

# ÜBER RIEMANNSCHE FLÄCHEN MIT ENDLICH VIELEN WINDUNGSPUNKTEN.

VON

ROLF NEVANLINNA

in HELSINGFORS.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung . . . . .	295
§ 1. Vorbereitende Betrachtungen und Problemstellung . . . . .	300
§ 2. Struktur der Riemannschen Fläche $F_p$ in dem Falle, wo über jedem Grundpunkt ein einziger Windungspunkt liegt . . . . .	303
§ 3. Struktur der Fläche $F_p$ im allgemeinen Fall . . . . .	316
§ 4. Uniformisierung der Riemannschen Fläche $F_p$ . . . . .	321
§ 5. Bestimmung der Untergruppen $\Sigma$ . . . . .	323
§ 6. Bestimmung der allgemeinen Lösung . . . . .	332
§ 7. Existenzbeweis . . . . .	336
§ 8. Bestimmung des Typus der Fläche $F_p$ . . . . .	340
§ 9. Über meromorphe Funktionen deren Schwarzsche Ableitung ein Poly- nom ist . . . . .	344
§ 10. Über meromorphe Funktionen mit vorgegebenen defekten Werten . . . . .	355
§ 11. Beziehungen zwischen dem Aufbau der Riemannschen Fläche $F_p$ und den Koeffizienten des Polynoms $\{w, z\}$ . . . . .	357
§ 12. Verallgemeinerungen . . . . .	372

## Einleitung.

Diejenigen Untersuchungen, welche sich mit der Werteverteilung der eindeutigen analytischen Funktionen beschäftigen, gruppieren sich um zwei Hauptprobleme.

Das eine Problem stellt sich als Aufgabe eine möglichst genaue Beschreibung der Ausnahmewerte einer innerhalb eines unendlichen oder endlichen Kreises meromorphen Funktion, wobei ein Wert als Ausnahmewert erklärt wird, wenn er, allgemein zu reden, in einer verhältnismässig geringen Anzahl von Punkten von der Funktion angenommen wird. Diese Theorien haben sich auf dem Boden des PICARDSchen Satzes und der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen entwickelt.

Das andere Hauptproblem betrifft das Verhalten der inversen Funktion; die Untersuchung gilt also hier die Struktur der Riemannschen Fläche, auf welcher diese Umkehrfunktion eindeutig ist. Die ersten systematischen Untersuchungen auf diesem Gebiete verdankt man IVERSEN und GROSS.

Nun erscheint es a priori wahrscheinlich, und hat im Laufe der Entwicklung dieser Fragen sich auch immer deutlicher gezeigt, dass die in diesen Problemkomplexen erzielten Ergebnisse in gewissem Zusammenhang miteinander stehen. Es beruht dies auf dem Umstand, dass ein Ausnahmewert einer meromorphen Funktion im allgemeinen eine kritische Stelle (ein »Windungspunkt«) der entsprechenden Riemannschen Fläche ist. Allerdings ist diese Behauptung nur für die allereinfachsten Klassen von Ausnahmewerten streng bewiesen worden. So gilt z. B., wie zuerst von IVERSEN nachgewiesen wurde, dass ein PICARDScher Ausnahmewert einer im Endlichen meromorphen Funktion stets eine transzendente Singularität der inversen Funktion darstellt. Dagegen ist es bisher noch nicht gelungen zu entscheiden, ob dieselbe Eigenschaft auch den in der neueren Theorie der meromorphen Funktionen eingeführten schwächeren Ausnahmewerten zukommt, welche positiven Defekt haben.

Wenn auch die Beziehungen zwischen den Ausnahmewerten einer eindeutigen analytischen Funktion und den kritischen Stellen der zugehörigen Riemannschen Flächen noch keineswegs endgültig klargelegt worden sind, so scheint es, wenigstens für die einfachsten Funktionsklassen, berechtigt zu sein, die Sätze über die Häufigkeit der Ausnahmewerte (welche in dem Hauptsatz gipfeln, wonach die totale algebraische Verzweigkeit vermehrt um den totalen Defekt für eine in der ganzen endlichen Ebene meromorphe Funktion höchstens gleich zwei ist) als Aussagen über den Grad der Verzweigkeit der zugehörigen Riemannschen Fläche zu deuten, wobei der Defekt eines Wertes  $w$  die Rolle einer Masszahl für die »relative Ordnung« der über dieser Stelle  $w$  belegenen transzendenten Windungspunkte spielt. Für die Richtigkeit dieser Auffassung spricht

vor allem das Verhalten der bisher bekannten Beispiele von meromorphen Funktionen mit mehreren defekten Werten. Die Anzahl solcher Beispiele ist allerdings nicht gross. Sieht man von dem einfachsten Fall ab, wo die Funktionen periodisch oder automorph, und die entsprechenden Riemannschen Flächen mithin regulär verzweigt sind, so scheint die Auffindung von speziellen Funktionen, welche geeignet wären unsere Kenntnisse über die Natur der Werteverteilung zu vertiefen, eher die Folge zufälliger Umstände als das Ergebnis einer zielbewussten Konstruktion gewesen zu sein.

Die oben berührten Umstände haben mich veranlasst die einfachsten Klassen von unendlich vielblättrigen Riemannschen Flächen einer systematischen Untersuchung zu unterziehen. Zweck der vorliegenden Abhandlung ist *sämtliche einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen mit endlich vielen Verzweigungspunkten analytisch zu bestimmen*. Weil die Verzweigungspunkte unendlicher Ordnung vom Standpunkte der Theorie der Ausnahmewerte aus von besonderer Bedeutung sind, habe ich mich hierbei auf den Fall beschränkt, wo keine algebraischen Windungspunkte vorhanden sind. Diese Beschränkung erschien auch im Interesse der Einfachheit der Darstellung wünschenswert; es er bietet jedoch keine Schwierigkeit die angewandte Methode und die erzielten Ergebnisse auf den allgemeinen Fall auszudehnen, wo die Fläche, neben gewissen Windungspunkten unendlicher Ordnung, eine endliche Anzahl von Verzweigungspunkten endlicher Ordnung aufweist.

Das Hauptresultat dieser Untersuchung lässt sich zusammenfassen wie folgt. Es existiert eine einzige einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche mit zwei bzw. drei Windungspunkten unendlich hoher Ordnung. In den höheren Fällen, wo die Anzahl  $p$  solcher Windungspunkte mindestens gleich vier ist, ist die Anzahl der Flächen stets unendlich gross; sämtliche vorkommenden Flächentypen lassen sich vollständig charakterisieren. Die Lagen der  $p$  Windungspunkte können, unter Berücksichtigung einer einfachen notwendigen Bedingung, beliebig vorgeschrieben werden.

Nach dem Hauptsatz der konformen Abbildung ist es möglich jede einfach zusammenhängende, unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche entweder auf die schlichte punktierte Ebene (parabolischer Fall) oder auf das Innere des schlichten Einheitskreises (hyperbolischer Fall) umkehrbar eindeutig und konform abzubilden. Bisher sind nur wenige Kriterien für das Eintreffen des einen oder des anderen Falles bekannt. Zu dieser wichtigen Frage liefert die vorliegende Abhandlung

einen Beitrag.<sup>1</sup> Ein näheres Studium der auf den untersuchten Riemannschen Flächen einwertigen analytischen Funktionen zeigt nämlich, dass sie diese Flächen auf die punktierte Ebene abbilden; jede Riemannsche Fläche mit endlich vielen Verzweigungspunkten gehört mithin zum parabolischen Typus.

Verlegt man den Grenzpunkt in den unendlich fernen Punkt der Ebene, so sind die Umkehrfunktionen der oben erwähnten einwertigen Funktionen meromorphe Funktionen der Ordnung  $\frac{p}{2}$ , wobei  $p$  die Anzahl der Windungspunkte unendlicher Ordnung bezeichnet. Diejenigen Punkte, auf welche sich jene Windungspunkte projizieren, stellen Ausnahmewerte dieser meromorphen Funktionen dar, und zwar entspricht jedem Windungspunkt ein Defekt vom Betrage

<sup>1</sup> Mit dieser Frage haben sich neuerdings A. SPEISER und L. AHLFORS beschäftigt (*Commentarii Math. Helvetici*, Vol. I, II, III, 1929, 1930, 1931). Die wichtigsten der heute bekannten Kriterien zur Bestimmung des Typus einer unendlich vielblättrigen Riemannschen Fläche sind folgende.

*Hinreichende Bedingungen für das Eintreffen des hyperbolischen Falles.*

1) Es gibt  $q \geq 3$  Stellen  $a_1, \dots, a_q$ , über welchen keine schlichten Blätter der Fläche liegen. Ausserdem soll jeder über  $a_\nu$  liegende Windungspunkt mindestens von der Ordnung  $m_\nu - 1$  sein mit  $\sum \frac{1}{m_\nu} < q - 2$ . (Folgerung aus dem zweiten Hauptsatz der Theorie der meromorphen Funktionen.)

Diese Bedingung umfasst zwei ältere Kriterien:

1 a) Es existieren drei Stellen, über denen weder unverzweigte Blätter noch algebraische Windungspunkte belegen sind. (Satz von PICARD.)

1 b) Es gibt drei Stellen  $a_1, a_2, a_3$ , über denen keine schlichten Blätter liegen. Ausserdem soll jeder über  $a_\nu$  befindliche Windungspunkt endlicher Ordnung eine Anzahl von Blättern im Zyklus umfassen, welche ein Multipel von  $m_\nu$  ist, wobei  $m_1, m_2, m_3$  ganze Zahlen sind mit  $\sum \frac{1}{m_\nu} < 1$ . (Satz von CARATHEODORY.)

Speziell folgt aus 1) noch das Kriterium:

1 c) Es gibt fünf Stellen, über denen keine schlichten Blätter verlaufen.

2) Es existiert eine endliche Zahl  $R$ , so dass der Radius jeder schlichten Kreisscheibe der Fläche kleiner als  $R$  ist. (Satz von BLOCH.)

*Hinreichende Bedingungen für das Eintreffen des parabolischen Falles:*

1) Die Fläche hat endlich viele Windungspunkte. (Soll in dieser Abhandlung bewiesen werden.)

2) Unter der Voraussetzung, dass die gegebene Fläche im Endlichen keine transzendenten kritischen Stellen hat, sei  $n(\rho)$  die Anzahl der algebraischen Windungspunkte, welche auf der Riemannschen Fläche erreichbar sind längs eines Weges, der von einem beliebig gewählten Anfangspunkt ausgeht, und dessen Länge den Wert  $\rho$  nicht übersteigt, wobei jeder Windungspunkt so oft mitgezählt wird wie seine Ordnung angibt. Die Bedingung besteht dann in der Divergenz des Integrals

$$\int \frac{d\rho}{\rho n(\rho)}$$

(Satz von AHLFORS, *Commentarii Math. Helv.*, Vol. III, Heft 2, S. 173—177, 1931).

$\frac{2}{p}$ , so dass also der totale Defekt den maximalen Wert *zwei* erhält. Dieses Resultat gestattet eine meromorphe Funktion zu konstruieren, welche endlich viele, willkürlich vorgeschriebene Ausnahmewerte besitzt, so dass die entsprechenden Defekte beliebig vorgeschriebene rationale Werte vom Gesamtbetrag zwei erhalten.

Über die angewandten Methoden sei folgendes vorausgeschickt. Unter der Voraussetzung dass eine Riemannsche Fläche der geforderten Art existiert, werden zunächst (§§ 1—3) gewisse notwendige Bedingungen hergeleitet. Sämtliche möglichen Flächen werden alsdann in gewisse Typen eingeteilt, deren Struktur vollständig beschrieben wird. Nachher (§§ 4—7) folgt der Nachweis, dass jedem der gefundenen Flächentypen auch eine wohlbestimmte einwertige Abbildungsfunktion entspricht. Dies geschieht so, dass die gesuchte analytische Funktion uniformisiert wird vermittels gewisser bekannter linear polymorpher Funktionen, welche früher von F. NEVANLINNA zur Herleitung der Hauptsätze der neueren Werteverteilungstheorie angewandt worden sind.<sup>1</sup> Diese für das Gelingen der vorliegenden Untersuchung fundamentale Idee, wodurch das Problem zurückgeführt wird auf die Konstruktion gewisser automorpher (fuchsoider) Funktionen, die in bezug auf gewisse Untergruppen der zu der uniformisierenden Transzendenten gehörigen fuchsschen Gruppen invariant sind, verdanke ich ebenfalls F. NEVANLINNA.

In §§ 8—11 folgt die nähere Untersuchung der gefundenen einwertigen Abbildungsfunktionen. Es stellt sich heraus, dass die Schwarzsche Ableitung der Umkehrfunktionen sich auf eine *rationale* Funktion reduziert. Unter Benutzung dieses Ergebnisses gelingt es dann leicht zu beweisen, dass die untersuchten Riemannschen Flächen sämtlich zum Grenzpunkttypus gehören. Die gewonnene Differentialgleichung bildet ferner die Grundlage für die nachfolgende Untersuchung der asymptotischen Eigenschaften der Abbildungsfunktionen; durch asymptotische Integration lassen sich insbesondere die defekten Werte sowie die Beträge der Defekte berechnen. Hierbei mache ich von einer von E. HILLE angewandten Integrationsmethode Gebrauch; überhaupt sind mir die Untersuchungen von HILLE, der als erster auf die Bedeutung der in Frage stehenden Differentialgleichung für die Theorie der asymptotischen und defekten Werte

---

<sup>1</sup> F. NEVANLINNA: *Über die Anwendung einer Klasse uniformisierender Transzendenten zur Untersuchung der Wertverteilung analytischer Funktionen* (Acta mathematica, B. 50, 1927, S. 159—188).

aufmerksam gemacht hat, bei der Ausarbeitung vorliegender Abhandlung sehr wertvoll gewesen.

Es ist L. AHLFORS gelungen, den Typus der hier betrachteten Riemannschen Flächen sowie die Defekte der Ausnahmewerte der zugehörigen Abbildungsfunktionen, ohne Verwendung der oben erwähnten Differentialgleichung, direkt durch Methoden der konformen Abbildung zu bestimmen. Eine Darstellung dieser neuen Anwendung der vielversprechenden AHLFORSschen Methode, welche schon früher zur Lösung verschiedener schwieriger funktionentheoretischer Fragen geführt hat, soll in dieser Zeitschrift erscheinen.

### § 1. Vorbereitende Betrachtungen und Problemstellung.

1. Die vorliegende Untersuchung wird sich mit gewissen Klassen von mehrdeutigen, einwertigen analytischen Funktionen beschäftigen, welche lauter isolierte kritische Stellen haben. Es soll deshalb zunächst daran erinnert werden, von welcher Beschaffenheit eine solche Singularität sein kann.

Sei also  $z = z(w)$  eine analytische Funktion, welche im Gebiete  $0 < |w - w_0| \leq \rho$  ( $\rho > 0$ ) mit dem Charakter einer rationalen Funktion fortsetzbar ist. Diese Funktion sei ferner in demselben Gebiet einwertig, d. h. den Mittelpunkten von zwei verschiedenen Elementen von  $z(w)$  sollen stets zwei verschiedene Funktionswerte entsprechen. Diese Werte überdecken in der  $z$ -Ebene ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $G_\rho$ , in welchem die Umkehrfunktion  $w = w(z)$  eindeutig ist.

Wir fixieren in einem Punkt  $w \neq w_0$  des Kreises  $|w - w_0| < \rho$  ein beliebiges Element der Funktion  $z(w)$ . Wenn der Funktionswert  $z$  nach einem Umlauf des Punktes  $w$  um den Punkt  $w_0$  zu seinem Anfangswert zurückkehrt, so muss wegen der Einwertigkeit der Funktion  $z(w)$  auch das entsprechende Endelement mit dem Anfangselement übereinstimmen. Die Funktion  $z(w)$  ist dann in der Umgebung von  $w$  eindeutig und einwertig, und vermittelt eine eineindeutige und konforme Abbildung der Kreisscheibe  $|w - w_0| \leq \rho$  auf das schlichte Gebiet  $G_\rho$ .

Wenn dagegen das betrachtete Funktionselement  $z(w)$  in der Umgebung von  $w_0$  vieldeutig ist, so hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Funktionswert  $z$  nach einer endlichen Anzahl von Umläufen zu seinem Anfangswert zurückkehrt, oder dies nicht der Fall ist.

In jenem Fall existiert eine ganze Zahl  $k > 1$ , so dass  $z$  eine einwertige

und eindeutige Funktion von  $\sqrt[k]{w-w_0}$  ist. Die Gesamtheit der  $k$  Zweige der Funktion  $z(w)$  bildet ein *algebraisches Element* der Funktion  $z(w)$ , welches die  $k$ -fach überdeckte Kreisscheibe  $|w-w_0| \leq \varrho$  auf das schlichte Gebiet  $G_\varrho$  der  $z$ -Ebene abbildet.

Falls  $z(w)$  unendlich vieldeutig ist, bestimmt sie sich als eine eindeutige und einwertige Funktion von  $\log(w-w_0)$ . Die Gesamtheit der unendlich vielen Zweige von  $z(w)$  definiert ein *logarithmisches Element*, welches die unendlich vielblättrige, universelle Überlagerungsfläche des punktierten Kreises  $0 < |w-w_0| \leq \varrho$  auf das schlichte Gebiet  $G_\varrho$  abbildet, dessen Berandung teilweise aus der analytischen Bildkurve  $\Gamma_\varrho$  der Kreisperipherie  $|w-w_0| = \varrho$ , teilweise aus dem Häufungsbereich  $\Gamma_0$  der Funktion  $z$  in dem logarithmischen Windungspunkt  $w=w_0$  besteht. Dieser Bereich  $\Gamma_0$  ist entweder ein Kontinuum oder ein Punkt.

2. Der zu untersuchenden Klasse von einwertigen analytischen Funktionen wollen wir zunächst dadurch eine Beschränkung auferlegen, dass wir das Vorkommen *algebraischer* Elemente ausschliessen. Unter den einwertigen Funktionen welche, ausser eindeutigen Elementen, lauter *logarithmische* Elemente enthalten, verdienen diejenigen, deren Riemannschen Flächen *regulär* verzweigt sind, besondere Beachtung. Wegen der grossen Bedeutung dieser Funktionen für die nachfolgende Untersuchung, wollen wir sie gleich hier kurz besprechen.

Diese Funktionen lassen sich bekanntlich auf folgende Weise definieren. Es seien gegeben  $q \geq 2$  Punkte der  $w$ -Ebene,  $a_1, a_2, \dots, a_q$ . Die einfach zusammenhängende universelle Überlagerungsfläche  $F_q^{(\infty)}$  der in diesen Grundpunkten punktierten Vollebene lässt sich nach dem Fundamentalsatz der konformen Abbildung umkehrbar eindeutig und konform entweder auf die punktierte Ebene  $\zeta \neq \infty$  (parabolischer Fall), oder auf den Einheitskreis  $|\zeta| < 1$  (hyperbolischer Fall) abbilden; die bis auf eine lineare Transformation eindeutig bestimmte Abbildungsfunktion sei  $\zeta = \zeta(w; a_1, \dots, a_q)$ .

Für  $q=2$  gehört die Fläche  $F_q^{(\infty)}$  dem parabolischen Typus an. Die Abbildungsfunktion ist

$$\zeta = \alpha \log \frac{w-a_1}{w-a_2} + \beta.$$

Im Falle  $q > 2$  hat man dagegen immer den hyperbolischen Fall. Die unendlich vielen verschiedenen Zweige der einwertigen Abbildungsfunktion  $\zeta(w; a_1, \dots, a_q)$  permutieren sich in einer Gruppe ( $S$ ) von linearen Transforma-

tionen, welche den Einheitskreis  $|\zeta| \leq 1$  invariant lassen. Diese Gruppe wird aus  $q$  Fundamentalsubstitutionen  $S_1, \dots, S_q$  erzeugt, welche den Umläufen um je einen der Punkte  $a_1, \dots, a_q$  entsprechen und sämtlich parabolisch sind. Die Umkehrfunktion  $w = \omega(\zeta; a_1, \dots, a_q)$  ist eine im Kreise  $|\zeta| < 1$  eindeutige und in bezug auf die Gruppe  $S$  automorphe Funktion, welche alle Werte  $w$  unendlich oft annimmt, mit Ausnahme der Werte  $a_1, \dots, a_q$ , welche sie überhaupt nicht annimmt. Als Fundamentalbereich hat sie ein aus  $2q - 2$  einander paarweise berührenden Orthogonalbogen des Kreises  $|\zeta| = 1$  gebildetes Spitzenpolygon, welches sie auf die längs eines durch die Grundpunkte  $a_1, \dots, a_q$  gezogenen Schlitzes aufgeschnittene  $w$ -Ebene abbildet. — Im Falle  $q = 2$  ist diese Umkehrfunktion die Exponentialfunktion, im Falle  $q = 3$  die Modulfunktion.<sup>1</sup>

Wir schlagen um einen der Grundpunkte  $a_v$  einen kleinen Kreis  $B_v$ . Greift man dann ein einem inneren Punkt dieses Kreises entsprechendes Element der Funktion  $\zeta(w; a_1, \dots, a_q)$  heraus, und setzt man dieses innerhalb  $B_v$  unbeschränkt fort, so entsteht ein logarithmisches Element der Funktion, welches die unendlich vielmal überdeckte Kreisscheibe  $B_v$  auf ein schlichtes Gebiet  $A_v$  der  $z$ -Ebene abbildet. Im Falle  $q = 2$  ist das Gebiet  $A_v$ , bei passender Wahl des Kreises  $B_v$ , eine Halbebene, während es für  $q \geq 3$  ein innerhalb des Einheitskreises  $|\zeta| = 1$  belegenes ovales Gebiet ist, das die Peripherie  $|\zeta| = 1$  in einem wohlbestimmten Eckpunkt eines Fundamentalpolygons berührt; dieser Punkt stellt den Grenzwert des Elementes für  $w \rightarrow a_v$  dar, und ist (wie überhaupt alle Punkte der Peripherie) eine wesentliche Singularität der automorphen Funktion  $\omega(\zeta; a_1, \dots, a_q)$ .

Der Fall  $q = 2$  unterscheidet sich vom allgemeinen Fall  $q > 2$  nicht nur durch den Typus der Fläche  $F_q$ , sondern auch durch die Anzahl der logarithmischen Windungspunkte. Die logarithmische Fläche  $F_2$  hat über den Punkten  $a_1$  und  $a_2$  je *einen* solchen Windungspunkt. Dagegen liegen für  $q > 2$  über jedem der Punkte  $a_v$  eine abzählbar *unendliche Anzahl* verschiedener logarithmischer Elemente. Die entsprechenden Ovale  $A_v$  liegen getrennt innerhalb des Kreises  $|\zeta| = 1$ , jedoch so, dass die Berührungspunkte mit der Peripherie auf dieser überall dicht sind.

3. Wir stellen uns in der vorliegenden Untersuchung die Aufgabe sämtliche einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen zu bestimmen, welche

<sup>1</sup> Eine nähere Besprechung der fundamentalen Eigenschaften der linear polymorphen Funktionen  $\zeta(w; a_1, \dots, a_q)$  findet man bei F. NEVANLINNA: *Über die Anwendung einer Klasse uniformisierender Transzendenten zur Untersuchung der Wertverteilung analytischer Funktionen* (Acta mathematica, B. 50, 1927).



eine *endliche* Anzahl von logarithmischen Elementen haben, eine Klasse von Flächen, welche sozusagen die zwischen der Flächen  $F_2$  und  $F_q^{(\infty)}$  ( $q \geq 3$ ) vorhandene Lücke teilweise ausfüllen und gewissermassen als die nächste Verallgemeinerung der logarithmischen Fläche betrachtet werden können. Nach den obigen vorbereitenden Bemerkungen können wir dieses Problem genau formulieren wie folgt:

*Es seien gegeben  $q$  Punkte  $a_1, \dots, a_q$  und  $q$  positive ganze Zahlen  $\mu_1, \dots, \mu_q$ . Es gilt die Gesamtheit derjenigen analytischen Funktionen  $z(w)$  zu bestimmen, welche folgende Eigenschaften besitzen:*

1. *Die Funktion  $z(w)$  ist mit dem Charakter einer rationalen Funktion analytisch fortsetzbar in der ganzen  $w$ -Ebene, höchstens mit Ausnahme der Punkte  $w = a_1, \dots, a_q$ .*
2.  *$z(w)$  ist einwertig.*
3.  *$z(w)$  hat über jedem der Punkte  $a_\nu$  genau  $\mu_\nu$  verschiedene logarithmische Elemente (und ausserdem möglicherweise noch eine Anzahl eindeutiger Elemente).*
4. *Das von den Werten  $z(w)$  gebildete Gebiet  $G$  ist einfach zusammenhängend.*

Die Riemannsche Fläche einer solchen Funktion  $z(w)$  soll in der Folge mit  $F_p(a_1, \dots, a_q; \mu_1, \dots, \mu_q)$  bezeichnet werden, wobei  $p$  die Gesamtanzahl  $\Sigma \mu_\nu$  der Windungspunkte bezeichnet.

## § 2. Struktur der Riemannschen Fläche $F_p$ in dem Falle, wo über jedem Grundpunkt ein einziger Windungspunkt liegt.

4. Es bedeutet keine Einschränkung, wenn wir in der nachfolgenden Untersuchung ein für alle Mal annehmen, dass die Anzahl  $q$  der gegebenen Grundpunkte  $a_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, q$ ), über welchen sich die logarithmischen Windungspunkte der gesuchten Riemannschen Fläche  $F_p$  verteilen, mindestens gleich zwei ist. Denn sonst hätte die entsprechende Funktion  $z(w)$  nur *eine* kritische Stelle  $w = a_1$ ; sie würde also in dem einfach zusammenhängenden Gebiet  $w \neq a_1$  unbeschränkt fortsetzbar, und somit gemäss dem Monodromiesatz eindeutig sein. Nach den Cauchy-Riemannschen Satz über aufhebbare Singularitäten müsste sie auch im Punkte  $w = a_1$  rationalen Charakter haben, und würde sich folglich, als eine in der geschlossenen Ebene fortsetzbare einwertige Funktion, auf eine lineare Transformation reduzieren. — Lassen wir also diesen, als *elliptisch* zu bezeichnenden Fall beiseite, so muss notwendigerweise  $q \geq 2$  sein.

Angenommen, dass eine Funktion  $z(w)$  existiert, welche unseren sämtlichen

Forderungen genügt, wollen wir die von ihr vermittelte Abbildung etwas näher studieren. Nach den Voraussetzungen 2° und 4° überdecken die Funktionswerte in der  $z$ -Ebene ein schlichtes, einfach zusammenhängendes Gebiet  $G$ , innerhalb dessen die Umkehrfunktion  $w(z)$  eindeutig und bis auf isolierte Pole regulär ist. Diese letzte Funktion nimmt innerhalb  $G$  keinen Wert  $w$  mehrfach an, und ihre Ableitung ist somit in  $G$  von Null verschieden. Andererseits nimmt  $w(z)$  einzelne Werte  $w$  unendlich oft an, denn sonst könnte die Funktion  $z(w)$  nicht unendlich vieldeutig sein, was ja doch der Fall ist, da sie  $p \geq 2$  logarithmische Elemente besitzt. Da nun die Stellen, wo die Funktion  $w(z)$  irgendeinen konstanten Wert  $w$  annimmt, sich in einem inneren Punkt von  $G$  nicht häufen können, so folgt hieraus, dass das Gebiet  $G$  mindestens einen Randpunkt besitzt. Es sind also zwei Fälle möglich:

1. Der Rand  $\Gamma$  von  $G$  besteht aus einem einzigen Punkt (*parabolischer Fall*).
2. Der Rand  $\Gamma$  ist ein Kontinuum (*hyperbolischer Fall*).

Jeder Randpunkt stellt eine wesentliche Singularität der Funktion  $w(z)$  dar, denn sonst würde das Gebiet  $G$  nicht das volle Wertgebiet der Funktion  $z(w)$  ausschöpfen.

Um nun die Struktur der einer Lösung  $z(w)$  unseres Problems entsprechenden Riemannschen Fläche  $F_p$  zu untersuchen, soll das Gebiet  $G$  in *Fundamentaltbereiche* eingeteilt werden, in denen die Umkehrfunktion  $w(z)$  einwertig ist. Die Art und Weise, in welcher sich diese Bereiche neben einander lagern, ist gegenüber topologischen Abbildungen des Gebietes  $G$  invariant. Da ein von einem Kontinuum begrenztes Gebiet sich stetig und umkehrbar eindeutig auf die punktierte Ebene abbilden lässt, so ist es vom Standpunkte der oben genannten Aufgabe gleichgültig, welchem der zwei möglichen Typen (dem parabolischen oder dem hyperbolischen) die zu untersuchende Riemannsche Fläche angehört. Die Bestimmung des Typus kann also vorläufig dahingestellt werden und soll erst in einem späteren Zusammenhang erfolgen.

5. Wir werden unsere Untersuchung zunächst auf den einfachsten Fall beschränken, wo  $\mu_1 = \dots = \mu_q = 1$ , und über jedem Grundpunkt  $a_r$  mithin nur *ein* logarithmischer Windungspunkt liegt. Es sei demgemäss  $z = z(w)$  eine analytische Funktion, welche über jedem der gegebenen Punkte  $a_r$  genau *ein* logarithmisches Element besitzt (wazu noch eine Anzahl eindeutiger Elemente hinzukommen kann), und welche auch den übrigen (unter 1°, 2° und 4° angegebenen) Bedingungen unseres Problems genügt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit

können wir dann annehmen, dass die Punkte  $a_v$  sämtlich im Endlichen belegen sind, und dass das einfach zusammenhängende offene Gebiet  $G$ , welches von den Funktionswerten schlicht überdeckt wird, den unendlich fernen Punkt  $z = \infty$  nicht enthält. Wegen der Einwertigkeit von  $z(w)$  sind die Punkte von  $G$  den Mittelpunkten der eindeutigen Elemente dieser Funktion eineindeutig zugeordnet. Das dem Punktpaar  $z, w$  entsprechende (durch den Wert  $z$  eindeutig festgelegte) Funktionselement  $z(w)$  wird im folgendem kurz mit  $(z, w)$  bezeichnet. Wir sagen, ein von dem Punkt  $w = w_1$  ausgehender und im Punkte  $w = w_2$  endigender Streckenzug  $S$  verbinde die Funktionselemente  $(z_1, w_1)$  und  $(z_2, w_2)$ , falls  $(z_1, w_1)$  längs  $S$  bis zu  $(z_2, w_2)$  analytisch fortgesetzt werden kann. Als die *Distanz* der Elemente definieren wir die untere Grenze der Längen sämtlicher verbindender Streckenzüge.

Nach diesen Festsetzungen schlagen wir um die Grundpunkte  $a_v$  kleine Kreise mit dem Radius  $\varrho$ , welche vollständig ausserhalb einander liegen. Im Kreise  $|w - a_v| < \varrho$  wird dann ein beliebiger Punkt  $w^* \neq a_v$  genommen, und in diesem ein beliebiges Funktionselement  $(z^*, w^*)$  fixiert. Zwei Fälle sind möglich: Entweder ist dieses Element, wenn es im Gebiete  $0 < |w - a_v| \leq \varrho$  unbeschränkt fortgesetzt wird, eindeutig; dann bildet es den Kreis  $|w - a_v| \leq \varrho$  auf einen von einer einfachen Kurve begrenzten Teilbereich von  $G$  eineindeutig und konform ab. Oder aber das Element  $(z^*, w^*)$  gehört dem einzigen über dem Grundpunkt  $a_v$  liegenden logarithmischen Element  $E_v$  der Funktion  $z(w)$  an. Nach den Ausführungen von S. 301 bildet dieses Element, wenn es innerhalb  $0 < |w - a_v| < \varrho$  fortgesetzt wird, ein von unendlich vielen Exemplaren dieser Kreisscheibe gebildetes, sich um den Punkt  $w = a_v$  windendes Riemannsches Flächenstück auf ein gewisses einfach zusammenhängendes Teilgebiet  $G_v$  von  $G$  konform ab. Die Berandung von  $G_v$  besteht teilweise aus der analytischen, innerhalb  $G$  verlaufenden Bildkurve  $\Gamma_v$  der (unendlich vielmal überdeckten) Kreisperipherie  $|w - a_v| = \varrho$ , teilweise aus dem Häufungsbereich  $\Gamma_v^0$  der Funktion  $z(w)$  für  $|\log(w - a_v)| \rightarrow \infty$ , wobei als Anfangselement ein beliebiger dem logarithmischen Element  $E_v$  zugehöriger Zweig dieser Funktion zu wählen ist, und der Punkt  $w$  nicht aus dem Kreise  $|w - a_v| \leq \varrho$  heraustreten darf. Es lässt sich ferner folgendes zeigen:

A. Jeder Punkt des Häufungsbereiches  $\Gamma_v^0$  gehört dem Rande  $\Gamma$  von  $G$  an, und ist also eine wesentliche Singularität der Umkehrfunktion  $w(z)$ .

**Beweis.** — Es sei  $z_0$  ein beliebiger innerer Punkt des Gebiete  $G$ ; ihm entspricht ein wohlbestimmtes eindeutiges Element  $(z_0, w_0)$  der Funktion  $z(w)$ . Wir

schlagen um den Mittelpunkt  $w_0$  einen kleinen Kreis,  $|w - w_0| \leq r$ , wo dieses Element eindeutig ist, und bezeichnen durch  $A_r$  seinen innerhalb  $G$  belegenen Bildbereich, der also den Punkt  $z_0$  als inneren Punkt enthält. Dem Mittelpunkt eines jeden Elementes, das von  $(z_0, w_0)$  eine grössere Distanz als  $r$  hat, entspricht ein Punkt  $z$  *ausserhalb* des Gebietes  $A_r$ . Nun sieht man sofort ein, dass diejenigen Elemente, als deren Häufungsbereich das Kontinuum (oder Punkt)  $I_v^0$  definiert ist, sicher eine grössere Distanz von  $(z_0, w_0)$  haben als  $r$ , woraus folgt, dass der innere Punkt  $z_0$  diesem Häufungsbereich nicht angehören kann. Jeder Punkt  $I_v^0$  ist also, wie behauptet wurde, ein Randpunkt von  $G$ .

Insbesondere folgt aus Obigem, dass die Bildkurve  $\Gamma_v$  der Kreisperipherie  $|w - a_v| = \rho$  auf dem Rande  $I$  endet, in dem Sinn, dass die zwei Häufungsbereiche  $\lim z$  für  $\arg(w - a_v) \rightarrow \pm \infty$  aus lauter Punkte von  $I$  bestehen. Wegen dieser Eigenschaft soll die Kurve  $\Gamma_v$  im folgenden als ein *Querschnitt* des Gebietes  $G$  bezeichnet werden.

B. *Das Komplementärgebiet  $\bar{G}_v$  von  $G_v$  in bezug auf  $G$  ist einfach zusammenhängend.*

Um zu beweisen, dass die Punktmenge  $\bar{G}_v$  zusammenhängend ist, soll gezeigt werden, dass zwei beliebige ihrer Punkte  $z_1$  und  $z_2$ , durch eine innerhalb  $\bar{G}_v$  verlaufende stetige Kurve verbunden werden können. Es seien  $(z_1, w_1)$  und  $(z_2, w_2)$  die entsprechenden Elemente der Funktion  $z(w)$ , und  $w_1 w_2$  ein Streckenzug, welcher diese Elemente verbindet. Wenn seine Bildkurve  $z_1 z_2$  nicht schon aus lauter inneren Punkten der Menge  $\bar{G}_v$  besteht, so muss sie wenigstens einen Randpunkt von  $\bar{G}_v$  enthalten. Nun gehören, gemäss Satz A, die Randpunkte von sowohl  $G_v$  wie von  $G$  entweder dem Querschnitt  $\Gamma_v$  oder dem Randkontinuum  $I$  von  $G$  an; dieselbe Eigenschaft hat daher auch die Berandung des Komplementes  $\bar{G}_v$ . Weil nun die Kurve  $z_1 z_2$ , ihrer Definition gemäss, keinen Punkt mit dem Gebietsrand  $I$  gemeinsam hat, so folgt hieraus, dass sie die Punktmenge  $\bar{G}_v$  nur über einen Punkt der Kurve  $\Gamma_v$  verlassen kann. Andererseits trifft sie diese Kurve höchstens in einer endlichen Anzahl von Punkten, weil ja schon die Anzahl der Schnittpunkte des Streckenzuges  $w_1 w_2$  mit der Kreisperipherie  $|w - a_v| = \rho$  eine endliche Zahl ist.

Es sei nun  $z_1'$  ein Punkt, wo der Punkt  $z$ , wenn er die Kurve  $z_1 z_2$  in der Richtung von  $z_1$  nach  $z_2$  durchläuft, der Kurve  $\Gamma_v$  begegnet um in das Innere des Gebietes  $G_v$  hineinzutreten. Weil der Endpunkt  $z_2$  ausserhalb  $G_v$  liegt, so muss der Punkt  $z$  später wieder aus  $G_v$  heraustreten, und dies kann wieder nur

über einem Punkt des Querschnittes  $\Gamma_v$  geschehen. Es sei  $z_2'$  der erste Punkt, wo die Kurve  $z_1 z_2$  das Gebiet  $G_v$  verlässt, so dass also der Bogen  $z_1' z_2'$  aus lauter Punkten von  $G_v$  oder  $\Gamma_v$  besteht. Wir können dann den Bogen  $z_1' z_2'$  durch den von denselben Punkten begrenzten Teilbogen des Querschnittes  $\Gamma_v$  ersetzen.

Die Punkte  $z_1$  und  $z_2$  können also durch eine Kurve  $k$  verbunden werden, deren sämtliche Punkte entweder innerhalb  $\bar{G}_v$  oder auf dem Querschnitt  $\Gamma_v$  belegen sind. Nun sieht man leicht ein, dass auch die letzteren Punkte vermieden werden können. Denn jedem solchen Punkt  $z_0$  entspricht ein Element  $(z_0, w_0)$ , dessen Mittelpunkt auf der Kreisperipherie  $|w - a_v| = \rho$  liegt. In der unmittelbaren Umgebung von  $w_0$  kann die Bildkurve  $K$  von  $k$  nicht in den Kreis  $|w - a_v| \leq \rho$  eindringen, denn sonst würde das entsprechende Element  $(z, w)$  dem logarithmischen Element  $E_v$  angehören, was indessen nicht möglich ist, weil ja die Kurve  $k$  mit dem Innern von  $G_v$  keinen Punkt gemeinsam hat. Es kann also die Kurve  $K$  in der Umgebung des Punktes  $w$  etwas *nach aussen* verschoben werden, so dass die entsprechenden Elemente  $(z, w)$  durch unmittelbare Fortsetzung des Elementes  $(z_0, w_0)$  entstehen. Weil nun die Mittelpunkte dieser Elemente *ausserhalb* des Kreises  $|w - a_v| = \rho$  belegen sind, so können ihre Bildpunkte in der  $z$ -Ebene weder innerhalb  $G_v$ , noch auf dem Querschnitt  $\Gamma_v$  liegen, und sind somit innere Punkte der Menge  $\bar{G}_v$ . Hierdurch ist die Existenz einer Kurve dargetan, welche die Punkte  $z_1$  und  $z_2$  verbindet, ohne das Innere der Punktmenge  $\bar{G}_v$  zu verlassen.

Es erübrigt noch zu beweisen, dass das Gebiet  $G_v$  *einfach* zusammenhängend ist. Zu diesem Zweck genügt es zu zeigen, dass eine beliebige innerhalb  $G_v$  verlaufende geschlossene Jordankurve  $J$  keinen Randpunkt des Gebietes  $\bar{G}_v$  einschliessen kann. Wegen des einfachen Zusammenhangs des Wertgebietes  $G$  ist jeder Punkt innerhalb des von  $J$  begrenzten Gebietes gleichzeitig auch *innerer* Punkt von  $G$ . Würde nun jenes Gebiet einen Randpunkt von  $\bar{G}_v$  enthalten, so müsste dieser Punkt also notwendigerweise auf der Kurve  $\Gamma_v$  liegen. Dann müsste aber diese Kurve vollständig innerhalb jenes Gebietes verlaufen, was jedoch ihrer unter A bewiesenen Eigenschaft widerspricht. — Also ist das Gebiet  $G_v$  einfach zusammenhängend, und Satz B ist hierdurch vollständig bewiesen.

Aus den Sätzen A und B schliessen wir nunmehr folgendes:

*Die logarithmischen Elemente  $E_1, \dots, E_q$  bilden die entsprechenden von den Kreisen  $|w - a_v| = \rho$  begrenzten Riemannschen Flächenstücke auf gewisse punktfremde, einfach zusammenhängende Teilgebiete  $G_1, \dots, G_q$  von  $G$  ab. Nach Ab-*

trennung dieser Teilgebiete aus  $G$  bleibt noch ein einfach zusammenhängendes Restgebiet  $G_0$  übrig. Die Berandung von  $G_0$  besteht aus den  $q$  Querschnitten  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_q$ , welche den Kreislinien  $|w - a_\nu| = \rho$  ( $\nu = 1, \dots, q$ ) entsprechen, sowie aus gewissen Punkten des Randkontinuums  $\Gamma$ .

Wir nehmen auf dem Querschnitt  $\Gamma_\nu$  einen beliebigen Punkt  $P_\nu$ ; hierdurch zerfällt  $\Gamma_\nu$  in zwei Teilbogen, welche wir das *positive* und das *negative Ende* von  $\Gamma_\nu$  benennen wollen. Hierbei soll ein Punkt  $z$ , der sich auf  $\Gamma_\nu$  in der Richtung von dem negativen zu dem positiven Ende bewegt, das Gebiet  $G_\nu$  auf der linken Seite lassen (der Bildpunkt  $w$  umkreist also dann die Peripherie  $|w - a_\nu| = \rho$  in positiver Umlaufsrichtung).

Ein beliebiger innerhalb des Restgebietes  $G_0$  liegender Punkt  $P_0$  kann mit den Punkten  $P_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, q$ ) verbunden werden durch stetige innerhalb  $G_0$  verlaufende Streckenzüge  $P_0 P_\nu$ , welche, ausser dem Endpunkt  $P_0$ , keine gemeinsamen Punkte haben. Bei einem positiven Umlauf um  $P_0$  folgen diese Streckenzüge aufeinander in einer bestimmten Reihenfolge, und wir denken uns die Grundpunkte  $a_\nu$  derart numeriert, dass diese Reihenfolge der Anordnung  $1, \dots, q$  der Indizes entspricht. — Wir bemerken noch, dass der Querschnitt  $P_\nu P_0 P_{\nu+1}$  ( $P_{q+1} \equiv P_1$ ) das Restgebiet  $G_0$  in zwei einfach zusammenhängende Teilgebiete zerlegt, von denen das eine, ausser von dem genannten Querschnitt, von dem negativen Ende des Querschnittes  $\Gamma_\nu$  und von dem positiven Ende des Querschnittes  $\Gamma_{\nu+1}$  ( $\Gamma_{q+1} \equiv \Gamma_1$ ), sowie von gewissen Punkten des Randes  $\Gamma$  begrenzt wird.

6. Nachdem die Zerlegung der vorgelegten Riemannschen Fläche durch die Kreislinien  $|w - a_\nu| = \rho$  ( $\nu = 1, \dots, q$ ) durch die obigen Ergebnisse klargestellt worden ist, ziehen wir durch die Grundpunkte  $a_\nu$  eine geschlossene Jordankurve  $L$  so dass, bei einem positiven Umlauf, die genannten Punkte auf  $L$  in der Ordnung  $a_1, \dots, a_q$  aufeinander folgen. Wir können annehmen, dass jeder Kreis  $|w - a_\nu| = \rho$  von der Kurve  $L$  in genau zwei Punkten  $\alpha_\nu$  und  $\beta_\nu$  geschnitten wird, wobei  $\alpha_\nu$  denjenigen Schnittpunkt bezeichnen soll, bei dem der Punkt  $w$  ins Kreisinnere  $|w - a_\nu| < \rho$  eintritt. Die Kurve  $L$  wird von der gegebenen Funktion  $z(w)$  auf gewisse innerhalb des Gebietes  $G$  verlaufende Kurven  $l$  abgebildet.

Um die von diesen Bildkurven gebildete Konfiguration zu untersuchen, nehmen wir auf  $L$  einen beliebigen ausserhalb der Kreise  $|w - a_\nu| = \rho$  belegenen Punkt  $w_0$ , und setzen ein diesem Punkt entsprechendes Funktionselement in positiver Richtung auf  $L$  analytisch fort. Sei  $a_\nu$  der erste Grundpunkt, welchem der Mittelpunkt  $w$  des betrachteten Elementes hierbei begegnet. Wenn dieser

Grundpunkt erreicht wird, welches nur dann zutrifft, wenn das betrachtete Element  $(z, w)$ , nachdem der Mittelpunkt  $w$  bei  $a_\nu$  ins Innere des Kreises  $|w - a_\nu| = \rho$  eingetreten ist, dem logarithmischen Element  $E_\nu$  nicht begegnet, so setzen wir das Element über  $a_\nu$  weiter fort. Wir behaupten, dass es dann, ehe der Punkt  $w$  einen vollen Umlauf auf  $L$  vollzogen hat, auf ein logarithmisches Element  $E_k$  stossen muss ( $k = 1, 2, \dots, q, E_{q+1} \equiv E_1^1$ ). Denn anderenfalls könnte das betrachtete Element, welches jedenfalls in den singularitätenfreien, von der Kurve  $L$  begrenzten Innengebiet  $I$  und Aussengebiet  $A$  unbeschränkt fortgesetzt werden kann, in der ganzen geschlossenen  $w$ -Ebene fortgesetzt werden, und würde sich somit gemäss dem Monodromiesatz auf eine eindeutige analytische Funktion reduzieren, was den vorausgesetzten Eigenschaften der Funktion  $z(w)$  widerspricht.

Setzen wir nun das dem Punkt  $w_0$  entsprechende Anfangselement in negativer Richtung auf  $L$  fort, so wird es ebenfalls, nachdem der Mittelpunkt  $w$  einen gewissen Punkt  $\beta_h$  passiert hat, von einem logarithmischen Element  $E_h$  aufgenommen, und zwar wird dies schon für einen Wert  $h > k - q$  eintreffen. Sonst würde nämlich das betrachtete Element in der ganzen punktierten Ebene  $w \neq a_k$  fortsetzbar sein, und wieder nach dem Monodromiesatz eine in der ganzen  $w$ -Ebene eindeutige Funktion definieren.

Das betrachtete Element bildet das von den Grundpunkten  $a_h$  und  $a_k$  begrenzte Bogen  $a_h a_k$  der Kurve  $L$  auf ein Kurvenstück  $l_{hk}$  ab, welches die Gebiete  $G_h$  und  $G_k$  verbindet und das Gebiet  $G$  in zwei einfachzusammenhängende Teilgebiete einteilt. Die Querschnitte  $\Gamma_h$  und  $\Gamma_k$  werden von ihm in je einem Punkt geschnitten; diese sollen als Bildpunkte von  $\beta_h$  bzw.  $\alpha_k$  mit  $\beta_h$  bzw.  $\bar{\alpha}_k$  bezeichnet werden. Falls  $h < k - 1$  ist, so wird jeder Wert  $a_\nu$ , wo  $k > \nu > h$ , in einem wohlbestimmten Punkt des Bogens  $l_{hk}$  von der in  $G$  eindeutigen Umkehrfunktion  $w(z)$  angenommen. Wir haben somit den Satz

C. *Den über der Kurve  $L$  liegenden Punkten  $w$  entsprechen in der  $z$ -Ebene gewisse Querschnitte  $l$  des Gebietes  $G$ , welche die Gebiete  $G_1, \dots, G_q$  paarweise verbinden.*

7. Wegen der Einwertigkeit der Funktion  $z(w)$  können sich die Kurvenstücke  $l_{hk}$  nicht innerhalb des Gebietes  $G$  schneiden. Eine andere wichtige Eigenschaft ist die folgende:

---

<sup>1</sup> Im folgenden sollen überhaupt alle Indizes auf ihre Reste modulo  $q$  reduziert werden.

D. Die Querschnitte  $l_{hk}$  häufen sich nur gegen den Rand  $I$  des Gebietes  $G$ .

Zum Beweise erinnern wir zunächst daran, was nach den Ausführungen der S. 301 über den Verlauf der Kurven  $l_{hk}$  innerhalb der Gebiete  $G_v$  bekannt ist. Die Bogen  $\alpha_v a_v$  und  $a_v \beta_v$  der Kurve  $L$  werden von dem logarithmischen Element  $E_v$  auf eine unendliche Anzahl von Querschnitten des Gebietes  $G_v$  abgebildet, welche von den Punkten  $\bar{\alpha}_v$  bzw.  $\bar{\beta}_v$  ausgehen und auf dem Häufungsbereich  $I_v$  endigen. Die Punkte  $\bar{\alpha}_v$  und  $\bar{\beta}_v$  folgen abwechselnd aufeinander, und die von ihnen ausgehenden Querschnitte  $l$  begrenzen, zusammen mit dem Bogen  $I_v$ , unendlich viele nebeneinander liegende Streifengebiete, welche abwechselnd dem in  $I$  und dem in  $A$  belegenen Teil der Kreisfläche  $|w - a_v| \leq \rho$  entsprechen.

Die Querschnitte  $l$  können sich also innerhalb der Gebiete  $G_v$  nicht häufen. Dasselbe gilt aber auch im Inneren des Gebietes  $G_0$ . Denn wenn zwei beliebige innere Punkte  $z_1$  und  $z_2$  dieses Gebietes gegen irgend einen inneren Punkt von  $G_0$  rücken, so wird die Distanz der entsprechenden Elemente  $(z_1, w_1)$  und  $(z_2, w_2)$ , welche ja von einem gewissen Moment ab durch unmittelbare analytische Fortsetzung mit einander in Verbindung stehen, hierbei gegen Null streben. Andererseits sieht man sofort ein, dass die Distanz von zwei Elementen, welche zwei ausserhalb der Kreise  $|w - a_v| = \rho$  belegenen Punkten  $z_1$  und  $z_2$  verschiedener Bogen  $l_{hk}$  entsprechen, über einer festen, von der Wahl dieser Punkte unabhängigen positiven Schranke liegen. Hieraus folgt, dass die Querschnitte  $l_{hk}$  sich überhaupt in keinem inneren Punkt  $z$  des Gebietes  $G$  häufen können, w. z. b. w.

8. Wir fassen nunmehr den Streckenzug  $P_v P_0 P_{v+1}$  ins Auge, der das Gebiet  $G_0$  in zwei einfach zusammenhängende Teilgebiete zerlegt, von denen das eine,  $G'_v$ , von dem negativen Ende des Querschnittes  $I_v$  und von dem positiven Ende des Querschnittes  $I_{v+1}$  begrenzt wird. Weil nun jedes Kurvenstück  $l$  zwei Gebiete  $G_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ) verbinden muss, so schliesst man, dass jeder Bogen  $l$ , der das Gebiet  $G_v$  über dem negativen Ende der Kurve  $I_v$  verlässt, und nicht in  $G_{v+1}$  über das positive Ende von  $I_{v+1}$  eintritt, notwendigerweise den Streckenzug  $P_v P_0 P_{v+1}$  schneiden muss. Nun besteht dieser aus lauter inneren Punkten von  $G$ , und es folgt somit aus Satz D, dass die genannten Bogen  $l$  höchstens in endlicher Anzahl vorkommen können. Wir haben somit das Ergebnis:

E. Die Anzahl der Querschnitte  $l$ , welche zwei nicht unmittelbar nebeneinander liegende Gebiete  $G_v$  verbinden, ist endlich.

9. Es sei nun  $l_{v,v+1}$  eines der betrachteten Kurvenstücke, welches die zwei Nachbargebiete  $G_v$  und  $G_{v+1}$  verbindet; es teilt das Gebiet  $G$  in zwei Teil-



gebiete, von denen das eine,  $G_{\nu+1}$ , aus gewissen Teilgebieten der drei Gebiete  $G_\nu$ ,  $G_0^\nu$  und  $G_{\nu+1}$  zusammengesetzt ist. Wir schneiden dann die  $w$ -Ebene längs dem entsprechenden Bogen  $a_\nu a_{\nu+1}$  auf, nehmen auf  $l_{\nu+1}$  einen beliebigen Punkt  $z$ , und setzen das entsprechende Element  $(z, w)$  in der aufgeschnittenen  $w$ -Ebene fort, indem wir den Punkt  $w$ , welcher also auf dem Bogen  $a_\nu a_{\nu+1}$  liegt, gegen das Äussere  $A$  des von der Kurve  $L$  begrenzten Gebietes  $I$  rücken lassen. Der Punkt  $z$  wird hierbei in das Gebiet  $G_{\nu+1}$  eintreten. Hieraus folgt nun, dass das betrachtete Element in der ganzen, längs  $a_\nu a_{\nu+1}$  aufgeschnittenen Vollebene fortsetzbar ist, die Punkte  $a_i \neq a_\nu, a_{\nu+1}$  miteinbegriffen. Denn das über einem solchen Punkt  $a_i$  befindliche logarithmische Element  $E_i$  entspricht dem Gebiet  $G_i$  ( $i \neq \nu, \nu + 1$ ), welches nach den obigen Ausführungen von dem Gebiet  $G_{\nu+1}$  durch den Querschnitt  $l_{\nu+1}$  getrennt wird, und dieses kritische Element  $E_i$  kann also von dem in Frage stehenden Element  $(z, w)$ , dessen Mittelpunkt ja den Schnitt  $a_\nu a_{\nu+1}$  vermeidet, nicht erreicht werden. Dieses Element definiert somit, in der erklärten Weise analytisch fortgesetzt, einen Funktionszweig, der nach dem Monodromiesatz in dem betrachteten Exemplar der aufgeschnittenen Vollebene *eindeutig* ist, und dieses somit auf ein Teilgebiet von  $G_{\nu+1}$  *eindeutig* und *konform* abbildet, welches von zwei, den zwei Ufern des Schnittes  $a_\nu a_{\nu+1}$  entsprechenden Kurvenstücke  $l_{\nu+1}$  begrenzt wird. Dieses Gebiet ist ein Fundamentalbereich der Umkehrfunktion  $w(z)$ , welche daselbst alle Werte  $w$ , *ausser*  $w = a_\nu$  und  $a_{\nu+1}$ , genau einmal annimmt. Die Stellen, wo sie gleich  $a_i$  ( $i \neq \nu, \nu + 1$ ) wird, befinden sich auf einem Querschnitt  $l_{\nu+1}$ , der dem Komplementärbogen  $a_{\nu+1} a_\nu$  von  $a_\nu a_{\nu+1}$  (in bezug auf  $L$ ) entspricht, und der das Fundamentalgebiet in zwei Streifengebiete teilt, entsprechend dem Innengebiet  $I$  und dem Aussengebiet  $A$ .

Indem man das betrachtete Funktionselement immer weiter gegen das Innere des Gebietes  $G_{\nu+1}$  fortsetzt, schliesst man durch Wiederholung der obigen Schlussweise, dass das genannte Gebiet aus unendlich vielen Fundamentalstreifen der soeben angegebenen Art zusammengesetzt ist, welche nebeneinander gelagert sind, und einem von unendlich vielen Exemplaren der  $w$ -Ebenen aufgebauten, sich um die Punkte  $a_\nu$  und  $a_{\nu+1}$  windenden Riemannschen Flächenstück entspricht. Mit Herrn SPEISER<sup>1</sup> wollen wir einen solchen Flächenteil als ein *logarithmisches Ende* der vorgelegten Riemannschen Fläche bezeichnen.

---

<sup>1</sup> A. SPEISER: *Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen* (Commentarii Math. Helvetici, Bd. I, 1929).

10. Die Fälle  $q = 2$  und  $q = 3$ . Im einfachsten Falle  $q = 2$  ist die Struktur der zu untersuchenden Riemannschen Fläche durch das Obige vollständig klargelegt. Das Gebiet  $G$  wird durch die Querschnitte  $l_{12}$  und  $l_{21}$  in unendlich viele linear angeordnete Streifengebiete eingeteilt, von denen zwei nebeneinander liegende je einen Fundamentalbereich bilden, wo die Umkehrfunktion  $w(z)$  alle Werte, ausser  $a_1$  und  $a_2$ , genau einmal annimmt. Die Werte  $a_1$  und  $a_2$  stellen *Picardsche Ausnahmewerte* dar, welche von  $w(z)$  überhaupt nicht angenommen werden. Man findet somit die wohlbekanntete Struktur der logarithmischen Fläche, und es lässt sich auch fast unmittelbar beweisen, dass die vorgelegte Lösung unseres Problems in diesem einfachsten Falle keine andere als

$$z = \alpha \log \frac{w - a_1}{w - a_2} + \beta$$

sein kann, wo  $\alpha$  und  $\beta$  von  $w$  unabhängige beliebige Zahlen bezeichnen. Wir kommen auf diese Frage im 4. Abschnitt zurück.

Wenn die Anzahl  $q$  der kritischen Punkte  $a_v$  gleich *drei* ist, so folgt aus Satz E, dass das negative Ende des Querschnittes  $I_1$  mit dem positiven Ende des Querschnittes  $I_2$  verbunden wird mittels einer unendlichen Anzahl von Kurvenstücke  $l_{12}$  und  $l_{21}$ , während diejenigen Kurvenstücke  $l$ , welche das Gebiet  $G_2$  über das negative Ende des Querschnittes  $I_2$  verlassen, schon zu dem Gebiet  $G_3$  führen (höchstens mit Ausnahme einer endlichen Anzahl dieser Kurvenstücke, welche noch in  $G_1$  ausmünden können). Da jeder innere Teilbogen des Querschnittes  $I_2$  nach Satz D höchstens von endlich vielen der Kurvenstücke  $l$  geschnitten werden kann, so folgt hieraus, dass unter den Kurven  $l_{12}$ , welche die Nachbargebiete  $G_1$  und  $G_2$  verbinden, eine *letzte* existieren muss; dieser Querschnitt soll im folgenden mit  $L_{12}$  bezeichnet werden.

Wir nehmen auf  $L_{12}$  einen beliebigen Punkt  $z$  und setzen das entsprechende Funktionselement  $(z, w)$  analytisch fort, indem wir den Punkt  $w$ , der sich zunächst auf dem Bogen  $a_1 a_2$  befindet, sich gegen das Innere des von  $L$  begrenzten Gebietes  $I$  bewegen lassen. Wir behaupten dass, wenn der Mittelpunkt  $w$  dieses Elementes, ohne das Gebiet  $I$  zu verlassen, sich dem kritischen Punkt  $a_3$  nähert, er dem logarithmischen Element  $E_3$  begegnen muss. Denn sonst könnte man das Element  $(z, w)$  in der ganzen längs dem Bogen  $a_1 a_2$  aufgeschnittenen Voll-ebene fortsetzen. Als Bild dieses Blattes würde sich in der  $z$ -Ebene ein die Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  verbindendes Streifengebiet ergeben, welches von dem, dem inneren Ufer des Schnittes  $a_1 a_2$  entsprechenden Kurvenstück  $L_{12}$  und von einem,

dem äusseren Ufer entsprechenden Kurvenstück  $l_{12}$  begrenzt wird. Der Querschnitt  $L_{12}$  würde also nicht der *letzte* unter den die Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  verbindenden Bogen  $l_{12}$  sein.

Es folgt aus dem zuletztgesagten, dass das betrachtete Funktionselement  $(z, w)$  das Innengebiet  $I$  auf ein von dem Querschnitt  $L_{12}$  und von den zwei, den Segmenten  $a_2a_3$  und  $a_3a_1$  der Kurve  $L$  entsprechenden, die Gebiete  $G_2$  und  $G_3$  bzw.  $G_3$  und  $G_1$  verbindenden »letzten« Querschnitten  $L_{23}$  und  $L_{31}$  begrenztes Gebiet  $K_3$  abgebildet wird, welches wir das *Kerndreieck* der betrachteten Riemannschen Fläche nennen wollen. Den drei Seiten  $L_{12}$ ,  $L_{23}$  und  $L_{31}$  des Kerndreieckes sind die drei logarithmischen Enden  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  und  $G_{31}$  angehängt, welchen in der  $w$ -Ebene drei unendlich vielblättrige Riemannsche Teilflächenstücke entsprechen, die als Windungspunkte bzw.  $a_1$  und  $a_2$ ,  $a_2$  und  $a_3$ ,  $a_3$  und  $a_1$  haben.

Die Struktur der zu untersuchenden Riemannschen Fläche ist somit auch im Falle  $q=3$  eindeutig bestimmt. Figur 1 stellt die entsprechende Einteilung des Gebietes  $G$  dar. Die mit 1, 2 und 3 bezeichneten Punkte geben die Stellen an, wo die Umkehrfunktion  $w(z)$  die drei kritischen Werte  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  annimmt.

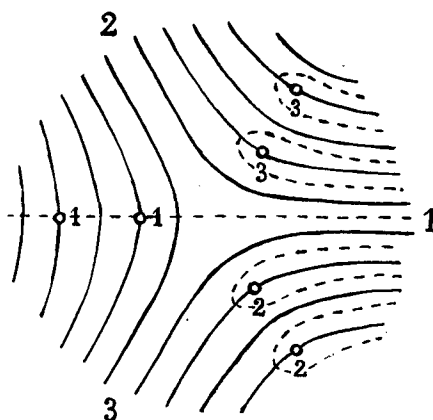


Fig. 1.

11. *Die Fälle  $q \geq 4$ .* Wenn die Anzahl der Grundpunkte  $a_\nu$  grösser als drei ist, so erhält man, wie im Falle  $q=3$ , für  $\nu=1, \dots, q$ , eine letzte Kurve  $l_{\nu\nu+1}$ , welche die Nachbargebiete  $G_\nu$  und  $G_{\nu+1}$  verbindet. Diese Querschnitte, welche mit  $L_{\nu\nu+1}$  bezeichnet werden sollen, begrenzen ein Gebiet  $K_q$ , welches wir das *Kernpolygon* der Riemannschen Fläche nennen wollen.

Wenn man das einem beliebigen Punkt  $z$  einer der Kurven  $L_{\nu\nu+1}$  entsprechendes Element  $(z, w)$  gegen das Innere  $I$  des von  $L$  begrenzten Gebietes fortsetzt, und bei Annäherung an die Punkte  $a_i$  ( $i \neq \nu, \nu+1$ ) den logarithmischen Elementen  $E_i$  begegnet, so ergibt sich das Kernpolygon als Bild des Gebietes  $I$ , und die Struktur der Riemannschen Fläche ist der im Falle  $q=3$  gefundenen Struktur vollkommen analog. Das Gebiet  $G$  setzt sich aus dem Kernpolygon  $K_q$  und den an seinen Seiten angehängten  $q$  logarithmischen Enden zusammen. Im vorliegenden Falle  $q \geq 4$  muss jedoch auch die Möglichkeit berücksichtigt

werden, dass man bei der analytischen Fortsetzung des oben fixierten Elementes  $(z, w)$  gegen das Innengebiet  $I$ , nicht an allen Punkten  $a_i$  ( $i \neq \nu, \nu + 1$ ) auf das logarithmische Element  $E_i$  stösst, sondern dass dies nur für eine gewisse Anzahl dieser Punkte zutrifft, während das betrachtete Element in den übrigen Punkten eindeutig ist. In diesem Fall wird das Kernpolygon von gewissen Kurven  $l$  in Teilpolygone zerlegt. Die Anzahl dieser Durchmesserkurven, welche notwendigerweise zwei nicht benachbarte Gebiete  $G_\nu$  verbinden, muss jedoch nach Satz E endlich sein.

Wir wollen die möglichen Einteilungen des Kernpolygons zunächst im einfachsten Falle  $q=4$  untersuchen. Als Diagonalbogen können hier nur entweder

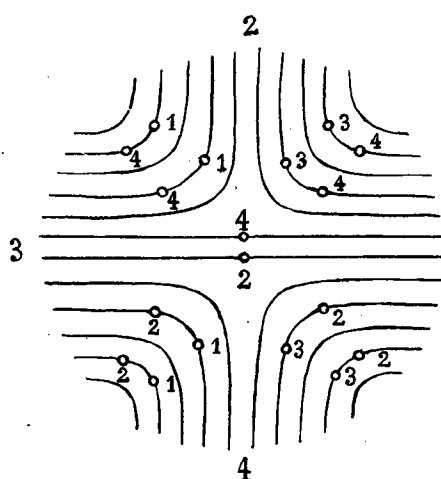


Fig. 2.

gewisse Bogen  $l_{13}, l_{31}$  oder gewisse Bogen  $l_{24}, l_{42}$  vorkommen. Die erste Möglichkeit trifft dann zu, wenn man bei analytischer Fortsetzung eines Elementes  $(z, w)$ , welches einem Punkt  $z$  der Kernpolygonseite  $L_{12}$  entspricht, im Inneren von  $I$  bei  $a_3$  dem logarithmischen Element  $E_3$  begegnet, während sich bei  $a_4$  ein eindeutiges Element ergibt. Man erhält dann als Bild des Bogens  $a_1 a_4 a_3$  einen Querschnitt  $l_{31}$ , der von dem Kernpolygon  $K_4$  ein von den Seiten  $L_{12}$  und  $L_{23}$  begrenztes Dreieck abtrennt, welches dem Inneren von  $I$  entspricht. Dem Grundpunkt  $a_4$  ist ein wohlbestimmter innerer Punkt von  $l_{31}$  zugeordnet.

Setzt man nun das entsprechende, in  $a_4$  eindeutige Funktionselement in das Aussengebiet  $A$  fort, so gelangt man zu dem Punkt  $a_2$  mit einem eindeutigen Element. Denn das Gebiet  $G_2$ , welches dem logarithmischen Element  $E_2$  entspricht, ist von dem Mittelpunkt des fortgesetzten Elementes, der das Aussengebiet  $A$  nicht verlassen darf, durch den Querschnitt  $l_{31}$  getrennt. Das Aussengebiet  $A$  wird somit auf einen von dem Querschnitt  $l_{31}$  und einem Querschnitt  $l_{13}$  begrenzten, die Gebiete  $G_1$  und  $G_3$  verbindenden Durchmesserstreifen des Kernpolygons  $K_4$  abgebildet. Durch fortgesetzte Wiederholung dieser Schlussweise findet man, dass das Viereck  $K_4$  durch ein die »Eckpunkte«  $G_1$  und  $G_3$  verbindende, nebeneinander liegende Streifengebiete, welche von gewissen Kurven  $l_{31}$  und  $l_{13}$  begrenzt werden, in zwei »Dreiecke« zerlegt wird; von denen das eine von den Polygonseiten  $L_{12}, L_{23}$  und einer der Kurven  $l_{31}$ , das

andere von den Seiten  $L_{34}$ ,  $L_{41}$  und einer Kurve  $l_{13}$  begrenzt ist. Zusammenfassend haben wir also gefunden:

*Im Falle  $q=4$  ist das Kernpolygon  $K_4$  entweder von Querschnitten  $l$  frei, oder aber es wird von gewissen  $2k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) dieser Querschnitte begrenzt, neben einander liegenden, zwei einander gegenüber liegende Eckpunkte verbindenden Streifen-gebieten in zwei Dreiecke zerlegt (welche beide dem Innengebiet  $I$  entsprechen). Figur 2 stellt den Fall  $q=4$ ,  $k=1$  dar.*

Zu vollkommen analogen Ergebnissen gelangt man schliesslich im allgemeinen Falle  $q \geq 5$ . Das Kernpolygon  $K_q$  wird entweder keine Durchmesserbogen  $l$  enthalten, oder aber es wird von einer gewissen Anzahl von *Durchmesserstreifen* in Teilpolygone eingeteilt, welche von gewissen der Seiten  $L_{\nu\nu+1}$  und gewissen Durchmesserbogen  $l$  begrenzt werden; diese Teilpolygone entsprechen sämtlich dem Inneren  $I$  des von der Jordankurve  $L$  begrenzten Gebietes. Jeder Durchmesserstreifen enthält eine ungerade Anzahl von Streifengebieten, welche abwechselnd dem Äusseren  $A$  und dem Inneren des Gebietes  $I$  entsprechen.

12. Die in diesem Abschnitt gefundenen Ergebnisse kurz zusammenfassend, können wir sämtliche möglichen Typen der zu untersuchenden Riemannschen Fläche in folgender Weise charakterisieren.

*Man zeichne ein reguläres  $q$ -Eck  $K_q$  und ziehe in ihm ein System von Durchmessern welche einander innerhalb  $K_q$  nicht schneiden. Jedem Durchmesser wird ferner eine gerade positive Zahl  $k$  zugeordnet.*

*Jeder solchen Konfiguration entspricht ein wohlbestimmter möglicher Typus der Fläche  $F_q$ . Das  $q$ -Eck entspricht hierbei dem Kernpolygon, die Seiten den Querschnitten  $L_{\nu\nu+1}$  und die Durchmesser den Durchmesserstreifen, wobei die Zahlen  $k$  angeben sollen, wie viele Querschnitte  $l$  der entsprechende Streifen enthält. Jeder Seite des Kernpolygons ist ein logarithmisches Ende angehängt.*

In den zwei einfachsten Fällen  $q=2$  und  $q=3$  ist der Typus der Fläche eindeutig bestimmt. Dagegen hat man in den höheren Fällen  $q \geq 4$  immer eine unendliche Anzahl von möglichen Flächentypen, deren Struktur durch das obige Ergebnis vollständig klargelegt worden ist.

### § 3. Struktur der Fläche $F_p$ im allgemeinen Fall.

13. Um unsere Untersuchung auf den allgemeinen Fall  $p \geq q$  auszudehnen, wo über den Grundpunkten mehrere logarithmische Elemente liegen können, wollen wir jetzt annehmen, es existiere eine analytische Funktion  $z(w)$ , welche sämtlichen S. 303 aufgezählten Bedingungen genügt. Über dem Grundpunkt  $a_v$  hat sie voraussetzungsgemäss  $\mu_v$  verschiedene logarithmische Elemente, welche im folgenden mit  $E_v^1, E_v^2, \dots, E_v^{\mu_v}$  bezeichnet werden sollen.

Beschreiben wir nun wieder um die Grundpunkte kleine Kreise vom Radius  $\varrho$ , so lassen sich die Überlegungen von Nr. 5 ohne weiteres übertragen. Man wird also zu folgendem Ergebnis gelangen:

*Das logarithmische Element  $E_v^i$  der Funktion  $z(w)$  bildet die unendlich vielblättrige universelle Überlagerungsfläche des punktierten Kreises  $0 < |w - a_v| < \varrho$  auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $G_v^i$  der  $z$ -Ebene ab, welches von dem Wertgebiet  $G$  der Funktion von einem der Kreisperipherie  $|w - a_v| = \varrho$  entsprechenden Querschnitt  $\Gamma_v^i$  abgetrennt wird. Diese Querschnitte, deren Anzahl  $p = \sum_{v=1}^q \mu_v$  beträgt, begrenzen zusammen ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet  $G_0$  von  $G$ .*

14. Die Einteilung des Gebietes  $G$  in Fundamentalbereiche geschieht genau wie im oben behandelten Spezialfall  $p = q$ . Durch die Grundpunkte  $a$  wird eine geschlossene Kurve  $L$  gezogen, auf welcher jene Punkte bei einem positiven Umlauf in der Reihenfolge  $a_1, \dots, a_q$  angeordnet sind. Als Bilder dieser Kurve erscheinen in der  $z$ -Ebene eine unendliche Anzahl von Querschnitten des Gebietes  $G$ , welche je zwei der Gebiete  $G_v^i$  verbinden; ein Querschnitt, der von  $G_h^i$  ausgeht und in  $G_k^j$  mündet, soll mit  $l_{hk}^{ij}$  bezeichnet werden. Wenn der Punkt  $z$  ihn in der erwähnten Richtung durchläuft, so bewegt sich der Bildpunkt  $w$  auf  $L$  von  $w = a_h$  bis  $w = a_k$ , und zwar gilt wieder (vgl. S. 309), dass der letztgenannte Punkt erreicht wird, ehe  $w$  einen vollen Umlauf auf  $L$  vollzogen hat. Es ist somit  $k < h + q$ ; falls  $k > h + 1$ , so werden die Werte  $a_{h+1}, \dots, a_{k-1}$  von der Umkehrfunktion  $w(z)$  in je einem Punkt des betrachteten Querschnitts angenommen. — Aus Obigem folgt insbesondere, dass die Querschnitte  $l_{hk}^{ij}$  nie zwei über einem und demselben Grundpunkt  $a_v$  liegende logarithmische Elemente verbinden können.

Die Überlegungen auf S. 310 zeigen ferner, dass es unter den Kurven  $l_{hk}^{ij}$ , welche

im Innern von  $G$  sich nicht begegnen können und sich gegen den Rand  $I$  häufen, höchstens eine endliche Anzahl solcher gibt, die zwei nicht benachbarte Gebiete  $G_v^r$  verbinden. Es folgt hieraus, dass zwei Nachbargebiete  $G_h^i$  und  $G_k^j$  immer zwei *verschiedenen* Grundpunkten zugeordnet sind ( $h \neq k$ ), und man findet somit folgende notwendige Bedingung für die betrachtete Riemannsche Fläche:

F. *Die Anzahl der über ein und demselben Grundpunkt  $a_v$  liegenden logarithmischen Elementen ist nicht grösser als die halbe Anzahl sämtlicher solcher Elemente:*

$$(I) \quad \mu_v \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \mu_i = \frac{p}{2}.$$

Ferner schliesst man, dass wenn  $\mu_v$  ihren maximalen Wert  $\frac{p}{2}$  erreicht, je zwei der Gebiete  $G_v^i$  von einem Gebiet  $G_\sigma^j$  ( $\sigma \neq v$ ) getrennt werden.

Unter den unendlich vielen Querschnitten  $l_{hk}^{ij}$ , welche zwei Nachbargebiete  $G_h^i$  und  $G_k^j$  verbinden, existiert ein *letzter*, welche mit  $L_{hk}^{ij}$  bezeichnet wird. Die  $p$  Querschnitte  $L_{hk}^{ij}$  begrenzen ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $K_p$ , welches wieder *Kernpolygon* der Riemannschen Fläche genannt wird.

*Die Riemannsche Fläche  $F_p$  besteht aus einem Kernpolygon  $K_p$ , dessen Seiten  $L_{hk}^{ij}$  ( $h \neq k$ ) je ein logarithmisches Ende  $G_{hk}^{ij}$  angehängt ist.  $G_{hk}^{ij}$  setzt sich aus unendlich vielen linear angeordneten Fundamentalbereichen zusammen, in welchen die Funktion  $w(z)$  alle Werte, ausser  $w = a_h$  und  $w = a_k$ , genau einmal annimmt.*

15. Wir kommen nun zu der Frage, wie sich das *Kernpolygon*  $K_p$  aus Fundamentalbereichen zusammensetzt. Falls  $p = q$ , so kann es eintreffen, dass das Kernpolygon von den Querschnitten  $l$  vollkommen frei ist (vgl. S. 313). Dies ist nicht mehr möglich, wenn  $p > q$ . Denn sonst würde das Innere von  $K_p$  entweder dem von der geschlossenen Kurve  $L$  begrenzten Innengebiet  $I$  oder dem Aussengebiet  $A$  entsprechen, und die Eckpunkte des Kernpolygons würden den  $q$  Grundpunkten  $a_v$  eineindeutig zugeordnet sein, was unmöglich ist, da ja die Anzahl jener Eckpunkte gleich  $p > q$  ist. Man ersieht hieraus, dass  $K_p$  wenigstens so weit von gewissen Diagonalbogen  $l$  zerlegt wird, bis die Eckpunkte eines jeden Teilpolygons *verschiedenen* Grundpunkten  $a_v$  zugeordnet sind. Jedes Teilpolygon entspricht entweder dem Gebiet  $I$  oder dem Gebiet  $A$ . In jenem Fall folgen die Eckpunkte (bei einem positiven Umlauf um das Teilpolygon) aufeinander in derselben Reihenfolge, wie die entsprechenden Grundpunkte (bei

einem positiven Umlauf um die Kurve  $L$ ); in diesem Fall wird die Reihenfolge umgekehrt. Wenn ein Teilpolygon weniger als  $q$  Seiten hat, so liegen auf gewissen Seiten einfache Stellen, wo die fehlenden Werte  $a_v$ , welche keinem Eckpunkt des betrachteten Teilpolygons zugeordnet sind, von der Funktion  $w(z)$  angenommen werden.

Zwei neben einander liegende Teilpolygone (deren Seitenanzahl wenigstens drei ist), sind voneinander durch ein »Durchmesserband« getrennt, welches aus einer gewissen Anzahl von, den Gebieten  $I$  und  $A$  abwechselnd zugeordneten,

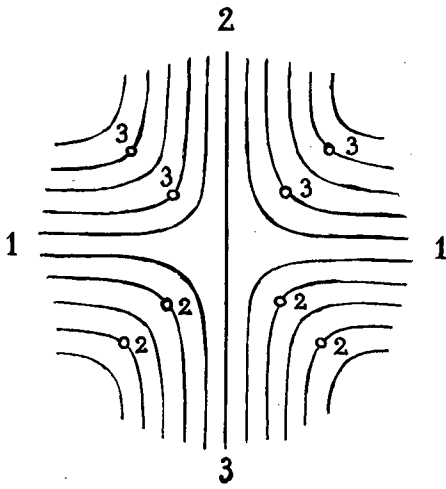


Fig. 3.

nebeneinander gelagerten Streifen zusammengesetzt ist. Die Anzahl der Streifen ist ungerade, falls die benachbarten Teilpolygone beide entweder dem Gebiete  $I$  oder dem Gebiete  $A$  entsprechen. Wenn sie dagegen verschiedenen Gebieten zugeordnet sind, so besteht der Durchmesser aus einer geraden Anzahl von Streifen, wobei auch der Fall zu berücksichtigen ist, wo diese Anzahl gleich Null ist, d. h. wo der Durchmesser sich auf einen einzigen Querschnitt  $l$  reduziert. — Figur 3 stellt den zuletzt genannten Fall für  $p=4$  ( $\mu_1=2, \mu_2=\mu_3=1$ ) dar.

Zusammenfassend haben wir somit folgendes Ergebnis:

Die Riemannsche Fläche  $F_p$  besteht aus einem Kernpolygon  $K_p$ , welches von  $p = \sum_{v=1}^q \mu_v$  Seiten  $L_{hk}^{ij}$  (Querschnitten der Fläche) begrenzt wird. An jede Seite ist ein logarithmisches Ende geheftet. Die Eckpunkte von  $K_p$  sind den logarithmischen Elementen  $E_v^i$  eineindeutig zugeordnet, wobei zwei benachbarte Eckpunkte nie zwei über ein und demselben Grundpunkt  $a_v$  liegenden Windungspunkten entsprechen.

Der Aufbau des Kernpolygons lässt sich schematisch auf folgende Weise erklären:

Man zeichne ein reguläres  $p$ -Eck  $K_p$  und ordne seine Eckpunkte den Grundpunkten  $a_v$  zu, so dass je einem Grundpunkt  $a_v$   $\mu_v$  verschiedene, nicht benachbarte Eckpunkte entsprechen. In  $K_p$  wird dann ein System von Durchmessern gezogen, welche einander innerhalb  $K_p$  nicht schneiden und von denen  $K_p$  in Teilpolygone



folgender Art eingeteilt wird. Die Eckpunkte eines jeden Teilpolygons sind lauter verschiedenen Grundpunkten  $a_v$  zugeordnet, so dass sie bei einem positiven Umlauf entweder in derselben oder in der umgekehrten Ordnung aufeinander folgen wie die entsprechenden Grundpunkte  $a_v$  bei einem positiven Umlauf auf  $L$ ; wir sagen, das Teilpolygon gehöre der Klasse I oder der Klasse A an, jenachdem jener oder dieser Fall vorliegt. Jeder Durchmesser wird schliesslich mit einer positiven ganzen Zahl versehen (welche angibt wie viele Querschnitte  $l$  der entsprechende Durchmesserstreifen der Riemannschen Fläche enthält), und zwar soll diese Zahl gerade oder ungerade sein, jenachdem die an den Durchmesser grenzenden Teilpolygone derselben oder verschiedenen Klassen angehören.

16. Es stellt sich die Frage, ob ein diesen Bedingungen genügendes Kernpolygon immer konstruiert werden kann, wie immer die ganzen, positiven Zahlen  $\mu_1, \dots, \mu_q$  ( $q \geq 2$ ) gegeben sind. Dass diese Konstruktion mindestens das Bestehen der Bedingung (1) S. 317 erfordert, haben wir schon oben gesehen. Im Falle  $q=2$  muss dieser Relation noch folgende notwendige Bedingung hinzugefügt werden:

*Falls  $q=2$ , so ist  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ , und die Fläche reduziert sich auf die logarithmische Fläche.*

Denn wäre die Anzahl  $\mu_1 + \mu_2 = p$  der logarithmischen Elemente grösser als zwei, so würde das Kernpolygon  $p > 2$  Eckpunkte haben, welche den zwei Grundpunkten  $a_1$  und  $a_2$  zugeordnet sein würden. Die Zerlegung von  $K_p$  in Teilpolygone, deren Eckpunkte je verschiedenen Grundpunkten entsprechen, ist offenbar unter diesen Bedingungen unmöglich, woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt.

In den übrigen Fällen,  $q > 2$ , erweist sich dagegen die notwendige Bedingung (1) auch als *hinreichend*, denn es gilt der Satz:

*Wenn  $q > 2$ , so lässt sich ein allen oben angegebenen Bedingungen genügendes Kernpolygon konstruieren, wie immer die positiven ganzen Zahlen  $\mu_v$  unter Berücksichtigung der Beziehung (1) gewählt werden.*

**Beweis.** — Die gegebenen Zahlen  $\mu_v$  werden zunächst nach wachsenden Beträgen geordnet; es sei  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_q$ . Da die Behauptung evident ist, falls  $\mu_1 = \dots = \mu_q = 1$  ist, so können wir  $\mu_q > 1$  annehmen. Wegen (1) ist andererseits  $\mu_q \leq \frac{p}{2}$ , und, da  $q \geq 3$ ,  $\mu_i < \frac{p}{2}$  für  $i < q$ .

Wir betrachten nun die Zahlen  $\mu_1, \dots, \mu_{q-1}, \bar{\mu}_q \equiv \mu_q - 1 > 0$ , deren Summe gleich  $p - 1$  ist. Nach Obigem ist

$$(2) \quad \bar{\mu}_q \leq \frac{p}{2} - 1 < \frac{p-1}{2}, \quad \text{und} \quad \mu_i \leq \frac{p-1}{2} \quad (i < q).$$

Nehmen wir nun an, dass der zu beweisende Satz richtig ist, wenn die Summe der gegebenen Zahlen  $\mu$  gleich  $p - 1$  ist und die der Beziehung (1) entsprechende notwendige Bedingung erfüllt ist, so können wir ein den Zahlen  $\mu_1, \dots, \mu_{q-1}, \bar{\mu}_q$  entsprechendes Kernpolygon  $K_{p-1}$  konstruieren, welches sämtliche geforderten Eigenschaften besitzt, denn die erwähnte notwendige Bedingung ist gemäss (2) sicher in Kraft. Wenn nun dieses Polygon  $K_{p-1}$  einmal gegeben ist, so erfolgt die Konstruktion des geforderten  $K_p$  folgendermassen. Weil das Polygon  $K_{p-1}$  genau  $\mu_q = \mu_q - 1 < \frac{p-1}{2}$  verschiedene Eckpunkte hat, welche dem Grundpunkt  $a_q$  zugeordnet sind, so gibt es unter seinen übrigen Eckpunkten mindestens ein Paar von Punkten, welche einander benachbart sind. Wir betrachten die von zwei solchen, gewissen von  $a_q$  verschiedenen Grundpunkten zugeordneten Eckpunkten begrenzte Seite von  $K_{p-1}$  und fügen an diese Seite dem Polygon  $K_{p-1}$  ein neues Dreieck hinzu. Der freie Eckpunkt des so entstandenen Polygons  $K_p$  wird dem Grundpunkt  $a_q$  zugeordnet, und jener Seite von  $K_{p-1}$ , welche ein Durchmesser von  $K_p$  ist, wird eine gerade oder ungerade Nummer zuerteilt, jenachdem das neue Dreieck und das an den neuen Durchmesser grenzende Teilpolygon von  $K_{p-1}$  zu derselben oder zu verschiedenen Klassen gehören. Das Polygon  $K_p$  erfüllt offenbar alle geforderten Bedingungen.

Die Konstruktion von  $K_p$  ist hierdurch auf diejenige von  $K_{p-1}$  zurückgeführt worden. Wiederholt man nun das obige Rekursionsverfahren  $p - q$  mal, so gelangt man zu dem einfachsten Fall  $p = q$ , wo man für  $K_p$  ein von Durchmessern freies  $q$ -Eck nehmen kann. Hierdurch ist unser Satz vollständig bewiesen.

17. Es sei noch ausdrücklich hervorgehoben, dass die Struktur der Riemannschen Fläche  $F_p$  nur in den zwei einfachsten Fällen,  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  und  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ , wo das Kernpolygon bzw. ein Zweieck und ein Dreieck ist, *eindeutig* bestimmt ist. In allen übrigen Fällen,  $p > 3$ , lassen sich unendlich viele verschiedene Typen des Kernpolygons angeben, denn die Anzahl der die Durchmesser konstituierenden Streifen kann ja beliebig gewählt werden, wozu

noch kommt, dass schon die Durchmesser in verschiedenen Weisen gezogen werden können.

#### § 4. Uniformisierung der Riemannschen Fläche $F_p$ .

18. Unter der Annahme, dass eine Lösung  $z(w)$  des S. 303 formulierten Problems existiert, haben wir in den vorhergehenden Abschnitten gewisse *notwendige Bedingungen* für die entsprechende Riemannsche Fläche  $F_p$  aufgestellt. Unter derselben Voraussetzung werden wir im vorliegenden Paragraphen die Relation  $z = z(w)$  *uniformisieren*; dies wird mit Hilfe der im ersten Paragraphen besprochenen linear polymorphen Funktionen  $\zeta(w; a_1, \dots, a_q)$  geschehen. Durch die Uniformisierung wird die Grundlage gewonnen, auf welcher dann der Nachweis der Existenz der gesuchten Lösung, sowie eine nähere Untersuchung ihrer Eigenschaften erfolgen kann.

Es sei also, wie vorher,  $z(w)$  eine analytische Funktion welche sämtlichen S. 303 aufgezählten Bedingungen genügt. Durch sie wird ihre über der  $w$ -Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche  $F_p$  auf ein einfach zusammenhängendes, schlichtes Gebiet  $G$  der  $z$ -Ebene umkehrbar eindeutig abgebildet. Neben  $F_p$  betrachten wir jetzt die universelle Überlagerungsfläche  $F_q^{(\infty)}$  der in den Grundpunkten  $a_v$  punktierten  $w$ -Ebene. Diese Fläche, welche gleichzeitig eine Überlagerungsfläche von  $F_p$  ist, haben wir schon im 1. Paragraphen einer vorbereitenden Betrachtung unterzogen, und wir erinnern deshalb nur kurz an diejenigen ihrer Eigenschaften, welche für das hier folgende von Bedeutung sind.

Im Falle  $q=2$  ist  $F_q^{(\infty)}$  mit der logarithmischen Fläche identisch, welche über  $w = a_1$  und  $w = a_2$  je einen logarithmischen Windungspunkt hat und welche durch die Funktion

$$\zeta(w; a_1, a_2) = \log \frac{w - a_1}{w - a_2}$$

auf die offene Vollebene  $|\zeta| < \infty$  konform abgebildet wird.

Im Falle  $q > 2$  ist die Anzahl der über den Punkten  $a_v$  gelagerten logarithmischen Windungspunkte der Fläche  $F_q^{(\infty)}$  unendlich. Diese Fläche wird durch eine linear polymorphe Funktion  $\zeta(w; a_1, \dots, a_q)$  auf den Einheitskreis  $|\zeta| < 1$  eineindeutig und konform bezogen. Die unendlich vielen Zweige von  $\zeta$  permutieren sich gemäss den linearen Transformationen einer gewissen fuchschen Gruppe  $S$ ; als Fundamentalsubstitutionen von  $S$  können  $q$  (parabolische)

Substitutionen  $S_1, \dots, S_q$  gewählt werden, welche einem Umlauf um je einen der Grundpunkte  $a_v$  entsprechen. Die Umkehrfunktion  $w = \omega(\zeta)$  ist für  $|\zeta| < 1$  eindeutig und automorph. Als Fundamentalbereich hat sie ein von  $2(q-1)$  Orthogonalbogen der Peripherie  $|\zeta| = 1$  begrenztes Polygon, deren Spitzen sämtlich auf dem Einheitskreis belegen sind.

Wir bilden nunmehr die zusammengesetzte Funktion

$$z(\omega(\zeta)) = \varphi(\zeta).$$

Da die Funktion  $\omega$  die kritischen Punkte  $w = a_v$  vermeidet, so ist  $\varphi(\zeta)$  innerhalb des Einheitskreises unbeschränkt fortsetzbar und stellt somit nach dem Monodromiesatz eine daselbst *eindeutige* Funktion dar. *Hiermit haben wir für die Funktion  $z(w)$  die in Aussicht gestellte Parameterdarstellung*

$$(3) \quad w = \omega(\zeta), \quad z = \varphi(\zeta)$$

*gewonnen, wo  $\omega$  und  $\varphi$  innerhalb des Einheitskreises eindeutige Funktionen sind.*

Die erste der Funktionen (3) ist eine in bezug auf die fuchssche Gruppe  $S$  automorphe Funktion. Was nun die zweite Funktion,  $\varphi(\zeta)$ , betrifft, so beweist man durch eine wohlbekannte Überlegung, die hier unterdrückt werden kann, dass sie entweder eine *einwertige* Funktion oder eine in bezug auf eine gewisse Untergruppe  $\Sigma$  der Gruppe  $S$  *automorphe* Funktion ist, und zwar wollen wir zeigen, dass jener Fall für  $q=2$ , dieser für  $q>2$  eintritt.

Sei zunächst  $q=2$ . Angenommen dass  $\varphi(\zeta)$  für  $|\zeta| < \infty$  nicht einwertig ist, so ist sie nach Obigem periodisch mit einer Periode  $k \cdot 2\pi i$ , wo  $k$  eine natürliche Zahl ist. Wie auf Seite 301, lässt sich dann  $t = \left(\frac{w - a_1}{w - a_2}\right)^{1/k} = e^{\frac{\zeta}{k}}$  als neue uniformisierende Variable einführen, und man schliesst, dass die Funktion  $\varphi(k \log t)$  eine im Ringgebiete  $0 < |t| < \infty$  eindeutige und einwertige Funktion ist. Da sie dann gemäss dem Cauchy-Riemannschen Satz auch in  $t=0$  und  $t=\infty$  von rationalem Charakter ist, so muss sie sich auf eine lineare Transformation von  $t$ , und die Funktion  $z(w)$  sich also auf eine lineare Transformation von  $\left(\frac{w - a_1}{w - a_2}\right)^{1/k}$  reduzieren, was unmöglich ist, weil ja  $z(w)$  voraussetzungsgemäss unendlich vieldeutig ist.

Es bleibt daher nur die Möglichkeit übrig, dass  $\varphi(\zeta)$  einwertig ist. Als eine in der ganzen endlichen Ebene eindeutige und einwertige Funktion muss

sie sich dann auf eine lineare Transformation von  $\zeta = \log \frac{w - a_1}{w - a_2}$  reduzieren, und wir haben somit das Ergebnis:

*Im Falle  $q = 2$  ist die Funktion  $z = z(w)$  eine linear gebrochene Funktion von  $\log \frac{w - a_1}{w - a_2}$ .*

Durch das Obige ist insbesondere hervorgegangen, dass die Anzahl der Windungspunkte der Fläche  $F_p$  im Falle  $q = 2$  nicht *zwei* übersteigen kann, ein Ergebnis, welches schon (S. 319) durch andere Betrachtungen gewonnen wurde.

Da unser Problem für  $q = 2$  eine vollständige Lösung gefunden hat, können wir im folgenden ein für alle Mal annehmen, dass die Anzahl der gegebenen Grundpunkte  $a_v$  mindestens gleich drei ist. Um jetzt zu beweisen, dass, wie oben behauptet wurde, die Funktion  $\varphi(\zeta)$  in diesem allgemeinen Fall ( $q > 2$ ) in dem Einheitskreis  $|\zeta| < 1$  nicht einwertig sein kann, genügt es zu bemerken, dass  $\varphi(\zeta)$  sonst eine *schlichte* Abbildung von  $|\zeta| < 1$  auf dem Gebiet  $G$  vermitteln würde. Wegen dieser eindeutigen Zuordnung der Werte  $z$  und  $\zeta$  würde dann die Anzahl der logarithmischen Elemente der zwei Funktionen  $\zeta = \zeta(w; a_1, \dots, a_q)$  und  $z = \varphi(\zeta(w; a_1, \dots, a_q)) \equiv z(w)$  dieselbe, also *unendlich* sein, was jedoch nicht möglich ist, weil die letzte Funktion nach Voraussetzung nur endlich viele solche Elemente besitzt.

Da also die Funktion  $\varphi(\zeta)$  (für  $q > 2$ ) nicht einwertig ist, muss sie nach den obigen Ausführungen (S. 322) automorph sein in bezug auf eine Gruppe  $\Sigma$  von linearen Transformationen, welche in  $S$  als Untergruppe enthalten ist (und sich nicht auf die identische Substitution reduziert). Diese Untergruppen  $\Sigma$  sollen im nachfolgenden Paragraphen bestimmt werden.

### § 5. Bestimmung der Untergruppen $\Sigma$ .

19. Unter Anwendung der in den 2. und 3. Paragraphen erzielten Ergebnisse über die Struktur der Riemannschen Fläche  $F_p$  kann der Fundamentalbereich  $B_\Sigma$  der automorphen Funktion  $\varphi(\zeta)$  konstruiert werden. Die Seiten dieses Bereiches, welcher aus einer gewissen Anzahl von Fundamentalpolygonen  $B_S$  der fuchsschen Funktion  $\omega(\zeta)$  zusammengesetzt ist, werden aufeinander bezogen sein vermittels gewisser linearen Transformationen, welche zur Gruppe  $S$  der Funktion  $\omega(\zeta)$  gehören. Diese Transformationen erzeugen die Untergruppe  $\Sigma$ .

Um zunächst den Fundamentalbereich  $B_{\Sigma}$  zu konstruieren, sei daran erinnert, dass die automorphe Funktion  $\varphi(\zeta)$  entsteht durch Zusammensetzung der Funktion  $z(w)$ , welche die Fläche  $F_p$  auf das schlichte Gebiet  $G$  abbildet, mit der automorphen Funktion  $\omega(\zeta)$ , welche den Einheitskreis  $|\zeta| < 1$  auf die universelle Überlagerungsfläche der in den Grundpunkten  $a_v$  punktierten  $w$ -Ebene abbildet:

$$\varphi(\zeta) = z(\omega(\zeta)).$$

Die Umkehrfunktion  $\zeta = \varphi^{-1}(z) = \zeta(w(z); a_1, \dots, a_q)$  ist eine linear polymorphe Funktion, welche innerhalb ihres Existenzgebietes  $G$  diejenigen Punkte  $z_a$  als kritische Stellen hat, wo die Funktion  $w(z)$  (die Umkehrfunktion von  $z(w)$ ) einen der Werte  $a_1, \dots, a_q$  annimmt. Die Verteilung dieser Stellen ist in den Paragraphen 2 und 3 vollständig klargelegt worden. — Man könnte die Funktion  $\varphi^{-1}(z)$  auch als diejenige Funktion erklären, welche die universelle Überlagerungsfläche des in den genannten Stellen punktierten Gebietes  $G$  auf den Kreis  $|\zeta| < 1$  abbildet.

Wir schneiden nun das Gebiet  $G$  längs Schnitten auf, welche die kritischen Stellen  $z_a$  mit dem Rande  $\Gamma$  verbinden, ohne einander innerhalb  $G$  zu schneiden; das aufgeschnittene, einfach zusammenhängende Gebiet sei mit  $\bar{G}$  bezeichnet. Bei der Wahl der Schnitte herrscht sonst vollkommene Willkür. Man kann entweder jede Stelle  $z_a$  durch einen besonderen Schnitt mit  $\Gamma$  verbinden, oder auch ein und denselben Schnitt durch mehrere Punkte  $z_a$  führen (letzteres führt im allgemeinen zu einer einfacheren Gestalt des Fundamentalbereichs  $B_{\Sigma}$ ). Fixieren wir nun in einem beliebigen inneren Punkt  $z$  von  $G$  einen Zweig der Funktion  $\varphi^{-1}(z)$ , und setzen wir diesen innerhalb  $G$  analytisch fort, so erhält man als Bild von  $\bar{G}$  in der  $\zeta$ -Ebene ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet  $B_{\Sigma}$  des Einheitskreises, welches einen Fundamentalbereich der automorphen Funktion  $\varphi(\zeta)$  darstellt.

$B_{\Sigma}$  setzt sich aus einer unendlichen Anzahl von Fundamentalbereichen  $B_S$  der Funktion  $\omega(\zeta)$  zusammen, und zwar auf eine Weise welche, nachdem die Schnitte einmal festgelegt worden sind, durch die Ergebnisse des 3. Paragraphen über die Struktur der betrachteten Riemannschen Fläche für jeden Typus dieser Fläche eindeutig bestimmt ist. In der Tat haben wir dort eine Einteilung von  $G$  in Fundamentalbereiche  $B_w$  der Funktion  $w(z)$  vorgenommen; jedem Bereich  $B_w$  entspricht ein volles Exemplar der  $w$ -Ebene, und somit ein Fundamentalbereich  $B_S$  der Funktion  $\omega(\zeta)$ . Nun ist die Art und Weise, in welcher sich das

Gebiet  $\bar{G}$  aus den Stücken der Bereiche  $B_w$  zusammensetzt, der Anordnung der Bildstücke  $B_S$  in dem Bereich  $B_\Sigma$  vollkommen isomorph, und die Kenntnis der ersteren Konfiguration erlaubt die letztere unmittelbar anzugeben.

$B_\Sigma$  wird von den Bildkurven der Schnittufer begrenzt. Den zwei Ufern eines von einem Punkt  $z_a$  direkt zum Rande  $I'$  führenden Schnittes entsprechen zwei Querschnitte des Einheitskreises, welche von dem auf der Peripherie  $|\zeta|=1$  belegenen Bildpunkt  $\zeta_a$  von  $z_a$  ausgehen. Falls auf einem Schnitt mehrere Punkte  $z_a$  liegen, so entsprechen den Segmenten des Schnittes, welche je zwei konsekutive Punkte  $z_a$  verbinden, je zwei Querschnitte des Einheitskreises, wobei einem Punkte  $z_a$ , der nicht Anfangspunkt des Schnittes ist, zwei verschiedene Punkte  $\zeta_a$  der Peripherie (entsprechend den zwei Schnittufern) zugeordnet sind. Die »Eckpunkte«  $\zeta_a$  von  $B_\Sigma$  sind gleichzeitig Eckpunkte der Polygone  $B_S$ , und zwar kann man auf Grund der soeben besprochenen Isomorphie sofort angeben, welcher oder welche Randpunkte  $\zeta_a$  einem vorgegebenen  $z_a$  zugeordnet sind. Bewegt sich nun der Punkt  $z$  in positiver Umlaufrichtung auf einer innerhalb  $\bar{G}$  verlaufenden Kurve, welche zwei einander gegenüber liegende Punkte eines Schnittsegmentes verbindet, so erfährt die Funktion  $\zeta = \varphi^{-1}(z)$  diejenige wohlbestimmte Substitution der Gruppe  $S$ , welche die dem einen Ufer des Schnittsegmentes entsprechende Seite von  $B_\Sigma$  in die Bildseite des anderen Ufers führt. Diese Substitution lässt sich für jedes Seitenpaar leicht bestimmen als Potenzprodukt der  $q$  Fundamentalsubstitutionen der Gruppe der automorphen Funktion  $\omega(\zeta)$ . Die Menge der so erhaltenen Substitutionen erzeugt die Gruppe  $\Sigma$ . Diese ist vom Geschlechte Null, indem die schlichte Fläche  $G$ , welche entsteht, wenn die Schnittufer zusammengefügt werden, *einfach* zusammenhängend ist. Da die Anzahl der Fundamentalsubstitutionen *unendlich* ist, so gehört  $\varphi(\zeta)$  jener Klasse automorpher Funktionen an, welche von Poincaré als »fuchsoiden Funktionen« bezeichnet worden sind.

20. Die Konstruktion der Untergruppen  $\Sigma$  gestaltet sich besonders einfach, wenn man die Schnitte den im 2. und 3. Paragraphen eingeführten Kurvenstücken  $l$  entlang führt, und zwar empfiehlt es sich hierbei die geschlossene, durch die Grundpunkte  $a_v$  gezogene Linie  $L$ , als deren Bilder die Kurvenstücke  $l$  erscheinen, so festzulegen, dass das von ihr begrenzte Innengebiet  $I$  durch die uniformisierende Funktion  $\zeta = \zeta(w; a_1, \dots, a_q)$  auf ein von  $q$  Orthogonalkreisbogen des Kreises  $|\zeta|=1$  gebildetes Spitzenpolygon  $B_i$  abgebildet wird. Dem äusseren Gebiet  $A$  wird dann ebenfalls ein Spitzenpolygon  $B_a$  entsprechen, und das

Polygon  $B_i + B_a$  stellt einen Fundamentalbereich  $B_S$  von  $\omega(\zeta)$  dar. Der Fundamentalbereich  $B_S$  lässt sich dann mittels der Polygone  $B_i$  und  $B_a$  in nachstehender Weise aufbauen.

**Regel zur Bestimmung des Fundamentalbereichs  $B_S$ .** — Man wähle in dem Einheitskreis  $|\zeta| < 1$  ein beliebiges der Polygone  $B_i, B_a$ , z. B. ein Polygon  $B_i$ , und füge ihm zwei oder mehrere der unmittelbar angrenzenden Polygone  $B_a$  zu. Die Anzahl dieser  $B_a$  ist höchstens gleich der Seitenzahl  $q$  von  $B_i$ ; falls sie kleiner als  $q$  ist, so bezeichnen wir jede Seite (bzw. jeden Eckpunkt) von  $B_i$ , die keinem der hinzugefügten  $B_a$  angehört, als *frei*. Ein aus einer oder mehreren aufeinander folgenden freien Seiten bestehender, an eine nicht freie Seite angrenzender Teil der Berandung von  $B_i$  heisse ein »freies Randstück« von  $B_i$ .

Man vereinige nun in beliebiger Weise sämtliche freie Seiten von  $B_i$  zu freien Randstücken, welche keine inneren Punkte gemeinsam haben. Von den zwei begrenzenden Eckpunkten  $h$  und  $k$  eines Randstückes<sup>1</sup> heisse derjenige ( $h$ ) »Anfangspunkt«, der nicht frei ist; falls beide Eckpunkte nicht frei sind, wird der Anfangspunkt ( $h$ ) beliebig gewählt; der Punkt  $k$  wird »Endpunkt« des Randstückes genannt. Jedem Randstück  $hk$  wird nun das »spiegelbildliche« Randstück  $hk$  desjenigen der zugefügten Polygone  $B_a$  zugeordnet, welches den Anfangspunkt  $h$  als Eckpunkt hat. Jeder freien Seite von  $B_i$  wird hierdurch eine bestimmte »spiegelbildliche« Seite eines gewissen der Polygone  $B_a$  zugeordnet, und es existiert eine wohlbestimmte, nach den obigen Festsetzungen unmittelbar anzugebende Substitution der Gruppe  $S$ , welche zwei zugeordnete Seiten in einander überführt.

Jedes der hinzugefügten Polygone  $B_a$  hat mindestens *eine* Seite, welche durch das geschilderte Verfahren noch nicht in Anspruch genommen worden ist (die Gesamtanzahl solcher noch freien Seiten der Polygone  $B_a$  ist mindestens gleich  $q$ ). Es wird nun, für jedes der Polygone  $B_a$ , an eine oder mehrere der freien Seiten jeweils das unmittelbar angrenzende Polygon  $B_i$  angehängt. Die übrig bleibenden freien Seiten der betrachteten  $B_a$  werden wieder zu freien Randstücken vereinigt, und jedem solchen Randstück wie oben, ein »spiegelbildliches«, zu den neu hinzugefügten Polygonen  $B_i$  gehöriges Randstück zugeordnet. Hierdurch erhält auch jede freie Seite der  $B_a$  eine wohlbestimmte Seite

<sup>1</sup> Im folgenden soll ein dem Grundpunkt  $a_\nu$  entsprechender Eckpunkt der Kreisbogenpolygone  $B_a$  und  $B_i$  kurz mit  $\nu$  bezeichnet werden.



dieser  $B_i$  als Gegenstück, und diese Zuordnung legt wieder eine wohlbestimmte Substitution der Gruppe  $S$  fest.

Dieses Verfahren wird nun in infinitum fortgesetzt, jedoch so dass, nach einer *endlichen* Anzahl von Schritten, jedem Polygon des äussersten Kranzes, welcher allein freie Seiten besitzt, immerfort nur *ein einziges* neues Polygon  $B$  angehängt wird. Das unendlich vielseitige Polygon  $B_\Sigma$ , welches als Resultat dieser Konstruktion entsteht, wird dann eine endliche Anzahl ( $p$ ) kettenartiger Enden («logarithmischer Enden») besitzen, welche aus einer unendlichen Anzahl von nebeneinander gelagerten Polygonen  $B_i, B_a$  bestehen. Nach Abtrennung dieser Enden bleibt noch ein aus einer endlichen Anzahl dieser Polygone zusammengesetztes »Kernpolygon« übrig.

Die zu den einander zugeordneten Seiten von  $B_\Sigma$  gehörigen Substitutionen der Gruppe  $S$ , welche durch die obige Konstruktion mitbestimmt wurden, sind erzeugende Substitutionen der Gruppe  $\Sigma$ .<sup>1</sup>

21. Es ist einleuchtend dass, nachdem die Schnitte längs den Linien  $l$  hineingetragen worden sind, jedem der S. 318 charakterisierten Flächentypen  $F_p$  ein wohlbestimmtes, nach der obigen Regel aufgebautes Polygon  $B_\Sigma$  entspricht. Zu bemerken ist aber, dass die Schnitte auf verschiedene Weisen längs den Kurvenstücken  $l$  gezogen werden können. Je nach der Wahl des Schnittsystems wird also ein und demselben Flächentypus  $F_p$  verschiedene Polygone  $B_\Sigma$  entsprechen. Diese Bereiche  $B_\Sigma$  gehen aber durch »erlaubte Änderung« aus einander hervor, und haben sämtlich eine gemeinsame Gruppe  $\Sigma$ , welche durch den betreffenden Flächentypus  $F_p$  eindeutig bestimmt ist.

Umgekehrt gilt auch, dass jeder Gruppe  $\Sigma$ , welche durch die obige Konstruktion erzeugt werden kann, eine mit einer wohlbestimmten der auf S. 318 betrachteten Flächentypen  $F_p$  topologisch äquivalente Fläche entspricht. Diese wird einfach dadurch erhalten, dass je zwei Randpunkte von  $B_\Sigma$ , welche durch

---

<sup>1</sup> Zur Erläuterung der in obiger Konstruktion vorgenommenen speziellen Massregeln sei folgendes hinzugefügt. Die Forderung, dass ein »freies Randstück« stets an eine nicht freie Seite grenzen soll, bewirkt dass die geschlossene Fläche  $G$ , welche durch Identifizierung der zugeordneten Randpunkte entsteht, *einfach* zusammenhängend wird. Die weitere Bedingung, dass nach einer endlichen Anzahl kranzförmiger Erweiterungen an den äussersten Polygonen immer nur *ein* neues Polygon geheftet werden soll, hat wiederum zur Folge, dass die Anzahl der logarithmischen Enden der Riemannschen Fläche  $G$  *endlich* wird. Lässt man diese zwei speziellen Bedingungen fallen, so würde man durch die obige Konstruktion überhaupt alle über den Grundpunkten  $w = a_v$  logarithmisch verzweigten Riemannschen Flächen erhalten.

eine Substitution der Gruppe  $\Sigma$  einander zugeordnet sind, mit einander identifiziert werden.

*Die Zuordnung zwischen den durch die obige Regel konstruierbaren Untergruppen  $\Sigma$  der Gruppe  $S$  und den auf  $S$ . 318 charakterisierten Flächen  $F_p$  ist also umkehrbar eindeutig.*

22. Über die Gestalt des oben konstruierten Fundamentalbereiches  $B_\Sigma$  lässt sich folgendes beweisen:

*Die Eckpunkte von  $B_\Sigma$  häufen sich in  $p$  verschiedenen Punkten des Einheitskreises.*

In der Tat sieht man sofort ein, dass die einem und demselben logarithmischen Ende zugehörigen Polygone  $B_i, B_a$  gegen einen bestimmten Randpunkt des Einheitskreises konvergieren. Denn sind  $q_1, q_2, \dots$  die Kreisbogen, längs welchen die kettenartig an einander gereihten Polygone  $B_i, B_a$  mit einander zusammenhängen, so werden die Bogen  $q_1, \dots, q_{n-1}$  durch  $q_n$  von allen  $q_m$  ( $m > n$ ) getrennt. Das von  $q_n$  begrenzte Endstück des logarithmischen Endes wird vollständig in dem von  $q_n$  und der Peripherie des Einheitskreises begrenzten Zweieck  $Q_n$  belegen sein, und die Zweiecke  $Q_1, Q_2, \dots$  sind in einander geschachtelt, so dass  $Q_{n+1}$  als Teil in  $Q_n$  enthalten ist. Hieraus folgt, dass  $Q_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen den Durchschnitt  $Q_\infty$  sämtlicher  $Q_n$  konvergiert. Nun sieht man sogleich ein, dass  $Q_\infty$  entweder ein Kreisbogenzweieck oder ein Punkt der Peripherie  $|\zeta| = 1$  ist. Der erstere Fall ist jedoch ausgeschlossen, weil die Gruppe  $S$  sonst nicht im Einheitskreise  $|\zeta| < 1$  eigentlich diskontinuierlich sein könnte. Hieraus folgt die Richtigkeit der Behauptung.

Die Häufungspunkte lassen sich sofort angeben, wenn die logarithmischen Ende so konstruiert werden, dass die soeben besprochenen Kreisbogen  $q_1, q_2, \dots$  einen gemeinsamen Endpunkt  $\zeta_0$  haben, was durch erlaubte Änderung immer erreicht werden kann. Sind  $B_i$  und  $B_a$  die zwei ersten Teilpolygone des logarithmischen Endes, und bezeichnet  $S_0$  diejenige wohlbestimmte parabolische Substitution der Gruppe  $S$ , welche den Punkt  $\zeta_0$  als Fixpunkt hat, so entsteht das logarithmische Ende aus dem Gebiet  $B_i + B_a$ , indem man es durch die Substitutionen  $S_0^\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) transformiert. Als Häufungspunkt der transformierten Gebiete ergibt sich offenbar der Fixpunkt  $\zeta = \zeta_0$ . — Diese besondere Konstruktion soll im folgenden als »Konstruktion durch Zerschneidung seitwärts« bezeichnet werden.

23. Wenn auch die Bestimmung der Gruppen  $\Sigma$  mittels der oben angegebenen Regel in jedem einzelnen Fall ohne Schwierigkeit gelingt, so wollen wir zur Illustration des oben Gesagten die einfachsten vorkommenden Fälle noch einzeln kurz besprechen, wobei wir auch Gelegenheit haben werden einige ergänzende Bemerkungen hinzuzufügen.

Fall  $p=q=3$ . Wählt man als Kurve  $L$  den durch die drei Grundpunkte  $a_1, a_2, a_3$  bestimmten Kreis, so erhält man als Bild des Kreisinneren ein Spitzendreieck  $B_i$ , welches durch unbeschränkte Spiegelung die Modulfigur erzeugt. Der Fundamentalbereich  $B_\Sigma$  entsteht indem an jede Seite eines gewissen Kerndreiecks  $B_i$  ein logarithmisches Ende hinzugefügt wird. Durch »Zerschneidung seit-

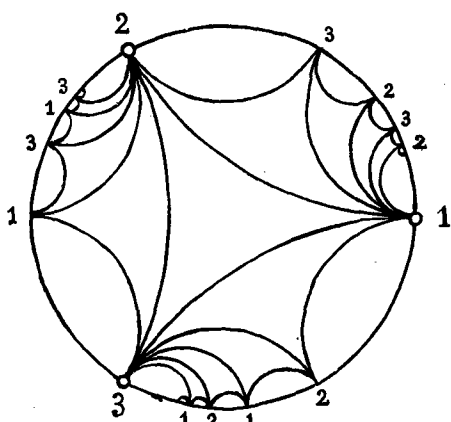


Fig. 4.

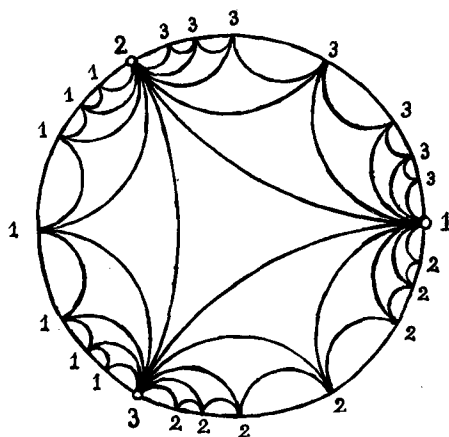


Fig. 5.

wärts» (nach links) geschieht dies auf folgende Weise (vgl. Fig. 4). Das Kerndreieck  $B_i$ , dessen Spitzen mit  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  bezeichnet werden sollen, wird gespiegelt in der Seite  $\zeta_1 \zeta_2$ , das so entstandene Dreieck  $\zeta_1 \zeta_3 \zeta_2$  in die Seite  $\zeta_1 \zeta_3$ , das zuletzt erhaltene Dreieck  $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$  in die Seite  $\zeta_1 \zeta_2$ , und so weiter ins Unendliche; die Dreiecke  $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3^v$  und  $\zeta_1 \zeta_3 \zeta_2^{v-1}$  ( $v=1, 2, \dots; \zeta_2^0 = \zeta_2$ ) bilden zusammen das logarithmische Ende  $G_{12}$ . In analoger Weise verfährt man um die Enden  $G_{13}$  und  $G_{23}$  zu erhalten. Als Häufungspunkte der unendlich vielen Eckpunkte  $\zeta_h^v$  ( $h=1, 2, 3; v=1, 2, \dots$ ) des Fundamentalbereichs  $B_\Sigma$  erscheinen die drei Eckpunkte  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  des Kerndreiecks (Fig. 4).

Die Seiten von  $B_\Sigma$  sind einander paarweise zugeordnet, so dass die Seiten  $\zeta_{h-1}^{v-1} \zeta_h^v$  und  $\zeta_h^v \zeta_{h-1}^v$  einander entsprechen ( $h=1, 2, 3; v=1, 2, \dots$ ). Diese Zuordnung wird durch diejenige parabolische Substitution der Modulgruppe vermittelt, welche den Eckpunkt  $\zeta_h^v$  als Fixpunkt hat. Man sieht unmittelbar ein, dass diese

Substitution aus  $S_h$  durch Transformation mit der Potenz  $S_{h+1}^{-\nu}$  hervorgeht, wobei  $S_1, S_2$  und  $S_3$  ( $S_4 = S_1$ ) diejenigen parabolischen Substitutionen der Modulgruppe bezeichnen, welche bzw. die Eckpunkte  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  des Kerndreiecks invariant lassen. Die Fundamentalsubstitutionen der Gruppe  $\Sigma$  sind also in diesem Fall

$$S_{h+1}^{\nu} S_h S_{h+1}^{-\nu} \quad (h = 1, 2, 3; \nu = 1, 2, \dots).$$

Es ist schon oben mehrmals die Rede davon gewesen, wie man dem Fundamentalbereich  $B_{\Sigma}$  durch »erlaubte Abänderung« verschiedene Gestalten geben kann. Zu einer wegen ihrer Symmetrie bemerkenswerten Konfiguration gelangt man, wenn man die Schnitte im Gebiete  $G$  nicht mehr, wie oben, längs den Linien  $l$  führt, welche als Bilder der Kreislinie  $L$  erscheinen, sondern in jedem der drei logarithmischen Enden  $G_{12}, G_{23}, G_{31}$  einen einzigen Schnitt  $Q_{\nu}$  ( $\nu = 3, 1, 2$ ) zieht durch diejenigen Stellen  $z_{a_{\nu}}$ , welche dem Grundpunkt  $w = a_{\nu}$  entsprechen. Diese Schnitte können übrigens so gewählt werden, dass ihnen in dem  $\zeta$ -Einheitskreis lauter *Orthogonalkreisbogen* des Kreises  $|\zeta| = 1$  zugeordnet sind. Dies trifft dann zu, wenn  $Q_{\nu}$  mit derjenigen Kurve zusammenfällt welche, vermöge der Abbildung  $z = z(w)$ , derjenigen durch  $w = a_{\nu}$  gehenden Kreislinie entspricht, von der die Schar der durch die Punkte  $a_{\nu-1}$  und  $a_{\nu+1}$  gehenden Kreise orthogonal geschnitten wird.

Figur 5 stellt den diesem Schnittsystem entsprechenden Fundamentalbereich  $B_{\Sigma}$  dar. Er entsteht, wenn man das Dreieck  $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$  durch die Substitutionen  $S_1^{-\nu}$ , das Dreieck  $\zeta_2 \zeta_3 \zeta_1$  durch die Substitutionen  $S_2^{\nu}$  transformiert ( $\nu = 1, 2, \dots$ ), und in analoger Weise mit den Dreiecken verfährt, welche durch zyklische Vertauschung der unteren Indizes erhalten werden können. Die Seiten  $\zeta_h^{\nu+1} \zeta_h^{\nu}$  und  $\bar{\zeta}_h^{\nu+1} \bar{\zeta}_h^{\nu}$  (vgl. Figur 5) entsprechen den zwei Ufern des Schnittes  $Q_h$  ( $\nu = 1, 2, \dots; \zeta_h^1 = \zeta_h$ ). Sie sind auf einander bezogen vermittels der Substitution

$$S_{h-1}^{1-\nu} S_{h+1}^{1-\nu}.$$

Gibt man hier  $h$  die Werte 1, 2, 3 und  $\nu$  die Werte 1, 2, ... ( $S_{\nu+3} \equiv S_{\nu}$ ), so erhält man ein neues, mit dem oben bestimmten System äquivalentes System von Fundamentalsubstitutionen der Gruppe  $\Sigma$ .

*Fall  $p=4$ .* Man hat zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem  $q=4$  oder  $q=3$  ist. Wir nehmen zuerst  $q=4$  und das Kernpolygon ungeteilt an; es ist dies der Typus, der oben (S. 318) durch ein Viereck ohne Durchmesser

dargestellt wurde. Durch Zerschneidung seitwärts erhält man als Fundamental-  
substitutionen der Gruppe  $\Sigma^1$

$$(4) \quad S_h^v S_{h-1} S_h^{-v} \text{ und } S_h^v S_{h-1} S_{h-2} S_h^{-v} \quad (v = 1, 2, \dots; h = 1, \dots, 4).$$

Auch im vorliegenden Falle kann man grössere Symmetrie erreichen, wenn man jedes logarithmische Ende mit einem einzigen Schnitt versieht. Die in einem und demselben Fundamentalstreifen liegenden zwei kritischen Stellen  $z_a$  werden längs der Verbindungslinie  $l$  mit einem Schnitt vereinigt, und alle so erhaltenen zu ein und demselben logarithmischen Ende gehörigen Schnitte durch einen bis zum Rande  $l$  führenden Haupteinschnitt verbunden. Die zugehörigen Substitutionen sind jetzt

$$(4)' \quad S_1^v S_4 S_1^{-v} \text{ und } S_2^{-v} S_3 S_2^v, \quad (v = 1, 2, \dots)$$

wozu noch diejenigen Substitutionen kommen, welche durch zyklische Vertauschung der unteren Indizes erhalten werden.

Es ist unter Anwendung des Schwarzschen Spiegelungsprinzipes leicht einzusehen, dass wenn das Doppelverhältnis der vier Grundpunkte  $a_v$  gleich  $-1$  ist, und diese Punkte somit eine harmonische Punktreihe bilden, dasselbe für die Punktgruppe  $\zeta_1, \dots, \zeta_4$  gilt. Dann können wir diese letzten Punkte in  $\zeta = \pm 1, \pm i$  bringen, und die oben erwähnten Haupteinschnitte so wählen, dass sie in Orthogonalkreise des Einheitskreises  $|\zeta| = 1$  übergehen, welche mit den Winkelhalbierenden der vier Koordinatenquadranten homolog (in bezug auf die Gruppe  $S$ ) sind. Diesen Fall bezeichnen wir als den *symmetrischen*.

Es erübrigt noch denjenigen Fall zu berücksichtigen, wo das Kernviereck von einem Durchmesserstreifen in zwei Dreiecke  $a_1 a_2 a_3$  und  $a_1 a_3 a_4$  zerlegt wird. Dieser Durchmesser bestehe aus  $k$  dem Aussengebiet  $A$ , und  $k-1$  trennenden, dem Innengebiet  $I$  entsprechenden Streifen. Wählt man die innerhalb der vier logarithmischen Enden befindlichen Schnitte wie oben, so erhält man die entsprechenden Substitutionen der Gruppe  $\Sigma$  aus den Formeln (4) bzw. (4)', wobei  $S_1, S_2, S_3, S_4$  jetzt, für die innerhalb der logarithmischen Enden  $G_{12}$  und  $G_{23}$  laufenden Schnitte, diejenigen parabolischen Substitutionen der Gruppe  $S$  bezeichnen, welche die vier Eckpunkte des dem Dreieck  $a_1 a_2 a_3$  zugeordneten Kreisbogenviereck der  $\zeta$ -Ebene invariant lassen, während diese Substitutionen für die loga-

---

<sup>1</sup>  $S_h$  bezeichnet hier wieder die parabolische Substitution der Gruppe  $S$ , welche den Eckpunkt  $\zeta_h$  des Kernvierecks invariant lässt ( $h = 1, \dots, 4$ ).

rithmischen Ende  $G_{34}$  und  $G_{41}$  die analoge Bedeutung in bezug auf das Dreieck  $a_3 a_4 a_1$  haben. Hierzu kommen noch  $2k$  Substitutionen entsprechend dem  $2k$  im Durchmesserstreifen belegenen Schnitten.

Im Falle  $p=4$ ,  $q=3$  liegen über einem der Grundpunkte  $a_1, a_2, a_3$ , z. B. über  $a_1$ , zwei verschiedene logarithmische Windungspunkte; vgl. hierzu Figur 3, welche den einfachsten Fall darstellt, wo das Kernviereck durch einen einzigen, aus einer Linie  $l$  bestehenden Durchmesser in zwei Dreiecke zerlegt wird. Die Fundamentalsubstitutionen sind jetzt

$$S_3^v S_2 S_3^{-v}, S_1^v S_3 S_1^{-v}, S_2^{-v} S_3 S_2^v, \bar{S}_1^v S_2 S_1^{-v},$$

wo die Substitutionen  $S_1, S_2, S_3$  und  $\bar{S}_1$  zu den Fixpunkten  $\zeta'_1, \zeta'_2, \zeta'_3$  und  $\zeta_1$  (Eckpunkten des Kernvierecks) gehören.

### § 6. Bestimmung der allgemeinen Lösung.

24. Im 4. Abschnitt haben wir für eine gegebene Lösung  $z(w)$  des vorgelegten Problems die Parameterdarstellung

$$(5) \quad z = \varphi(\zeta), \quad w = \omega(\zeta)$$

gefunden, wo  $\omega(\zeta)$  diejenige automorphe Funktion ist, welche den Kreis  $|\zeta| < 1$  auf die universelle Überlagerungsfläche der in den Grundpunkten  $a_1, a_2, \dots, a_q$  punktierten  $w$ -Ebene abbildet, und  $\varphi(\zeta)$  eine einwertige fuchsoidale Funktion ist, deren Gruppe  $\Sigma$  eine nach der auf S. 326 angegebenen Regel konstruierte Untergruppe der zu der Funktion  $\omega(\zeta)$  gehörigen Gruppe  $S$  ist.

Es soll nun zunächst nachgewiesen werden, dass umgekehrt, wenn  $\varphi(\zeta)$  eine beliebige, zu einer der erwähnten Regel nach erzeugten Untergruppe  $\Sigma$  der Gruppe  $S$  gehörige, einwertige automorphe Funktion ist, die durch die Gleichungen (5) definierte Funktion

$$(6) \quad z(w) = \varphi(\zeta(w; a_1, \dots, a_q)),$$

wo  $\zeta(w; a_1, \dots, a_q)$  die linear polymorphe Umkehrfunktion von  $\omega(\zeta)$  ist, eine Lösung des betrachteten Problems darstellt.

Zum Beweise betrachten wir dasjenige Polygon  $B_\Sigma$ , das zur Konstruktion der Untergruppe  $\Sigma$  benutzt wurde. Nach dem auf S. 328 gesagten ist  $B_\Sigma$  mit einem wohlbestimmten der auf S. 318 charakterisierten Flächentypen topologisch äquivalent;

es bedeutet keine Einschränkung anzunehmen, dass  $B_{\Sigma}$  durch Zerschneidung seitwärts (vgl. S. 328) erhalten worden ist. Das Kernpolygon sei  $p$ -eckig, und von den Ecken seien gewisse  $\mu_v$  dem Grundpunkt  $a_v$  zugeordnet. Die Eckpunkte von  $B_{\Sigma}$  zerfallen in zwei Klassen, je nachdem sie »Endpunkte freier Randstücke« oder »Anfangs-« bzw. »innere Punkte« solcher Randstücke (»Schnitte«) sind (vgl. S. 326). Die erstgenannten Eckpunkte können ferner in  $p$  verschiedene Gruppen eingeteilt werden, entsprechend den  $p$  verschiedenen Eckpunkten des Kernpolygons, und von diesen Gruppen sind somit gewisse  $\mu_v$  dem Grundpunkt  $a_v$  zugeordnet.

Wir greifen nun ein beliebiges Element der durch die Gleichungen (6) definierten Funktion  $z(w)$  heraus. Diesem Element entsprechen unendlich viele verschiedene Elemente der Funktion  $\zeta(w; a_1, \dots, a_q)$ , welche alle in bezug auf die Gruppe  $\Sigma$  homolog sind, d. h.: die Gesamtheit dieser Elemente wird erhalten, wenn man auf ein beliebiges derselben sämtliche Substitutionen der Gruppe  $\Sigma$  ausübt. Diese Mehrdeutigkeit soll im folgenden dadurch beseitigt werden, dass unter den genannten Elementen immer dasjenige gewählt wird, dessen Mittelpunkt ein Punkt  $\zeta$  des betrachteten Fundamentalbereichs  $B_{\Sigma}$  entspricht, wobei wie üblich zwei in bezug auf die Gruppe  $\Sigma$  homologe Randpunkte von  $B_{\Sigma}$  mit einander identifiziert werden sollen.

Nach dieser Festsetzung ist es leicht zu beweisen, dass die Funktion  $z(w)$  tatsächlich sämtliche auf S. 303 aufgezählten Eigenschaften hat. Zunächst ist es klar, dass diese Funktion in der ganzen  $w$ -Ebene unbeschränkt fortsetzbar ist, höchstens mit Ausnahme der Grundpunkte  $a_1, \dots, a_q$ . Denn die Funktion  $\zeta$  lässt sich hier unbeschränkt fortsetzen, und ihre Werte fallen sämtlich *innerhalb* des Einheitskreises  $|\zeta| < 1$ , welcher das Existenzgebiet der äusseren Funktion  $\varphi(\zeta)$  ausmacht. Zweitens ist  $z(w)$  *einwertig*, denn als eine einwertige Funktion nimmt  $\zeta(w; a_1, \dots, a_q)$  in den Mittelpunkten zweier verschiedener Elemente zwei verschiedene Werte des Fundamentalbereichs  $B_{\Sigma}$  an, und wegen der Einwertigkeit der automorphen Funktion  $\varphi(\zeta)$  in ihrem Fundamentalbereich entsprechen diesen zwei Punkten von  $B_{\Sigma}$  wieder zwei verschiedene Werte  $z$ .

Um das Verhalten der Funktion  $z(w)$  in der Umgebung der kritischen Punkte  $a_v$  zu untersuchen, isolieren wir den Punkt  $w = a_v$  durch einen kleinen Kreis  $|w - a_v| = \rho$ , nehmen in einem beliebigen inneren Punkt  $w$  dieses Kreises ein Element  $z(w)$ , und setzen dieses, ohne den Kreis zu verlassen, unbeschränkt fort. Man hat zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der entsprechende

Punkt  $\zeta$  für  $w \rightarrow a_v$  gegen einen »Endpunkt« oder gegen einen »inneren« bzw. »Anfangspunkt« eines Randstückes (»Schnittes«) strebt.

Im letztgenannten Fall ergibt sich unter Berücksichtigung der auf S. 326 angegebenen Regel sofort (vgl. z. B. Figur 4), dass wenn der Punkt  $w$  einen Umlauf um die Stelle  $w = a_v$  vollzieht, der entsprechende Punkt  $\zeta$  hierbei zu seiner Anfangslage zurückkehrt. Das Element  $z(w)$  ist also in der Umgebung dieser Stelle *eindeutig*, und bildet folglich diese Umgebung auf die Umgebung eines gewissen Punktes  $z_{a_v}$  der  $z$ -Ebene konform ab. Die zu den betrachteten eindeutigen Elementen  $z(w)$  gehörigen Werte  $z_{a_v}$  liegen somit in der  $z$ -Ebene *isoliert*.

Aus diesem Resultat lässt sich eine wichtige Folgerung in bezug auf das Verhalten der fuchsoiden Funktion  $\varphi(\zeta)$  ziehen. Weil die automorphe Funktion  $\omega(\zeta)$  in dem oben betrachteten Eckpunkt des Polygons  $B_\Sigma$  den Wert  $a_v$  als Grenzwert hat, und da die Funktion  $z(w)$  nach dem soeben Bewiesenen im Punkte  $a_v$  den Wert  $z_{a_v}$  annimmt, so folgt, dass die fuchsoiden Funktion  $\varphi(\zeta) = z(\omega(\zeta))$  in dem betrachteten Eckpunkt des Polygons  $B_\Sigma$  den letztgenannten Wert,  $z_{a_v}$ , als Grenzwert hat; eine bemerkenswerte Tatsache, da nämlich die Existenz eines Grenzwertes in einem Eckpunkt des Fundamentalbereichs für eine *fuchsoiden* Funktion keineswegs a priori gesichert ist.

Nimmt man dagegen an, dass der dem oben betrachteten Element  $z(w)$  entsprechende Eckpunkt *Endpunkt eines Randstückes* ist, so ist er einem wohlbestimmten der  $p$  Eckpunkte des Kernpolygons zugeordnet (vgl. S. 333), und man sieht unmittelbar ein dass, wenn der Punkt  $z$  den Punkt  $w = a_v$  umkreist, der entsprechende Punkt  $\zeta$  hierbei in  $B_\Sigma$  immer neue Positionen einnehmen wird. Der betrachtete Zweig der einwertigen Funktion  $z(w)$  ist also in der Umgebung der Stelle  $a_v$  unendlich vieldeutig, und stellt somit ein *logarithmisches Element* der einwertigen Funktion  $z(w)$  dar. Den verschiedenen Zweigen dieses logarithmischen Elementes entsprechen gewisse wohlbestimmte Zweige der Funktion  $\zeta(w; a_1, \dots, a_q)$ , und die zu diesen gehörigen (unendlich vielen) Eckpunkte des Polygons  $B_\Sigma$  bilden eben eine der  $p$  Gruppen, welche bei der Konstruktion des Bereiches  $B_\Sigma$  den Grundpunkten  $a$  zugeordnet wurden. Da nach Voraussetzung die Anzahl der dem Grundpunkte  $a_v$  zugeordneten Gruppen gleich  $\mu_v$  ist, so liegen also über  $a_v$  genau  $\mu_v$  verschiedene logarithmische Elemente der Funktion  $z(w)$ .

Hieraus geht hervor, dass die Funktion  $z(w)$  an den kritischen Stellen  $a_v$  tatsächlich sämtliche geforderten Eigenschaften besitzt, und es erübrigt also nur noch zu beweisen, dass der Wertbereich  $G$  von  $z(w)$  *einfach* zusammenhängend ist. Dieser Bereich stimmt mit der Menge der Werte überein, welche die



fuchsoide Funktion  $\varphi(\zeta)$  in dem Fundamentalbereich  $B_{\Sigma}$  erhält. Aus den obigen Überlegungen folgt ferner, dass diejenigen Werte, welche  $\varphi(\zeta)$  entweder innerhalb  $B_{\Sigma}$  oder in denjenigen Randpunkten von  $B_{\Sigma}$  annimmt, die den Eckpunkten des Kernpolygons nicht zugeordnet sind, sämtlich *innerhalb*  $G$  liegen. Die Berandung  $\Gamma$  von  $G$  besteht somit aus den Häufungsbereichen der Funktionswerte  $\varphi(\zeta)$  in den Eckpunkten von  $B_{\Sigma}$ , welche den Eckpunkten des Kernpolygons oder, was nach Obigem auf eins hinausläuft, den logarithmischen Elementen der Funktion  $z(w)$  entsprechen. Diese Häufungsbereiche bilden  $p$  Kontinua oder Punkte,  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ , entsprechend den  $p$  verschiedenen logarithmischen Elementen. Um den einfachen Zusammenhang von  $G$  nachzuweisen, genügt es offenbar zu zeigen, dass die Punktmengen  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$  zu einem einzigen Kontinuum oder Punkt zusammenschmelzen.

Es seien  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  die zu zwei benachbarten (d. h. zu zwei durch ein gewisses logarithmisches Ende mit einander verbundenen) logarithmischen Elementen  $E_1$  und  $E_2$  gehörigen Häufungsbereiche. Wenn der Bereich  $B_{\Sigma}$ , wie vorausgesetzt wurde, durch »Zerschneidung seitwärts« konstruiert worden ist, so werden die dem einen dieser logarithmischen Elemente, z. B. dem Element  $E_1$ , zugeordneten Eckpunkte des Fundamentalbereiches  $B_{\Sigma}$  einen Häufungspunkt  $\zeta_1$  haben, *der selbst diesem Eckpunkt  $E_1$  entspricht* (vgl. S. 328 und Fig. 4). Der Häufungsbereich  $\gamma_1$  von  $\varphi(\zeta)$  in diesem Eckpunkt  $\zeta_1$  ist daher eine Teilmenge von  $\Gamma_1$ . Nun sieht man aber (vgl. Fig. 4), dass sich in der unmittelbaren Umgebung von  $\zeta_1$  auch Eckpunkte  $\zeta_2$  befinden, welche dem Element  $E_2$  entsprechen, so dass also der Häufungsbereich  $\gamma_1$  mindestens einen Punkt der Menge  $\Gamma_2$  enthält. Hieraus folgt, dass die Häufungsbereiche  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  ein einziges Kontinuum (bzw. einen einzigen Punkt) bilden, und in derselben Weise wird das Entsprechende für die Mengen  $\Gamma_3, \dots, \Gamma_p$  bewiesen.

25. Es ist also vollständig nachgewiesen worden, dass wenn in (5) für  $\varphi(\zeta)$  eine beliebige zur Gruppe  $\Sigma$  gehörige, einwertige fuchsoide Funktion eingesetzt wird, die hierdurch definierte Funktion  $z = z(w)$  sämtliche auf S. 303 angegebenen Eigenschaften besitzt. Kombiniert man dies mit den Ergebnissen der vorhergehenden Abschnitte, so ergibt sich, dass die genannten Formeln (5) *die allgemeine Lösung des vorgelegten Problems enthalten*.

Wenn nun  $\varphi_0(\zeta)$  eine beliebige zu der Gruppe  $\Sigma$  gehörige einwertige automorphe Funktion ist, so gilt das gleiche für die Funktion

$$(7) \qquad g(\varphi_0(\zeta)),$$

wo  $g(z)$  eine beliebige Funktion ist, welche das Wertgebiet  $G_0$  von  $z = \varphi_0(\zeta)$  schlicht abbildet. Auf diese Weise kann andererseits jede zu  $\Sigma$  gehörige einwertige automorphe Funktion erhalten werden. Denn wenn  $\varphi(\zeta)$  eine solche von  $\varphi_0$  verschiedene Funktion ist, so ist die zusammengesetzte Funktion  $\varphi(\varphi_0^{-1}(z)) = g(z)$ , wo  $\varphi_0^{-1}$  die Umkehrfunktion von  $\varphi_0$  bezeichnet, im Innern von  $G_0$  unbeschränkt fortsetzbar, mit Einschluss der kritischen Stellen  $z_a$  der linear polymorphen Funktion  $\varphi_0^{-1}$ . Unter Anwendung der auf S. 334 erzielten Ergebnisse folgt nämlich unmittelbar, dass diese Singularitäten für die zusammengesetzte Funktion  $g(z)$  aufhebbar sind. Nach dem Monodromiesatz ist also  $g(z)$  im Gebiete  $G_0$  eindeutig, und da sie wegen der Einwertigkeit von sowohl  $\varphi_0^{-1}$  als  $\varphi$  selbst eine einwertige Funktion ist, so folgt hieraus, dass sie tatsächlich eine schlichte Abbildung des Gebietes  $G_0$  vermittelt.

*Die Gesamtheit der zur Gruppe  $\Sigma$  gehörigen einwertigen automorphen Funktionen wird aus einer solchen speziellen Funktion  $\varphi_0(\zeta)$  erhalten vermittels der Beziehung (7), wo  $g(z)$  eine beliebige Funktion bezeichnet, welche das Wertgebiet  $G_0$  von  $\varphi_0(\zeta)$  schlicht abbildet.*

Hieraus lässt sich folgender wichtige Schluss ziehen. Falls die zu untersuchende Riemannsche Fläche  $F_p$  der Funktion  $z(w)$  zum parabolischen Typus gehört, so besteht die Berandung  $\Gamma_0$  des Wertgebietes  $G_0$  aus einem einzigen Punkt, und die Funktion  $g$  reduziert sich folglich auf eine lineare Transformation. Dass dies tatsächlich der Fall ist, soll später (Abschnitt 8) bewiesen werden.

## § 7. Existenzbeweis.

26. Durch die Ergebnisse des letzten Abschnittes ist unsere Untersuchung auf die Frage zurückgeführt worden, ob zu jeder der nach der Regel S. 326 aufgebauten Gruppe  $\Sigma$  eine einwertige automorphe Funktion gehört. In diesem Abschnitt soll ein Verfahren angegeben werden, nach welchem eine derartige Funktion tatsächlich konstruiert werden kann.

Unsere erste Aufgabe besteht darin, die Gruppe  $\Sigma$  als Grenze gewisser Näherungsgruppen  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$  darzustellen, welche, wie  $\Sigma$ , sämtlich Untergruppen der zur linear polymorphen Funktion  $\zeta(w; a_1, \dots, a_q)$  gehörenden Substitutionsgruppe  $S$  sind. Um die Gruppe  $\Sigma_n$  zu erhalten, denken wir uns das zur Konstruktion des Fundamentalpolygons  $B_\Sigma$  angewandte Verfahren (S. 326) nach einer endlichen Anzahl von Schritten unterbrochen, indem an jede Seite des Kernpolygons  $K_p$  nicht das vollständige logarithmische Ende, sondern eine aus nur

endlich vielen,  $n$ , der Polygone  $B_i$  und  $B_a$  gebildete Kette hinzugefügt wird. Das hierdurch entstandene Kreisbogenpolygon  $B_n$  ist aus  $m = k + p \cdot n$  Teilpolygonen  $B_i$  und  $B_a$  zusammengesetzt, wobei  $k$  angibt, aus wievielen solchen Teilpolygonen das Kernpolygon  $K_p$  besteht. Es sei nun  $q_n$  eine beliebige »freie« Seite von  $B_n$ . Wir fügen an  $q_n$  ein neues Polygon  $\bar{B}_n$ , welches im Verhältnis zu  $B_n$  »spiegelbildlich« aus  $m$  Teilpolygonen  $B_i$  und  $B_a$  aufgebaut ist. Ordnet man alsdann den noch freien Randpunkten von  $B_n$  die »spiegelbildlichen«, ebenfalls freien Randpunkte von  $\bar{B}_n$  zu, so sind sämtliche Seiten des Polygons  $B_n + \bar{B}_n$  einander paarweise zugeordnet, und man erhält durch Identifizierung der einander entsprechenden Randpunkte eine aus  $m$  Fundamentalpolygonen  $B_S = B_i + B_a$  zusammengesetzte geschlossene Fläche, welche offenbar *einfach* zusammenhängend ist.

Das Polygon  $B_n$  ist für jedes  $n$  als Teil in  $B_{n+1}$  und in  $B_\Sigma$  enthalten, und es ist  $\lim B_n = B_\Sigma$  für  $n \rightarrow \infty$ . Das Polygon  $\bar{B}_n$  liegt vollständig in demjenigen Kreisbogenzweieck, welches von  $q_n$  und der Peripherie des Einheitskreises begrenzt wird und welches das Polygon  $B_n$  nicht enthält. Wählt man die Seite  $q_n$  immer aus einem und demselben logarithmischen Ende, so strebt dieses Zweieck gegen einen wohlbestimmten Randpunkt  $\zeta$  des Einheitskreises, und dasselbe gilt somit auch für das Polygon  $\bar{B}_n$  (vgl. S. 328).

Die einander zugeordneten Seiten des Polygons  $B_n + \bar{B}_n$  werden ineinander übergeführt mittels gewisser linearer Transformationen. Da die Anzahl dieser Transformationen endlich, und die geschlossene Fläche  $B_n + \bar{B}_n$  einfach zusammenhängend ist, so ist die von diesen Transformationen erzeugte Gruppe  $\Sigma_n$  eine *fuchsische Gruppe vom Geschlechte Null*. Aus der Konstruktion der Gruppe  $\Sigma_n$  folgt sofort, dass jede erzeugende Substitution der fuchsoiden Gruppe  $\Sigma$  von einem gewissen  $n$  ab in der Menge der Erzeugenden von  $\Sigma_n$  enthalten ist, und es gehört somit auch jede beliebige Substitution der Gruppe  $\Sigma$  der Gruppe  $\Sigma_n$  an, sobald  $n$  eine gewisse Grenze überschritten hat.

27. Nach der klassischen Poincaréschen Theorie gehört nun zu der Gruppe  $\Sigma_n$  eine bis auf eine lineare Transformation wohlbestimmte, in dem Fundamentalbereich  $B_n + \bar{B}_n$  einwertige automorphe Funktion. Diese Transformation legen wir dadurch fest, dass wir die Werte der Funktion und ihrer Ableitung im Nullpunkte  $\zeta = 0$  vorschreiben, z. B. gleich 0 bzw. 1 setzen, und den Pol  $\zeta_n$  der Funktion in einen beliebig gewählten Punkt des Bereiches  $\bar{B}_n$  verlegen. Die derart normierte Funktion bezeichnen wir mit  $\varphi_n(\zeta)$ .

Zwischen den fuchsschen Funktionen  $\varphi_n(\zeta)$  und  $\omega(\zeta)$ , welche beide in bezug auf die Gruppe  $\Sigma_n$  automorph sind, besteht eine algebraische Relation vom Geschlechte Null; sie ergibt sich durch Elimination der Veränderlichen  $\zeta$  aus den Beziehungen

$$(3') \quad z = \varphi_n(\zeta), \quad w = \omega(\zeta).$$

Jedem Wert von  $z$  ist ein wohlbestimmter Wert der Funktion  $\omega$  zugeordnet, während umgekehrt jedem Wert der letztgenannten Funktion so viele verschiedene Werte von  $\varphi_n$  entsprechen, wie die Anzahl der in  $B_n + \bar{B}_n$  enthaltenen Fundamentalpolygone  $B_\omega = B_i + \bar{B}_a$  angibt. Diese Anzahl ist aber gleich  $m = k + p \cdot n$ , und es ergibt sich folglich, dass die durch die Gleichungen (3') definierte algebraische Relation sich auf eine rationale Funktion

$$w = w_m(z)$$

der Ordnung  $m$  reduziert. Berücksichtigt man die Art, in welcher sich die geschlossene Fläche  $B_n + \bar{B}_n$  aus den Teilpolygone  $B_\omega$  zusammensetzt (vgl. Fig. 4), so ersieht man ferner, dass diese rationale Funktion sämtliche Werte  $w$  *einfach* annimmt, mit Ausnahme der Werte  $a_1, \dots, a_q$ , welche sie in

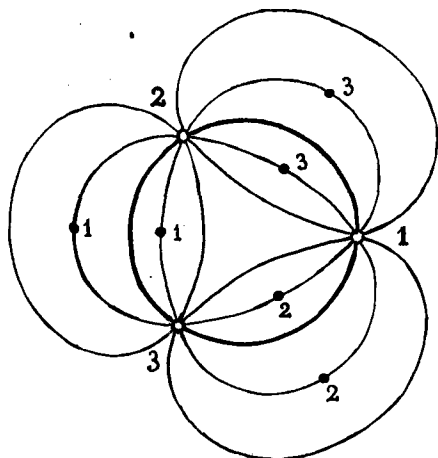


Fig. 6.

gewissen  $p$ , den Eckpunkten des Kernpolygons entsprechenden Punkten mehrfach, und zwar mindestens  $(2n + 1)$ -fach annimmt<sup>1</sup>; vgl. Fig. 6, wo die geschlossene Fläche schematisch dargestellt ist, welche entsteht, wenn die zugeordneten Randpunkte des Fundamentalbereiches  $B_n + \bar{B}_n$  miteinander identifiziert werden; die Figur entspricht dem Fall  $p = 3$ ,  $k = 1$ ,  $n = 2$ . Die über der  $w$ -Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche  $F_p^{(n)}$  dieser Funktion ist also über jedem von den Grundpunkten  $a_v$  verschiedenen Punkte unverzweigt, während sie über dem Grundpunkt  $a_v$  genau  $\mu_v$  verschiedene algebraische Windungspunkte besitzt, deren Ordnungen für  $n \rightarrow \infty$  über alle Grenzen wachsen.

Um nun den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  vorzunehmen, werden wir beweisen, dass die Funktionenfolge  $\varphi_n$  eine normale Schar bildet, d. h. dass aus jeder

<sup>1</sup> Die Mehrfachheit dieser Stellen ist genau gleich  $2n + 1$ , falls das Kernpolygon keine »Durchmesser« enthält.

unendlichen Folge dieser Funktionen eine Teilfolge ausgewählt werden kann, welche in jedem inneren Bereich des Kreises  $|\zeta| < 1$  gleichmässig konvergiert. Der Beweis ergibt sich unter Anwendung des KOEBESCHEN Verzerrungssatzes in folgender Weise.

Da die automorphe Funktion  $\omega(\zeta)$  in jedem Polygon  $B_\omega$  einwertig ist, und da diese Polygone sich im Innern des  $\zeta$ -Einheitskreises nicht häufen, so gibt es zu jeder Zahl  $r$  des Intervalles  $0 < r < 1$  eine (nur von  $r$  und der gegenseitigen Lage der Grundpunkte  $a_\nu$  abhängige) positive Zahl  $d$  ( $d < 1 - r$ ), so dass jeder Kreis  $C(d, \zeta)$  vom Radius  $d$ , dessen Mittelpunkt  $\zeta$  im Kreise  $|\zeta| < r$  liegt, von der Funktion  $\omega(\zeta)$  *schlicht* abgebildet wird. Wir überdecken nun den Kreis  $|\zeta| \leq r$  mit einer endlichen Anzahl  $\lambda$  von Kreisen  $C\left(\frac{d}{2}, \zeta_\nu\right)$ , dessen Mittelpunkte innerhalb des Kreises  $|\zeta| < r$  gewählt werden, so dass  $\zeta_1 = 0$  und  $|\zeta_\nu - \zeta_{\nu-1}| < \frac{d}{2}$  ( $\nu = 2, \dots, \lambda$ ).

Die Funktion  $\varphi_n(\zeta)$  nimmt in zwei Punkten  $\zeta$ , denen zwei verschiedene Werte von  $\omega(\zeta)$  entsprechen, ebenfalls verschiedene Werte an. Jeder Kreis  $C(d, \zeta_\nu)$  wird also auch von jener Funktion *schlicht* abgebildet. Die in der  $z$ -Ebene belegenen Bildgebiete enthalten, sobald  $n$  eine gewisse Schranke überschritten hat, nicht den Unendlichkeitspunkt, denn  $\varphi_n$  wird ja in ihrem Fundamentalbereich nur in einem Punkt unendlich, und dieser Pol, den wir in das Polygon  $\bar{B}_n$  verlegt haben, strebt für  $n \rightarrow \infty$  gegen den Rand des Einheitskreises. Wir können somit in jedem der Kreise  $C(d, \zeta_n)$  den Verzerrungssatz zur Anwendung bringen, und finden so, wenn wir mit dem Kreise  $C(d, 0)$  beginnen und beachten, dass  $\varphi_n(0) = 0$ ,  $\varphi_n'(0) = 1$ ; dass die absoluten Beträge von sowohl  $\varphi_n$  als ihrer Ableitung  $\varphi_n'$  im Kreise  $C\left(\frac{d}{2}, 0\right)$  vom Radius  $\frac{d}{2}$ , und somit insbesondere im Mittelpunkte  $\zeta_2$  des Kreises  $C(d, \zeta_2)$ , unter gewissen numerischen, von  $n$  unabhängigen endlichen Schranken liegen. Geht man nun der Reihe nach zu den Kreisen  $C(d, \zeta_2), \dots, C(d, \zeta_\lambda)$  über, so ergibt sich schliesslich durch wiederholte Verwendung des Verzerrungssatzes, dass sämtliche Funktionen  $|\varphi_n|$ , von einem gewissen  $n$  ab, für  $|\zeta| \leq r$  unter einer von  $n$  unabhängigen endlichen Schranke  $M_r$  liegen.

Weil die Funktionen  $\varphi_n$  also im Kreise  $|\zeta| \leq r$  gleichmässig beschränkt sind, so folgt aus dem Vitalischen Satze, dass eine unendliche Teilfolge  $\varphi_{n_\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) existiert, welche in dem Kreise  $|\zeta| \leq \frac{d}{2}$  gleichmässig konver-

gent ist. Und da die gleichmässige Beschränktheit dieser Funktionen im erstgenannten Kreis besteht, wie nahe an Eins die Zahl  $r$  immer gewählt wird, so schliesst man mit Hilfe des genannten Satzes weiter, dass *dieselbe* Teilfolge in jedem vorgegebenen inneren Bereich des Kreises  $|\zeta| < 1$  gleichmässig konvergent ist, w. z. b. w.

Es sei nun  $U$  eine beliebige Transformation der Gruppe  $\Sigma$ . Sie gehört von einem gewissen Wert  $n$  ab zu sämtlichen Näherungsgruppen  $\Sigma_n$ , und da die Funktion  $\varphi_n$  gegenüber der Substitution  $U$  invariant ist, so besitzt auch die Grenzfunktion

$$\varphi(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n_r}(\zeta)$$

dieselbe Eigenschaft. Diese Funktion  $\varphi(\zeta)$ , welche nach Obigem im Einheitskreise  $|\zeta| < 1$  regulär ist, ist somit in bezug auf die Gruppe  $\Sigma$  automorph. Kombiniert man weiter die Tatsachen, dass die Funktion  $\varphi_n$  im Polygone  $B_n$  einwertig ist, und dass  $B_n \rightarrow B_\Sigma$  für  $n \rightarrow \infty$ , so folgt durch eine bekannte Schlussweise, die hier unterdrückt werden kann, dass  $\varphi(\zeta)$  ebenfalls im Fundamentalbereiche  $B_\Sigma$  einwertig sein muss.

Hiermit ist die Existenz einer in bezug auf die Gruppe  $\Sigma$  automorphen, einwertigen Funktion  $\varphi(\zeta)$  vollständig nachgewiesen worden.

### § 8. Bestimmung des Typus der Fläche $F_p$ .

28. Wenn  $\varphi(\zeta)$  eine zu der Gruppe  $\Sigma$  gehörige einwertige automorphe Funktion ist, so definieren die Gleichungen

$$z = \varphi(\zeta), \quad w = \omega(\zeta)$$

eine Lösung  $z = z(w)$  unseres Problems. Die Umkehrfunktion  $w = w(z)$  existiert in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  der  $z$ -Ebene, dessen Rand  $\Gamma$  entweder ein Kontinuum (hyperbolischer Fall) oder ein Punkt ist (parabolischer Fall). Die allgemeine Lösung des Problems ist durch den Ausdruck

$$g(z(w))$$

gegeben, wo  $g(z)$  eine beliebige innerhalb  $G$  eindeutige und *einwertige* Funktion bezeichnet.

Es soll nun gezeigt werden, dass die gesuchten Riemannschen Flächen, welche durch die Ergebnisse der letzten Abschnitte vollständig analytisch be-

stimmt worden sind, sämtlich vom parabolischen Typus sind, woraus sich sogleich die weitere Folgerung ergibt, dass die Funktion  $g$  sich auf eine lineare Transformation reduzieren muss. Es genügt hierzu zu beweisen, dass die Berandung  $\Gamma$  des Wertgebiets  $G$  der speziellen, durch die Konstruktion des vorhergehenden Paragraphen gewonnenen automorphen Funktion  $\varphi(\zeta)$  aus einem einzigen Punkt besteht, welcher dann kein anderer als der unendlich ferne Punkt sein kann, weil ja die betrachtete automorphe Funktion innerhalb des Einheitskreises *regulär* ist (vgl. S. 340).

29. Der Beweis ergibt sich durch ein näheres Studium der automorphen Funktionen  $\varphi_{n_\nu}(\zeta)$ , als deren Grenze die fuchsoiden Funktion  $\varphi(\zeta)$  gewonnen wurde. Es sei zunächst daran erinnert, dass die Beziehungen

$$z = \varphi_{n_\nu}(\zeta), \quad w = \omega(\zeta)$$

$w$  als eine rationale Funktion  $w_\nu(z)$  des Grades  $k + p \cdot n_\nu$  von  $z$  definieren. Die entsprechende Riemannsche Fläche  $F_p^{(n)}$ , welche über dem Grundpunkt  $a_i$  ( $i = 1, \dots, q$ )  $\mu_i$  verschiedene algebraische Windungspunkte hat, geht für  $i \rightarrow \infty$  in die gesuchte Riemannsche Fläche  $F_p$  über. Den Windungspunkten entsprechen in der  $z$ -Ebene gewisse mehrfache Stellen der Funktion  $w_\nu(z)$ , deren Anzahl unabhängig von  $\nu$  gleich  $p$  ist, während ihre Ordnungen mit  $\nu$  ins Unendliche wachsen (vgl. S. 338 und Fig. 6). Von entscheidender Bedeutung für die zu untersuchende Frage ist nun, wie sich die Lage dieser mehrfachen Stellen bei unbeschränkt wachsendem  $\nu$  ändert.

Hierüber kann man mit Hilfe des Verzerrungssatzes zunächst folgendes schliessen. Weil sämtliche Funktionen  $\varphi_{n_\nu}$  in einem gewissen Kreise  $|\zeta| < d$  ( $0 < d < 1$ ) regulär und einwertig sind, und weil ferner  $\varphi_{n_\nu}(0) = 0$  und  $\varphi'_{n_\nu}(0) = 1$ , so wird der genannte Kreis von  $\varphi_{n_\nu}$  auf ein Gebiet der  $z$ -Ebene konform abgebildet, welches für jedes  $\nu$  den Kreis  $|z| < \frac{d}{4}$  enthält. Hieraus folgt, dass die erwähnten mehrfachen Stellen, welche ja als Randwerte der Funktion  $\varphi_{n_\nu}$  auftreten, für jedes  $\nu$  ausserhalb der Kreislinie  $|z| = \frac{d}{4}$  liegen müssen.

Genaueren Einblick in das Verhalten der mehrfachen Stellen erhält man, wenn man von der Funktion  $w_\nu$  zu ihrer Schwarzschen Ableitung

$$\{w_\nu, z\} = \frac{w_\nu'''}{w_\nu'} - \frac{3}{2} \left( \frac{w_\nu''}{w_\nu'} \right)^2$$

übergeht. Eine einfache Rechnung zeigt, dass dieser Ausdruck an jeder einfachen Stelle  $z$  der Funktion  $w_\nu$  regulär ist, während sie an jeder mehrfachen Stelle einen *Pol zweiter Ordnung* besitzt, unabhängig von der Ordnung dieser Stelle. Da somit die totale Polanzahl von  $\{w_\nu, z\}$  gleich  $2p$  ist, so folgt hieraus, dass diese rationale Funktion die von  $\nu$  unabhängige Gradzahl  $2p$  hat. Nun strebt die rationale Funktion  $w_\nu$  für  $|z| < \frac{d}{4}$  und  $\nu \rightarrow \infty$  gegen die Grenzfunktion  $w$ , und die Schwarzsche Ableitung jener Funktion somit gegen die Schwarzsche Ableitung dieser Funktion. Da eine rationale Funktion festen Grades offenbar als Grenzfunktion nur eine rationale Funktion höchstens desselben Grades haben kann, so schliesst man hieraus weiter, dass die Schwarzsche Ableitung  $\{w, z\}$  der Grenzfunktion  $w(z)$  eine rationale Funktion  $R(z)$  ist, deren Gradzahl nicht höher als  $2p$  ist:

$$(8) \quad \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''}{w'} \right)^2 = R(z).$$

Im vorhergehenden Abschnitte haben wir gefunden, dass die wesentlichen Singularitäten der Funktion  $w(z)$  entweder ein *Kontinuum*  $I$  bilden, oder sich auf *einen einzigen Punkt*,  $z = \infty$ , reduzieren. Aus der Differentialgleichung (8) ist nun ferner zu sehen, dass  $w(z)$  mit dem Charakter einer rationalen Funktion in der ganzen  $z$ -Ebene fortgesetzt werden kann, höchstens mit Ausnahme der endlich vielen Pole der Funktion  $R(z)$ . Also ist die erste der obengenannten Möglichkeiten ausgeschlossen; das Wertgebiet  $G$  der Funktion  $z = z(w)$  umfasst somit die ganze endliche Ebene, und die zu untersuchenden Riemannschen Flächen sind folglich sämtlich vom *parabolischen Typus*.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> An anderer Stelle (*Vier Vorlesungen über die Wertverteilung der eindeutigen analytischen Funktionen*, Abhandlungen aus dem math. Seminar der Universität Hamburg, Bd. 8, H. 4, 1931) habe ich folgendes hypothetisches Kriterium aufgestellt zur Unterscheidung des parabolischen und des hyperbolischen Typus einer transzendenten, einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche, deren Windungspunkte über einer endlichen Anzahl von Grundpunkten verteilt sind: Die Fläche bestehe aus einem Grundblatt  $B_0$ , neben welchem sich die Blätter  $B_1, B_2, \dots$  kranzförmig lagern. Jedem Punkt  $a$  eines Blattes  $B_\nu$  wird die Zahl

$$\theta_\nu(a) = \frac{k-1}{k}$$

zugeordnet, wo  $k$  angibt wie viele Blätter um den betreffenden Punkt  $a$  im Zyklus vereinigt sind; für eine einfache Stelle  $a$  ist also  $\theta_\nu(a) = 0$ , für einen Windungspunkt unendlicher Ordnung  $\theta_\nu(a) = 1$ . Die (endliche) Summe  $\sum_{(a)} \theta_\nu(a) \equiv \theta_\nu$  heisse *Verzweigkeit* des Blattes  $B_\nu$ . Den Grenzwert



Hieraus lässt sich über die rationale Funktion  $R(z)$  folgender wichtige Schluss ziehen. Da die Funktion  $w(z)$  innerhalb des Gebietes  $G$ , also in jedem endlichen Punkt der  $z$ -Ebene, lauter *einfache* Stellen hat, und da ferner, wie schon oben bemerkt worden ist, die Schwarzsche Ableitung an einer einfachen Stelle immer regulär ist, so folgt, dass die Funktion  $R$  im Endlichen überhaupt keine Pole haben kann. Dies zeigt, dass die mehrfachen Stellen der Näherungsfunktion  $w_n$ , deren Multiplizität für  $\nu \rightarrow \infty$  unbeschränkt wächst, an der Grenze alle im unendlich fernen Punkte  $z = \infty$  zusammenfallen.

*Die Schwarzsche Ableitung der meromorphen Funktion  $w(z)$  reduziert sich auf ein Polynom.*

Aus dem Vorstehenden ergibt sich für die Gradzahl dieses Polynoms die obere Schranke  $2p$ . Im nachfolgenden Paragraphen soll gezeigt werden, dass diese Gradzahl gleich  $p - 2$  ist.

30. Durch die Ergebnisse dieses Abschnittes hat unser auf S. 303 aufgestelltes Problem nunmehr eine vollständige Lösung erhalten. Zusammenfassend können wir folgendes Resultat aussprechen:

*Falls die Anzahl  $q$  der gegebenen Grundpunkte  $a_\nu$  gleich zwei ist, so ist notwendigerweise  $p \equiv \sum_{\nu=1}^q \mu_\nu = 2$ , d. h.  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Die einzige Funktion  $z(w)$ , welche sämtlichen geforderten Bedingungen genügt, ist in diesem einfachsten Fall*

$$\log \frac{w - a_1}{w - a_2},$$

*oder eine lineare Transformation dieses Ausdruckes.*

$$\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \theta_\nu$$

nenne ich (falls er existiert) die *mittlere Verzweigkeit* der Fläche. Aus mehrfachen Gründen liegt die Vermutung nahe, dass die mittlere Verzweigkeit grösser oder gleich *zwei* ist, und dass die Fläche in jenem Fall zu dem hyperbolischen, in diesem zum parabolischen Typus gehört. (Wenn das arithmetische Mittel der Verzweigkeit der  $n$  ersten Blätter hinreichend *langsam* gegen die Grenze  $2$  konvergiert, scheint indes auch im Falle  $\theta = 2$  der hyperbolische Typus möglich zu sein.) — Berechnet man nun die mittlere Verzweigkeit der in dieser Abhandlung untersuchten Riemannschen Flächen, so findet man für *alle* Blätter, ausser den zu dem Kernpolygon gehörenden,  $\theta_\nu = 2$ , und unsere Hypothese weist also, in Konformität mit dem oben gefundenen Resultat, dieser Fläche den parabolischen Typus zu.

Wenn  $q \geq 3$  ist, so ist das Problem dann und nur dann lösbar, wenn  $p \geq 2\mu_\nu$  für  $\nu = 1, \dots, q$ . Im Falle  $q = p = 3$  ist die Lösung  $z(w)$  bis auf eine lineare Transformation eindeutig bestimmt. Für  $p > 3$  erhält man dagegen stets unendlich viele wesentlich verschiedene Lösungen, indem jedem der auf S. 318 definierten Flächentypen (bzw. jeder der auf S. 226 charakterisierten Gruppen  $\Sigma$ ) eine bis auf eine lineare Transformation wohlbestimmte Funktion  $z(w)$  entspricht, welche sämtliche geforderten Eigenschaften besitzt.

31. **Bemerkung.** — Wir haben die gesuchten Funktionen  $z(w)$  als Grenzwerte gewisser einwertiger algebraischer Funktionen  $z_\nu(w)$  (Umkehrfunktionen der oben mit  $w_\nu(z)$  bezeichneten rationalen Funktionen) bestimmt, deren Riemannsche Flächen  $F_p^{(\nu)}$  über dem Grundpunkt  $a_\nu$  genau  $\mu_\nu$  verschiedene algebraische Windungspunkte besitzen, deren Ordnungen gleichzeitig mit  $\nu$  ins Unendliche wachsen. Man fragt sich nun, ob die Konstruktion dieser algebraischen Funktionen nicht direkt auf *algebraischem* Wege, ohne Zuhilfenahme der Hilfs-*transzendenten*  $\zeta(w; a_1, \dots, a_q)$ , möglich wäre. In den einfachsten Fällen ist dies auch tatsächlich der Fall; man vergleiche hierzu meine Arbeit *Herstellung transzendenter Funktionen als Grenzwerte rationaler Funktionen* (Acta mathematica, T. 55, 1930), wo diejenigen Flächen  $F_p$  konstruiert wurden, deren Kernpolygone *unzerlegt* sind, unter der zusätzlichen Bedingung, dass die Grundpunkte  $a_\nu$  in  $w = e^{\frac{2\pi\nu i}{q}}$  belegen sind ( $\nu = 1, \dots, q$ ). In dem allgemeinsten Fall, dem die vorliegende Untersuchung gewidmet ist, bietet jedoch die Konstruktion der Näherungsfunktionen  $z(w)$  Schwierigkeiten, welche mit elementaren Methoden, ohne Heranziehung uniformisierender *Transzendenten*, kaum zu überwinden sind.

### § 9. Über meromorphe Funktionen deren Schwarzsche Ableitung ein Polynom ist.

32. Die Ergebnisse der letzten Abschnitte haben uns zur Untersuchung der Differentialgleichung

$$(9) \quad \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''}{w'} \right)^2 = P(z)$$

geführt, wo  $P(z)$  ein Polynom ist. Setzt man  $w'^{-\frac{1}{2}} = g$ , so genügt  $g$  der homogenen Gleichung

$$(10) \quad g'' + Q(z)g = 0,$$

wo  $Q = \frac{1}{2}P$ , und jede Lösung  $w$  von (9) kann als Quotient von zwei linear unabhängigen Lösungen der Gleichung (10) geschrieben werden. Da  $Q$  im Endlichen regulär ist, so sind die Lösungen von (10) ganze, und diejenigen von (9) meromorphe Funktionen.

Im folgenden wollen wir, ganz unabhängig von den vorhergehenden Untersuchungen, die asymptotischen Eigenschaften einer durch die Gleichung (10) definierten Funktion  $g$  untersuchen, wobei wir annehmen, dass  $Q$  ein beliebig vorgegebenes Polynom ist, dessen Gradzahl mit  $p-2$  bezeichnet werden soll ( $p \geq 2$ ). Zur asymptotischen Integration dieser Differentialgleichung eignet sich besonders gut eine Methode, welche von E. HILLE in verschiedenen Arbeiten<sup>1</sup> zur Untersuchung der Verteilung der Nullstellen einer durch die Gleichung (10) (oder noch allgemeinere Gleichungen) definierten Funktion angewandt worden ist. Mit dem Hinweis auf die diesbezüglichen Arbeiten von HILLE, wollen wir im Anschluss an ihn in aller Kürze die asymptotischen Eigenschaften der ganzen Funktionen  $g(z)$  studieren.

33. Mit HILLE transformieren wir zunächst die Gleichung (10) durch die Liouvillesche Transformation

$$(11) \quad x = \int_{z_0}^z V Q(z) dz, \quad y = Q^{1/4} \cdot g,$$

wodurch (10) in

$$(12) \quad y'' + (1 + h(x))y = 0$$

übergeht, mit

$$h = \frac{5 \left( \frac{dQ}{dz} \right)^2 - 4Q \frac{d^2Q}{dz^2}}{16Q^3}.$$

Da  $x$ , und also auch  $h(x)$ , eine mehrdeutige Funktion von  $z$  ist, wollen wir sogleich einen bestimmten Zweig dieser Funktion festlegen.

<sup>1</sup> E. HILLE: *Zero point problems for linear differential equations of the second order* (Matematisk Tidskrift, B, N:o 2, 1927) und *On the zeros of the functions of the parabolic cylinder* (Arkiv för matematik, astronomi och fysik, B. 18, N:o 26, 1924).

Vorausgesetzt, dass das Polynom  $Q$  durch Multiplikation der Variable  $z$  mit einer passenden Konstante auf die Form

$$Q(z) = -\frac{p^2}{4}z^{p-2} + c_1z^{p-3} + \dots$$

gebracht worden ist, schlagen wir um den Nullpunkt einen Kreis  $|z| = \varrho_0$  der alle Nullstellen von  $Q(z)$  enthält, fixieren im Punkte  $z = \varrho_0$  denjenigen Zweig von  $\sqrt{Q(z)}$  der dividiert durch  $\frac{ip}{2}z^{\frac{p}{2}-1}$  ( $z$  reell und  $z^{\frac{p}{2}-1} > 0$ ) für  $z \rightarrow +\infty$  gegen  $+1$  strebt, und setzen diesen Zweig analytisch fort im Gebiete

$$(13) \quad |z| \geq \varrho_0, \quad |\arg z| < \theta_0,$$

wo  $\theta_0$  eine beliebig gewählte positive Zahl bezeichnet. Man hat dann in (13) für  $z \rightarrow \infty$

$$x \sim iz^{\frac{p}{2}}, \quad h \sim \frac{4-p^2}{4p^2} \frac{1}{z^p} \sim \frac{p^2-4}{4p^2} \frac{1}{x^2}.$$

Die Umkehrfunktion  $z$  bildet das durch die Beziehungen

$$(14) \quad |x| \geq r_0, \quad \nu\pi \leq \arg x \leq (\nu+1)\pi \quad (\nu = 0, \pm 1, \dots)$$

definierte Gebiet  $A_\nu$  auf ein Gebiet der  $z$ -Ebene ab, welches von der Bildkurve des Kreises  $|x| = r_0$  (die für genügend grosse  $r$  ausserhalb des Kreises  $|z| = \varrho_0$  verläuft) und von zwei Kurven  $L_{\nu-1}$  und  $L_\nu$  begrenzt wird, welche als Bilder der zwei Begrenzungsstrahlen des Gebietes  $A_\nu$  ins Unendliche laufen und asymptotisch in einem beliebig kleinen Winkel um die Halbstrahlen  $\arg z = \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{p}$

bzw.  $\arg z = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{p}$  belegen sind.

Nach dieser Vorbereitung gehen wir mit HILLE zu der zu (12) assoziierten Integralgleichung

$$(15) \quad y(x) = y_0(x) + \int_x^\infty \sin(x-s)h(s)y(s)ds$$

über, wo  $y_0$  eine Partikulärlösung der Gleichung

$$y_0'' + y_0 = 0$$

bezeichnet. Setzt man insbesondere  $y_0 = e^{ix}$  und führt man  $u = ye^{-ix}$  als neue Variable ein, so ergibt sich für  $u$  die Gleichung

$$(15)' \quad u(x) = 1 + \frac{1}{2i} \int_x^\infty (1 - e^{2i(s-x)})h(s)u(s)ds,$$

wobei als Integrationsweg ein Halbstrahl  $H$  gewählt wird, welcher dem Kreis  $|s| = r_0$  (vgl. Fig. 7) nicht begegnet und entweder der reellen Achse parallel ist oder in der oberen Halbebene endet. Man verifiziert unmittelbar, dass jeder Partikularlösung  $u$  dieser Integralgleichung tatsächlich eine Lösung  $y = ue^{ix}$  der gegebenen Differentialgleichung (12) entspricht.

Wir wählen nun einen beliebigen Punkt  $s = x$ , der in dem ungestrichenen Gebiete  $\mathcal{A}_H$  der  $s$ -Ebene liegt (Figur 7), und fixieren hier denjenigen Zweig von  $h(x)$  der (je nach der Lage von  $x$  in  $\mathcal{A}_H$ ) zu einem der Gebiete  $A_{2\nu-1}, A_{2\nu}, A_{2\nu+1}$  gehört. Von diesem Anfangswert  $h(x)$  ausgehend wird nun durch sukzessive Approximation eine Partikularlösung von (15)' konstruiert, indem

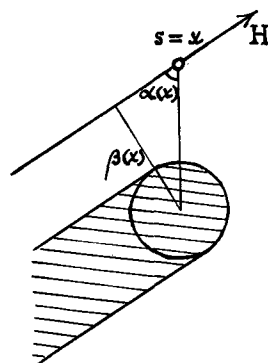


Fig. 7.

$$u_n(x) = 1 + \frac{1}{2i} \int_x^\infty (1 - e^{2i(s-x)})h(s)u_{n-1}(s)ds$$

und  $u_0 = 0$  gesetzt wird. Es wird dann

$$u_n(x) - u_{n-1}(x) = \frac{1}{2i} \int_x^\infty (1 - e^{2i(s-x)})h(s)(u_{n-1}(s) - u_{n-2}(s))ds,$$

und also, falls  $M_n = \max |u_n(s) - u_{n-1}(s)|$  auf dem Halbstrahl  $H$ ,

$$M_n \leq \frac{M_{n-1}}{2} \int_x^\infty |1 - e^{2i(s-x)}| |h(s)| ds.$$

Nun ist auf  $H$

$$|1 - e^{2i(s-x)}| \leq 1 + e^{-2\Im(s-x)} \leq 2,$$

und da für jeden Punkt der Gebiete  $A_\nu$  ( $|\nu| \leq p$ )

$$|h(s)| < \frac{\lambda}{|s|^2},$$

wo  $\lambda$  eine passend gewählte, von  $s$  unabhängige Zahl ist, so wird

$$\int_x^\infty |h(s)| |ds| \leq \int_x^\infty \frac{\lambda |ds|}{|s|^2} = \frac{\lambda |\alpha(x)|}{\beta(x)},$$

wo  $\beta(x)$  die Entfernung des Nullpunktes von der Geraden  $H$ , und  $\alpha$  den in Figur 7 angegebenen Winkel ( $0 \leq |\alpha| < \pi$ ) bezeichnet. Eine leichte Betrachtung zeigt ferner, dass in  $\mathcal{A}_H$

$$\frac{|\alpha|}{\beta} < \frac{\pi}{r_0}$$

gilt, und mithin wird

$$M_n \leq \frac{\pi\lambda}{r_0} M_{n-1}.$$

Durch eventuelle Vergrößerung der Zahl  $r_0$  kann man immer erreichen, dass  $r_0 > 2\pi\lambda$ . Dann gilt  $M_n < \frac{1}{2} M_{n-1}$ ,  $M_1 = 1$ , woraus folgt, dass die Reihe

$$u_n = \sum_1^n (u_v - u_{v-1})$$

in  $\mathcal{A}_H$  gleichmässig konvergiert. Die Grenzfunktion  $u(x)$ , welche eine Partikularlösung der Gleichung (15)' darstellt, genügt in demselben Gebiete der Ungleichung

$$(16) \quad |u(s)| \leq \sum_{v=1}^\infty |u_v - u_{v-1}| < \sum_1^\infty M_v < 2,$$

und mithin wird nach (15)'

$$(17) \quad |u(x) - 1| < 2 \int_x^\infty |h(s)| |ds| = \frac{2\lambda\alpha(x)}{\beta(x)} = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

im ganzen Gebiete  $\mathcal{A}_H$ .

Wenn nun  $x$  ein beliebiger Punkt des oben betrachteten Gebietes  $\mathcal{A}_H$  ist, so lässt sich, wie unter Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes sofort ersichtlich wird, der Integrationsweg  $H$  in positiver oder negativer Richtung

soweit drehen, bis er mit der negativen bzw. positiven reellen Achse parallel wird, vorausgesetzt dass er hierbei dem Kreis  $|s| = r_0$  nicht begegnet. Hieraus folgt, dass die Beziehung (17) in jenem weiteren Gebiet besteht, welches von dem Gebiet  $\mathcal{A}_H$  überstrichen wird, wenn man den Halbstrahl  $H$  zuerst in der Richtung der positiven reellen Achse nimmt und ihn dann um den Winkel  $\pi$  dreht, ein Gebiet, welches das Gebiet  $A_{2\nu-1} + A_{2\nu} + A_{2\nu+1}$  enthält, bis auf die nächste Umgebung der zwei Begrenzungsstrahlen  $\arg x = (2\nu - 1)\pi$  bzw.  $\arg x = (2\nu + 2)\pi$ . Bezeichnet man nun die der betreffenden Funktion  $u(x)$  entsprechende Lösung  $y = ue^{ix}$  von (15) mit  $y_{2\nu}$ , so gilt also die asymptotische Beziehung

$$(18) \quad y_{2\nu}(x) = e^{ix} \left( 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

auf jedem Halbstrahl  $\arg x = \omega$  des Gebietes  $(2\nu - 1)\pi < \omega < (2\nu + 2)\pi$ .

34. Setzt man in (15) statt  $y_0 = e^{ix}$ ,  $y_0 = e^{-ix}$  ein, so ergibt sich durch eine der obigen vollkommen analoge Betrachtung die Existenz einer Lösung  $y = y_{2\nu-1}(x)$  der Differentialgleichung (12), welche auf jedem Halbstrahl  $\arg x = \omega$ ,  $(2\nu - 2)\pi < \omega < (2\nu + 1)\pi$ , die asymptotische Entwicklung

$$(19) \quad y_{2\nu-1}(x) = e^{-ix} \left( 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

hat.

Nach den asymptotischen Entwicklungen (18) und (19) existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $r_0$ , so dass die Lösung  $y_\nu$  ( $\nu = 0, 1, \dots, p - 1$ ) im ganzen Gebiete  $(\nu - 1)\pi + \varepsilon < \arg x < (\nu + 2)\pi - \varepsilon$  von Null verschieden ist. Wegen dieser Eigenschaft sollen diese Funktionen als *defekte* Lösungen der Gleichung (12) bezeichnet werden.<sup>1</sup>

Die zwei defekten Lösungen  $y_\nu$  und  $y_{\nu+1}$ , welche in keinem Punkte des Gebietes

$$(20) \quad |\arg x - (\nu + 1)\pi| < \pi - \varepsilon$$

verschwinden, sind von einander linear unabhängig. Dies ergibt sich sofort aus den Beziehungen (18) und (19), nach welchen die eine dieser Funktionen auf einem der reellen Achse nicht parallelen, im Gebiete (20) befindlichen Halbstrahl

<sup>1</sup> HILLE bezeichnet solche Lösungen als »truncated solutions»; vgl. z. B. die erste der auf S. 345 zitierten Arbeiten, S. 29.

für  $x \rightarrow \infty$  gegen Null strebt, während die andere daselbst ins Unendliche wächst. Bezeichnet nun  $y$  eine Lösung, welche sowohl von  $y_\nu$  wie von  $y_{\nu+1}$  linear unabhängig ist, so existieren somit zwei von Null verschiedene Zahlen  $c_\nu$  und  $c_{\nu+1}$  derart, dass  $y = c_\nu y_\nu + c_{\nu+1} y_{\nu+1}$ . Nimmt man für einen Augenblick die ganze Zahl  $\nu$  gerade an, und setzt man

$$c_\nu e^{ix} + c_{\nu+1} e^{-ix} = c \sin(x - x_0) \quad (c \neq 0),$$

so folgt aus den asymptotischen Beziehungen (18) und (19), dass

$$(21) \quad y(x) \sim c \sin(x - x_0)$$

gilt in demjenigen Teilgebiet von (20), das von diesem Gebiet übrig bleibt, wenn man die Nullstellen  $x_0 - n\pi$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) der Funktion  $\sin(x - x_0)$  durch kleine Kreise  $C_n$  vom Radius  $\sigma$  ( $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$ ) isoliert.

Hieraus folgt unter Anwendung des Argumentprinzipes, dass die betrachtete Funktion  $y$ , welche nach (21) in dem ausserhalb der Kreise  $C_n$  fallenden Teil des Gebietes (20) von Null verschieden ist, in jedem der ausserhalb des Kreises  $|x| = r_0$  befindlichen Kreise  $C_n$  genau eine Nullstelle hat, sobald  $r_0$  hinreichend gross gewählt wird. Die innerhalb (20) liegenden Nullstellen von  $y$  fallen somit sämtlich in eine beliebige Winkelumgebung der negativen reellen Achse, und die Anzahl der innerhalb des Kreises  $|x| = r$  liegenden dieser Nullstellen ist somit asymptotisch dieselbe wie für  $\sin(x - x_0)$ , also  $\sim \frac{r}{\pi}$ .

Das Ergebnis ist vollkommen analog, falls  $\nu$  eine ungerade Zahl ist. Die Nullstellen von  $y(x)$  liegen dann in der nächsten Umgebung der positiven reellen Achse.

35. Wir gehen nunmehr vermittle den Transformationen (11) zu den Variablen  $z$  und  $g$  zurück. Als Zusammenfassung der obigen Ergebnisse lässt sich dann folgendes sagen:

*Falls das Polynom  $Q$  von  $(p-2)$ -tem Grade ist, so besitzt die Differentialgleichung (10)  $p$  »defekte« Lösungen  $g_0, g_1, \dots, g_{p-1}$  von nachstehender Eigenschaft: Die Funktion  $g_\nu$  hat im Winkelraume*

$$(22) \quad \left| \arg z - \frac{2\pi\nu}{p} \right| < \frac{3\pi}{p} - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$



die asymptotische Entwicklung

$$(23) \quad \log g_\nu(z) \sim \pm z^{\frac{p}{2}},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem  $\nu$  ungerade oder gerade ist. Die defekte Lösung  $g_\nu$  verschwindet mithin höchstens in einer endlichen Anzahl von Punkten des Winkelraumes (22).

Jede von sowohl  $g_\nu$  als  $g_{\nu+1}$  linear unabhängige Lösung  $g(z)$  verschwindet dagegen in unendlich vielen Punkten des Winkelraumes

$$\left| \arg z - (2\nu + 1) \frac{\pi}{p} \right| < \varepsilon,$$

und zwar ist die Anzahl  $n_\nu(r)$  derjenigen Nullstellen, deren absoluter Betrag höchstens gleich  $r$  ist, asymptotisch gleich

$$(24) \quad n_\nu(r) \sim \frac{r^{p/2}}{\pi}.$$

Aus der Beziehung (23) folgt sofort, dass sämtliche Lösungen von (10) ganze Funktionen von der Ordnung  $\frac{p}{2}$  sind. Unter den defekten Lösungen sind  $g_\nu$  und  $g_{\nu+1}$  ( $\nu = 0, \dots, p-1$ ;  $g_p = g_0$ ) von einander linear unabhängig. Dagegen können gewisse der Funktionen  $g_0, \dots, g_{\nu-2}, g_{\nu+2}, \dots, g_{p-1}$  von  $g_\nu$  linear abhängen. Es seien nun die Lösungen  $g_{\nu_1}, \dots, g_{\nu_q}$  ( $2 \leq q \leq p$ ) paarweise linear unabhängig, und sei  $\mu_i$  die Anzahl der von  $g_{\nu_i}$  linear abhängigen defekten Lösungen. Es ist dann  $\mu_i \leq \frac{p}{2}$  und  $\sum \mu_i = p$ . Wir bezeichnen im folgenden die Funktionen  $g_{\nu_i}$  ( $i = 1, \dots, q$ ) als defekte Fundamentallösungen der Gleichung (10); dagegen soll eine jede von diesen Funktionen linear unabhängige Lösung normal genannt werden.

Nach (23) strebt die defekte Lösung  $g_\nu$  für  $z \rightarrow \infty$  gegen Null auf jedem Halbstrahl  $\arg z = \varphi$ , welcher innerhalb des Winkelraumes

$$(W_\nu) \quad \left| \arg z - \frac{2\nu\pi}{p} \right| < \frac{\pi}{p}$$

verläuft, während sie in den umgebenden Winkelräumen  $W_{\nu+1}$  und  $W_{\nu-1}$  unbeschränkt wächst. Hieraus schliesst man:

Die defekten Lösungen  $g_{v_i}$  ( $i = 1, \dots, q$ ) haben in gewissen  $\mu_i$  der Winkelräume  $W_v$  den asymptotischen Wert Null. In denselben Winkeln ( $W_i^1, W_i^2, \dots, W_i^{\mu_i}$ ) streben sämtliche von  $g_{v_i}$  linear unabhängigen Lösungen gegen Unendlich.

Je zwei der Winkel  $W_i^\alpha$  werden von mindestens einem der übrigen Winkelräume  $W_v$  getrennt. Die Anzahl der Halbstrahlen

$$(H_v) \quad \arg z = \frac{(2v+1)\pi}{p},$$

welche als Schenkel der erstgenannten Winkel erscheinen, ist somit gleich  $2\mu_i$ . In der Umgebung dieser und nur dieser Schenkel ist die defekte Lösung  $g_{v_i}$  asymptotisch von Null verschieden. Eine normale Lösung  $g$  verschwindet dagegen unendlich oft in der Umgebung sämtlicher Halbstrahlen  $H_v$ . Bezeichnet nun  $n(r, g)$  die Anzahl der innerhalb des Kreises  $|z| < r$  belegenen Nullstellen von  $g$ , so gelten somit nach (24) die asymptotischen Beziehungen

$$(25) \quad n(r, g) \sim \frac{pr^{p/2}}{\pi}, \quad n(r, g_{v_i}) \sim \frac{(p-2\mu_i)r^{p/2}}{\pi}.$$

Die obigen Resultate lassen sich jetzt ohne weiteres auf die ursprünglich gegebene Differentialgleichung (9) übertragen. Ihre allgemeine Lösung ergibt sich als eine lineare Transformation des Quotienten

$$w(z) = \frac{G_1}{G_2},$$

wo  $G_1$  und  $G_2$  zwei beliebige linear unabhängige Lösungen der Gleichung (10) sind. Setzt man für diese Funktionen zwei normale Lösungen ein, so existieren für jedes  $v = 1, \dots, p$  vier von Null verschiedene Zahlen  $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v, \delta_v$  von nichtverschwindender Determinante ( $\alpha_v \delta_v - \beta_v \gamma_v \neq 0$ ), so dass

$$G_1 = \alpha_v g_v + \beta_v g_{v+1}, \quad G_2 = \gamma_v g_v + \delta_v g_{v+1}.$$

Im Winkelraume  $W_v$  gilt nun gemäss (23)  $g_v \rightarrow 0, g_{v+1} \rightarrow \infty$  für  $z \rightarrow \infty$ , und somit

$$w = \frac{G_1}{G_2} \rightarrow \frac{\beta_v}{\delta_v} \equiv c_v.$$

Dasselbe Resultat besteht in jedem Winkel, wo  $g_v$  gegen Null strebt, und es folgt also aus dem auf S. 350 ausgesprochenen Satz:

In den  $\mu_i$  Winkelräumen  $W_i^\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, \mu_i$ ) hat die meromorphe Funktion  $w(z)$  ein und denselben asymptotischen Wert  $a_i$  ( $= c_i$ ).

Die Werte  $a_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ) sind sämtlich unter einander verschieden. Denn wäre  $a_i = a_j$  ( $i \neq j$ ), so hätte man

$$G_1 = \alpha_{v_i} g_{v_i} + \beta_{v_i} g_{v_i+1} = \alpha_{v_j} g_{v_j} + \beta_{v_j} g_{v_j+1}, \quad G_2 = \gamma_{v_i} g_{v_i} + \delta_{v_i} g_{v_i+1} = \gamma_{v_j} g_{v_j} + \delta_{v_j} g_{v_j+1},$$

wo  $\beta_{v_i} \delta_{v_j} - \beta_{v_j} \delta_{v_i} = 0$ . Hieraus würde folgen, dass

$$(\alpha_{v_i} \delta_{v_j} - \beta_{v_j} \gamma_{v_i}) g_{v_i} = (\alpha_{v_j} \delta_{v_i} - \beta_{v_i} \gamma_{v_j}) g_{v_j},$$

und somit, da die rechtsstehende Determinante voraussetzungsgemäss von Null verschieden ist, die defekten Fundamentallösungen  $g_{v_i}$  und  $g_{v_j}$  linear abhängig wären, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Da  $G_1$  und  $G_2$  ganze Funktionen der Ordnung  $\frac{p}{2}$  sind, so ist die Ordnung der meromorphen Funktion  $w(z)$  höchstens dieselbe. Eine Erniedrigung der Ordnung könnte nur dadurch zustandekommen, dass die genannten ganzen Funktionen gemeinsame Nullstellen hätten. Dies ist jedoch nicht der Fall, denn nach der Gleichung (10) reduziert sich die Determinante  $G_1 G_2' - G_2 G_1'$ , wie immer die zwei linear unabhängigen Lösungen  $G_1, G_2$  gewählt werden, auf eine von Null verschiedene Konstante. Die Ordnung der meromorphen Funktion  $w(z)$  ist also gleich  $\frac{p}{2}$ .

Die Anzahl der im Kreise  $|z| < r$  belegenen Nullstellen und Pole von  $w(z)$  ist asymptotisch gleich  $\frac{pr^{p/2}}{\pi}$ , und zwar verteilen sich diese Stellen gleichmässig auf die Umgebungen der  $p$  Halbstrahlen  $H_v$ , für welche die entsprechende Stellenzahl asymptotisch gleich  $\frac{r^{p/2}}{\pi}$  ist. Dasselbe gilt für die Nullstellen der Dif-

ferenz  $w - a = \frac{G_1 - a G_2}{G_2}$ , falls  $a$  eine von den asymptotischen Werten  $a_1, \dots, a_q$  verschiedene endliche Zahl ist, denn der Zähler stellt unter dieser Voraussetzung eine normale Lösung der Differentialgleichung (10) dar. Ist dagegen  $a$  einer der asymptotischen Werte  $a_i$ , so wird der Zähler defekt, und die Funktion  $w(z)$  nimmt den betreffenden Wert  $a_i$  in der Umgebung der Schenkel der  $\mu_i$  Winkel  $W_i^1, \dots, W_i^{\mu_i}$  (in denen sie diesen Wert  $a_i$  als Grenzwert für  $z \rightarrow \infty$

hat) höchstens in einer *endlichen* Anzahl von Punkten an. Bezeichnet man nun die Anzahl der innerhalb des Kreises  $|z| < r$  liegenden Stellen  $z$ , wo die Funktion  $w$  einen vorgegebenen, endlichen oder unendlichen Wert  $a$  annimmt, mit  $n(r, a)$ , so wird somit

$$(26) \quad n(r, a) \sim \frac{pr^{p/2}}{\pi},$$

ausser für  $a = a_1, \dots, a_q$ , für welche Werte

$$(26)' \quad n(r, a_i) \sim \frac{p - 2\mu_i}{\pi} r^{p/2}.$$

36. Wir kommen schliesslich zu dem Verhalten der *inversen Funktion*  $z(w)$  der oben betrachteten meromorphen Funktion  $w(z)$ . Nach einem klassischen Satz von IVERSEN entspricht jedem der asymptotischen Werte  $a_i$  eine transzendente Singularität der Umkehrfunktion  $z(w)$ , und da zwei Konvergenzwegen, welche ineinander nicht stetig deformierbar sind, immer zwei verschiedene transzendente Stellen entsprechen, so schliesst man, dass die Anzahl der über dem Punkt  $w = a_i$  liegenden transzendenten Singularitäten mindestens gleich  $\mu_i$  ist.

Andererseits sieht man leicht ein, dass  $z(w)$  ausser den gefundenen transzendenten Stellen keine weiteren kritischen Stellen hat. Denn jeder der oben betrachteten verschiedenen transzendenten Stellen würde in der  $z$ -Ebene ein Konvergenzweg entsprechen, der auf die, den asymptotischen Werten  $a_i$  entsprechende Konvergenzwege durch stetige Deformation nicht zurückgeführt werden könnte. Ein solcher Weg  $L$  müsste notwendigerweise in der Nähe irgendeines der Halbstrahlen  $H_\nu$  verlaufen. Nun verhält sich aber der Quotient der zwei defekten Lösungen  $g_\nu$  und  $g_{\nu-1}$  in der Umgebung von  $L_\nu$  asymptotisch wie  $e^{\pm 2z^{p/2}}$ . Dieser Quotient, der in den benachbarten Winkelräumen  $W_\nu$  und  $W_{\nu+1}$  gegen die asymptotischen Werte Null und Unendlich strebt, besitzt folglich in der Umgebung von  $L_\nu$  keine Konvergenzwege, und gilt dasselbe somit auch in bezug auf die meromorphe Funktion  $w(z)$ , welche ja durch eine lineare Transformation aus dem Ausdruck  $g_\nu/g_{\nu+1}$  erhalten wird.

Die Umkehrfunktion  $z(w)$  hat ferner überhaupt keine algebraischen Singularitäten. Denn jeder solchen Singularität entspricht eine Stelle  $z$ , wo die Funktion  $w(z)$  den betreffenden Wert  $w$  *mehrfach* annimmt. Eine leichte Rechnung zeigt nun, dass die Schwarzsche Ableitung der letztgenannten Funktion an einer mehrfachen Stelle unendlich wird (vgl. S. 342). Da diese Ableitung,

welche im vorliegenden Falle ein Polynom ist, sich in jedem endlichen Punkt der Ebene regulär verhält, so ergibt sich also, wie behauptet wurde, dass keine algebraischen Singularitäten vorhanden sind.

Zusammenfassend haben wir also gefunden, dass die Umkehrfunktion  $z(w)$  insgesamt  $p = \sum \mu_i$  Singularitäten hat, welche über die Punkte  $a_1, \dots, a_q$  verteilt sind. Da diese Singularitäten sämtlich transzendent und isoliert sind, so entspricht jeder dieser kritischen Stellen ein *logarithmisches Element* der Funktion  $z(w)$  (vgl. § 1). Alle übrigen Elemente sind eindeutig.

37. Es ist also hervorgegangen, dass die Umkehrfunktion  $z(w)$  sämtliche auf S. 303 aufgezählten Eigenschaften besitzt. Kombiniert man nun dieses Ergebnis mit den Resultaten der Abschnitte 2—8, so gelangt man zu nachstehendem Endergebnis:

*Wenn die analytische Funktion  $z(w)$  sämtlichen auf S. 303 aufgestellten Bedingungen genügt, so ist ihre Umkehrfunktion  $w(z)$  eine meromorphe Funktion der Ordnung  $\frac{p}{2}$ , deren Schwarzsche Ableitung sich auf ein Polynom des Grades  $p-2$  reduziert.*

*Umgekehrt ist jede analytische Funktion, deren Schwarzsche Ableitung ein Polynom des Grades  $p-2$  ist, eine meromorphe Funktion der Ordnung  $\frac{p}{2}$ , und ihre Umkehrfunktion  $z(w)$  besitzt (als einzige mehrdeutige Elemente) genau  $p$  verschiedene logarithmische Elemente.*

*Es besteht somit eine eindeutige Zuordnung zwischen den Lösungen des in dieser Abhandlung untersuchten Problems und den Lösungen der Differentialgleichung*

$$\{w, z\} = P(z),$$

*wo  $P$  ein Polynom ist.*

## § 10. Über meromorphe Funktionen mit vorgegebenen defekten Werten.

38. Nach einem allgemeinen Satz der Werteverteilungstheorie besitzt eine meromorphe Funktion  $w(z)$  die Eigenschaft, dass ihr totaler Defekt um ihre totale algebraische Verzweigkeit vermehrt höchstens gleich zwei ist:

$$(27) \quad \sum_a \delta(a) + \sum_a \mu(a) \leq 2.$$

Der Defekt  $\delta(a)$  und der Verzweigungsindex  $\mu(a)$  eines Wertes  $a$  werden bekanntlich mit Hilfe der Fundamentalgrößen der Theorie der meromorphen Funktionen: der charakteristischen Funktion  $T(r)$  und der Dichtigkeitsindizes  $N(r, a)$  und  $\bar{N}(r, a)$ , auf folgende Weise definiert:

$$\delta(a) = \lim_{r=\infty} \left( 1 - \frac{N(r, a)}{T(r)} \right), \quad \mu(a) = \lim_{r=\infty} \frac{N(r, a) - \bar{N}(r, a)}{T(r)}.$$

Es gilt ferner  $N(r, a) : T(r) \rightarrow 1$  für alle Werte  $a$  mit Ausnahme einer Nullmenge, und kann man also in den obigen Definitionen die charakteristische Funktion  $T$  durch eine Grösse  $N(r)$  ersetzen, welche gleich einem beliebigen der einem »normalen« Wert  $a$  entsprechenden Dichtigkeitskomponenten  $N(r, a)$  ist.

Besonderes Interesse erboten diejenigen meromorphen Funktionen, für welche der links in (27) stehende Ausdruck sein Maximum 2 erreicht. Diese Eigenschaft scheint für die einfachsten Klassen von Funktionen charakteristisch zu sein, und habe ich in meiner Monographie über die Theorie der meromorphen Funktionen die Vermutung ausgesprochen, dass dies wenigstens für diejenigen Funktionen zutrifft, deren Riemannsche Flächen nur über einer *endlichen* Anzahl von Punkten verzweigt sind. Das Verhalten der einfachsten zu dieser Kategorie zugehörigen Funktionen scheint ferner darauf hinzuweisen, dass der Defekt  $\delta(a)$  als eine relative Ordnungszahl der über der Stelle  $w = a$  belegenen Windungspunkte *unendlicher* Ordnung der Fläche zu betrachten ist, während die Grösse  $\mu(a)$  in entsprechender Weise die Menge der über derselben Stelle gelagerten *algebraischen* Windungspunkte charakterisiert, so dass also die in (27) links stehende Summe als Indikator für die relative *totale Verzweigtheit* der Riemannschen Fläche aufgefasst werden kann.<sup>1</sup>

Sucht man speziell eine meromorphe Funktion zu bestimmen, für welche der *totale Defekt* seinen grösstmöglichen Wert, zwei, erreicht, so liegt auf Grund dieser Auffassung die Vermutung nahe, dass die einfachsten Funktionen dieser Art unter denjenigen zu finden sind, deren Riemannsche Flächen lauter *logarithmische Windungspunkte* aufweisen, eine Klasse von Flächen, zu denen die in dieser Abhandlung untersuchten gehören. Es soll auch im folgenden gezeigt werden, dass die erwähnte Aufgabe, unter gewissen besonderen, sofort anzugebenden Bedingungen, mit Hilfe der oben bestimmten speziellen Riemannschen Flächen lösbar ist.

<sup>1</sup> Diese Zusammenhänge habe ich eingehend in den S. 342 zitierten Vorlesungen behandelt.

39. Die Aufgabe lautet in präziser Form wie folgt:

Jedem Punkt  $a_\nu$  einer gegebenen abzählbaren Punktmenge  $a_1, \dots, a_\nu, \dots$  sei eine Zahl  $\delta_\nu$  des Intervalls  $0 < \delta_\nu \leq 1$  zugeordnet, so dass

$$\sum \delta_\nu = 2.$$

Es gilt eine meromorphe Funktion zu bestimmen, welche die Werte  $a_\nu$  als defekte Werte hat, so dass die entsprechenden Defekte

$$\delta(a_\nu) = \delta_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Nimmt man insbesondere an, dass die Anzahl der gegebenen Punkte  $a_\nu$  endlich ist und dass die vorgeschriebenen Defekte  $\delta_\nu$  rationale Zahlen sind, so bestimmt man eine Funktion  $w(z)$  welche die geforderten Eigenschaften besitzt in folgender Weise.

Die gegebenen Werte  $a$  seien  $a_1, \dots, a_q$ , und die Zahlen  $\delta_\nu$  seien gleich

$$\delta_\nu = \frac{m_\nu}{m} \quad (\nu = 1, \dots, q),$$

wo  $m_\nu$  und  $m$  ganze positive Zahlen sind;  $m_\nu \leq m$  und  $\sum_{\nu=1}^q m_\nu = 2m$ . Wir konstruieren dann eine analytische Funktion  $z(w)$ , welche sämtliche auf S. 303 aufgezählten Eigenschaften hat, indem wir  $\mu_i = m_i$ , und also  $p = 2m$  setzen. Es ist folglich  $\mu_i \leq \frac{p}{2}$  und, falls  $q = 2$ , auch  $p = 2$ , und sind dies eben die hinreichenden Bedingungen, unter denen die Existenz einer derartigen Funktion  $z(w)$  gesichert ist (vgl. S. 343). (Im Falle  $m > 1$  ist die Anzahl derartiger Funktionen sogar unendlich gross.) Die Umkehrfunktion  $w(z)$  einer solchen Funktion  $z(w)$  ist gemäss den Resultaten des vorhergehenden Paragraphen eine meromorphe Funktion der Ordnung  $\frac{p}{2} = m$ , welche den Wert  $a_\nu$  als defekten Wert mit dem Defekt  $\frac{2\mu_\nu}{p} = \frac{m_\nu}{m} = \delta_\nu$  hat, und mithin sämtliche geforderten Eigenschaften besitzt.

## § II. Beziehungen zwischen dem Aufbau der Riemannschen Fläche $F_p$ und den Koeffizienten des Polynoms $\{w, z\}$ .

40. Wenn  $z(w)$  eine einwertige Funktion ist, deren Riemannsche Fläche  $F_p$  von einfachem Zusammenhang und mit  $p$  Windungspunkten unendlich hoher

Ordnung versehen ist, so ergibt sich ihre Umkehrfunktion durch eine lineare Transformation einer meromorphen Funktion  $w(z)$  der Ordnung  $\frac{p}{2}$ , deren Schwarzsche Ableitung sich auf ein Polynom  $P_{p-2}$  des Grades  $p-2$  reduziert:

$$(28) \quad \{w, z\} \equiv \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''}{w'} \right)^2 = P_{p-2}(z).$$

Umgekehrt gilt (§ 9), dass jede Lösung  $w(z)$  einer solchen Differentialgleichung eine in der ganzen endlichen Ebene meromorphe Funktion der Ordnung  $p/2$  definiert, welche eine Abbildung dieser Ebene auf eine Riemannsche Fläche  $F_p$  der oben angegebenen Art vermittelt.

Die Differentialgleichung (28) enthält  $p-1$  Parameter, die Koeffizienten des Polynoms  $P_{p-2}$ . Durch Angabe der Werte dieser Parameter wird die Funktion  $w(z)$  bis auf eine lineare Transformation, und die entsprechende Riemannsche Fläche  $F_p$  also im wesentlichen eindeutig bestimmt. Auch in der  $z$ -Ebene kann eine lineare Transformation, nämlich eine willkürliche Ähnlichkeitstransformation  $az + b$  vorgenommen werden, ohne die Struktur der Fläche  $F_p$  zu verändern. Durch passende Wahl der willkürlichen Konstanten  $a, b$  kann man *zwei* der  $p-1$  Koeffizienten beliebig vorschriebene Werte geben, und die zur Verfügung stehende lineare Transformation der  $w$ -Ebene erlaubt (falls  $p \geq 3$ ) *drei* von den Windungspunkten der Fläche  $F_p$  in gewisse beliebig vorgeschriebene Punkte  $w_1, w_2, w_3$  zu bringen. Nach diesen Festsetzungen bestimmen die frei veränderlichen  $p-3$  Parameter *eindeutig* die Fläche  $F_p$ , so dass jedem Wertsystem der Parameter nicht nur bestimmte Lagen der  $p-3$  beweglichen Windungspunkte  $w_4, \dots, w_p$ , sondern auch ein wohlbestimmter der auf S. 318 definierten Flächentypen entsprechen. Im folgenden soll diese Abhängigkeit etwas näher studiert werden.

41. *Fälle  $p=2$  und  $p=3$ .* — Die obigen Ausführungen zeigen, dass die Differentialgleichung (28) in den zwei einfachsten Fällen  $p=2$  und  $p=3$  im wesentlichen eindeutig bestimmt ist, in Übereinstimmung mit unseren früheren Ergebnissen, nach denen nur *eine* einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche existiert mit bzw. zwei und drei logarithmischen Windungspunkten. Der Fall  $p=2$  entspricht, wie auch aus der Gleichung (28) unmittelbar zu sehen ist, der logarithmischen Fläche. Es er bietet vielleicht ein gewisses Interesse zu untersuchen, was aus dieser Gleichung für  $p=3$  erschlossen werden kann.



Für  $p = 3$  lässt sich die Differentialgleichung (28) auf die Normalform

$$\{w, z\} = -2z$$

bringen, und die entsprechende meromorphe Funktion  $w(z)$  kann als Quotient von zwei Fundamentallösungen  $A$  und  $B$  der homogenen Gleichung

$$(29) \quad g'' = zg$$

dargestellt werden (vgl. S. 345). Setzt man für  $g$  eine Potenzreihe mit unbestimmten Koeffizienten ein, so erhält man

$$(30) \quad A = \sum_0^{\infty} 2 \cdot 5 \cdots (3\nu - 1) \frac{z^{3\nu+1}}{(3\nu+1)!}, \quad B = \sum_0^{\infty} 1 \cdot 4 \cdots (3\nu - 2) \frac{z^{3\nu}}{(3\nu)!},$$

wo die ersten Koeffizienten die Werte  $A'(0) = 1$  und  $B(0) = 1$  haben. Unter Anwendung der klassischen Sätze über das Anwachsen einer Potenzreihe schliesst man aus diesen Entwicklungen, dass die ganzen Funktionen  $A$  und  $B$  von der Ordnung  $\frac{3}{2}$  sind, in Konformität mit unserem früheren Resultat, wonach  $w(z)$  die Ordnung  $\frac{p}{2} = \frac{3}{2}$  haben soll.

Die drei Windungspunkte der Fläche  $F_3$  mögen über den Stellen  $w = a_1, a_2, a_3$  belegen sein. Nach § 9 strebt  $w(z)$  gegen den asymptotischen Wert  $a_{\nu+1}$  auf jedem Halbstrahl des Winkelraumes  $\left| \arg z - \nu \cdot \frac{2\pi}{3} \right| < \frac{\pi}{3}$  ( $\nu = 0, 1, 2$ ). Nun nimmt die Funktion  $w$ , wie aus (30) zu ersehen ist, auf der positiven reellen Achse reelle, positive Werte an, und der dieser Achse entsprechende Grenzwert  $a_0$  hat also ebenfalls einen positiven Wert  $r > 0$ . Weil die Ableitung  $w' = \frac{1}{B^2} > 0$  für reelles  $z$ , so wird die positive reelle Achse  $(0, \infty)$  in das einfache Segment  $(0, r)$  der reellen Achse der  $w$ -Ebene übergeführt. Beachtet man, dass nach (30)  $w(\varepsilon z) = \varepsilon w(z)$ , wo  $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ , so folgt hieraus weiter, dass die Halbstrahlen  $L_{120}$  und  $L_{240}$ , welche aus der positiven reellen Achse hervorgehen durch eine Drehung um  $120^\circ$  bzw.  $240^\circ$ , auf die Vektoren  $(0, a_2 = re^{\frac{2\pi i}{3}})$  und  $(0, a_3 = re^{\frac{4\pi i}{3}})$  abgebildet werden. Fixieren wir nun denjenigen Zweig der Umkehrfunktion  $z(w)$ , welcher den Nullpunkt invariant lässt, so bildet er den Kreis  $|z| \leq r$  auf das *Kerndreieck*

ab, welches nach Obigem die drei Halbstrahlen  $L_0$ ,  $L_{120}$  und  $L_{240}$  enthält. Diese Strahlen sind Asymptote der drei Seiten des Kerndreiecks, an die die drei logarithmischen Enden  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  und  $G_{31}$  angehängt sind. Wir denken uns in jedem, von den Bildkurven der Kreislinie  $|z| = r$  begrenzten Fundamentalbereich der Funktion  $w(z)$  noch diejenigen Kurvenstücke eingezeichnet, welche der reellen Achse der  $w$ -Ebene entsprechen. Aus dem oben Gesagten folgt, dass diese Kurvenstücke im Kerndreieck und in den dem logarithmischen Ende  $G_{23}$  entsprechenden Fundamentalbereichen mit der reellen Achse zusammenfallen. In den logarithmischen Enden  $G_{12}$  und  $G_{31}$  nähern sich diese Kurvenstückezüge asymptotisch der positiven reellen Achse, wie aus Fig. 1 (S. 313) ersichtlich ist, wo die reellen Züge punktiert eingezeichnet sind. Die Bildkurven der Symmetrieachsen  $L_{120} + L_{300}$  und  $L_{240} + L_{60}$  erhält man durch eine Drehung der Figur um bzw.  $120^\circ$  und  $240^\circ$ .

Aus Figur 1, S. 313, können wir insbesondere Folgendes ablesen:

1) Die Stellen, wo die Funktion  $w$  die drei kritischen Werte  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  annimmt, d. h. die Nullstellen der »defekten« Lösungen  $g = A - a_\nu B$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ) der Differentialgleichung (29), liegen bzw. auf den Halbstrahlen  $L_{180}$ ,  $L_{300}$ ,  $L_{60}$ .

2) Die Nullstellen und Pole der Funktion  $w$ , d. h. die Nullstellen der Fundamentallösungen  $A$  und  $B$ , verteilen sich auf sämtliche drei Halbstrahlen  $L_{60}$ ,  $L_{180}$ ,  $L_{300}$ .

Unter den Nullstellen einer Lösung  $y$ , die von jeder der oben betrachteten fünf Lösungen ( $g_1, g_2, g_3, A, B$ ) linear unabhängig ist, befinden sich dagegen immer unendlich viele ausserhalb der Halbstrahlen  $L_{60}$ ,  $L_{180}$ ,  $L_{300}$ .

42. Zur Herleitung dieser Eigenschaften der Funktion  $w(z)$  haben wir, ausser den allgemeinen in § 2 erzielten Ergebnissen über den Aufbau der Riemannschen Fläche  $F_3$ , nur die Tatsachen benutzt, dass erstens  $w(\varepsilon z) = \varepsilon w(z)$ , und dass zweitens reellen Werten von  $z$  reelle Funktionswerte  $w$  entsprechen. Diese letzteren Eigenschaften, welche hier oben mit Hilfe der Differentialgleichung (28) bewiesen wurden, können auch direkt aus den Ergebnissen des 6. Paragraphen gefolgert werden. Da die hierbei zur Anwendung kommende Schlussweise auch in gewissen höheren, als symmetrisch zu bezeichnenden Fällen verwendbar ist, so wollen wir hierauf mit einigen Worten eingehen.

Die Funktion  $w(z)$  entsteht im vorliegenden Fall  $p = 3$  durch Zusammensetzung der Modulfunktion  $\omega(\zeta; a_1, a_2, a_3)$  mit einer linear polymorphen Funktion  $\zeta = \varphi^{-1}(z)$ , deren Zweige durch die Substitutionen einer gewissen Unter-

gruppe  $\Sigma$  der Modulgruppe verbunden sind, welche nach der auf S. 326 angegebenen Regel konstruiert werden kann. Verlegt man nun die Grundpunkte  $a_v$  in  $a_1 = 1, a_2 = \varepsilon, a_3 = \varepsilon^2$ , so kann die Modulfunktion  $\omega$  so normiert werden, dass sie die Punkte  $\zeta = 1, \varepsilon, \varepsilon^2$  und  $\zeta = 0$  invariant lässt. Sie wird dann auf der reellen Achse reell und genügt ausserdem der Bedingung  $\omega(\varepsilon\zeta) = \varepsilon\omega(\zeta)$ . Nun lässt sich auch die fuchsoiden Funktion  $z = \varphi(\zeta)$  so normieren, dass sie dieselben Eigenschaften bekommt. Nach § 7 existiert nämlich eine und nur eine in bezug auf die Gruppe  $\Sigma$  automorphe, einwertige und reguläre Funktion  $\varphi(\zeta)$ , welche den speziellen Bedingungen  $\varphi(0) = 0$  und  $\varphi'(0) = 1$  genügt. Bemerkt man nun, dass der Fundamentalbereich  $B_\Sigma$  dieser Funktion, falls er durch »symmetrische Zerschneidung« konstruiert wird (vgl. S. 329, Fig. 5), durch eine Drehung um  $120^\circ$  in sich übergeht, und dass er auch in bezug auf die reelle Achse symmetrisch ist, so folgt, dass die Funktionen  $\bar{\varepsilon}\varphi(\varepsilon\zeta)$  und  $\bar{\varphi}(\bar{\zeta})$ , wo die gestrichenen Grössen die konjugiert komplexen Werte der ungestrichenen angeben, ebenfalls in bezug auf die Gruppe  $\Sigma$  automorph und einwertig sind, wobei sie auch im Nullpunkte wie die Funktion  $\varphi(\zeta)$  normiert sind. Diese drei Funktionen sind folglich unter einander identisch. Es ist also  $\varphi(\varepsilon\zeta) = \varepsilon\varphi(\zeta)$ , und aus der Identität  $\bar{\varphi}(\bar{\zeta}) = \varphi(\zeta)$  folgt weiter, dass reellen Werten von  $\zeta$  reelle Funktionswerte  $\varphi(\zeta)$  entsprechen. Nunmehr bestätigt man ohne Mühe, dass auch die zusammengesetzte Funktion  $w(z)$  die entsprechenden, mehrmals erwähnten Symmetrieeigenschaften besitzt, w. z. b. w.

43. Fall  $p = 4$ . Für  $p = 4$  kann die Schwarzsche Ableitung der Funktion  $w(z)$  auf die Normalform  $\{w, z\} = -2\left(\frac{z^2}{4} - \sigma\right)$  gebracht werden, wo  $\sigma$  ein Parameter ist, und die assoziierte homogene Differentialgleichung erhält die Gestalt

$$(31) \quad g'' = \left(\frac{z^2}{4} - \sigma\right)g.$$

Obschon zahlreiche Untersuchungen vorliegen, welche sich mit den Eigenschaften der von dieser Gleichung des parabolischen Zylinders definierten Funktionen beschäftigen, so scheint die Frage welche uns hier interessiert, d. h. die Frage über die Struktur der von dem Quotient zweier Fundamentallösungen definierten Riemannschen Fläche, nur wenig Beachtung gefunden zu haben.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> In der zweiten, auf S. 345 zitierten Arbeit von HILLE findet man einige Bemerkungen über die Fläche  $F_4$  im Falle, wo der Parameter  $\sigma$  reell ist.

Nach den Ergebnissen des 3. Paragraphen wissen wir schon, dass diese Fläche  $F_4$  vier logarithmische Enden besitzt, welche an die Seiten des Kernvierecks  $K_4$  geheftet sind, und dass  $K_4$  schematisch durch ein Quadrat dargestellt werden kann, in welches ein mit einer nichtnegativen ganzen Zahl  $k$  versehener Durchmesser eingezeichnet ist. Diese Zahl  $k$  gibt an, wie viele Kurvenzüge  $l$  (welche als Bilder einer durch die vier Grundpunkte  $a_v$  gezogenen geschlossenen Linie  $L$  erscheinen) in dem betreffenden Durchmesserstreifen enthalten sind. Sie ist im allgemeinen gerade (der Wert  $k=0$  gibt das Fehlen des Durchmessers an); dann und nur dann ist  $k$  ungerade, wenn die durch den Durchmesser voneinander getrennten Eckpunkte *demselben* Grundpunkt zugeordnet sind, in welchem Fall also zwei der Windungspunkte der Fläche  $F_4$  über ein und demselben Grundpunkt liegen werden.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, das Doppelverhältnis der vier Windungspunkte der Fläche  $F_4$  als Funktion des Parameters  $\sigma$  zu bestimmen. Zu diesem Zweck setzen wir zunächst  $z^2=4x$ , wodurch die Gleichung (31) in

$$2xg'' + g' - 2(x-\sigma)g = 0$$

übergeht, und transformieren letztere durch die Laplacesche Transformation

$$g = \int e^{tx} u(t) dt.$$

Durch partielle Integration ergibt sich auf bekannte Weise, indem man den Integrationsweg passend wählt, für die Funktion  $u$  die Bedingungsgleichung

$$2u'(1-t^2) - (3t-2\sigma)u = 0,$$

welche

$$u = c(t-1)^{\alpha-1}(t+1)^{\beta-1}$$

gibt, wo

$$\alpha = \frac{1+2\sigma}{4}, \quad \beta = \frac{1-2\sigma}{4}$$

gesetzt worden ist, und wo  $c$  eine Integrationskonstante bezeichnet.

Wir wählen zunächst  $\sigma$  reell und  $|\sigma| < \frac{1}{2}$ , woraus  $\alpha > 0$  und  $\beta > 0$  folgt.

Unter dieser Bedingung findet man, dass die drei Ausdrücke

$$\int_{-1}^{+1} (1-t)^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-1} e^{\frac{t^2}{4}} dt,$$

$$\int_{-1}^{-\infty} (1-t)^{\alpha-1} (-1-t)^{\beta-1} e^{\frac{t^2}{4}} dt,$$

$$\int_1^{\infty} (t-1)^{\alpha-1} (t+1)^{\beta-1} e^{\frac{t^2}{4}} dt$$

die Differentialgleichung (31) befriedigen. Das erste Integral, welches im folgenden mit  $g_0$  bezeichnet werden soll, ist für jedes endliche  $z$  definiert. Man sieht leicht ein, dass sie auf jedem innerhalb irgend eines der Winkelräume

$$(W_\nu) \quad \left| \arg z - \nu \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{4} \quad (\nu = 0, \dots, 3)$$

verlaufenden Halbstrahl für  $z \rightarrow \infty$  ins Unendliche wächst. Es stellt somit  $g_0$  eine normale Lösung der Differentialgleichung (31) dar (vgl. S. 351).

Im zweiten Integral muss  $z$  innerhalb  $W_0$  oder  $W_2$  gewählt werden. Die entsprechenden Lösungen  $g_1$  und  $g_3$ , welche wie überhaupt alle Lösungen von (31) ganze Funktionen sind, sind defekt (vgl. S. 351); denn sie streben in  $W_0$  bzw.  $W_2$  gegen den asymptotischen Wert Null, und diese Eigenschaft war ja den defekten Lösungen charakteristisch.

Im dritten Integral muss die Variabilität von  $z$  auf die Winkelräume  $W_1$  oder  $W_3$  eingeschränkt werden. Die entsprechenden Lösungen,  $g_2$  bzw.  $g_4$ , sind ebenfalls defekte Lösungen der Gleichung (31).

Durch Drehung des Integrationsweges können die vier defekten Lösungen  $g_1, \dots, g_4$  analytisch fortgesetzt werden, und es ergibt sich in dieser Weise durch eine kurze Rechnung, die wir hier übergangen können, der Zusammenhang

$$g_1 = -ie^{\pi\alpha i} g_0 + i g_2 = i(e^{-\pi\alpha i} - e^{\pi\alpha i}) g_0 - g_3 = ie^{\pi\alpha i} g_0 - i g_4.$$

Hieraus folgt sofort, dass die meromorphe Funktion

$$w(z) = \frac{g_1}{g_0},$$

welche eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung (28) darstellt, in den vier Winkelräumen  $W_0, \dots, W_3$  bzw. die asymptotischen Werte

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -ie^{\pi\alpha i}, \quad a_3 = i(e^{-\pi\alpha i} - e^{\pi\alpha i}), \quad a_4 = ie^{\pi\alpha i}$$

hat. Über diesen vier Punkten liegen somit die Windungspunkte der Fläche  $F_4$ , und für das gesuchte Doppelverhältnis ergibt sich folglich der Wert

$$e^{4\pi\alpha i} = -e^{2\pi\sigma i}.$$

Durch eine passende lineare Transformation normieren wir nun die Fläche  $F_4$  so, dass  $w_2 = i$ ,  $w_3 = \infty$ ,  $w_4 = -i$ , und finden dann für den vierten Grundpunkt  $w_1 = a$  den Wert

$$a = \operatorname{tg} \pi\sigma.$$

Aus dieser Beziehung schliessen wir unmittelbar folgendes:

1) Einer bestimmten Lage des beweglichen Windungspunktes  $a$  entsprechen stets unendlich viele verschiedene Parameterwerte  $\sigma$ . Dies war auch auf Grund unserer früheren Ergebnisse zu erwarten, denn bei einer bestimmten Lage der Windungspunkte sind ja unendlich viele verschiedene Flächentypen  $F_4$  möglich, welche sich voneinander unterscheiden durch verschiedene Anzahl der Streifen, welche den Durchmesser des Kernvierecks  $K_4$  konstituieren.

2) Der Grundpunkt  $a$  vermeidet die zwei Werte  $i = w_2$  und  $-i = w_4$ . Auch dies steht in Übereinstimmung mit unseren früheren Ergebnissen, nach denen zwei zu »benachbarten« logarithmischen Elementen gehörige Windungspunkte stets über verschiedenen Grundpunkten belegen sein müssen.

3) Für die Werte  $\sigma = \frac{1}{2} + n$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), und nur für diese, wird  $a = \infty = w_3$ . Es sind dies die Fälle, wo zwei Grundpunkte ( $w_1$  und  $w_3$ ) zusammenfallen, so dass über dem betreffenden Punkt  $w_1 = w_3 = \infty$  zwei verschiedene Windungspunkte gelagert sind.

44. Um den Zusammenhang zwischen den Parameterwerten  $\sigma$  und dem Typus des Kernvierecks  $K_4$  etwas näher zu studieren, müssen wir eine Vereinbarung treffen über die Wahl der geschlossenen Linie  $L$ , welche durch die vier Grundpunkte gezogen werden soll und deren Bildkurven  $l$  in der  $z$ -Ebene zur Beschreibung des Aufbaus der Riemannschen Fläche  $F_4$  benutzt worden sind. Eine einfache Konfiguration entsteht, wenn man diese Linie  $L$  aus den Segmenten  $(i, +i\infty)$ ,  $(-i, -i\infty)$  der imaginären Achse und aus dem Kreisbogen  $(i, a, -i)$  zusammensetzt, ausser wenn  $a$  rein imaginär ist, in welchem Fall wir

für  $L$  die ganze imaginäre Achse nehmen. Gehen wir nun von einem bestimmten Wert  $a$  und von einem zugehörigen Parameterwert  $\sigma$ , also von einem bestimmten Flächentypus  $I'_4$  aus, so werden sich die Kurve  $L$  und ihre Bildlinien  $l$  in der  $z$ -Ebene stetig verändern, so lange sich der Windungspunkt  $a$  in der längs der zwei Segmente  $(i, +i\infty)$ ,  $(-i, -i\infty)$  der imaginären Achse aufgeschnittenen Ebene stetig bewegt. Hierbei wird auch der Typus des Kernpolygons invariant verbleiben. Ein Übergang von einem Typus zu einem anderen kann nur dann stattfinden, wenn der Punkt  $a$  die zwei genannten Schnitte überschreitet, wobei eine plötzliche Lageveränderung der Linienzüge  $L$  bzw.  $l$  eintritt. Da  $a = \operatorname{tg} \pi \sigma$ , so folgt hieraus, dass jedem Periodenstreifen

$$(32) \quad |\Re(\sigma) - n| < \frac{1}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ein wohlbestimmter Typus der Fläche  $I'_4$  entspricht, und dass ein Typenwechsel nur dann eintreffen kann, wenn der Parameter  $\sigma$  die Linien  $\Re(\sigma) = n + \frac{1}{2}$  überschreitet.

45. Aus wie vielen Fundamentalbereichen besteht nun der Durchmesser des Kernvierecks für einen gegebenen Periodenstreifen? Diese Frage erledigt sich einfach, wenn man zunächst die besonderen Werte  $\sigma = \nu + \frac{1}{2}$  ( $\nu = 0, \pm 1, \dots$ ) betrachtet, für welche zwei ( $w_3 = \infty$  und  $w_1 = a$ ) der Grundpunkte zusammenfallen, ein Spezialfall, der schon an und für sich von gewissem Interesse ist.

Wir erinnern daran, dass die in dieser Abhandlung untersuchten meromorphen Funktionen  $w(z)$  die charakteristische Eigenschaft haben, dass sie in jedem logarithmischen Ende zwei Ausnahmewerte besitzen, welche sie in dem betreffenden Ende nicht annehmen; diese zwei Werte sind die zwei Grundpunkte, um welche sich das entsprechende Riemannsche Flächenstück windet. Im vorliegenden Fall  $\sigma = \nu + \frac{1}{2}$  hat also die Funktion  $w_\sigma(z)$ , welche der Fläche  $I'_4$  für den Parameterwert  $\sigma$  entspricht, in den logarithmischen Enden  $G_{12}, G_{23}, G_{34}, G_{41}$  bzw. die Ausnahmewerte  $(\infty, i)$ ,  $(i, \infty)$ ,  $(\infty, -i)$ ,  $(-i, \infty)$ , woraus erhellt, dass sie in den logarithmischen Enden durchweg endlich ist, und also überhaupt nur endlich viele, innerhalb des Kernpolygons belegene Pole besitzt. Jedem Fundamentalstreifen des Durchmessers des Kernvierecks entspricht ein Pol, so dass also die Polanzahl der Funktion  $w_\sigma(z)$  gleich der Anzahl  $k$  der Fundamentalstreifen ist, welche den Durchmesser bilden. Insbesondere ist  $k = 0$ , und  $w$

also eine *ganze* Funktion, dann und nur dann, wenn der Durchmesser sich auf eine einzige, die Eckpunkte  $w_2$  und  $w_4$  des Kernpolygons verbindende Linie  $l$  reduziert (vgl. S. 318, Fig. 3).

Beachtet man nun, dass die meromorphe Funktion  $w(z)$  als Quotient von zwei nullstellenfremden ganzen Funktionen dargestellt werden kann, welche die Differentialgleichung (31) befriedigen, so ergibt sich, dass diese Gleichung eine Lösung  $g(z)$  gestattet, welche nur  $k$  (einfache) Nullstellen aufweist. Dividieren wir diese ganze Funktion  $g$ , welche, wie überhaupt jede Lösung der Gleichung (31), von *zweiter* Ordnung ist, durch ein Polynom  $H_k(z)$ , welche in denselben Punkten wie  $g$  verschwindet, und mithin vom Grade  $k$  ist, so erhält man als Quotient eine nirgends verschwindende ganze Funktion zweiter Ordnung. Eine solche Funktion reduziert sich aber auf ein Exponential, und wir haben also folgendes Ergebnis:

Für  $a = \infty$  (d. h.  $\sigma = \frac{1}{2} + \nu$ ) hat die Differentialgleichung (31) eine Lösung der Form

$$g = e^{az^2 + bz} H_k(z),$$

wo  $H_k(z)$  ein Polynom ist.

Setzt man diesen Ausdruck in (31) ein, so findet man für das Polynom  $H_k$  die Bedingung

$$H_k'' + 2(2az + b)H_k' + \left[ \left( 4a^2 - \frac{1}{4} \right) z^2 + 4abz + b^2 + 2a + \sigma \right] H_k = 0.$$

Diese Differentialgleichung kann offenbar von einem *Polynom* nur dann befriedigt werden, wenn  $a = \pm \frac{1}{4}$  und  $b = 0$ . Beachtet man ferner, dass  $H_k$  die Potenz  $z^k$  als höchstes Glied enthält, so ergibt sich sogleich die weitere Bedingung, dass  $\sigma = k + \frac{1}{2}$ , falls  $a = -\frac{1}{4}$ , und dass  $\sigma = -\left(k + \frac{1}{2}\right)$ , falls  $a = \frac{1}{4}$ . Das Polynom  $H_k$  bestimmt sich also für  $\sigma = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right)$  durch die Differentialgleichung

$$H_k'' \mp zH_k' \pm kH_k = 0.$$

Dies ist, für die oberen Vorzeichen, die Gleichung des  $k$ -ten *Hermiteischen Polynoms*. Behalten wir die Bezeichnung  $H_k$  diesem Polynom vor, so sieht man, dass den unteren Vorzeichen die Lösung  $H_k(iz)$  entspricht.



Nehmen wir zunächst  $\sigma = \frac{1}{2} + k$  an, so bestimmt sich die Lösung  $w$  der Differentialgleichung (28) durch den Ansatz  $\sqrt{w'} = \frac{1}{y}$ , und es wird

$$(33) \quad w = \int_0^z \frac{e^{\frac{z^2}{2}}}{(H_k(z))^2} dz.$$

Durch Multiplikation mit einer passenden reellen Konstante  $K$  erreicht man, dass diese meromorphe Funktion in den Winkelräumen  $W_v$  die geforderten asymptotischen Werte  $\infty, \pm i$  erhält. In der Tat sieht man sofort ein, dass diese Funktion auf der reellen Achse gegen Unendlich strebt, wenn  $z \rightarrow \infty$ , und in den Winkelräumen  $W_1$  und  $W_3$  hat sie die Grenzwerte  $\pm iK$ , wo  $K$  die reelle, von Null verschiedene Zahl

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{(H_k(it))^2}$$

bezeichnet.

Für  $\sigma = -\left(\frac{1}{2} + k\right)$  findet man

$$w = \int_0^z \frac{e^{-\frac{z^2}{2}} dz}{(H_k(iz))^2},$$

eine Funktion, welche von (33) nicht wesentlich abweicht, indem sie in diese übergeht, wenn man beide Veränderliche  $z$  und  $w$  mit  $i$  multipliziert. Dieses Ergebnis war ja auch auf Grund unserer obigen Erörterungen zu erwarten, denn den zwei Werten  $\sigma = \pm \left(\frac{1}{2} + k\right)$  entspricht ein und derselbe Flächentypus, nämlich derjenige, wo der Durchmesser des Kernpolygons  $k$  Fundamentalbereiche enthält. Dass zwei einander entgegengesetzte Werte  $\sigma$  immer zu demselben Flächentyp führen, ist übrigens direkt aus dem Schwarzschen Differentialausdruck  $\{w, z\} = -\frac{z^2}{2} + 2\sigma z$  zu ersehen, wo die Multiplikation der Variable  $z$  mit  $i$  nur einen Vorzeichenwechsel des Parameters  $\sigma$  bewirkt.

Als Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Nummer können wir folgenden Satz aussprechen:

Die Gesamtheit der einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen mit vier Verzweigungspunkten unendlich hoher Ordnung, von denen zwei über ein und demselben Punkt liegen, wird analytisch bestimmt durch die Formel

$$(34) \quad w = \int_0^z \frac{e^{z^2} dz}{H_k^2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

wo die Veränderlichen  $z$  und  $w$  noch einer beliebigen linearen Transformation unterworfen werden können. Hierbei bedeutet  $H_k(z)$  das Hermitesche Polynom vom Grade  $k$ .

Unter sämtlichen einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen mit vier logarithmischen Windungspunkten zeichnen sich die oben betrachteten durch die Eigenschaft aus, dass auf ihnen eine gewisse Stelle  $w = a$  existiert, worüber nur endlich viele schichten Blätter gelagert sind; diese Stelle ist eben diejenige, auf welche sich zwei der Windungspunkte projizieren. Für  $k = 0$  fehlen an dieser Stelle die schichten Blätter gänzlich, und der Wert  $w = a$  wird ein Picardscher Ausnahmewert der entsprechenden Abbildungsfunktion  $w = w(z)$ . Verlegt man den Punkt  $w = a$  ins Unendliche, so wird  $w$  gleich der Funktion

$$\int_0^z e^{z^2} dz,$$

welche in der Literatur öfters als Beispiel einer ganzen Funktion mit mehreren (zwei) endlichen asymptotischen Werten angeführt worden ist.<sup>1</sup> Die entsprechende Riemannsche Fläche, welche ebenfalls von verschiedenen Autoren eingehend beschrieben worden ist, wird in unserer Darstellung dem Fall entsprechen, wo der Durchmesser des Kernvierecks aus einer einzigen Diagonalkurve  $l$  besteht (Fig. 3, S. 318).

46. Wir haben oben gefunden, dass sämtlichen Werten  $\sigma$ , welche einem gegebenen Periodenstreifen  $|\Re(\sigma) - n| < \frac{1}{2}$  entsprechen, ein wohlbestimmter Flächentypus zugeordnet ist. Der Durchmesser des Kernpolygons enthält (im Gegensatz

<sup>1</sup> Vgl. hierzu: A. HURWITZ. — *Sur les points critiques des fonctions inverses* (Comptes rendus, T. 143, 1906, p. 877 und T. 144, 1907, p. 63), F. IVERSEN. — *Sur une fonction entière dont la fonction inverse présente un ensemble de singularités transcendantes de la puissance du continu* (Öfversigt af Finska Vet.-Soc. Förh., B. 58, 1915—1916), sowie die erste von den auf S. 345 zitierten Arbeiten von E. HILLE.

zum Sachverhalt für die speziellen Werte  $\sigma = \frac{1}{2} + n$ ) eine gewisse gerade Anzahl  $k(n)$  von Diagonalkurven  $l$ . Um diese Anzahl zu ermitteln, denken wir uns den Punkt  $\sigma$  in dem betrachteten Streifen belegen, und lassen ihn durch reelle Werte gegen den rechten Begrenzungspunkt  $\sigma = \frac{1}{2} + n$  rücken, wobei sich der Windungspunkt  $a = \operatorname{tg} \pi \sigma$  längs der reellen Achse gegen  $+\infty$  bewegen wird. Nimmt man nun  $n$  nichtnegativ an, und berücksichtigt man die Art und Weise, in der sich die Lage des (nach den auf S. 364 angegebenen Festsetzungen gezogenen) Linienzuges  $L$  bei diesem Prozess verändert, so sieht man leicht ein, dass die Anzahl der Diagonalkurven  $l$  um *Eins* vermehrt wird, wenn  $\sigma$  den Wert  $\frac{1}{2} + n$  erreicht. Für diesen Wert ist diese Anzahl, wie wir oben gefunden haben, gleich  $2n + 1$ , und es wird mithin, für ein nichtnegatives  $n$ ,  $k(n) = 2n$ . Nach der auf S. 367 gemachten Bemerkung muss ferner  $k(-n) = k(n)$  sein, und wir haben folglich das Resultat:

Für  $|\Re(\sigma) - n| < \frac{1}{2}$  enthält der Durchmesser des Kernpolygons  $2|n|$  Diagonalkurven  $l$ .

Der einfachste Typus, für welchen das Kernviereck unzerlegt verbleibt, entspricht dem Periodenstreifen  $|\sigma| < \frac{1}{2}$ .

47. Bisher haben wir die nicht reellen, den Begrenzungsgeraden  $\Re(\sigma) = n + \frac{1}{2}$  entsprechenden Parameterwerte  $\sigma$  noch nicht in Betracht gezogen. Wählt man nun den Linienzug  $L$  wie auf S. 364, so wird beim Überschreiten der Begrenzungslinien eine plötzliche Verschiebung der Linien  $l$  stattfinden. Die diesen Übergangswerten  $\sigma$  entsprechende Konfiguration, die leicht vollständig zu beschreiben wäre, entspricht jedoch keinem der Systeme, welche wir oben zur Beschreibung der Riemannschen Fläche benutzt haben. Dies beruht darauf, dass der Windungspunkt  $a$  für die betrachteten Werte  $\sigma$  auf dem Segment  $(i, i\infty)$  oder  $(-i, -i\infty)$  belegen sein wird, wobei die vier Verzweigungspunkte  $a, i, \infty, -i$  auf der Linie  $L$  nicht mehr in derselben Ordnung aufeinander folgen, wie die ihnen zugeordneten Eckpunkte des Kernvierecks, d. h. wie die vier Winkelräume  $W_0, W_1, W_2, W_3$ ; die Übereinstimmung dieser zwei Reihenfolgen war jedoch für unsere Beschreibung eine wesentliche Voraussetzung. Durch Abänderung des

Linienzuges  $L$  kann die richtige Reihenfolge der Verzweigungspunkte wiederhergestellt werden, und man erreicht derart, dass das Kernpolygon für die kritischen Werte  $\sigma$  dieselbe Struktur erhält, wie für die Werte eines der zwei angrenzenden Periodenstreifen. Diese Modifikation erbieht keinerlei Schwierigkeiten, und es dürfte daher nicht nötig sein auf diese Einzelheit näher einzugehen. Es sei in diesem Zusammenhang noch nur darauf hingewiesen, dass die Sonderstellung der Geraden  $\Re(\sigma) = n + \frac{1}{2}$  überhaupt nicht in der Natur der Sache liegt, sondern dass sie durch die obige spezielle Vorschrift bedingt ist, dass die Linie  $L$  die drei, oben als fest angenommenen Windungspunkte  $i, \infty, -i$  längs der *imaginären Achse* verbinden soll. Durch Abänderung dieses Segments der Linie  $L$  wird die Rolle der erwähnten Geraden von einem anderen System Parallelkurven übernommen, welche jedoch immer die charakteristische Eigenschaft behalten, dass sie die Achse der reellen  $\sigma$ -Werte in den kritischen Punkten  $\sigma = n + \frac{1}{2}$  schneiden. Während also der Typus des Kernpolygons bis zu einem gewissen Grad von der Wahl der Kurve  $L$  abhängig ist, wird die Untergruppe  $\Sigma$  durch den Parameterwert  $\sigma$  eindeutig festgelegt.

48. Neben dem soeben genannten kritischen Wertesystem  $\sigma = \frac{1}{2} + n$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) verdienen die *ganzzahligen*  $\sigma$ -Werte besondere Beachtung. Die vier Windungspunkte der entsprechenden Riemannschen Flächen  $F_4$  bilden eine harmonische Punktgruppe. Der einfachste, oben (S. 331) als »symmetrisch« bezeichnete Fall entspricht dem Wert  $\sigma = 0$ . Die meromorphe Funktion  $w(z)$  ergibt sich dann als Quotient von zwei linear unabhängigen Lösungen  $A$  und  $B$  der homogenen Gleichung

$$y'' = 4z^2 y.$$

Wählt man insbesondere die Lösungen

$$A = z \left( 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{4\nu}}{\nu! 5 \cdot 9 \cdots (4\nu + 1)} \right), \quad B = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{4\nu}}{\nu! 3 \cdot 7 \cdots (4\nu - 1)},$$

so strebt  $w(z)$  in den vier Winkelräumen  $W_0, W_1, W_2, W_3$  bzw. gegen die asymptotischen Werte  $K, iK, -K, -iK$ , wo  $K$  eine reelle positive Zahl

ist.<sup>1</sup> Lässt man dann die Linie  $L$  mit dem Kreis  $|w| = K$  zusammenfallen, so wird die von den Bildkurven  $l$  gebildete Figur in der  $z$ -Ebene in bezug auf die reelle und imaginäre Achse, sowie in bezug auf die Halbierenden der von diesen Achsen gebildeten Winkel symmetrisch. Das Kernviereck enthält die Koordinatenachsen, und bei symmetrischer Zerschneidung (vgl. S. 330) werden die »Haupteinschnitte« längs der Winkelhalbierenden fallen. Die (normalen) Lösungen  $A$  und  $B$  zeichnen sich durch die spezielle Eigenschaft aus, dass ihre Nullstellen sämtlich auf diesen Winkelhalbierenden liegen.

Diese Symmetrieeigenschaften der dem Parameterwert  $\sigma = 0$  entsprechenden Fläche  $F_4$  können auch aus der Parameterdarstellung

$$z = \varphi(\zeta), \quad w = \omega(\zeta)$$

der Funktion  $w(z)$  hergeleitet werden, auf Grund gewisser Symmetrien, welche die Fundamentalbereiche der automorphen Funktionen  $\varphi$  und  $\omega$  im vorliegenden Falle aufweisen. Man vergleiche hierzu die Schlussweise auf S. 361.

Es sei schliesslich darauf aufmerksam gemacht, dass analoge Betrachtungen auch zum Beweise gewisser Symmetrieeigenschaften der zu den Parameterwerten  $\sigma = \frac{1}{2} + n$  gehörigen Flächen angewandt werden können. So lässt es sich z. B. zeigen, dass die  $|n|$  Punkte  $z$ , wo die entsprechende Funktion  $w(z)$  den kritischen Wert  $a$  annimmt, über welchem zwei der vier Windungspunkte belegen sind, auf *einer Geraden* liegen. Verlegt man den kritischen Wert  $a$  in den unendlich fernen Punkt, und normiert man auch sonst die Funktion  $w(z)$  wie in Nr. 45, so wird diese Gerade, auf welche also die endlich vielen Pole der Funktion  $w$  fallen, mit der reellen Achse zusammenfallen. Dies ergibt sich andererseits auch aus dem Ausdruck (34) der betreffenden Funktion, unter Anwendung der wohlbekanntes Tatsache, dass die Nullstellen der Hermiteschen Polynome reell sind.

49. *Die Fälle  $p > 4$ .* Komplizierter als in den oben behandelten speziellen Fällen stellt sich die Untersuchung der Beziehungen zwischen den Koeffizienten des Schwarzschen Differentialausdruckes  $\{w, z\}$  und der Struktur des Kernpolygons  $K_p$  in den höheren Fällen  $p > 4$ . Ohne auf diese allgemeine Frage hier näher einzugehen, sei nur bemerkt dass, nachdem drei der  $p$  Windungspunkte der Fläche  $F_p$  beliebig festgelegt worden sind, die übrigen  $p - 3$  beweg-

<sup>1</sup> Unter Anwendung der Laplaceschen Transformation findet man für  $K$  den Wert  $\sqrt{2} \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)}$ .

lichen Windungspunkte  $a_1, \dots, a_{p-3}$  sich als eindeutige analytische Funktionen der voneinander unabhängigen Parameter  $\sigma_1, \dots, \sigma_{p-3}$  der Differentialgleichung (28) bestimmen. Jedem System  $(a_1, \dots, a_{p-3})$  entsprechen unendlich viele verschiedene Systeme  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{p-3})$ . Der  $2p-6$  dimensionale Parameterraum lässt sich in Fundamentalbereiche einteilen, welche je einem bestimmten Flächentyp  $F_p$  entsprechen. Wenn der Punkt  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{p-3})$  sich innerhalb eines solchen Fundamentalbereiches bewegt, so werden die Windungspunkte hierbei alle möglichen gegenseitigen Lagen einnehmen. Auf den Begrenzungskontinua der Fundamentalbereiche liegen insbesondere diejenigen Wertsysteme  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{p-3})$ , für welche gewisse der Grundpunkte  $a_v$  zusammenfallen.

## § 12. Verallgemeinerungen.

50. Die in dieser Abhandlung ausgeführten Untersuchungen können nach verschiedenen Richtungen hin erweitert werden. Die nächstliegende Verallgemeinerung, auf welche schon in der Einleitung aufmerksam gemacht worden ist, besteht darin, dass man auch das Vorkommen algebraischer Windungspunkte in Betracht zieht. Die oben entwickelte Methode erlaubt mit naheliegenden und verhältnismässig geringen Modifikationen die Gesamtheit der einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen mit einer endlichen Anzahl von (algebraischen oder logarithmischen) Windungspunkten analytisch zu bestimmen. Diese Flächen werden immer noch zum parabolischen Typus (Grenzfunktfall) gehören, was wieder ausgehend von der Schwarzschen Ableitung der meromorphen Abbildungsfunktion  $w(z)$  bewiesen werden kann. Dieser Ausdruck ist von  $z$  rational abhängig und weist im unendlich fernen Punkt einen Pol auf, dessen Ordnung um zwei Einheiten kleiner ist als die Anzahl der Windungspunkte unendlich hoher Ordnung. Das Hinzukommen einer endlichen Anzahl algebraischer Windungspunkte hat auf die asymptotischen Eigenschaften der meromorphen Funktion  $w$  keinen wesentlichen Einfluss, und die Eigenschaften, welche in § 9 besprochen worden sind, bleiben unverändert bestehen.

Zu einer anderen Erweiterung wird man geführt, wenn man die Forderung aufgibt, dass die Anzahl der Windungspunkte endlich sein soll. Auf diesem Wege eröffnet sich die Möglichkeit meromorphe Funktionen mit vollkommen beliebig vorgeschriebenen Defekten vom Gesamtbetrag Zwei zu konstruieren. Meine diesbezüglichen Bemühungen sind an den Schwierigkeiten gescheitert, welche die

Untersuchung der asymptotischen Eigenschaften der durch eine solche Konstruktion gewonnenen Funktionen erbijetet.

Von Interesse sind auch diejenigen analytischen Funktionen, zu welchen man gelangt, wenn man mehrfach ( $k$ -fach) zusammenhängende Riemannsche Flächen in Betracht zieht. Hält man sich hierbei an die auf einer solchen Fläche einwertigen Funktionen, so findet man als Abbild der Fläche die schlichte, in  $k$  Punkten punktierte Ebene.

Schliesslich lässt sich unsere Untersuchung auch auf Funktionen ausdehnen, welche auf der gegebenen Riemannschen Fläche mehrwertig sind. Unter der Voraussetzung, dass die Wertigkeit eine endliche vorgegebene Zahl nicht überschreitet, gelangt man so zu Funktionen, welche für die Theorie der algebroiden Funktionen von Bedeutung sind.

