (1955), 241–245.

[4]. M. KREIN & P. RECHTMAN, Sur une question de Nevanlinna–Pick, *Travaux de l'Univ. d'Odessa*, 2 (1938), 63–68.

[5]. М. Г. КРЕЙН (M. G. KREĬN), Эрмитово- — положительные ядра в однородных пространствах (I часть), *Украинский Матем. Журнал*, 1 (1949), 64–98.

[6]. K. LÖWNER, Über monotone Matrixfunktionen, *Math. Z.*, 38 (1934), 177–216.

[7]. B. SZ.-NAGY, Remarks to the preceding paper of A. Korányi, *Acta Sci. Math. Szeged*, 17 (1956), 71–75.

[8]. B. SZ.-NAGY & A. KORÁNYI, Relations d'un problème de Nevanlinna et Pick avec la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 7 (1957), 295–302.

[9]. B. SZ.-NAGY, *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert, qui sortent de cet espace.* Appendice au livre «Leçons d'analyse fonctionnelle» par F. Riesz et B. Sz.-Nagy (Budapest, 1955).

[10]. ——, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* (Berlin, 1942).

[11]. M. NEUMARK, Positive definite operator functions on a commutative group, *Известия Акад. Наук СССР*, серия матем., 7 (1943), 237–244.

[12]. R. NEVANLINNA, Über beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen, *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, B 13 (1919).

[13]. ——, Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem, *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, A 18 (5) (1922).

[14]. G. PICK, Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt sind, *Math. Ann.*, 77 (1916), 7–23; Über beschränkte Funktionen mit vorgegebenen Wertzuordnungen, *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, B 15 (1920).

[15]. F. RIESZ, Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales, *Ann. de l'École Normale Sup.* (3), 28 (1911), 33–62.

[16]. A. B. ШТРАУС (A. V. ŠTRAUS), О характеристических свойствах обобщенных резольвент, *Доклады Акад. Наук СССР*, 82 (1952), 209–212.

[17]. E. P. WIGNER & J. VON NEUMANN, Significance of Löwner's theorem in the quantum theory of collisions, *Ann. of Math.*, 59 (1954), 418–433.