Ark. Mat., **34** (1996), 159–177

Distances sous-elliptiques et puissances d'opérateurs différentiels

Sami Mustapha

1. Distances sous-elliptiques

Soit Ω un voisinage relativement compact de $0\in\mathbf{R}^n$ et L un opérateur différentiel du second ordre,

$$L=-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\dots, \tag{1.1}$$

auto-adjoint, à caractéristique positive et à coefficients C^∞ sur Ω (cf. [OR]). A un tel opérateur on associe naturellement une distance canonique ([FP], [FS], [JS]). Pour $x\in\Omega$ et $r>0$ on dit que $y\in B(x,r)$ s'il existe un chemin absolument continu $l(t)$, $(0\le t\le r)$, vérifiant $l(0)=x$, $l(r)=y$ et qui soit sous-unitaire pour L. Ceci signifie que le vecteur tangent

$$dl\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\sum_j \lambda_j\frac{\partial}{\partial x_j},$$

est sous-unitaire pour L en $l(t)$ pour presque tout $t\in[0,r]$,

$$\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\xi_i\xi_j\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(l(t))\xi_i\xi_j,\quad \forall\xi_i\in\mathbf{R}.$$

On pose

$$d(x,y)=\inf\{r>0:y\in B(x,r)\}\le+\infty.$$

On dit que l'opérateur L est sous-elliptique, d'indice de sous-ellipticité ε, s'il existe $0<\varepsilon\le 2$ et $C>0$ telle que

$$\|f\|_{(\varepsilon)}\le C(\|Lf\|+\|f\|),\quad f\in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.2}$$

où $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$ désigne la norme de Sobolev usuelle et $\|\cdot\|$ la norme dans $L^2(\mathbf{R}^n)$.

La distance $d(\cdot\,,\cdot)$ est alors hölderienne d'ordre $\frac{1}{2}\varepsilon$ par rapport à la distance euclidienne (voir [FP])

$$d(x,y) \le C|x-y|^{\varepsilon/2}.$$

Soient L_1 et L_2 deux opérateurs différentiels comme ci-dessus, vérifiant (1.2) pour des indices ε_1, $\varepsilon_2>0$. Soient $d_1(\cdot\,,\cdot)$, $d_2(\cdot\,,\cdot)$ les distances qui leur sont associées. Les opérateurs L_1 et L_2 étant formellement auto-adjoints dans $L^2(\Omega)$, il sont fermables et on peut définir leurs puissances complexes L_i^σ, $\sigma\in\mathbf{C}$, $i=1,2$. Soient $0<\alpha\le\beta$, considérons les trois conditions suivantes :

(i) Il existe $C>0$ telle que

$$d_2^\beta(x,y) \le C d_1^\alpha(x,y), \quad x,y\in\Omega.$$

(ii) Il existe $C>0$ telle que

$$\|L_1^{\alpha/2} f\| \le C(\|L_2^{\beta/2} f\| + \|f\|), \quad f\in C_0^\infty(\Omega).$$

(iii) $\forall 1<p<\infty$, $\exists C>0$ telle que

$$\|L_1^{\alpha/2} f\|_{L^p} \le C(\|L_2^{\beta/2} f\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}), \quad f\in C_0^\infty(\Omega).$$

Une conjecture naturelle, déja considérée par plusieurs spécialistes, est que les conditions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes. Notamment, on a les résultats partiels suivants :

1. Le fait que (i) $\Rightarrow$ (ii) a été d'abord prouvé par Hörmander (avec une perte $\varepsilon>0$), pour $L_1=\Delta$ (le Laplacien usuel) et $L_2=\sum X_j^* X_j$ un opérateur somme de carrés de champs C^∞ telle que les champs X_j et leurs crochets successifs jusqu'à l'ordre k engendrent le plan tangent $T_x(\Omega)$, $\forall x\in\Omega$ (cf. [H1]).

2. Rothschild et Stein ont établi le résultat ci-dessus sans perte et montré que le meilleur ε telle que (1.2) soit vérifiée est, dans ce cas, donné par $\varepsilon=2/(k+1)$ (cf. [RS]).

3. L'équivalence des conditions (i) et (ii) a été prouvée par Fefferman et Phong sous les hypothèses $0<\alpha\le\beta\le1$ et $L_1=\Delta$ (cf. [FP]).

4. L'équivalence des conditions (i), (ii) et (iii) a été démontrée par Sanchez-Calle dans [S] sous la condition $\alpha=\beta$.

5. Varopoulos a établi l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) pour deux opérateurs différentiels sous-elliptiques arbitraires sous l'hypothèse $0<\alpha,\beta<\frac{1}{2}$ (cf. [V1]).

6. Le fait que (i) $\Rightarrow$ (ii) ainsi que l'équivalence des conditions (ii) et (iii) sont prouvés dans [V2] dans le cas où $L_1=\Delta$ et pour $0<\alpha\le\beta$ arbitraires.

7. Dans [V3], Varopoulos prouve, pour L_1 et L_2 deux opérateurs sommes de carrés de Hörmander et sous l'hypothèse $\varepsilon_2 \geq 1$, que (i) $\Rightarrow$ (ii) et (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) pour tout $0<\alpha\leq\beta$ et que (iii) pour $\alpha=\alpha_0$ et $\beta=\beta_0$ entraîne (i) pour $\alpha=\alpha_0-\varepsilon$ et $\beta=\beta_0$.

8. Varopoulos a montré dans [V4] qu'il était possible d'éliminer l'hypothèse "somme de carrés" sur l'opérateur L_2 et d'étendre les conclusions ci-dessus au cas où L_2 est un opérateur différentiel auto-adjoint arbitraire et L_1 un opérateur somme de carrés de champs.

9. Dans [M] nous avons établi ces résultats pour L_1 et L_2 deux opérateurs différentiels comme dans (1.1) (qui ne sont pas sommes de carrés), sous l'hypothèse ε_1 et $\varepsilon_2 \geq 1$. Nous avons aussi montré que la condition (ii) était équivalente au fait que $(a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_1})^\alpha \leq (a_2(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2})^\beta$, où $a_1(x,\xi)$ et $a_2(x,\xi)$ désignent les symboles principaux des opérateurs L_1 et L_2.

Un des buts de cet article est de montrer qu'il est possible aussi d'éliminer l'hypothèse $\varepsilon_1 \geq 1$ sur l'opérateur L_1 et d'obtenir les résultats ci-dessus sous la seule hypothèse $\varepsilon_2 \geq 1$. D'une manière plus précise on montre le théorème suivant :

Théorème 1. *Soient L_1 et L_2 deux opérateurs différentiels sous-elliptiques comme dans* (1.1) *telle que l'indice de sous-ellipticité de L_2 vérifie $\varepsilon_2 \geq 1$. Considérons les cinq conditions suivantes :*

(i) *Il existe $C>0$ telle que*

$$d_2^\beta(x,y) \leq C d_1^\alpha(x,y), \quad \forall x,y \in \Omega.$$

(ii) *Il existe $C>0$ telle que*

$$\|L_1^{\alpha/2} f\| \leq C(\|L_2^{\beta/2} f\| + \|f\|), \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

(iii) *Il existe $C>0$ telle que*

$$a_1(x,\xi)^{\alpha/2} \leq C(a_2(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2})^{\beta/2}, \quad (x,\xi) \in \Omega \times \mathbf{R}^n.$$

(iv) *Pour tout $1<p<\infty$ il existe $C>0$ telle que*

$$\|L_1^{\alpha/2} f\|_{L^p} \leq C(\|L_2^{\beta/2} f\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}), \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

(v) *Pour tout $s\in\mathbf{R}$ il existe $C>0$ telle que*

$$\|L_1^{\alpha/2} f\|_{(s)} \leq C(\|L_2^{\beta/2} f\|_{(s)} + \|f\|_{(s)}), \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Alors : (1) (i) $\Rightarrow$ (ii) *pour tout* $\alpha, \beta>0$, (2) *les conditions* (ii), (iii), (iv) *et* (v) *sont équivalentes pour tout* $\alpha, \beta>0$ *et* (3) (ii) *pour* $\alpha=\alpha_0$ *et* $\beta=\beta_0$ *entraîne* (i) *pour* $\beta=\beta_0$ *et* $\alpha=\alpha_0-\varepsilon$, *avec* ε *arbitrairement petit.*

Observons que l'analyse des opérateurs du second ordre de la forme (1.1) diffère, aussi bien sur le plan conceptuel que technique, de l'analyse des opérateurs "sommes de carrés". L'existence d'opérateurs du type (1.1) qui ne soient pas des sommes de carrés de champs (à coefficients C^∞) est liée, dans une certaine mesure, au 17^{eme} problème de Hilbert (cf. [OR, p. 8]). L'étape qui consiste à passer du cas "sommes de carrés" au cas des opérateurs (1.1) est souvent difficile. Cette étape a été réalisée pour l'opérateur L_2 dans [V4], comme nous l'avons signalé plus haut. Cependant, la preuve donnée dans [V4] utilise d'une manière cruciale la structure somme de carrés de l'opérateur L_1 ; en particulier l'existence d'une paramétrixe pour cet opérateur. L'existence d'une telle paramétrixe est basée sur des constructions liées à la procédure de Lifting de Rotschild–Stein développée dans [RS]. L'approche que nous proposons ici montre qu'il est possible d'éviter ces constructions et de relaxer l'hypothèse "somme de carrés" sur l'opérateur L_1 ; ceci en dégageant une traduction en termes de symboles de l'inégalité (ii), i.e. le critère (iii). Cette approche qui est basée sur une utilisation systématique du calcul pseudo-différentiel dans le cadre des classes $S(m,g)$ et des espaces fonctionnels qui lui sont naturellement associés permet en outre d'obtenir le raffinement (v) que ne donnent pas les méthodes précédentes. Notons enfin que le critère (iii) permet de mettre en évidence une notion d'exposants de Lojasiewicz associés aux opérateurs différentiels que nous explorons dans la dernière section de cet article.

2. Puissances des opérateurs différentiels

Une étape essentielle dans la preuve du Théorème 1 est un résultat concernant les puissances des opérateurs différentiels. Soient L_1 et L_2 deux opérateurs différentiels comme dans (1.1) et soient L_i^α, $\alpha>0$, $i=1,2$, les puissances fractionnaires qui leurs correspondent. Pour $\alpha>0$ et $1<p<\infty$ on définit les normes de Sobolev associées à l'opérateur L_i, $i=1,2$, par

$$\|L_i^\alpha f\|_{L^p}+\|f\|_{L^p}\sim\|(I+L_i)^\alpha f\|_{L^p}. \tag{2.1}$$

Pour $p=2$ l'équivalence précédente résulte du théorème spectral et pour $1<p<\infty$ elle résulte de la théorie de Paley–Littlewood abstraite (cf. [V1]). Précisons que $f(w)\sim g(w)$ signifie qu'il existe une constante $C>0$ telle que $C^{-1}f(w)\le g(w)\le Cf(w)$ et que nous employons le symbole $C>0$ pour désigner des constantes qui ne sont en général pas identiques. Afin d'alléger les notations on conviendra de désigner dans la suite par L aussi bien l'opérateur L que l'opérateur $C(L+\lambda I)$ où C et λ sont des constantes convenables. Avec cette convention de notation et compte tenu de l'équivalence (2.1), l'hypothèse (ii) du Théorème 1 s'écrit

$$L_1^{\alpha} \leq L_2^{\beta}, \tag{2.2}$$

au sens de l'ordre sur les opérateurs (cf. [D]). Une étape essentielle dans la preuve du Théorème 1 consiste à montrer que (2.2) entraîne que

$$L_1^{\nu\alpha} \leq L_2^{\nu\beta}, \quad \forall \nu > 0, \tag{2.3}$$

L'implication $L_1^{\alpha} \leq L_2^{\beta} \Rightarrow L_1^{\nu\alpha} \leq L_2^{\nu\beta}$, découle de la théorie générale des opérateurs dans le cas où $0<\nu<1$ (cf. [D]). Elle est nécessaire pour l'équivalence des conditions (i) et (ii). Il a été montré dans [V3] qu'elle est presque suffisante. En effet si (2.3) est prouvée il suffit de baisser les puissances dans (i) et d'utiliser le théorème principal de [V1] pour déduire l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). D'autre part (2.3) permet d'établir l'équivalence des conditions (ii) et (iv) en passant par l'interpolation complexe. La famille analytique d'opérateurs $T_z = L_1^{z\alpha/2}(I+L_2)^{-z\beta/2}$, $z \in \mathbf{C}$, agit sur L^p, $1<p<\infty$, par la théorie générale, pour $\mathrm{Re}(z)=0$, et agit sur L^2 pour $\mathrm{Re}(z)=\nu>0$ par (2.3) ; il suffit ensuite d'utiliser l'interpolation complexe pour déduire (iv). Pour voir maintenant comment l'inégalité entre les puissances des opérateurs L_1 et L_2 entraîne-t-elle celle entre les puissances des distances qui leurs correspondent, il est nécessaire d'introduire les espaces fonctionnels associés aux opérateurs L de la forme (1.1). Pour $\alpha>0$ et $1<p<\infty$ on pose

$$H_p^{\alpha}(L) = \{f \in L^p : (I+L)^{\alpha/2} f \in L^p\}. \tag{2.4}$$

Il s'agit de l'échelle des Sobolev associés aux normes (2.1). Soit $T_t = \exp(-tL)$, $t>0$, le semi-groupe engendré par L (cf. [D]). Considérons, pour $\alpha \geq 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$, l'échelle d'espaces de Besov attachée à l'opérateur L (cf. [BB]),

$$\Lambda_{p,q}^{\alpha}(L) = \left\{ f \in L^p : \left(\int_0^{\infty} (t^{\gamma-\alpha/2} \|L^{\gamma} T_t f\|_{L^p})^q \, \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\}, \tag{2.5}$$

où tous les choix de $\gamma > \frac{1}{2}\alpha$ donnent des normes équivalentes sur $\Lambda_{p,q}^{\alpha}$. Si $p=q=2$ on a, par le théorème spectral, $\Lambda_{2,2}^{\alpha}(L) = H_2^{\alpha}(L)$. Si $p=q=\infty$ et $0<\alpha\leq 1$, on voit facilement en utilisant la sous-ellipticité de l'opérateur L que

$$\Lambda_{\infty,\infty}^{\alpha}(L) = \Lambda_L^{\alpha}, \tag{2.6}$$

où Λ_L^α désigne l'espace de Lipschitz associé à l'opérateur L

$$\Lambda_L^\alpha = \{f \in L^\infty : |f(x)-f(y)| \le Cd(x,y)^\alpha\}. \tag{2.7}$$

D'autre part les espaces $\Lambda_{p,q}^\alpha$ sont les interpolés par la méthode réelle $[\cdot,\cdot]_{\theta,q}$ (cf. [BL]) des H_p^α. Si $L=\Delta$ (le Laplacien usuel) les espaces définis par (2.4), (2.5) et (2.7) coincident respectivement avec les espaces de Sobolev, de Besov et de Lipschitz usuels (cf. [T]).

Soient L_1, L_2 vérifiant $L_1^\alpha \le L_2^\beta$. En termes d'espaces de Sobolev une telle inégalité se traduit par l'injection suivante : $H_2^{\beta/2}(L_2) \subset H_2^{\alpha/2}(L_1)$. Par (2.3) et l'interpolation complexe, il vient que $H_p^{\nu\beta/2}(L_2) \subset H_p^{\nu\alpha/2}(L_1)$, $1<p<\infty$, $\nu>0$. L'interpolation réelle $[\cdot,\cdot]_{\theta,q}$ permet alors de déduire $\Lambda_{p,q}^{\nu\beta/2}(L_2) \subset \Lambda_{p,q}^{\nu\alpha/2}(L_1)$. Il suffit ensuite de choisir $q=\infty$ et d'utiliser l'injection $\Lambda_{\infty,\infty}^\alpha(L_2) \subset \Lambda_{p,\infty}^\alpha(L_2)$ (qui est triviale) d'une part, et l'injection $\Lambda_{p,\infty}^\alpha(L_1) \subset \Lambda_{\infty,\infty}^{\alpha-\varepsilon}(L_1)$ (qui repose sur la sous-ellipticité de L_1) d'autre part, pour déduire (par (2.6)) l'inégalité sur les puissances des distances avec une perte ε arbitrairement petite.

Dans la suite nous allons prouver le théorème suivant

Théorème 2. *Soient L_1 et L_2 comme ci-dessus et telle que L_2 vérifie* (1.2) *pour un indice de sous-ellipticité $\varepsilon_2 \ge 1$. Supposons que pour $0<\alpha\le\beta$ fixés, il existe $C>0$ telle que*

$$\|L_1^\alpha f\| \le C(\|L_2^\beta f\| + \|f\|), \tag{2.8}$$

alors pour tout $\nu>0$, il existe $C>0$ telle que

$$\|L_1^{\nu\alpha} f\| \le C(\|L_2^{\nu\beta} f\| + \|f\|). \tag{2.9}$$

Le Théorème 2 est prouvé pour $L_1=\Delta$ et L_2 un opérateur du second ordre dans [V2]. Il est aussi prouvé pour $L_1=\sum_j X_j^* X_j + (I+\Delta)^\gamma$, $0\le\gamma\le 1$ et L_2 un opérateur somme de carrés de champs dans [V3] et étendu au cas où L_2 est un opérateur pseudo-différentiel à symbole polyhomogène dans [V4]. L'approche adoptée dans [V2], [V3] et [V4] consiste à ramener la preuve de (2.9) au fait que le semi-groupe engendré par l'opérateur L_2, $\exp(-tL_2)$, opère sur les espaces de Sobolev engendrés par L_1 :

$$e^{-tL_2}: H^\alpha(L_1) \longrightarrow H^\alpha(L_1), \quad \forall \alpha \ge 0. \tag{2.10}$$

La propriété (2.10) est vraie dès que L_1 et L_2 commutent. En conjugant le semi-groupe e^{-tL_2} par $(I+L_1)^{\alpha/2}$ (2.10) s'écrit

$$(I+L_1)^{\alpha/2} e^{-tL_2} (I+L_1)^{-\alpha/2}: L^2 \longrightarrow L^2, \quad \forall \alpha \ge 0. \tag{2.11}$$

L'écriture (2.11) montre que la propriété (2.10) correspond à une forme de commutation "faible" des opérateurs L_1 et L_2. La propriété (2.10) est prouvée dans [V3] pour L_1 et L_2 deux opérateurs "sommes de carré", en supposant l'indice de sous-ellipticité de L_2 plus grand que 1. L'hypothèse L_2 "somme de carrés" est relaxée dans [V4].

Une approche alternative pour prouver (2.3) est développée dans [M]. Cette approche est basée sur une étude de la nature des puissances associées à un opérateur différentiel du second ordre. Si L est elliptique, on sait que ces opérateurs sont des opérateurs pseudo-différentiels classiques : $(I+L)^{\alpha/2}\in\mathrm{OPS}^{\alpha}_{1,0}$ où $\mathrm{OPS}^{\alpha}_{1,0}$ désigne la classe des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre α (cf. [H2]). Pour un opérateur L comme dans (1.1), qui n'est pas elliptique, les puissances L^α ne sont, en général pas, des opérateurs appartenant aux classes du calcul pseudo-différentiel standard. L'impossibilité de prendre les puissances fractionnaires (e.g. les racines carrées) de tels opérateurs a conduit à l'introduction des classes de calcul pseudo-différentiel plus générales : les classes $\varphi-\Phi$ de Beals (cf. [B1]) et les classes $S(m,g)$ de Hörmander (cf. [H2]). L'utilisation du calcul $S(m,g)$ sera un ingrédient essentiel de la preuve du Théorème 2.

Nous allons prouver ce théorème en nous ramenant au cas particulier où $\varepsilon_1\geq 1$ et $\varepsilon_2\geq 1$. La preuve de ce cas particulier se trouve déja dans [M].

Les assertions (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) et le fait que (iv) pour $\alpha=\alpha_0$ et $\beta=\beta_0$ entraîne (i) pour $\beta=\beta_0$ et $\alpha=\alpha_0-\varepsilon$ résulteront du Théorème 2 comme il est indiqué au début de cette section. On établira, en cours de preuve du Théorème 2, l'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (v) et on achevera ainsi la preuve du Théorème 1.

3. Réduction au cas où $\varepsilon_1\geq 1$ et $\varepsilon_2\geq 1$

Observons que si $\alpha\leq\frac{1}{2}\varepsilon_2\beta$, (2.9) est toujours vérifiée, d'après [V2]. En effet, si

$$\Lambda=\Big(I-\sum_j\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Big)^{1/2},$$

on a

$$\|L_1^{\nu\alpha}f\|\leq C\|\Lambda^{2\nu\alpha}f\|\leq C\|\Lambda^{\nu\varepsilon_2\beta}f\|\leq C(\|L_2^{\nu\beta}f\|+\|f\|). \tag{3.1}$$

Pour prouver la première inégalité de (3.1) on remarque que $L_1^k\in\mathrm{OPS}^{2k}_{1,0}$, ce qui entraîne, d'après les propriétés élémentaires des opérateurs pseudo-différentiels, que $L_1^k\leq\Lambda^{2k}$. D'où

$$L_1^{\nu k}\leq\Lambda^{2\nu k},\quad \text{pour tout } 0<\nu\leq 1,\ k=1,2,\dots . \tag{3.2}$$

La première inégalité dans (3.1) découle de (3.2). La dernière résulte de la sous-ellipticité de L_2 d'une part et du résultat principal de [V2] d'autre part. On peut donc supposer

$$\frac{\varepsilon_2\beta}{\alpha}\le 2. \tag{3.3}$$

Les deux lemmes suivants permettent de ramener la preuve du Théorème 2 au cas particulier où $\varepsilon_1\ge 1$ et $\varepsilon_2\ge 1$.

Lemme 1. *Soient L_1 et L_2 comme dans* (1.1) *et telle que L_2 vérifie* (1.2) *avec $\varepsilon_2>0$. Supposons, pour $0<\alpha\le\beta\le 1$ vérifiant* (3.3),

$$\|L_1^\alpha f\|\le C\|(I+L_2)^\beta f\| \tag{3.4}$$

alors

$$\|(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^\alpha f\|\le C\|(I+L_2)^\beta f\|. \tag{3.5}$$

Lemme 2. *Soient L_1 un opérateur différentiel comme dans* (1.1) *et soient $\varepsilon_2>0$ et $0<\alpha\le\beta$ tels que $1\le\varepsilon_2\beta/\alpha\le 2$. On a alors pour tout $\nu>0$*

$$\|L_1^\nu f\|\le C\|(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^\nu f\|. \tag{3.6}$$

En effet il suffira alors de montrer que (3.5) entraîne

$$\|(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^{\nu\alpha} f\|\le C\|(I+L_2)^{\nu\beta} f\|,\quad \text{pour tout } \nu>0,$$

pour obtenir le Théorème 2 . Or si $\varepsilon_2\ge 1$, l'opérateur $L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha}$ vérifie (1.2) avec un indice de sous-ellipticité plus grand que 1. Remarquons par ailleurs qu'on peut toujours supposer, dans le Théorème 2, que $\beta\le 1$ car, comme il a été déja signalé, (2.8) implique (2.9) pour tout $0<\nu<1$.

Pour la preuve du Lemme 1 nous utiliserons les techniques de semi-groupes et d'interpolation réelle. La preuve du Lemme 2 utilise le calcul pseudo-différentiel dans les classes de Hörmander $S(m,g)$ (cf. [H2]).

3.1. *Preuve du Lemme* 1. On peut supposer $\alpha<1$ car si $\alpha=\beta=1$ (3.4) entraîne facilement (3.5). En effet, en notant $(\cdot\,,\cdot)$ le produit scalaire dans $L^2(\mathbf{R}^n)$, on a

$$\|(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2})f\|^2=\|L_1 f\|^2+\|\Lambda^{\varepsilon_2} f\|^2+2\,\mathrm{Re}(L_1 f,\Lambda^{\varepsilon_2} f)\le C(\|L_2 f\|^2+\|f\|^2),$$

en utilisant (3.4), la sous-ellipticité de L_2 et l'inégalité de Schwarz. Pour prouver (3.5) il suffit de montrer

$$\|(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^\alpha(I+L_2)^{-\beta}\|_{L^2\to L^2}\leq C.$$

L'hypothèse (3.4) s'écrit

$$\|L_1^\alpha(I+L_2)^{-\beta}\|_{L^2\to L^2}\leq C.$$

Il suffit donc d'estimer la norme $L^2\to L^2$ de la différence :

$$I_\alpha=(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^\alpha(I+L_2)^{-\beta}-L_1^\alpha(I+L_2)^{-\beta}.$$

Comme $0<\alpha<1$, on peut utiliser la formule (cf. [D])

$$A^\alpha=c_\alpha\int_0^\infty t^{-\alpha-1}(e^{-tA}-I)\,dt$$

et exprimer la différence I_α comme une intégrale

$$I_\alpha=c_\alpha\int_0^\infty t^{-\alpha-1}(e^{-t(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})}-e^{-tL_1})(I+L_2)^{-\beta}\,dt.$$

D'où en utilisant la formule de Duhamel pour la différence de semi-groupes qui apparait :

$$I_\alpha=c_\alpha\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\int_0^t e^{-(t-s)(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})}\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha}e^{-sL_1}(I+L_2)^{-\beta}\,ds\,dt.$$

Ecrivons

$$I_\alpha=c_\alpha\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\Phi(t)\,dt, \tag{3.7}$$

avec

$$\Phi(t)=\int_0^t e^{-(t-s)(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})}\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha}e^{-sL_1}(I+L_2)^{-\beta}\,ds.$$

Soit H^m l'échelle usuelle des espaces de Sobolev. Pour $-\varepsilon\leq m\leq m'\leq\varepsilon$, où ε est suffisamment petit, estimons la norme $H^m\to H^{m'}$ de $\Phi(t)$. Pour cela écrivons

$$\Phi(t)=\int_0^t e^{-(t-s)(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})}\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha-\varepsilon_2\beta}\Lambda^{\varepsilon_2\beta}e^{-sL_1}\Lambda^{-\varepsilon_2\beta}\Lambda^{\varepsilon_2\beta}(I+L_2)^{-\beta}\,ds.$$

D'où

$$\begin{aligned}\|\Phi(t)\|_{H^m\to H^{m'}} \leq \int_0^t (&\|e^{-(t-s)(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})}\|_{H^{m-\varepsilon_2\beta/\alpha+\varepsilon_2\beta}\to H^{m'}}\\ &\times\|\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha-\varepsilon_2\beta}\|_{H^m\to H^{m-\varepsilon_2\beta/\alpha+\varepsilon_2\beta}}\\ &\times\|\Lambda^{\varepsilon_2\beta}e^{-sL_1}\Lambda^{-\varepsilon_2\beta}\|_{H^m\to H^m}\|\Lambda^{\varepsilon_2\beta}(I+L_2)^{-\beta}\|_{H^m\to H^m})\,ds.\end{aligned}$$

D'autre part, pour $A\in\mathrm{OPS}^2_{1,0}$, auto-adjoint, positif, sous-elliptique d'indice de sous-ellipticité $\varepsilon>0$, on a (cf. [V2], [V3])

$$\|e^{-tA}\|_{H^\alpha\to H^\beta}=O(t^{(\alpha-\beta)/\varepsilon}),\quad t\to 0,\ \alpha\leq\beta\in\mathbf{R}.$$

Remarquons que dans le cas particulier où $\alpha=\beta$, on a

$$\|e^{-tA}\|_{H^\alpha\to H^\alpha}=O(1),\quad t\to 0,$$

même si A n'est pas sous-elliptique ($\varepsilon=0$), cf. [V3]. On a donc

$$\|e^{-(t-s)(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})}\|_{H^{m-\varepsilon_2\beta/\alpha+\varepsilon_2\beta}\to H^{m'}}=O((t-s)^{(m-m')/(\varepsilon_2\beta/\alpha)-1+\alpha}),\quad t\to 0,$$

et

$$\|\Lambda^{\varepsilon_2\beta}e^{-sL_1}\Lambda^{-\varepsilon_2\beta}\|_{H^m\to H^m}=O(1),\quad t\to 0.$$

Par ailleurs la sous-ellipticité de L_2 entraîne (cf. [V3])

$$(I+L_2)^{-\beta}\colon H^m\longrightarrow H^{m+\varepsilon_2\beta},$$

d'où

$$\|\Lambda^{\varepsilon_2\beta}(I+L_2)^{-\beta}\|_{H^m\to H^m}=O(1).$$

De ce qui précède on déduit que

$$\|\Phi(t)\|_{H^m\to H^{m'}}\leq C\int_0^t (t-s)^{(m-m')/(\varepsilon_2\beta/\alpha)-1+\alpha}\,ds.$$

L'intégrale obtenue est convergente si $-\varepsilon<m\leq m'<\varepsilon$ et ε suffisamment petit et on a

$$\|\Phi(t)\|_{H^m\to H^{m'}}=O(t^{(\alpha/\varepsilon_2\beta)(m-m')+\alpha}),\quad t\to 0. \tag{3.8}$$

En remplaçant L_1 par $L_1+\lambda_0 I$, pour un $\lambda_0>0$ suffisamment grand, on peut supposer la contribution en $+\infty$ de l'intégrale définissant I_α de norme $L^2\to L^2$ finie. Il suffit donc d'étudier la contribution en 0 de cette intégrale. Or pour des intégrales du type (3.7), avec $\Phi(t)$ vérifiant

$$\|\Phi(t)\|_{H^m\to H^{m'}}=O(t^{A+B(m-m')}),\quad t\to 0,$$

pour $m\in[m_0-\varepsilon,m_0+\varepsilon]$ et $m'\in[m_0'-\varepsilon,m_0'+\varepsilon]$, où m_0 et m_0' sont deux réels fixés, on a (d'après la Section 1 de [V3])

$$I_{\alpha_0}\colon H^{m_0}\longrightarrow H^{m_0'}$$

pour m_0 et m_0' vérifiant

$$-\alpha_0+A+B(m_0-m_0')=0.$$

D'où l'on déduit, en utilisant (3.8), que

$$I_\alpha\colon L^2\longrightarrow H^{m'},$$

pour m' donné par $-\alpha+\alpha+(\alpha/\varepsilon_2\beta)(0-m')=0$ et donc $m'=0$. Ce qui prouve le Lemme 1.

3.2. *Preuve du Lemme* 2. Pour la preuve du Lemme 2 nous aurons besoin des notations du calcul $S(m,g)$ que nous allons rappeler brièvement. Soit g une métrique définie sur l'espace de phase W $(=\mathbf{R}^n_x\times\mathbf{R}^n_\xi)$. Pour $w\in W$ on note g_w la métrique au point w. On dit que g est une métrique de Hörmander sur W si g est à variation lente, tempérée et vérifie le principe d'incertitude :

$$\exists c,C>0 \text{ tels que } g_w(w-w')<c \implies \frac{1}{C}g_w\le g_{w'}\le Cg_w; \tag{3.9}$$

$$\exists C,N>0 \text{ tels que } (g_w/g_{w'})^{\pm1}\le C(1+g_w^\sigma(w-w'))^N; \tag{3.10}$$

$$h^2(w)=\sup\left\{\frac{g_w(t)}{g_w^\sigma(t)},\ t\in W\backslash\{0\}\right\}\le 1. \tag{3.11}$$

Ci-dessus g^σ désigne la métrique duale de g pour la dualité définie par la forme symplectique σ définie sur l'espace de phase W. Si $g=\sum_j\lambda_j dx_j^2+\mu_j d\xi_j^2$ alors la métrique g^σ est donnée par $g^\sigma=\sum_j dx_j^2/\mu_j+d\xi_j^2/\lambda_j$.

Une fonction $w\to m(w)>0$ est un poids pour la métrique g si m est lente et tempérée :

$$\exists c,C>0 \text{ tels que } g_w(w-w')<c \implies \frac{1}{C}m(w)\le m(w')\le Cm(w); \tag{3.12}$$

$$\exists C,N>0 \text{ tels que } \left(\frac{m(w)}{m(w')}\right)^{\pm1}\le C(1+g_w^\sigma(w-w'))^N. \tag{3.13}$$

La classe $S(m,g)$ est constituée par les symboles $a(w)\in C^\infty(W)$ vérifiant : pour tout $k=0,1,2,\dots$, il existe $C_k>0$ telle que

$$|a^{(k)}(w)(t_1,\dots,t_k)|\le C_k m(w) g_w(t_1)^{1/2}\dots g_w(t_k)^{1/2},\quad \forall t_1,\dots,t_k\in W. \tag{3.14}$$

Les espaces de Sobolev adaptés au calcul $S(m,g)$ ont été introduits par R. Beals. Rappelons leur définition. Si $\mathrm{OPS}(m,g)$ désigne la classe des opérateurs pseudo-différentiels à symboles dans $S(m,g)$, on pose (cf. [B2], [BC])

$$H(m,g)=\{f\in\mathcal{S}': Af\in L^2,\ \forall A\in\mathrm{OPS}(m,g)\}. \tag{3.15}$$

Observons que cette définition généralise bien la définition des espaces de Sobolev usuels qui peuvent se définir par

$$H^m=\{f\in\mathcal{S}': Af\in L^2,\ \forall A\in\mathrm{OPS}^m_{1,0}\},\quad m\in\mathbf{R}.$$

Ceci résulte des propriétés élémentaires des opérateurs pseudo-différentiels classiques. Cependant pour obtenir une bonne généralisation des propriétés des espaces de Sobolev classiques Beals impose à la métrique g de vérifier une condition de tempérance plus forte que celle donnée plus haut. D'une manière plus précise Beals introduit une métrique intermédiaire, la métrique $g^\#$ ($g^\#$ est telle que $g\le g^\#\le g^\sigma$) et remplace dans les conditions (3.10) et (3.13) la métrique g^σ par la métrique $g^\#$ (cf. [B2]). Sous ces conditions, les espaces $H(m,g)$ définis par (3.15) possèdent les bonnes propriétés vérifiées par les espaces de Sobolev classiques. En particulier pour deux poids m et m_1 associés à g et pour $A\in\mathrm{OPS}(m_1,g)$ on a

$$A\colon H(m_1m,g)\to H(m,g). \tag{3.16}$$

Rappelons aussi la propriété de dualité $[H(m,g)]^*=H(1/m,g)$. Observons enfin que pour tout poids m associé à g (cf. [B2]) :

$$H(m,g)=H(m,g^\#). \tag{3.17}$$

En effet l'inclusion $H(m,g^\#)\subseteq H(m,g)$ est immédiate. En écrivant cette inclusion avec le poids $1/m$ et en dualisant on obtient l'inclusion inverse. Observons que si la métrique g est donnée par $g=\sum_j \lambda_j dx_j^2+\mu_j d\xi_j^2$, alors $g^\#=\sum_j(\lambda_j/\mu_j)^{1/2}dx_j^2+(\lambda_j/\mu_j)^{-1/2}d\xi_j^2$, ce qui entraîne que deux métriques conformes (c'est-à-dire vérifiant $G_w=m(w)g_w$) possèdent la même métrique intermédiaire $g^\#$.

Pour la preuve du Lemme 2 observons qu'il suffit de prouver (3.6) pour $\nu=k\in\mathbf{N}$. Le cas général s'en déduit par interpolation. Soit $a_1(x,\xi)$ le symbole principal de L_1. Comme $\varepsilon_2\beta/\alpha$ est tel que $1\le\varepsilon_2\beta/\alpha\le 2$, la métrique

$$G_1=\frac{\langle\xi\rangle^2}{a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2\beta/\alpha}}\left(dx^2+\frac{d\xi^2}{\langle\xi\rangle^2}\right)$$

est une métrique de Hörmander (au sens de [B2]) et

$$m(x,\xi)=a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2\beta/\alpha}$$

est un poids pour cette métrique (cf. [M, Proposition 1]). Par ailleurs, il est facile de montrer (en utilisant les mêmes arguments que dans [M, p. 255]) que le symbole de L_1 vérifie les conditions (3.14) pour la métrique G_1 et le poids m. D'où il résulte que

$$L_1\in \mathrm{OPS}(a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2\beta/\alpha},G_1)$$

et par conséquent

$$L_1^k\in \mathrm{OPS}((a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^k,G_1),\quad k\in\mathbf{N}. \tag{3.18}$$

D'où (par (3.16))

$$\|L_1^k f\|\le C\|f\|_{H((a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^k,G_1)}.$$

Par ailleurs comme l'opérateur $L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha}$ est un opérateur sous-elliptique d'indice de sous-ellipticité plus grand que $\varepsilon_2\beta/\alpha\ge 1$, la norme

$$\|(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^k f\| \tag{3.19}$$

est une norme admissible sur l'espace $H((a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^k,G_1)$, (cf. [M p. 266]). Ceci entraîne que

$$\|L_1^k f\|\le C\|(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^k f\|,$$

ce qu'on peut reformuler, avec les notations de la Section 2, de la façon suivante

$$H^{2k}(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})\subset H^{2k}(L_1),\quad k\in\mathbf{N},$$

et l'interpolation dans chacune des échelles d'espaces de Sobolev associées aux opérateurs $L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha}$ et L_1 permet de conclure. Ce qui prouve le Lemme 2.

Par ailleurs, remarquons que (3.18) entraîne que pour tout $s\in\mathbf{R}$ et $k\in\mathbf{N}$

$$\Lambda^s L_1^k\in \mathrm{OPS}(\langle\xi\rangle^s(a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^k,G_1)$$

et, comme pour (3.19), la norme $\|\Lambda^s(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^k f\|$ est une norme admissible sur l'espace $H(\langle\xi\rangle^s(a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^k,G_1)$, d'où il résulte que

$$\|\Lambda^s L_1^k f\|\le C\|\Lambda^s(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^k f\|.$$

D'autre part les puissances imaginaires pures $L_1^{i\sigma}(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^{i\sigma}$, $\sigma\in\mathbf{R}$ agissent sur les espaces de Sobolev (cf. [V4]). L'interpolation complexe donne alors pour tout $\nu>0$

$$\|L_1^\nu f\|_{(s)}\le C\|(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^\nu f\|_{(s)}. \tag{3.20}$$

4. Preuve du Théorème 2

La preuve du Théorème 2 dans le cas où les opérateurs L_1 et L_2 vérifient (1.2) pour $\varepsilon_1 \geq 1$ et $\varepsilon_2 \geq 1$ est donnée dans [M]. Nous allons commencer par rappeler les grandes lignes de cette preuve. A l'opérateur L_i, $i=1,2$, on associe la métrique de Hörmander G_i définie par

$$G_i = \frac{\langle\xi\rangle^2}{a_i(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_i}}\left(dx^2+\frac{d\xi^2}{\langle\xi\rangle^2}\right), \quad i=1,2.$$

On montre que pour tout $\alpha\in\mathbf{R}$:

$$\|(I+L_i)^\alpha f\| \sim \|f\|_{H((a_i(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_i})^\alpha, G_i)}, \quad i=1,2.$$

On observe par ailleurs que

$$(G_1)^{\#} = (G_2)^{\#} = \langle\xi\rangle dx^2 + \frac{d\xi^2}{\langle\xi\rangle} = g_{1/2}.$$

D'où il vient par (3.17) que pour tout $\alpha\in\mathbf{R}$,

$$\|(I+L_1)^\alpha f\| \sim \|f\|_{H((a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_1})^\alpha, g_{1/2})}, \tag{4.1}$$

et

$$\|(I+L_2)^\alpha f\| \sim \|f\|_{H((a_2(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2})^\alpha, g_{1/2})}. \tag{4.2}$$

Par ce qui précède, l'inégalité $\|(I+L_1)^\alpha f\| \leq C\|(I+L_2)^\beta f\|$ pour $0<\alpha\leq\beta$, est équivalente à l'inclusion

$$H((a_2(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2})^\beta, g_{1/2}) \subset H((a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_1})^\alpha, g_{1/2}). \tag{4.3}$$

On remarque ensuite que pour deux poids m_1 et m_2, associés à une métrique g, l'inclusion $H(m_1,g)\subset H(m_2,g)$ équivaut à $m_2 \leq Cm_1$ (cf. [M, Section 8]). L'inclusion (4.3) entraîne donc que

$$(a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_1})^\alpha \leq C(a_2(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2})^\beta,$$

et donc

$$(a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_1})^{\alpha\nu} \leq C(a_2(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2})^{\beta\nu}, \quad \forall\nu>0.$$

D'où l'on déduit

$$H((a_2(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_1})^{\alpha\nu}, g) \subset H((a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2})^{\beta\nu}, g),$$

et ceci, compte tenu de (4.1) et (4.2), implique que

$$\|(I+L_1)^{\nu\alpha}f\| \le C\|(I+L_2)^{\nu\beta}f\|.$$

Prouvons maintenent l'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) du Théorème 1. Soient L_1 et L_2 comme dans le Théorème 1. Observons que la condition (iii) entraîne que

$$(a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^\alpha \le C(a_2(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2})^\beta,$$

où a_i est le symbole principal de L_i. D'où l'on déduit, par les mêmes arguments que ci-dessus,

$$\|(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^\alpha f\| \le C\|(I+L_2)^\beta f\|. \tag{4.4}$$

Par le Lemme 2, (4.4) entraîne alors que

$$\|L_1^\alpha f\| \le C\|(I+L_2)^\beta f\|.$$

Inversement (ii) entraîne, par le Lemme 1,

$$\|(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^\alpha f\| \le C\|(I+L_2)^\beta f\|,$$

et donc, compte tenu de (4.1) et (4.2),

$$(a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^\alpha \le C(a_2(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2})^\beta. \tag{4.5}$$

D'où l'on déduit la condition (iii). Pour achever la preuve du Théorème 1 il suffit de montrer que que la condition (ii) implique la condition (v). Or (ii) implique (4.5) et de (4.5) on déduit que pour tout $s\in\mathbf{R}$

$$\langle\xi\rangle^s(a_1(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^\alpha \le C\langle\xi\rangle^s(a_2(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2})^\beta.$$

D'où il résulte,

$$\|(L_1+\Lambda^{\varepsilon_2\beta/\alpha})^\alpha f\|_{(s)} \le C\|(I+L_2)^\beta f\|_{(s)}.$$

Il suffit d'utiliser (3.20) pour déduire la condition (v). Remarquons enfin que l'équivalence des normes $\|(I+L_2)^\beta f\|_{(s)} \sim \|L_2^\beta f\|_{(s)}+\|f\|_{(s)}$ résulte de l'équivalence

$$(a_2(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2})^\alpha \sim a_2^\alpha(x,\xi)+\langle\xi\rangle^{\varepsilon_2\alpha}$$

pour $1\le\varepsilon\le 2$ et $\alpha>0$.

5. Exposants de Łojasiewicz associés aux opérateurs différentiels

La condition (iii) du Théorème 1, qui ramène la comparaison des puissances de deux opérateurs à celle des puissances de leurs "symboles" permet de calculer facilement dans certains cas le meilleur exposant $0<\alpha\leq 1$ tel que

$$L_1^\alpha \leq L_2. \tag{5.1}$$

Nous appelons un tel exposant α l'exposant de Łojasiewicz associé aux opérateurs L_1 et L_2. Dans le cas où $L_1=\Delta$ et L_2 est un opérateur somme de carrés de champs vérifiant la condition de Hörmander on sait que $\alpha=1/(k+1)$. Ceci est le théorème de Rothschild et Stein rappelé plus haut. Un problème naturel est de savoir si ceci est toujours le cas. Plus précisement le meilleur α donné par (5.1) est-il toujours l'inverse d'un entier.

Considérons pour $1\leq m\in\mathbf{N}$

$$L_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x^{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+|\log(y)|^2e^{-1/y^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{5.2}$$

$$L_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+e^{-1/y^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{5.3}$$

Les opérateurs L_1 et L_2 sont deux opérateurs sommes de carrés, sous-elliptiques d'indices de sous-ellipticité valant respectivement $\varepsilon_1=2/(m+1)$ et $\varepsilon_2=1$. Ces opérateurs sont considérés dans [V3] dans le cas où $m=1$. Varopoulos montre que dans ce cas L_1 et L_2 vérifient $L_1^{1-\varepsilon}\leq L_2$ pour tout $\varepsilon>0$ mais que L_1 n'est pas dominé par L_2. La preuve de ce fait donnée dans [V3] est difficile et utilise la théorie de Hardy–Littlewood abstraite. Le critère (iii) permet d'obtenir la même conclusion par des considérations élémentaires sur les fonctions, en comparant les symboles des opérateurs (5.2) et (5.3) et permet d'étendre cette conclusion au cas où $m>1$.

D'autre part M. Christ (cf. [C]) a donné l'exemple de deux opérateurs L_1 et L_2 tels que le meilleur α dans (5.1) soit donné par

$$\alpha=\frac{p_2}{2p_2-p_1}, \tag{5.4}$$

où $0<p_1<p_2\in\mathbf{N}$. Il est clair que le rationnel donné par (5.4) n'est pas l'inverse d'un entier. Les opérateurs L_1 et L_2 sont donnés par

$$L_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x^{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+y^{2p_1}\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad m=1,2,\dots, \tag{5.5}$$

$$L_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+y^{2p_2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{5.6}$$

M. Christ montre que, dans le cas où m=1, $d_2 \le d_1^\alpha$. L'opérateur (5.6) possédant un indice de sous-ellipticité plus grand que 1, cette fois aussi, il est possible d'utiliser la caractérisation (iii) et d'obtenir, par des considérations élémentaires, l'exposant (5.4) qui est valable pour toutes les valeurs de m.

En utilisant le critère (iii) on peut donner un exemple de deux opérateurs L_1 et L_2 telle que le meilleur α vérifiant (5.1) soit irrationnel (cf. [M]). En effet pour

$$L_i = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + e^{-C_i/y^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad i = 1, 2,$$

où $0 < C_1 < C_2 \in \mathbf{R}$, l'exposant α est donné par

$$\alpha = \frac{C_2}{2C_2 - C_1}. \tag{5.7}$$

Il suffit de choisir convenablement C_1 et C_2 dans (5.7) pour que α soit irrationnel.

On peut plus généralement en utilisant la condition (iii) du Théorème 1 donner une expression de α dans le cas où l'opérateur du haut L_2 est diagonal. Soient L_1 et L_2 deux opérateurs différentiels, comme dans le Théorème 1, donnés par

$$L_1 = -\sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \ldots,$$

$$L_2 = -\sum_{1 \le i,j \le n} b_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \ldots,$$

et telle que L_2 vérifie (1.2) pour un indice de sous-ellipticité $\varepsilon_2 \ge 1$. Par le Théorème 1, (5.1) équivaut à

$$\Big(\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\Big)^\alpha \le C\Big(\sum_{i,j} b_{ij}(x)\xi_i\xi_j + \langle\xi\rangle^{\varepsilon_2}\Big), \quad \forall (x,\xi) \in \Omega \times \mathbf{R}^n. \tag{5.8}$$

Dans le cas particulier où l'opérateur L_2 est diagonal (i.e. $b_{ij}(x)=0$ si $i \ne j$), l'inégalité (5.8) a lieu si pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a

$$a_{ii}(x)^\alpha \xi_i^{2\alpha} \le C(b_{ii}(x)\xi_i^2 + \langle\xi_i\rangle^{\varepsilon_2}), \quad \forall x \in \Omega, \ \forall \xi_i \in \mathbf{R}. \tag{5.9}$$

Des calculs analogues à ceux de [M] montrent (à partir de (5.9)) que le meilleur α dans (5.1), est donné par,

$$\alpha = \min_{\varkappa_i \ge 1} \left\{ \frac{\varkappa_i \varepsilon_2}{2\varkappa_i + \varepsilon_2 - 2} \right\}, \tag{5.10}$$

où $\varkappa_i$ est l'exposant de Łojasiewicz de a_{ii} par rapport à b_{ii}

$$\varkappa_i = \inf\{\theta \in \mathbf{R}_+ : \exists C > 0 \text{ telle que } |a_{ii}(x)|^\theta \le C|b_{ii}(x)|, \ \forall x \in \Omega\}$$

et $\varkappa_i = \infty$ si l'ensemble précédent est vide. Si les coefficients $a_{ii}(x)$ et $b_{ii}(x)$ sont réels analytiques et si Ω est un voisinage de l'origine relativement compact et sous-analytique (cf. [BR]) les exposants de Łojasiewicz $\varkappa_i$ sont rationnels. Si ε_2 est rationnel la formule (5.10) imlique que α est aussi rationnel.

Bibliographie

[B1] BEALS, R., Characterization of pseudodifferential operators and applications, *Duke Math. J.* **44** (1977), 45–57.

[B2] BEALS, R., Weighted distribution spaces and pseudodifferential operators, *J. Anal. Math.* **39** (1981), 131–187.

[BL] BERGH, J. et LÖFSTRÖM, J., *Interpolation Spaces, An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976.

[BR] BOCHNAK, J. et RISLER, J. J., Sur les exposants de Łojasiewicz, *Comment. Math. Helv.* **50** (1975), 493–507.

[BC] BONY, J. M. et CHEMIN, J. Y., Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl–Hörmander, *Preprint,* École Polytechnique, 1992.

[BB] BUTZER, P. L. et BERENS, H., *Semi-groups of Operators and Approximation*, Springer-Verlag, New York, 1967.

[C] CHRIST, M., Note non publiée.

[D] DAVIES, E. B., *One-Parameter Semigroups,* Academic Press, London–New York, 1980.

[FP] FEFFERMAN, C. et PHONG, D. H., Subelliptic eigenvalue problems, in *Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund* (Calderón, A.P., Fefferman, R. and Jones, P. W., eds.), pp. 590–606, Wadsworth, Belmont, Calif., 1981.

[FS] FEFFERMAN, C. et SANCHEZ-CALLE, A., Fundamental solutions for second order subelliptic operators, *Ann. of Math.* **124** (1986), 247–272.

[H1] HÖRMANDER, L., Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.* **119** (1967), 147–171.

[H2] HÖRMANDER, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators,* Vol. III, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1985.

[JS] JERISON, D. et SANCHEZ-CALLE, A., Subelliptic second order differential operators, in *Complex Analysis* III, Lecture Notes in Math. **1277**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg.

[M] MUSTAPHA, S., Sous-ellipticité dans le cadre du calcul $S(m,g)$, *Comm. Partial Differential Equations* **19** (1994), 245–275.

[OR] OLEINIK, O. A. et RADKEVIC, E. V., *Second Order Equations with Non-negative Characteristic Form,* Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1973.

[RS] ROTHSCHILD, L. P. et STEIN, E. M., Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, *Acta Math.* **137** (1976), 247–320.

[S] SANCHEZ-CALLE, A., L^p estimates for degenerate elliptic equations, *Rev. Mat. Iberoamericana* **4** (1988), 177–185.

[T] TRIEBEL, H., *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North Holland, Amsterdam–New York, and Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

[V1] VAROPOULOS, N. TH., Distances associées aux opérateurs sous-elliptiques du second ordre, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **309** (1989), 663–667.

[V2] VAROPOULOS, N. TH., Puissances des opérateurs pseudo-différentiels, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **310** (1990), 769–774.

[V3] VAROPOULOS, N. TH., Semigroup commutators under differences, *Rev. Mat. Iberoamericana* **8** (1992), 1–43.

[V4] VAROPOULOS, N. TH., Semigroup commutators under differences (II), *Rev. Mat. Iberoamericana* **9** (1993), 1–50.

Reçu le 10 octobre 1994

Sami Mustapha
Laboratoire Analyse complexe et Géométrie
Université Pierre et Marie Curie
4, Place Jussieu
F-75252 Paris Cedex 05
France