ENTWICKLUNGSSÄTZE AUS DER THEORIE DER ZWEITEN VARIATION.

Allgemeine Randbedingungen.

Von

ERNST HÖLDER

in Leipzig.

Entwicklungssätze, wie sie die vor hundert Jahren erschienenen grundlegenden Abhandlungen von Sturm [1]—[3] und Liouville [1]—[4] inaugurierten, sollen in dieser Arbeit mittels der von Lichtenstein nach dieser Richtung ausgebildeten Analysis unendlich vieler Variablen auf Reihen nach den Lösungen eines Eigenwertproblems ausgedehnt werden, das aus der Theorie der zweiten Variation beim Problem von Lagrange entspringt: das »polar» mit dem Eigenwertparameter versehene, ebenfalls vor hundert Jahren entdeckte Jacobische lineare kanonische Differentialgleichungssystem nebst allgemeinen selbstadjungierten Randbedingungen (»regulären» Endbedingungen und einer — unter Umständen ebenfalls mit dem Parameter behafteten — Transversalitätsbedingung, in der Normalform von Morse, vgl. (11.4), (17.2)). Der (reguläre) Ausgangsextremalenbogen kann dabei eine beliebige Carathéodorysche Klasse haben, genauer gesagt eine beliebige, mit Rücksicht auf die Transversalitätsbedingung verstandene Anomalitätsordnung im Sinne von Hestenes, vgl. **3**.

Den typischen Spezialfall fester Endpunkte habe ich [2] in dem 1935 zum Andenken an Lichtenstein von S. Dickstein herausgegebenen Band 43 der Prace Matematyczno-Fizyczne behandelt. Dort bin ich auf das eine berühmte Untersuchung von H. A. Schwarz fortsetzende Werk von Lichtenstein [1]—[7], soweit es die in Frage stehende Methode und ihre Anwendung auf die Variationsrechnung betrifft, auf einige wenige frühere in derselben von Hilbert gewiesenen Richtung gehende Arbeiten (M. Mason, W. de Wese Cairns, R. G. D. Richardson) und auf unmittelbar anschliessende, von Lichtenstein angeregte Dissertationen (H. Geiringer, H. Boerner [1]) einerseits, auf eine Trefftzsche Betrachtung zur Schwingungstheorie [1] und auf neuere Literatur zum Lagrangeschen Problem (Carathéodory [1]—[4], Radon [1], [2], Bliss [2], [3], Morse [1]—[3], Reid [1]—[3], Hestenes [1]) andererseits eingegangen. Die zitierten amerikanischen Arbeiten[1] behandeln immer gleich allgemeine Randbedingungen. Ausser ihnen nenne ich nur die mir jetzt zugänglich gewordene Dissertation von Cope [1], sowie die an Lichtenstein anschliessenden, allgemeine Randbedingungen behandelnden Arbeiten von Boerner [2], [3] und verweise im übrigen auf den Bericht von Reid [5], der den Encyklopädieartikel von Hilb [1] in Richtung der allgemeinen Randwertprobleme der Variationsrechnung ergänzt.

Die der Theorie der zweiten Variation beim allgemeinen Problem von Lagrange hier zunächst zugrunde gelegte Randwertaufgabe bietet zwar (im Gegensatz zu dem meist — ich nenne nur Bliss [2], [4], Morse [2], Courant [2] — behandelten definiten Fall) den polaren Fall, der nur noch von wenigen, etwa Haupt [1], [2], Anna Pell Wheeler [1], Langer [1], [2] studiert worden ist, ist aber nach dem von Lichtenstein [7] gegebenen Vorbild möglichst einfach gewählt; sie ist in der allgemeineren von Reid [2] auf die Existenz von Eigenwerten hin betrachteten Klasse von Aufgaben als eine spezielle enthalten, die aber den Vorzug hat, sich vollständig behandeln zu lassen. Der eingeführte Parameter erscheint bei vielen mechanischen Anwendungen als sehr naturgemäss (Quadrat der Schwingungsfrequenz, Knickwert, vgl. Trefftz [1], [2]), was bei dem an sich denkbar einfach in einem additiv hinzutretenden Glied enthaltenen Parameter des von Bliss [1], Cope [1], Morse [1], [2] benutzten akzessorischen Randwertproblems vielleicht nicht in demselben Masse der Fall ist. Es ist übrigens zu bemerken (mit Reid [5], S. 646), dass selbst dieses schon im Fall eines wirklichen Lagrangeschen Problems mit Nebenbedingungen nicht mehr »definitely self adjoint» im Sinne von Bliss [2] ist (wie Cope annimmt), so dass auch nicht der Blisssche Entwicklungssatz unmittelbar zur Anwendung kommen kann, der überdies das Vorhandensein von ersten Ableitungen des zur zulässigen Funktion gehörigen Impulses erfordert. Letzteres gilt auch von den nur unter recht unübersichtlichen Voraussetzungen gültigen Entwicklungssätzen, die Reid [2] auf der Blissschen Grundlage behandelt hat — übrigens ohne aus ihnen etwas für die Entwicklung der (von vornherein als positiv definit vorausgesetzten) zweiten Variation etwas zu folgern.

---

[1] Damals wäre auch Hickson [1] zu erwähnen gewesen.

Die Aufstellung und gegebenenfalls die Feststellung der gleichmässigen Cauchy-Konvergenz solcher Reihenentwicklungen sind gerade Hauptziele dieser Arbeit. Sie ist absichtlich, sogar in der Numerierung der Abschnitte — abgesehen von den drei letzten — parallel zu meiner früheren, auf feste Endpunkte bezüglichen Arbeit [3] gehalten, deren einfachere Überlegungen so, wenn erwünscht, als Vorbild dienen können; direkt verwiesen wird auf sie nur für einige wenige Betrachtungen, die sich bei der Verallgemeinerung nicht ändern.

Nachdem in **1** das Hilfsmittel der Greenschen Formeln bereitgestellt, in **2** der zugrunde liegende Funktionenbereich der zulässigen Funktionen der Klasse D' im Sinne Bolzas [1] abgegrenzt und für sie das zu berechnende Funktional der zweiten Variation erklärt ist, haben wir als Hauptvorbereitung das System der Koordinatenfunktionen, nach denen die zulässigen Funktionen zunächst entwickelt werden sollen, unserem Randwertproblem anzupassen. Dazu gehört die Begriffsbildung der normalen Eigenfunktion, erst mal bei einem vereinfachten kanonischen System, **3**, weiter, **4**, **5**, — gestützt auf Untersuchungen von Bliss [2] — die Einführung des Greenschen Tensors (im erweiterten Sinn) und insbesondere seines (auf Grund der von Hadamard [1], Carathéodory [4], Radon [2] systematisch benutzten kanonischen Struktur der Differentialgleichungen abzutrennenden) wesentlichen Teiltensors H_{ij}, eines Kernes, mittels dessen sich jede (zu den normalen Eigenfunktionen des Parameterwertes 0 orthogonale) zulässige Funktion der Klasse D' durch ihren Impuls quellenmässig darstellen lässt.

Die Fourierentwicklung dieser zulässigen Funktionen nach den Eigenfunktionen des vereinfachten kanonischen Systems folgt dann in **8** nach einem E. Schmidtschen Satz daraus, dass Koordinatenvektor und Impulsvektor einer solchen Eigenfunktion zusammen ein Paar adjungierter Eigenfunktionen eben des unsymmetrischen Kerns H_{ij} bilden, **7**.

In diesen allgemeinen Zusammenhang, den Hilbert [1], wie Hellinger erinnert, gelegentlich angedeutet hat und den ich im Bericht über meinen Vortrag auf der Stuttgarter Tagung der Deutschen Mathematiker Vereinigung formuliert habe [4], ordnen sich die Untersuchungen ein, die Trefftz [1], [2] für die schwingende Saite und den schwingenden Stab angestellt hat. Ähnliches wie Trefftz hat Hamel in einem nicht gedruckten Vortrag [1] bekannt gegeben; darauf bezieht sich Prüfer [1] in seiner Herleitung der Sturm-Liouvilleschen Reihenentwicklung, die auch Kamke [1] in seinem Lehrbuch über Differentialgleichungen darstellt. Hamel selbst kommt in seinem eben erschienenen Buch über Integralgleichungen [2], S. 117—120 auf seine Bemerkung kurz zurück.

Vermöge der damit allgemein gewonnenen Fourierentwicklung zulässiger Funktionen der Klasse D' nach den Eigenfunktionen des vereinfachten kanonischen Randwertproblems — letztere bilden das zu verwendende Orthogonalsystem der Bezugsfunktionen —, insbesondere vermöge einer in **9** hergeleiteten Vollständigkeitsrelation ist aber die Zurückführung des zur zweiten Variation gehörigen »Lichtensteinschen» Eigenwertsproblems auf die Hauptaxentransformation einer vollstetigen quadratischen Form von unendlich vielen Variablen (den Fourierkoeffizienten) gegeben, **10**, ebenso die Entwicklung der zweiten Variation, **13**, und die Fourierreihe einer zulässigen Funktion der Klasse D' nach den Eigenfunktionen des zuletzt genannten Problems, **16**, die in **11** ermittelt, in **12** auf ihre Minimumseigenschaft hin untersucht werden. Das ist eine Übertragung der Lichtensteinschen Betrachtungen, die im Grossen und Ganzen dieselbe ist wie für feste Endpunkte. Jeder Extremalen kann nun, **13**, ohne weiteres eine Typenzahl (Index) zugeordnet werden: die Anzahl der (mit ihrer Vielfachheit gerechneten) positiven Eigenwerte < 1. Für festen *End*punkt des Extremalenbogens wird in **14** ein direkter Beweis dafür skizziert, dass dieser Index gleich ist der Anzahl der (mit ihrer Vielfachheit gerechneten) Brennpunkte (im Sinne Carathéodorys [3]) der durch die Anfangsmannigfaltigkeit gegebenen feldartigen Extremalenschar, was die Jacobische Bedingung enthält, **14**. Solche und allgemeinere Beziehungen (für Variationsprobleme mit Nebenbedingungen freilich vorläufig nur angekündigt von Morse, Hestenes, Reid, vgl. dessen Bericht [5]) verdankt man Morse [2], der einen Begriff des Index zuerst eingeführt hat; dieser stimmt mit dem aus der Lichtensteinschen Theorie zu folgernden überein, wie man, vgl. **19**, ganz leicht mittels eines Schlusses sieht, den Birkhoff und Hestenes [1] bei ihrer allgemeinen Theorie benutzen. Weniger vollständig ist das Resultat bezgl. des Kriteriums für Abgeschlossenheit, **15**.

Um schliesslich zu den üblichen Eigenwertproblemen überzugehen, bei denen der Eigenwertparameter nur in den Differentialgleichungen vorkommt — nicht wie bisher auch in den Randbedingungen (der Transversalitätsbedingung), hat man das Lichtensteinsche Verfahren nur nochmals anzuwenden und eine in den Koeffizienten der zuletzt gewonnenen Fourierentwicklung gebildete vollstetige quadratische Form auf Hauptaxen zu bringen; das geschieht im Abschnitt **17** in Betrachtungen, die bei festen Endpunkten teils nicht nötig, teils früher von mir nicht durchgeführt worden waren. **18** bringt die Fourierentwicklung nach den Eigenfunktionen des neuen Randwertproblems.

Anschliessend betrachte ich im letzten Abschnitt **19** als Spezialfall des vorigen das akzessorische Eigenwertproblem von Morse [1]. Wie ich [2] im Fall fester Endpunkte bereits auf der Pyrmonter Tagung der Deutschen Mathematiker Vereinigung (»Über die Entwicklung der zweiten Variation beim Problem von Lagrange») vorgetragen habe, gilt für die 2. Variation eine Darstellung als quadratische Diagonalform in unendlichvielen Variablen (den Fourierkoeffizienten der zulässigen Funktion nach den Eigenfunktionen des akzessorischen Randwertproblems). Daraus erhellt unmittelbar die isoperimetrische Minimumseigenschaft der Eigenfunktionen sowie die der Ausgangslösung $x = 0$; letztere ergab sich auch aus den Entwicklungen von **13**. Die durch Orthogonalisierung entstehenden »künstlichen» Nebenbedingungen sind beidemale gleichzeitig ein eigentlicher Minimalsatz von natürlichen isoperimetrischen Nebenbedingungen im Sinne von Birkhoff und Hestenes [1], so dass die Anzahl der Bedingungsgleichungen beidemale dieselbe sein muss. Das beweist die Identität des in **13** eingeführten Index mit dem Morseschen.

Methodisch gibt die Einführung der Eigenfunktionen auf Grund der Hauptaxentransformation eines unendlichdimensionalen Ellipsoids eine vollständige Einsicht in den Sachverhalt — auch der Reihenentwicklungen und zwar, im Gegensatz etwa zu der unmittelbaren Anwendung von Minimumsmethoden auf das Lagrangesche (oder auch nur isoperimetrische) Problem mit seinen Nebenbedingungen, einfach mit Hilfe der klassischen Existenzsätze aus der Eigenwerttheorie der vollstetigen quadratischen Formen von unendlichvielen Variablen und der Integralgleichungen mit symmetrischem Kern. Letztere werden hier dazu gebraucht, um aus den Eigenfunktionen des vereinfachten kanonischen Randwertproblems, d. h. dessen Greenschen Kernes, ein der eigentlichen Aufgabe schon angepassten System von Koordinatenfunktionen zu erhalten; an anderer Stelle möchte ich für eine noch verhältnismässig allgemeine Klasse von Problemen die Theorie der zweiten Variation ohne ein solches Hilfssystem von Koordinatenfunktionen unter Zugrundelegung einer Integralgleichung mit symmetrischem Kern behandeln.

Verzeichnis der zu zitierenden Literatur.

(Weitere Literatur bei Carathéodory [4], Hilb [1], Kneser [1], Lichtenstein [1], Morse [2], Reid [5].)

Birkhoff, G. D. (mit Hestenes, M. R.).

1. Natural isoperimetric conditions in the calculus of variations, Duke math. Journ. **1** (1935), S. 198—286.

Bliss, G. A.

1. A boundary value problem in the calculus of variations, Bull. American Math. Soc. **32** (1926), S. 317—331.
2. A boundary value problem for a system of ordinary linear differential equations of the first order, Transact. American Math. Soc. **28** (1926), S. 561—584.
3. The problem of Lagrange in the calculus of variations, American Journ. of Math. **52** (1930), S. 674—743.
4. (Mit Schoenberg, I. J.) On separation, comparison and oscillation theorems for self-adjoint systems of linear second order differential equations. American Journ. of Math. **53** (1931), S. 781—800.

Boerner, H.

1. Über einige Eigenwertprobleme und ihre Anwendung in der Variationsrechnung, Math. Zeitschr. **34** (1931), S. 293—319 und **35** (1932), S. 161—189.
2. Zur Theorie der zweiten Variation, Math. Zeitschr. **39** (1934), S. 492—500.
3. Ein »belastetes» Variationsproblem, Journ. für Math. **171** (1934), S. 120—127.

Bolza, O.

1. Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und Berlin 1909.
2. Über den »anormalen Fall» beim Lagrangeschen und Mayerschen Problem mit gemischten Bedingungen und variablen Endpunkten, Math. Ann. **74** (1913), S. 430—446.

Carathéodory, C.

1. Die Methode der geodätischen Äquidistanten und das Problem von Lagrange, Acta math. **47** (1925), S. 199—235.
2. Über die Einteilung der Variationsprobleme von Lagrange nach Klassen, Commentarii Math. Helvet. **5** (1932), S. 1—19.
3. Die Theorie der zweiten Variation beim Problem von Lagrange, Münchner Ber. 1932, S. 99—114.
4. Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig und Berlin 1935.

Cope, T. F.

1. An analogue of Jacobi's condition for the problem of Mayer with variable end points (Durchgesehene Fassung der Chicagoer Diss. 1927), American Journ. of Math. **59** (1937), S. 655—672.

Courant, R.

1. (mit Hilbert, D.) Die Methoden der mathematischen Physik I. 2. Aufl., Berlin 1935; II. Berlin 1937.
2. Über die Anwendung der Variationsrechnung in der Theorie der Eigenschwingungen und über neue Klassen von Funktionalgleichungen, Acta math. **49** (1926), S. 1—68.

Hadamard, J.

1. Leçons sur le calcul des variations, T. I, Paris 1910, insbes. S. 264—280.

Hamel, G.

1. Über die Zerlegung positiver Kerne linearer Integralgleichungen, Berl. Math. Ges. Sitz.-ber. **22** (1923), S. 2.
2. *Integralgleichungen. Einführung in Lehre und Gebrauch*, Berlin 1937.

Haupt, O.

1. Untersuchungen über Oszillationstheoreme, Diss. Würzburg 1911.
2. Über eine Methode zum Beweise von Oszillationstheoremen, Math. Ann. **76** (1915), S. 67—104.

Hestenes, M. R.

1. Sufficient conditions for the problem of Bolza in the calculus of variations, Transact. American Math. Soc. **36** (1934), S. 793—818.
2. (Siehe Birkhoff.)
3. On sufficient conditions in the problem of Lagrange and Bolza, Annals of Math. **37** (1936), S. 543—551.

Hickson, A. O.

1. An application of the calculus of variations to boundary value problems, Transact. American Math. Soc. **31** (1929), S. 563—579.

Hilb, E. (mit Szász, O.)

1. Allgemeine Reihenentwicklungen, Encyklopädie d. math. Wiss. II C 11. (1920).

Hilbert, D.

1. Gesammelte Abhandlungen, III. Bd., Berlin 1935 (insb. der Beitrag von Hellinger, S. 129, 144).
2. (Siehe Courant.)

Hölder, E.

1. Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik, Math. Zeitschr. **31** (1929), Heft 2 (Festschrift für Otto Hölder), S. 197—257.
2. Über die Entwicklung der zweiten Variation beim Problem von Lagrange, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. **45** (1935), S. 83—84 (kursiv).
3. Die Lichtensteinsche Methode für die Entwicklung der zweiten Variation, angewandt auf das Problem von Lagrange (Dem Andenken Leon Lichtensteins gewidmet), *Prace Matematyczno-Fizyczne* **43** (1935), S. 307—346.
4. Zur Theorie der Randwertaufgaben für lineare kanonische Systeme, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. **45** (1935), S. 126—128 (kursiv).

Hu, K. S.

1. The problem of Bolza and its accessory boundary value problem, Contributions to the Calculus of variations, Chicago 1931—32, S. 361—443 (war dem Verf. nicht zugänglich).

Jacobi, C. G. J.

1. Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen (1937), Ges. Werke **5**, S. 41—55.

Kamke, E.

1. Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 274—295.

Kneser, A.

1. Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 2. Aufl. Braunschweig 1922.

Langer, R. E.

1. The boundary value problem associated with a differential equation in which the coefficient of the parameter changes sign, Transact. American Math. Soc. **31** (1929), S. 1—24.
2. The expansion problem in the theory of ordinary linear differential systems of the second order, Transact. American Math. Soc. **31** (1929), S. 868—906.

Lichtenstein, L.

1. Zur Analysis der unendlich vielen Variablen. I. Entwicklungssätze der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Rendiconti Circ. Mat. Palermo **38** (1914), S. 113—166.
2. Über eine Integro-Differentialgleichung und die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach deren Eigenfunktionen, Schwarz-Festschrift, Berlin 1914, S. 274—285.
3. Über eine Anwendung der Theorie quadratischer Formen mit unendlich vielen Variablen auf ein Randwertproblem der Potentialtheorie, Prace Matematyczno-Fizyczne **26** (1915), S. 219—262.
4. Untersuchungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme. I. Das einfachste Problem bei fester Begrenzung. Jacobische Bedingung und die Existenz des Feldes. Verzweigung der Extremalflächen. Monatshefte für Math. und Physik **28** (1917), S. 3—51.
5. Zur Analysis der unendlich vielen Variablen. Zweite Abhandlung: Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Math. Zeitschr. **3** (1919), S. 127—160.
6. Untersuchungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme. Zweite Abhandlung. Das einfachste Problem bei fester und bei freier Begrenzung. Math. Zeitschr. **5** (1919), S. 21—51.
7. Zur Variationsrechnung. Erste Mitteilung, Göttinger Nachr. 1919, S. 161—192.
8. Zur Variationsrechnung. Zweite Mitteilung. Das isoperimetrische Problem. Journ. für Math. **165** (1931), S. 194—216.

Liouville, J.

1. Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle

du second ordre contenant un paramètre variable. Journ. de Math. **1** (1836) S. 253—265, **2** (1837), S. 16—35, S. 418—436.

2. D'un théorème dû à M. Sturm et relatif à une classe de fonctions transcendantes, Journ. de Math. **1** (1836), S. 269—277.
3. (Siehe Sturm.)
4. Premier mémoire sur la théorie des équations differentielles linéaires et sur le développement des fonctions en séries, Journ. de Math. **3** (1838), S. 561—614.

Morse, M.

1. Sufficient conditions in the problem of Lagrange with variable end conditions, American Journ. of Math. **53** (1931), S. 517—546.
2. The calculus of variations in the large, American Math. Soc. Colloq. Publ. **28** (New York 1934).
3. Sufficient conditions in the problem of Lagrange without assumptions of normalcy, Transact. American Math. Soc. **37** (1935), S. 141—160.

Prüfer, H.

1. Neue Herleitung der Sturm-Liouvilleschen Reihenentwicklung stetiger Funktionen, Math. Ann. **95** (1926), S. 499—518.

Radon, J.

1. Über die Oszillationstheoreme der konjugierten Punkte beim Problem von Lagrange, Münchner Ber. 1927, S. 243—257.
2. Zum Problem von Lagrange, Abh. Math. Seminar Hamburg **6** (1928), S. 273—279.

Reid, W. T.

1. Generalized Green's matrices for compatible systems of differential equations, American Journ. of Math. **53** (1931), S. 443—459.
2. A boundary value problem associated with the calculus of variations, American Journ. of Math. **54** (1932), S. 769—790.
3. Analogues of the Jacobi condition for the problem of Mayer in the calculus of variations, Annals of Math. (II) **35** (1934), S. 836—848.
4. The theory of the second variation for the non parametric problem of Bolza, American Journ. of Math. **57** (1935), S. 573—586.
5. Boundary value problems of the calculus of variations, Bull. American Math. Soc. **43** (1937), S. 633—666.

Schmidt, E.

1. Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Diss. Göttingen 1905, Math. Ann. **63** (1907), S. 433—476.

Schoenberg, I. J.

1. (Siehe Bliss.)

Sturm, C.

1. Mémoire sur les équations différentielles du second ordre, Journ. de Math. **1** (1836), S. 106—186.
2. Mémoire sur une classe d'équations à différences partielles, Journ. de Math. **1** (1836), S. 373—444.
3. (Mit Liouville, J.) Extrait d'un mémoire sur le développement des fonctions en séries dont les différents termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle linéaire, contenant un paramètre variable. Journ. de Math. **2** (1837), S. 220—223.

Trefftz, E.

1. Schwingungsprobleme und Integralgleichungen, Math. Ann. **87** (1922), S. 307—314.
2. Allgemeine Theorie der Knickung des geraden Stabes, Zeitschr. für angew. Math. u. Mech. **3** (1923), S. 272—275.

Wheeler, Anna Pell.

1. Linear ordinary self-adjoint differential equations of the second order, American Journ. of Math. **49** (1927), S. 309—320.

1. Quadratische Hamilton-Funktion. Greensche Formeln für lineare kanonische Differentialausdrücke.

Wir betrachten eine quadratische Hamilton-Funktion

$$2H(t, x, y) = a_{ij}x_ix_j + 2b_{ij}x_iy_j + c_{ij}y_iy_j, \tag{1.1}$$

bei der die Funktionen $a_{ij}(t) = a_{ji}$, $b_{ij}(t)$, $c_{ij}(t) = c_{ji}$ für $i, j = 1, \ldots, n$ im Intervall $\langle t^0, t^1\rangle$ stetig sind. Die Matrix $(c_{ij}) = c$ ist positiv semidefinit vom Rang $n - p$, wo $0 \leqq p \leqq n$ ist, und lässt sich als Quadrat $c = \mathfrak{c}^2$ einer ebensolchen Matrix $\mathfrak{c}$ schreiben. Die Koordinaten und Impulse $\binom{x_i}{y_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ besitzen die Randwerte $\binom{x_i^s}{y_i^s}$ $(s = 0, 1)$ an den Endpunkten des Grundintervalls $\langle t^0, t^1\rangle$.

Mit den zu H gehörigen kanonischen Differentialausdrucken

$$\begin{aligned} L_i(x, y) &\equiv \dot{x}_i - b_{ji}x_j - c_{ij}y_j \\ R_i(x, y) &\equiv \dot{y}_i + a_{ij}x_j + b_{ij}y_j \end{aligned} \tag{1.2}$$

gilt für das (meist nicht weiter bezeichnete) Integrationsintervall $\langle t^0, t^1\rangle$ die dreigliedrige Greensche Formel

$$(1.3)\qquad \int_{t^0}^{t^1}[c_{ij}y_ip_j - a_{ij}x_iq_j]\,dt = -\int_{t^0}^{t^1}[p_iL_i(x,y) + x_iR_i(q,p)]\,dt + [xp]_0^1,$$

falls x_i und p_i stetig sind; $\dot{x}$, y, q, $\dot{p}$ brauchen nur abteilungsweise stetig zu sein, $xp = \sum_i x_ip_i$, $[xp]_0^1 = [xp]_{t^0}^{t^1}$ wird auch im folgenden als Abkürzung bequem sein.

(1.3) folgt ohne weiteres aus der »kleinen» zweigliedrigen Greenschen Formel

$$(1.4)\qquad \int_{t^0}^{t^1}(x_i(\dot{p}_i + b_{ij}p_j) + p_i(\dot{x}_i - b_{ji}x_j))\,dt = [xp]_0^1.$$

Sind x, y, q, p stetig, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{q}$, $\dot{p}$ jedenfalls abteilungsweise stetig, so bekommt man aus (1.3) durch Vertauschung der beiden Variablenreihen $xy\dot{x}\dot{y}\cdot qp\dot{q}\dot{p}$ die zweigliedrige Greensche Formel (schlechthin)

$$(1.5)\qquad \int_{t^0}^{t^1}[(q_iR_i(x,y) - p_iL_i(x,y)) - (x_iR_i(p,q) - y_iL_i(q,p))]\,dt = [q_iy_i - p_ix_i]_0^1.$$

2. Problemstellung. Zweite Variation.

Wir führen für die Randwerte $x_i^s = x_i(t^s)$ $(s = 0, 1)$ der Koordinaten die auf Parameter $u_h (h = 1, \ldots, r;\ 0 \leqq r \leqq 2n)$ bezogene r-dimensionale lineare Endmannigfaltigkeit

$$(2.1)\qquad x_i^0 = \gamma_{ih}^0 u_h,\ x_i^1 = \gamma_{ih}^1 u_h$$

ein, wobei also die Endmatrix $\begin{pmatrix}\gamma_{ih}^0\\ \gamma_{ih}^1\end{pmatrix}$ den Rang r hat; letzteres ist die analytische Formulierung der von Morse [1] S. 526 als non-tangency-hypothesis bezeichneten Voraussetzung. Hestenes [1] S. 798 nennt die Endbedingungen unter diesen Umständen »regulär».

Ausserdem nehme ich eine quadratische Randform

$$(2.2)\qquad \beta_{hk}u_hu_k,\quad \beta_{hk} = \beta_{kh},$$

in den Parametern hinzu und betrachte das quadratische (im Anschluss an Bolza [2] gebildete) Funktional

$$(2.3)\qquad \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}\beta_{hk}u_hu_k + \int_{t^0}^{t^1}(-H + \dot{x}y)\,dt$$

für Funktionen $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, die in $\langle t^0, t^1 \rangle$ stetige Koordinaten $x_i(t)$, abteilungsweise stetige Geschwindigkeiten $\dot{x}_i(t)$ und abteilungsweise stetige Impulse $y_i(t)$ sowie Parameter u_h besitzen derart, dass die Nebenbedingungen

$$L_i(x, y) = 0, \quad x_i(t^0) = \gamma^0_{ih} u_h, \quad x_i(t^1) = \gamma^1_{ih} u_k \tag{2.4}$$

bestehen; wir wollen die Funktionen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in Anlehnung an die Terminologie von Bolza [1], S. 63 »zulässige Funktionen» $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der Klasse D' nennen. Entsprechend nennen wir im Raum $\Re_{n+1}$ der Koordinaten $t, x_1, \ldots, x_n$ eine Kurve $x_i = x_i(t)$ »zulässig» von der Klasse D', wenn sie in $\langle t^0, t^1 \rangle$ stetig ist, abteilungsweise stetige Tangente besitzt und sich ausserdem zu $x_i(t)$, $\dot{x}_i(t)$ abteilungsweise stetige Impulse $y_i(t)$ und Parameter u_h bestimmen lassen derart, dass die Gleichungen (2.4) gelten. $y_i(t)$ sind natürlich nicht eindeutig bestimmt.

Unter den Nebenbedingungen $L_i(x, y) = 0$ kann unter dem Integralzeichen in (2.3) für $\dot{x}_i = b_{ji} x_j + c_{ij} y_j$ gesetzt werden, dann kommt die den weiteren Betrachtungen zu Grunde liegende Form

$$I = \beta_{hk} u_h u_k + \int_{t^0}^{t^1} (c_{ij} y_i y_j - a_{ij} x_i x_j)\, dt. \tag{2.5}$$

Die eingangs formulierte Aufgabe spielt in der Variationsrechnung bei einem Problem von Lagrange eine besondere Rolle, wenn H die zu einem (positiv) regulären Extremalenstück e^0 gehörige akzessorischen Hamilton-Funktion ist, welche die Theorie der zweiten Variation für die Extremale e^0 des ursprünglichen Problems beherrscht. Die »zweite Variation» des ursprünglichen Extremalintegrals insbesondere ist I, wobei die zugelassenen Funktionen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (die »Variationen») eben den Nebenbedingungen (2.4) genügen müssen, vgl. Radon [2], S. 288, bzgl. der Randbedingungen Morse [1], S. 521 und [2], S. 23. Hier ist $p < n$, vgl. Carathéodory [4], S. 347.

3. Die normalen Eigenräume des vereinfachten kanonischen Systems.

Die allgemeine Theorie der selbstadjungierten Randwertaufgaben eines kanonischen Differentialgleichungssystems beruht auf der Untersuchung des vereinfachten kanonischen Systems

$$
\begin{aligned}
&L_i(x, y) \equiv \dot{x}_i - b_{ji}x_j - c_{ij}y_j = 0, \; x_i^0 = \gamma_{ih}^0 u_h \quad x^1 = \gamma_{ih}^1 u_h \\
&R_i^0(x, y) + \lambda x_i \equiv \dot{y}_i + \lambda x_i + b_{ij}y_j = 0, \; y_i^0 \gamma_{ih}^0 - \gamma_i^1 \gamma_{ih}^1 = 0.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Die zu einem Eigenwert λ gehörigen Eigenfunktionen von (3.1), d. i. ein (auch im Impuls) stetiges Funktionenpaar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, das eine Ableitung besitzt und (3.1) befriedigt, bilden einen Vektorraum $\mathfrak{r}_\lambda = \mathfrak{r}_* + \mathfrak{r}'_\lambda$, die direkte Summe aus dem q_*-dimensionalen Teilraum

$$
\mathfrak{r}_* = \begin{pmatrix} 0, & \ldots, & 0 \\ y^{(1)}, & \ldots, & y^{(q_*)} \end{pmatrix}, \quad \int y^{(\varkappa)} y^{(\varkappa')} dt = \delta^{\varkappa\varkappa'} \tag{3.2}
$$

der »singulären» Eigenfunktionen mit $x_i(t) \equiv 0$, für die also

$$
\begin{aligned}
&c_{ij}y_j = 0 \\
&\dot{y}_i + b_{ij}y_j = 0, \quad y_i^0 \gamma_{ih}^0 - y_i^1 \gamma_{ih}^1 = 0
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

gilt[1], und aus dem zu $\mathfrak{r}_*$ total senkrechten »normalen» Eigenraum $\mathfrak{r}'_\lambda$ aller »normalen» Eigenvektoren $\begin{pmatrix} \omega \\ \pi \end{pmatrix}$ von (3.1) (mit Parametern w_h), die zu den Vektoren von $\mathfrak{r}_*$ orthogonal sind,

$$
\int y^{(\varkappa)} \pi \, dt = 0; \tag{3.4}
$$

in $\mathfrak{r}'_\lambda$ können und sollen Basisvektoren genommen werden, die bezüglich der in $\mathfrak{r}'_\lambda$ positiv definiten Metrik

$$
\int \omega^2 dt \tag{3.5}
$$

orthonormiert sind. Die Orthogonalitätsbeziehungen

$$
\int \omega^{(\mu)} \omega^{(\nu)} dt = \delta^{\mu\nu} \tag{3.6}
$$

gelten auch noch, und zwar mit der rechten Seite Null, wenn $\omega^{(\mu)}$ und $\omega^{(\nu)}$ Raumkomponenten von Basisvektoren sind, die zu verschiedenen normalen Eigenräumen gehören, d. h. zu verschiedenen normalen Eigenwerten; dies folgt aus der Greenschen Formel (1.5). $\mathfrak{r}'_\lambda$ ist nur für gewisse »normale Eigenwerte» $\lambda \gtreqless 0$ vorhan-

[1] q_* ist die mit Rücksicht auf die Transversalitätsbedingung in (3.3) verstandene Anomalitätsordnung im Sinne von Hestenes [1], S. 799.

den. Denn die Greensche Formel (1.3), statt für $R_i(x, y)$ hingeschrieben für $R_i^0(x, y) + \lambda x_i$, gibt für eine Eigenfunktion von (3.1)

$$(3.7)\qquad \begin{aligned} 0 &= -\int [y_i L_i(x, y) + x_i R_i^0(x, y) + \lambda x_i^2]\,dt \\ &= \int c_{ij} y_i y_j\,dt - \lambda \int x_i^2\,dt - [xy]_0^1, \end{aligned}$$

somit, da

$$(3.8)\qquad [xy]_0^1 = (y_i^1 \gamma_{ih}^1 - y_i^0 \gamma_{ih}^0) u_h = 0$$

ist,

$$(3.9)\qquad \lambda \int x_i^2\,dt = \int c_{ij} y_i y_j\,dt \geqq 0.$$

Das Gleichheitszeichen steht hier rechts bei einer *normalen* Eigenfunktion dann und nur dann, wenn $\lambda = 0$ ist. In diesem Fall $\lambda = 0$ *zerfällt* ausserdem (3.1) wegen der Semidefinitheit von (c_{ij}) in die beiden Systeme

$$(3.9)\qquad \left.\begin{aligned} c_{ij} y_j &= 0 \\ \dot y_i + b_{ij} y_j = 0,\ \ y_i^0 \gamma_{ih}^0 - y_i^1 \gamma_{ih}^1 &= 0 \end{aligned}\right|\ \dot x_i - b_{ji} x_j = 0,\ \ x_i^s = \gamma_{ih}^s u_h.$$

Die Lösungen des ersten Systems werden aufgespannt von den Impulsen $y^{(1)}, \ldots, y^{(q_*)}$ der *singulären* Nullösungen (3.2). Für das zweite System sei $(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m_0)})$ eine Basis von orthonormierten Lösungen, deren Parameter $u_h^{(1)}, \ldots, u_h^{(m_0)}$ seien. Die zu $\lambda = 0$ gehörigen *normalen* Eigenfunktionen von (3.1) bilden dann den Vektorraum

$$(3.10)\qquad \mathfrak{x}_0' = \begin{pmatrix} \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m_0)} \\ 0, \ldots, 0 \end{pmatrix}, \quad \int \xi^{(\varrho)} \xi^{(\sigma)}\,dt = \delta^{\varrho\sigma}.$$

Auf die Ungleichheitsbeziehung zwischen den Anzahlen q_* und m_0 gehe ich hier nicht ein.

4. Der Greensche Tensor.

Wir konstruieren ihn mit Rücksicht auf spätere Verwendung gleich für das allgemeine selbstadjungierte Differentialsystem

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} L_i(x, y) &= 0 \\ R_i(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen in der *Normalform* von Morse [2], S. 86

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} x_i^0 &= \gamma_{ih}^0 u_h, \quad x_i^1 = \gamma_{ih}^1 u_h \\ y_i^0 \gamma_{ih}^0 - y_i^1 \gamma_{ih}^1 &= \beta_{hk} u_k. \end{aligned}$$

Die Darstellung $(4.2)_1$ der Koordinatenrandwerte lässt sich unter der in Nr. 2 gemachten Voraussetzung, dass die $2n \times r$-Matrix $\begin{pmatrix}\gamma_{ih}^0 \\ \gamma_{ih}^1\end{pmatrix}$ den Rang r besitzt, nach den Parametern u_h auflösen. Eine der möglichen Darstellungen der u_h als Linearformen der Koordinatenrandwerte x_i^s sei

$$(4.3)\qquad u_k = x_i^1 C_{ik}^1 - x_i^0 C_{ik}^0 \equiv [x_i^s C_{ik}^s].$$

Wegen $(4.2)_1$ ist dann $u_k = [\gamma_{ih}^s C_{ik}^s] u_h$, woraus folgt

$$(4.4)\qquad [\gamma_{ih}^s C_{ik}^s] = [C_{ih}^s \gamma_{ik}^s] = e_{hk}, \quad (e_{hk}) = \text{Einheitsmatrix}.$$

Nun führen wir ein

$$(4.5)\qquad \vartheta_{ik}^s = - C_{ih}^s \beta_{hk},$$

dann folgt aus

$$(4.6)\qquad [\vartheta_{ik}^s \gamma_{ih}^s] = - [C_{i\underline{h}}^s \gamma_{ih}^s] \beta_{\underline{h}k} = - \beta_{hk} = [\gamma_{ik}^s \vartheta_{ih}^s], \text{ dass}$$

$$(4.7)\qquad \hat{y}_i^s = \vartheta_{ik}^s u_k$$

eine Lösung der Transversalitätsbedingung $(4.2)_2$ ist.

Ist nun $(\theta_{ik'}^s)$, $k' = r + 1, \ldots, 2n$ eine Basis der Nullösungen von $(4.2)_2$, gilt also

$$(4.8)\qquad [\theta_{ik'}^s \gamma_{ih}^s] = 0,$$

so hat man mit Hilfe weiterer, die $u_1, \ldots, u_r$ ergänzender Parameter $u_{r+1}, \ldots, u_{2n}$ neben

$$(4.9)\qquad \begin{aligned} x_i^s &= \gamma_{ik}^s u_k &&= \gamma_{im}^s u_m \\ y_i^s &= \vartheta_{ik}^s u_k + \theta_{ik'}^s u_{k'} &&= \delta_{im}^s u_m. \end{aligned}$$

In dieser *Parameterdarstellung* der Randbedingung bedeutet jetzt u_m die Spalte der Parameter $u_1, \ldots, u_{2n}$ und die Matrix $(\delta_{im}^s) = (\vartheta_{ik}^s, \theta_{ik'}^s)$; analog sei jetzt (γ_{im}^s) die Matrix $(\gamma_{ik}^s, 0)$, in der die $2n - r$ letzten Spalten aus lauter Nullen bestehen. Umgekehrt genügt wegen (4.6), (4.8) die Parameterdarstellung $(4.9)_2$ der

Bedingung $(4.2)_2$ in der Normalform. Nun hat die mit dem Spaltenindex $p = 1, \ldots, n$ geschriebene Matrix

$$(4.10) \qquad (\gamma^0_{pm},\ \gamma^1_{pm},\ \delta^0_{pm},\ \delta^1_{pm})$$

den Rang $2n$; denn aus

$$(4.11) \qquad \left.\begin{matrix} \Sigma\gamma^s_{im}\lambda_m = 0 \\ \Sigma\delta^s_{im}\lambda_m = 0 \end{matrix}\right\} \text{ folgt } \begin{cases} \text{erst } \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0, \text{ da } \gamma^s_{ik'} = 0 \\ \text{dann } \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_{2n} = 0, \text{ da } \theta^s_{ik'} \text{ linear unabhängig.} \end{cases}$$

Im $4n$-dimensionalen Raum der $(x^0_i,\ x^1_i,\ y^0_i,\ y^1_i)$ gibt (4.9) einen $2n$-dimensionalen Teilraum. Wegen (4.6), (4.8), d. h.

$$(4.12) \qquad [\delta^s_{im}\gamma^s_{i\underline{m}} - \gamma^s_{im}\delta^s_{i\underline{m}}] = 0$$

wird dieser auch durch die $2n$ linear unabhängigen *Gleichungen*

$$(4.13) \qquad [x^s_i\,\delta^s_{im} - y^s_i\,\gamma^s_{im}] = 0$$

dargestellt.

Selbstadjungiertheit des Randwertproblems im Sinne von Bliss [2] bedeutet für ein kanonisches System, wo die Blisssche Matrix $T = \begin{pmatrix} & 0 & \varepsilon \\ - & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$, ε die $n \times n$-reihige Einheitsmatrix, also $(x, y)\,T\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = xp - yq$ ist, gerade das Bestehen der Beziehungen (4.12). In der von Bliss benutzten Form besagt (4.13) für $X^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}$, $X^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix}$ ja

$$(4.14) \qquad (TX^0)'(TM') + (TX^1)'(TN') = 0,$$

nämlich

$$(4.15) \quad (y^0_j,\ -x^0_j)\begin{pmatrix} \gamma^0_{im'}\,\gamma^0_{im''} \\ \delta^0_{im'}\,\delta^0_{im''} \end{pmatrix} + (y^1_j,\ -x^1_j)\begin{pmatrix} -\gamma^1_{im'} & -\gamma^1_{im''} \\ -\delta^1_{im'} & -\delta^1_{im''} \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} m' = 1, \ldots, n \\ m'' = n+1, \ldots, 2n \end{pmatrix};$$

dabei bedeutet der Akzent Transposition der Matrix (in der übrigens *Zeilen*index stets der im Alphabet vorangehende Buchstabe sein soll). Also ist, wenn für den Moment $M = M^0$, $N = M^1$ gesetzt wird,

$$(4.16) \qquad T(M^s)' = (-1)^s \begin{pmatrix} \gamma^s_{im'}\gamma^s_{im''} \\ \delta^s_{im'}\delta^s_{im''} \end{pmatrix}, \quad M^s = (-1)^{s+1}\begin{pmatrix} \delta^s_{ih'} & -\gamma^s_{ih'} \\ \delta^s_{ih''} & -\gamma^s_{ih''} \end{pmatrix}.$$

Daher ist für $s = 0, 1$

$$(4.17) \qquad -M^s\,T(M^s)' = \begin{pmatrix} \delta^s_{ih'}\gamma^s_{im'} - \gamma^s_{ih'}\delta^s_{im'} & \delta^s_{ih'}\gamma^s_{im''} - \gamma^s_{ih'}\delta^s_{im''} \\ \delta^s_{ih''}\gamma^s_{im'} - \gamma^s_{ih''}\delta^s_{im'} & \delta^s_{ih''}\gamma^s_{im''} - \gamma^s_{ih''}\delta^s_{im''} \end{pmatrix}.$$

Auf Grund von (4.12) ist daher

$$-[M^s T(M^s)'] = M(TM') - N(TN') = 0; \tag{4.18}$$

das ist die explizite Form der Blissschen Selbstadjungiertheit der Randbedingung. Die übrigen Eigenschaften, insbesondere die Blisssche Definit-Selbstadjungiertheit des (nur hilfsweise benutzten) Eigenwertproblems, sind wörtlich dieselben wie im Fall fester Endpunkte und ebenso wie dort erfüllt. Die Konstruktion des erweiterten Greenschen Tensors[1] von (4.1—2) kann nun genau so wie in meiner früheren Arbeit [3] vorgenommen werden: mit Hilfe der Resolvente eines von Bliss [2] angegebenen Greenschen Tensors.

Vielleicht ist eine von der Auflösungstheorie der Integralgleichungen independente Konstruktion des erweiterten Greenschen Tensors erwünscht. Sei $\begin{pmatrix} \overset{k}{q}_i(t) \\ \overset{k}{p}_i(t) \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem von (4.1) und definieren wir die $2n \times 2n$ Koeffizienten

$$\left[\overset{k}{q}{}^s_i\, \delta^s_{im} - \overset{k}{p}{}^s_i \gamma^s_{im}\right]_0^1 = [k, m], \qquad (k, m = 1, \ldots, 2n) \tag{4.19}$$

dann geben die linear unabhängigen Lösungen b_k^ϱ $(\varrho = 1, \ldots, m_1)$ von

$$b_k[k, m] = 0 \tag{4.20}$$

in

$$\begin{aligned} \overset{\varrho}{x}_i &= b_k^\varrho \overset{k}{q}_i(t) \\ \overset{\varrho}{y}_i &= b_k^\varrho \overset{k}{p}_i(t) \end{aligned} \tag{4.21}$$

genau die linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichungen (4.1) und der Randbedingungen (4.2) oder (4.9) oder (4.13).

Die zu (4.21) gehörigen Parameter $\overset{\varrho}{u}_h$ durch Gleichungen festzulegen, schreibe ich die rechte Seite der zweigliedrigen Greenschen Formel (1.5) in der Gestalt

$$\begin{aligned} [q_i y_i - p_i x_i]_{t=t^0}^{t=\underline{t}-0} + [q_i y_i - p_i x_i]_{t=\underline{t}+0}^{t=t^1} &= [q_i y_i - p_i x_i]_{t=\underline{t}+0}^{t=\underline{t}-0} \\ + [q^s_i \delta^s_{im} - p^s_i \gamma^s_{im}]_0^1 u_m &+ [q^s_i(y^s_i - \delta^s_{im} u_m) - p^s_i(x^s_i - \gamma^s_{im} u_m)]_0^1 \end{aligned} \tag{4.22}$$

---

[1] Einen solchen benutzt auch Reid [2], S. 777, vgl. ausserdem meine Arbeit [1], S. 253—255. — In meiner Arbeit [3] muss die Symmetrie in Formel (4.10) richtig $\mathfrak{K}(t, \underline{t}) = \mathfrak{K}'(\underline{t}, t)$ lauten.

— gleich für den später auftretenden Fall, dass möglicherweise $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bei $t = \underline{t}$ einen Sprung erleidet.

Wenden wir nun die Greensche Formel (1.5) mit dieser rechten Seite (4.22) an auf $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{k}{q} \\ \overset{k}{p} \end{pmatrix}$ $(k = 1, \ldots, 2n)$ und auf eine stetige Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ von (4.1) und (4.2), d. h. (4.9), so folgt für die Randparameter u_m von $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$[k, m] u_m = 0; \tag{4.23}$$

die linear unabhängigen Lösungen $\begin{pmatrix} \overset{\varrho}{x} \\ \overset{\varrho}{y} \end{pmatrix}$ von (4.1—2) geben genau die (wegen (4.9) linear unabhängigen) Parameterlösungen $\overset{\varrho}{u}_m$ von (4.23). Denn auch das Umgekehrte ist richtig: man kann zu einer Nullösung u_m von (4.23) diejenige Lösung von (4.1) bestimmen, die der Anfangsbedingung $x_i^0 = \gamma_{im}^0 u_m$, $y_i^0 = \delta_{im}^0 u_m$ genügt. Für diese gilt wegen (1.5), (4.22)

$$\overset{k}{q}{}_i^1 (y_i^1 - \delta_{im}^1 u_m) - \overset{k}{p}{}_i^1 (x_i^1 - \gamma_{im}^1 u_m) = 0, \qquad k = 1, \ldots, 2n, \tag{4.24}$$

also wegen $\det \left(\overset{k}{q}{}_j^1, \ -\overset{k}{p}{}_j^1\right) \neq 0$ auch die Endbedingung $x_i^1 = \gamma_{im}^1 u_m$, $y_i^1 = \delta_{im}^1 u_m$. Insbesondere geben linear unabhängige $\overset{\varrho}{u}_m$ auch linear unabhängige $\begin{pmatrix} \overset{\varrho}{x}_i \\ \overset{\varrho}{y}_i \end{pmatrix}$, weil die Matrix (4.10) den Rang $2n$ hat.

Für die nun in Angriff zu nehmende Konstruktion des erweiterten Greenschen Tensors von (4.1), (4.2) ist es noch notwendig, die Lösungen $\begin{pmatrix} \overset{\varrho}{x} \\ \overset{\varrho}{y} \end{pmatrix}$ von (4.1), (4.2) bezüglich der Metrik $\int (x^2 + y^2) dt$ zu orthonormieren; man hat also für die b_k^ϱ die Beziehungen $\left(\int \overset{k}{q}_i \overset{l}{q}_i \, dt\right) b_k^\varrho b_l^\sigma = \delta^{\varrho\sigma}$ herzustellen, was immer möglich ist.

Wir bestimmen jetzt eine (für $t = \underline{t}$ unstetige) Matrix

$$\begin{pmatrix} G_{ij}(t, \underline{t}) & H_{ij}(t, \underline{t}) \\ I_{ij}(t, \underline{t}) & K_{ij}(t, \underline{t}) \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

aus den Forderungen heraus, dass für $t^0 \leqq t < \underline{t}$ und $\underline{t} < t \leqq t^1$ die Spalten

$$
\begin{aligned}
x_i(t) &= G_{ij}(t, \underline{t}) \quad \text{bzw.} \quad x_i(t) = H_{ij}(t, \underline{t}) \\
y_i(t) &= \ I_{ij}(t, \underline{t}) \qquad\quad\;\; y_i(t) = K_{ij}(t, \underline{t})
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

den inhomogenen Differentialgleichungssystemen

$$
\begin{aligned}
L_i(x, y) &= -\sum_{\varrho} \overset{\varrho}{y}_i \overset{\varrho}{\underline{x}}_j \quad \text{bzw.} \quad L_i(x, y) = -\sum_{\varrho} \overset{\varrho}{y}_i \overset{\varrho}{\underline{y}}_j \\
R_i(x, y) &= \ \ \sum_{\varrho} \overset{\varrho}{x}_i \overset{\varrho}{\underline{x}}_j \qquad\qquad R_i(x, y) = \ \ \sum_{\varrho} \overset{\varrho}{x}_i \overset{\varrho}{\underline{y}}_j
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

genügen und die Lösungen im Intervall $t^0 \leqq t < \underline{t}$ durch die Anfangsbedingung

$$
\begin{aligned}
G_{ij}(t^0, \underline{t}) &= \gamma_{im}^0\, \underline{U}_{mj} \qquad H_{ij}(t^0, \underline{t}) = \gamma_{im}^0\, \underline{V}_{mj} \\
I_{ij}(t^0, \underline{t}) &= \delta_{im}^0\, \underline{U}_{mj} \qquad K_{ij}(t^0, \underline{t}) = \delta_{im}^0\, \underline{V}_{mj},
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

hingegen die Lösungen im Intervall $\underline{t} < t \leqq t^1$ durch die Endbedingung

$$
\begin{aligned}
G_{ij}(t^1, \underline{t}) &= \gamma_{im}^1\, \underline{U}_{mj} \qquad H_{ij}(t^1, \underline{t}) = \gamma_{im}^1\, \underline{V}_{mj} \\
I_{ij}(t^1, \underline{t}) &= \delta_{im}^1\, \underline{U}_{mj} \qquad K_{ij}(t^1, \underline{t}) = \delta_{im}^1\, \underline{V}_{mj}
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

bestimmt sind. In beiden Randpunkten treten dieselben Grössen $\underline{U}_{mj}$ bzw. $\underline{V}_{mj}$ auf, die als Funktionen von $\underline{t}$ noch so zu bestimmen sind, dass für die Matrix (4.25) die Sprungeigenschaft

$$
\left[\begin{pmatrix} G_{ij} H_{ij} \\ I_{ij} K_{ij} \end{pmatrix}\right]_{t=\underline{t}-0}^{t=\underline{t}+0} = \begin{pmatrix} [G_{ij}]\,[H_{ij}] \\ [\,I_{ij}]\,[K_{ij}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}
\tag{4.30}
$$

gilt.

Auf den Tensor (4.25) wende ich die zweigliedrige Greensche Formel (1.5) mit der rechten Seite (4.22) an, indem ich setze $\begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{ij}(t, \underline{t}) \\ I_{ij}(t, \underline{t}) \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} H_{ij}(t, \underline{t}) \\ K_{ij}(t, \underline{t}) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} q_i(t) \\ p_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{k}{q}_i(t) \\ \overset{k}{p}_i(t) \end{pmatrix}$, dann kommt

$$
[k, m]\, \underline{U}_{mj} = \overset{k}{\underline{q}}_i\,[I_{ij}] - \overset{k}{\underline{p}}_i\,[G_{ij}] + \sum_{\varrho} \int \left(\overset{k}{q}_i \overset{\varrho}{x}_i + \overset{k}{p}_i \overset{\varrho}{y}_i\right) dt \cdot \overset{\varrho}{\underline{x}}_j
\tag{4.31}
$$

bzw.

$$
[k, m]\, \underline{V}_{mj} = \overset{k}{\underline{q}}_i\,[K_{ij}] - \overset{k}{\underline{p}}_i\,[H_{ij}] + \sum_{\varrho} \int \left(\overset{k}{q}_i \overset{\varrho}{x}_i + \overset{k}{p}_i \overset{\varrho}{y}_i\right) dt \cdot \overset{\varrho}{\underline{y}}_j .
\tag{4.32}
$$

Also bestimme ich $\underline{U}_{mj}$ bzw. $\underline{V}_{mj}$ aus den beiden Gleichungssystemen

$$[k, m]\,\underline{U}_{mj} = -\overset{k}{\underline{q}}_j + \sum_{\varrho} \int \left(\overset{k}{q}_i \overset{\varrho}{x}_i + \overset{k}{p}_i \overset{\varrho}{y}_i\right) dt \cdot \overset{\varrho}{\underline{x}}_j \equiv \underline{F}_j^k \tag{4.33}$$

bzw.

$$[k, m]\,\underline{V}_{mj} = -\overset{k}{\underline{p}}_j + \sum_{\varrho} \int \left(\overset{k}{q}_i \overset{\varrho}{x}_i + \overset{k}{p}_i \overset{\varrho}{y}_i\right) dt \cdot \overset{\varrho}{\underline{y}}_j \equiv \underline{G}_j^k. \tag{4.34}$$

Für jedes feste j ist jedes der beiden inhomogenen Systeme lösbar. Denn das transponierte homogene System (4.20) hat die linear unabhängigen Lösungen b_k^σ ($\sigma = 1, \ldots, m_0$), mit denen (4.21) gilt. Wegen

$$\sum_k b_k^\sigma \underline{F}_j^k = -\overset{\sigma}{\underline{x}}_j + \sum_{\varrho} \int \left(\overset{\sigma}{x}_i \overset{\varrho}{x}_i + \overset{\sigma}{y}_i \overset{\varrho}{y}_i\right) dt \cdot \overset{\varrho}{\underline{x}}_j = 0 \tag{4.35}$$

bzw.

$$\sum_k b_k^\sigma \underline{G}_j^k = -\overset{\sigma}{\underline{y}}_j + \sum_{\varrho} \int \left(\overset{\sigma}{x}_i \overset{\varrho}{x}_i + \overset{\sigma}{y}_i \overset{\varrho}{y}_i\right) dt \cdot \overset{\varrho}{\underline{y}}_j = 0 \tag{4.36}$$

sind die notwendigen und hinreichenden Orthogonalitätsbedingungen für die Lösbarkeit von (4.33), (4.34) erfüllt.

Nimmt man nun eine Lösung $\underline{U}_{mj}$ bzw. $\underline{V}_{mj}$ von (4.33) bzw. (4.34) und bildet mit *diesen* Randparametern die Matrix (4.25), so folgt aus (4.31) und (4.33) bzw. (4.32) und (4.34) für die Sprünge die Beziehung

$$\overset{k}{\underline{p}}_i [G_{ij}] - \overset{k}{\underline{q}}_i [\,I_{ij}] = \overset{k}{\underline{q}}_j \tag{4.37}$$

bzw.

$$\overset{k}{\underline{p}}_i [H_{ij}] - \overset{k}{\underline{q}}_i [K_{ij}] = \overset{k}{\underline{p}}_j. \tag{4.38}$$

Weil die Determinante der Matrix $\left(\overset{k}{p}_i, -\overset{k}{q}_i\right)$ ($i = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, 2n$) nicht verschwindet, ist (immer bei festem $j = 1, \ldots, n$) jedes der beiden Gleichungssysteme für $[G_{ij}]$, $[I_{ij}]$ bzw. $[H_{ij}]$, $[K_{ij}]$ eindeutig auflösbar. Diese Lösungen müssen notwendig (4.30) sein.

Indem wir zu den Spalten der Matrix (4.25) geeignete Linearkombinationen

$$\begin{pmatrix} \sum_{\varrho} C_{\varrho j} \overset{\varrho}{x}_i & \sum_{\varrho} D_{\varrho j} \overset{\varrho}{x}_i \\ \sum_{\varrho} C_{\varrho j} \overset{\varrho}{y}_i & \sum_{\varrho} D_{\varrho j} \overset{\varrho}{y}_i \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

hinzufügen, können wir immer erreichen, dass die Orthogonalitätseigenschaften

$$(4.40)\qquad \int \left(\overset{\varrho}{x}_i G_{ij} + \overset{\varrho}{y}_i I_{ij}\right) dt = 0, \quad \int \left(\overset{\varrho}{x}_i H_{ij} + \overset{\varrho}{y}_i K_{ij}\right) dt = 0$$

gelten.

Der so bestimmte Greensche Tensor besitzt die Symmetrie

$$(4.41)\qquad \begin{pmatrix} G_{ij}(t, \underline{t}) & H_{ij}(t, \underline{t}) \\ I_{ij}(t, \underline{t}) & K_{ij}(t, \underline{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{ji}(\underline{t}, t) & I_{ji}(\underline{t}, t) \\ H_{ji}(\underline{t}, t) & K_{ji}(\underline{t}, t) \end{pmatrix},$$

wie aus der Greenschen Formel (1.5) folgt, und ist ersichtlich durch (4.1), (4.2), (4.30), (4.40) eindeutig bestimmt.

Im Fall einer sog. Zweiendbedingung, auf den sich nach Hestenes [1], S. 815 der allgemeine zurückführen lässt, ergibt sich (bei Abwesenheit von Nulllösungen) der Greensche Tensor auch sehr einfach aus zwei zueinander assoziierten feldartigen Scharen.

5. Der erweiterte Tensor des vereinfachten kanonischen Systems.

Der nach 4 zu $\lambda = 0$ gehörige erweiterte Greensche Tensor des vereinfachten kanonischen Systems (3.1)

$$(5.1)\qquad \begin{pmatrix} G_{ij} H_{ij} \\ I_{ij} K_{ij} \end{pmatrix}$$

genügt für $t^0 < \underline{t} < t^1$ dem Differentialgleichungssystem

$$(5.2)\qquad \begin{aligned} &L_i(G_{lj}, I_{lj}) = 0 & &L_i(H_{lj}, K_{lj}) = -\sum_{\varkappa} y_i^{(\varkappa)} \underline{y}_j^{(\varkappa)} \\ &R_i^0(G_{lj}, I_{lj}) = \sum_{\varrho} \xi_i^{(\varrho)} \underline{\xi}_j^{(\varrho)} & &R_i^0(H_{lj}, K_{lj}) = 0 \end{aligned}$$

der Randbedingung

$$(5.3)\qquad G_{ij}(t^s, \underline{t}) = \gamma_{ih}^s \underline{U}_{hj} \qquad H_{ij}(t^s, \underline{t}) = \gamma_{ih}^s \underline{V}_{hj}$$

$$(5.4)\qquad I_{ij}(t^0, \underline{t})\gamma_{ih}^0 - I_{ij}(t^1, \underline{t})\gamma_{ih}^1 = 0, \quad K_{ij}(t^0, \underline{t})\gamma_{ih}^0 - K_{ij}(t^1, \underline{t})\gamma_{ih}^1 = 0,$$

wobei mit der Bezeichnung (4.3)

$$(5.5)\qquad \underline{U}_{hj} = [C_{ih}^r G_{ij}(t^r, \underline{t})], \quad \underline{V}_{hj} = [C_{ih}^r H_{ij}(t^r, \underline{t})]$$

gilt, und der Sprungrelation

$$\left[\begin{pmatrix} G_{ij} H_{ij} \\ I_{ij} K_{ij} \end{pmatrix}\right]_{t=\underline{t}-0}^{t=\underline{t}+0} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

und der Orthogonalitätsrelation

$$\begin{aligned} &\int \xi_l^{(\varrho)} G_{lj} dt = 0 \qquad \int \xi_l^{(\varrho)} H_{lj} dt = 0 \\ &\int y_l^{(\varkappa)} I_{lj} dt = 0 \qquad \int y_l^{(\varkappa)} K_{lj} dt = 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Es gilt die Symmetrieeigenschaft

$$\begin{pmatrix} G_{ij}(t, \underline{t}) & H_{ij}(t, \underline{t}) \\ I_{ij}(t, \underline{t}) & K_{ij}(t, \underline{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{ji}(\underline{t}, t) & I_{ji}(\underline{t}, t) \\ H_{ji}(\underline{t}, t) & K_{ji}(\underline{t}, t) \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Als Sprungrelation für die Ableitung nach t des Greenschen Tensors merke ich noch an

$$\left[\begin{pmatrix} \dot G_{ij} & \dot H_{ij} \\ \dot I_{ij} & \dot K_{ij} \end{pmatrix}\right]_{t=\underline{t}-0}^{t=\underline{t}+0} = \begin{pmatrix} -c_{ij} & b_{ji} \\ b_{ij} & -a_{ij} \end{pmatrix}; \tag{5.9}$$

insbesondere erleidet der Teiltensor $(\dot G_{ij})$ die Sprungmatrix $(-c_{ij})$ vom Rang $n-p \geqq 0$.

Da die Matrix $\begin{pmatrix} \gamma_{ih}^0 \\ \gamma_{ih}^1 \end{pmatrix}$ den Rang r haben soll, folgt aus (5.5), (5.7), (5.8) noch

$$\int U_{hl} \xi_l^{(\varrho)} dt = 0, \qquad \int V_{hl} y_l^{(\varkappa)} dt = 0. \tag{5.10}$$

Weiter folgt aus $(5.4)_1$, d. h. $H_{ji}(\underline{t}, t^0)\gamma_{ih}^0 - H_{ji}(\underline{t}, t^1)\gamma_{ih}^1 = 0$ für $\underline{t} = t^0 + 0$ bzw. $\underline{t} = t^1 - 0$ mit Rücksicht auf den durch (5.6) gegebenen Sprung und die Symmetrie (5.8)

$$\begin{aligned} 0 &= (H_{ji}(t^0, t^0 + 0) + \delta_{ij})\gamma_{ih}^0 - H_{ji}(t^0, t^1 - 0)\gamma_{ih}^1 \\ &= \gamma_{jh'}^0 (V_{h'i}^0 \gamma_{ih}^0 - V_{h'i}^1 \gamma_{ih}^1) + \gamma_{jh}^0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= H_{ji}(t^1, t^0 + 0)\gamma_{ih}^0 - (H_{ji}(t^1, t^1 - 0) - \delta_{ij})\gamma_{ih}^1 \\ &= \gamma_{jh'}^1 (V_{h'i}^0 \gamma_{ih}^0 - V_{h'i}^1 \gamma_{ih}^1) + \gamma_{jh}^1. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Aus den beiden Beziehungen ergibt sich

$$V^0_{h'i}\gamma^0_{ih} - V^1_{h'i}\gamma^1_{ih} = -\delta_{h'h}, \tag{5.13}$$

wovon später in **11** Gebrauch gemacht wird.

Es gilt endlich für $t^0 < t < t^1$

$$\begin{aligned} &L_i(U_{hl}, V_{hl}) = 0, \quad U_{hj}(t^s) = \gamma^s_{jk} U_{hk}, \quad U_{hk} = [C^s_{jk} U_{hj}(t^s)] \\ &R^0_i(U_{hl}, V_{hl}) = \sum_\varrho \xi^{(\varrho)}_i u^{(\varrho)}_h, \quad V_{hj}(t^0)\gamma^0_{jk} - V_{hj}(t^1)\gamma^1_{jk} = -\delta_{hk}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

6. Quellenmässige Darstellung zulässiger Funktionen der Klasse D'. Zerlegung des Greenschen Tensors.

Ist $\begin{pmatrix} f_i(t) \\ -g_i(t) \end{pmatrix}$ ein abteilungsweise stetiges Funktionenpaar, so sind die Integralausdrücke

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= \int (G_{il} g_l + H_{il} f_l)\, d\underline{t} \\ \hat{y}_i &= \int (I_{il} g_l + K_{il} f_l)\, d\underline{t} \end{aligned} \tag{6.1}$$

stetig und abteilungsweise stetig differenzierbar, sie genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned} L_i(\hat{x}, \hat{y}) &= \quad f_i - \sum_\varkappa f^{(\varkappa)} y^{(\varkappa)}_i, \quad f^{(\varkappa)} = \int f_l y^{(\varkappa)}_l\, dt \\ R^0_i(\hat{x}, \hat{y}) &= -g_i + \sum_\varrho g^{(\varrho)} \xi^{(\varrho)}_i, \quad g^{(\varrho)} = \int g_l \xi^{(\varrho)}_l\, dt, \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\hat{x}^s_i = \gamma^s_{ih} \hat{u}_h, \quad \hat{u}_h = \int (\underline{U}_{hl} g_l + \underline{V}_{hl} f_l)\, d\underline{t}, \quad \hat{y}^0_i \gamma^0_{ih} - \hat{y}^1_i \gamma^1_{ih} = 0. \tag{6.3}$$

$$\int \hat{x}_i \xi^{(\varrho)}_i\, dt = 0, \quad \int \hat{y}_i y^{(\varkappa)}_i\, dt = 0. \tag{6.4}$$

Es sei nun $y(t)$ eine vorgegebene abteilungsweise stetige Funktion in $\langle t^0, t^1 \rangle$. Dann nehme ich in (6.1) zuerst $\begin{pmatrix} f_i \\ -g_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{ij} y_j \\ 0 \end{pmatrix}$ und bilde die lineare Funktionaltransformation

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_i(t) &= \qquad\quad \hat{x}_i(t) = \int H_{il} \underline{c}_{lj} \underline{y}_j\, d\underline{t} \\ \mathfrak{y}_i(t) &= y_i(t) + \hat{y}_i(t) = y_i(t) + \int K_{il} \underline{c}_{lj} \underline{y}_j\, d\underline{t}; \end{aligned} \tag{6.5}$$

sie liefert ein Funktionenpaar $\begin{pmatrix}\mathfrak{x}\\ \mathfrak{y}\end{pmatrix}$ der Klasse D', für das

$$(6.6)\qquad \begin{aligned} &L_i(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = L_i(0, y) + L_i(\hat{x}, \hat{y}) = -c_{ij}y_j + c_{ij}y_j - \sum_{\varkappa} f^{(\varkappa)} y_i^{(\varkappa)}, \\ &L_i(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0, \qquad\qquad f^{(\varkappa)} = \int c_{ij} y_j y_i^{(\varkappa)} dt = 0, \end{aligned}$$

$$(6.7)\qquad \mathfrak{x}_i^s = \gamma_{ih}^s \hat{u}_h, \quad \hat{u}_h = \int V_{hl} c_{lj} y_j d\underline{t}$$

gilt, also ein zulässiges Funktionenpaar der Klasse D', dazu kommt

$$(6.8)\qquad \int \mathfrak{x}_i \xi_i^{(\varrho)} dt = 0.$$

Gehört $y(t)$ als Impuls zu einem zulässigen Funktionenpaar $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ der Klasse D' mit $\int x_i \xi_i^{(\varrho)} dt = 0$, so reduziert sich, wie die mit der Integrationsvariablen $\underline{t}$ und dem Summationsindex l geschriebene, mit Rücksicht auf die Unstetigkeit von $(\underline{q}_l, \underline{p}_l) = (G_{il}, H_{il})$ bzw. $(\underline{q}_l, \underline{p}_l) = (I_{il}, K_{il})$ richtig angewandte Greensche Formel (1.3) zeigt, die Funktionaltransformation (6.5) auf die Identität

$$(6.9)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{x}(t) = x(t), \text{ d. h. } x_i = \int H_{il} c_{lj} \underline{y}_j d\underline{t} \\ &\mathfrak{y}(t) = y(t) \qquad 0 = \int K_{il} c_{lj} \underline{y}_j d\underline{t}. \end{aligned}$$

Das Bemerkenswerte an der damit gefundenen quellenmässigen Darstellung $(6.9)_1$ der oben betrachteten zulässigen Funktion

$$(6.10)\qquad x(t) = \int \mathfrak{J}^T(t, \underline{t}) \underline{\mathfrak{y}} d\underline{t}, \quad \mathfrak{y} = c y,$$

mittels des zu $\mathfrak{J} = c I = (c_{il}(t) I_{lj}(t, \underline{t}))$ gehörigen »transponierten« Kerns $\mathfrak{J}^T = (\mathfrak{J}_{ij}^T(t, \underline{t})) = (\mathfrak{J}_{ji}(\underline{t}, t))$ ist der Umstand, dass $x(t)$ nur von der Klasse D' und $\int x \xi^{(\varrho)} dt = 0$ sein muss. Setzt man noch $V_{hl} c_{lj} = \mathfrak{V}_{hj}$, so folgt aus (6.10) für die zu $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ gehörigen Parameter

$$(6.11)\qquad u_h = \int \mathfrak{V}_{hj} \mathfrak{y}_j dt.$$

Da $\begin{pmatrix} G_{ij}(t, \underline{t}) \\ I_{ij}(t, \underline{t}) \end{pmatrix}$ selbst als Funktion von t zulässig von der Klasse D' ist, gilt die »Zerlegung»

$$G(t, \underline{t}) = \int \mathfrak{J}^T(t, t_*)\mathfrak{J}(t_*, \underline{t})\,dt_*, \quad \underline{U}_{hj} = \int \mathfrak{B}_{hl}\mathfrak{J}_{lj}(t, \underline{t})\,dt. \tag{6.12}$$

7. Adjungierte Eigenfunktionenpaare eines unsymmetrischen Kerns.

Bildet man aus einer normalen, zu $\lambda > 0$ gehörigen *Eigenfunktion* $\begin{pmatrix} \omega \\ \pi \end{pmatrix}$ von (3.1) das Funktionenpaar $\begin{pmatrix} \omega \\ \lambda^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{C}\, \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ \psi \end{pmatrix}$, so folgt aus (6.10) zunächst

$$\omega = \sqrt{\lambda} \int \mathfrak{J}^T \underline{\psi}\, d\underline{t}. \tag{7.1}$$

$$\psi = \sqrt{\lambda} \int \mathfrak{J} \underline{\omega}\, d\underline{t}, \tag{7.2}$$

gilt aber ebenfalls, so dass $\begin{pmatrix} \omega \\ \psi \end{pmatrix}$ ein *Paar adjungierter Eigenfunktionen* des unsymmetrischen Kerns $\mathfrak{J}$ ist.

Statt dass wir (7.2) aus der zweigliedrigen Greenschen Formel (1.5) herleiten, knüpfen wir lieber nochmals an (6.1) an, wobei wir aber jetzt $\begin{pmatrix} f_i \\ -g_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda\omega_i \end{pmatrix}$ setzen und $\int \omega \xi^{(\varrho)} dt = 0$, wegen (3.6), beachten. Dann gibt (6.2) bis (6.4) für

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= \lambda \int G_{ij} \underline{\omega}_j\, d\underline{t} \\ \hat{y}_i &= \lambda \int I_{ij} \underline{\omega}_j\, d\underline{t} \end{aligned} \tag{7.3}$$

die Eigenschaften

$$\begin{aligned} &L_i(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \qquad && \hat{x}_i^s = \gamma_{ih}^s \hat{u}_h, \quad \hat{u}_h = \lambda \int \underline{U}_{hj} \underline{\omega}_j\, d\underline{t} \\ &R_i^0(\hat{x}, \hat{y}) = -\lambda\omega_i \qquad && \hat{y}_i^0 \gamma_{ih}^0 - \hat{y}_i^1 \gamma_{ih}^1 = 0 \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\int \hat{x}\, \xi^{(\varrho)}\, dt = 0, \quad \int \hat{y}\, y^{(\varkappa)}\, dt = 0. \tag{7.5}$$

Die Differenz $\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{x}-\omega\\ \hat{y}-\pi\end{pmatrix}$ genügt daher den Gleichungen

$$(7.6)\qquad \begin{aligned} &L_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \qquad \bar{x}^s = \gamma^s_{ih}\bar{u}_h, \quad \bar{u}_h = \hat{u}_h - w_h \\ &R_i^0(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \qquad \bar{y}_i^0\gamma_{ih}^0 - \bar{y}_i^1\gamma_{ih}^1 = 0 \end{aligned}$$

$$(7.7)\qquad \int \bar{x}\,\xi^{(\varrho)}\,dt = 0 \qquad \int \bar{y}\,y^{(\varkappa)}\,dt = 0,$$

also ist $\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega\\ \pi\end{pmatrix}$. Eine zu $\lambda > 0$ gehörige Eigenfunktion $\begin{pmatrix}\omega\\ \pi\end{pmatrix}$ genügt dem Integralgleichungssystem

$$(7.8)\qquad \begin{aligned} \omega &= \lambda \int G\,\underline{\omega}\,d\underline{t} \\ \pi &= \lambda \int I\,\underline{\omega}\,d\underline{t}. \end{aligned}$$

Umgekehrt folgt aus dem eben gegebenen Beweis, dass jede Eigenfunktion des Integralgleichungssystems $(7.8)_{1,2}$ eine (zu $\lambda \neq 0$ gehörige) normale Eigenfunktion des Differentialgleichungssystems (3.1) ist: Die normalen Teilräume mit $\lambda > 0$ sind genau die Eigenräume des Integralgleichungssystems (7.8). Aus $(7.8)_2$ folgt aber für $\lambda^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{c}\pi = \psi$ die Beziehung (7.2), die wir behauptet haben. — Dass auch *jede* Lösung $\begin{pmatrix}\omega\\ \psi\end{pmatrix}$ des Integralgleichungspaars (7.1), (7.2) in ihrem Koordinatenteil ω eine Lösung von $(7.8)_1$ ist, folgt aus der Zusammensetzungsformel (6.12) für G. Bestimmt man weiter durch $(7.8)_2$ zu ω den Impuls π, so gehört, wie wir wissen, $\begin{pmatrix}\omega\\ \pi\end{pmatrix}$ zu $\mathfrak{r}'_\lambda$ mit $\lambda \neq 0$, und es ist $\psi = \lambda^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{c}\pi$.

Für $p < n$ kann der Kern G, dessen Ableitung die wirklich von Null verschiedene Unstetigkeitsmatrix (5.9) besitzt, nicht von endlichem Rang sein. Er hat daher unendlich viele (als Eigenwerte von (3.1) wegen (3.9) notwendig positive) Eigenwerte, die wir der Grösse nach in eine Reihe ordnen können, in der jeder Eigenwert so oft auftritt, wie seine Vielfachheit angibt, und an deren Anfang wir noch m_0-mal den Wert Null stellen, falls dieser m_0-facher normaler Eigenwert von (3.1) ist:

$$(7.9)\qquad 0 \leqq \lambda^{(1)} \leqq \lambda^{(2)} \leqq \cdots, \quad \lambda^{(\nu)} \to \infty \quad \text{für } \nu \to \infty.$$

Ein vollständiges System zugehöriger, bezüglich $\int \omega^2\,dt$ orthonormierter Eigenvektoren sei entsprechend numeriert:

$$\begin{pmatrix} \omega^{(1)}\,\omega^{(2)}\dots \\ \pi^{(1)}\,\pi^{(2)}\dots \end{pmatrix}. \tag{7.10}$$

8. Entwicklungssätze.

Die Gestalt der Gleichungen (6.10), (7.1), (7.2) ist dieselbe wie im Fall fester Endpunkte $x(t^0) = x(t^1) = 0$, den ich an anderer Stelle, [3], behandelt habe. Deshalb lässt sich wieder fast unmittelbar der Entwicklungssatz aus der Schmidtschen Theorie der adjungierten Eigenfunktionen eines unsymmetrischen Kerns auf (6.10), (7.1), (7.2) übertragen: Ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein beliebiges zulässiges Funktionenpaar der Klasse D', so gilt für das ebenfalls zulässige Funktionenpaar der Klasse D'

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i - \sum\limits_{\varrho=1}^{m} x^{(\varrho)}\,\xi_i^{(\varrho)} \\ y_i \end{pmatrix}, \quad x^{(\varrho)} = \int x_l \xi_l^{(\varrho)} dt, \quad \text{mit} \int \tilde{x}_l \xi_l^{(\varrho)} dt = 0 \tag{8.1}$$

wegen der nach (6.10) bestehenden quellenmässigen Darstellung

$$\tilde{x} = \int \mathfrak{Z}^T \mathfrak{y}\, d\underline{t} \tag{8.2}$$

die unbedingt und gleichmässig konvergente Fourierentwicklung

$$\tilde{x}(t) = \sum_{\nu}{}' x^{(\nu)} \omega^{(\nu)}(t), \quad x^{(\nu)} = \int \tilde{x}\, \omega^{(\nu)} dt = \int x\, \omega^{(\nu)} dt; \tag{8.3}$$

summiert wird hier über die $\left(\text{durch} \int \omega^2 dt \text{ orthonormierten}\right)$ Basisvektoren $\begin{pmatrix} \omega^{(\nu)} \\ \pi^{(\nu)} \end{pmatrix}$ der von $\mathfrak{r}_0'$ verschiedenen normalen Eigenräume.

Schliesslich gilt für die ursprüngliche zulässige Funktion der Klasse D' die unbedingt und gleichmässig konvergente Fourierentwicklung

$$x_i(t) = \sum_{\mu} x^{(\mu)} \omega_i^{(\mu)}(t), \quad x^{(\mu)} = \int x_i \omega_i^{(\mu)} dt, \tag{8.4}$$

summiert jetzt über *alle* normalen Eigenräume. Mit Rücksicht auf die Darstellung (4.3) gilt noch die unbedingt konvergente Fourierentwicklung für die Parameter

$$u_h = \sum_h x^{(\mu)} w_h^{(\mu)}, \quad w_h^{(\mu)} = [C_{ih}^r \omega_i^{(\mu)}(t^r)]. \tag{8.5}$$

Speziell für $\begin{pmatrix} G_{ij}(t, \underline{t}) \\ I_{ij}(t, \underline{t}) \end{pmatrix}$ ergibt sich wegen (5.7) aus (8.3) die bilineare Formel

$$G_{ij}(t, \underline{t}) = \sum_\nu{}' \frac{\omega_i^{(\nu)}(t)\,\omega_j^{(\nu)}(\underline{t})}{\lambda^{(\nu)}}, \tag{8.6}$$

deren unbedingte und gleichmässige Konvergenz in t *und* $\underline{t}$ sich hinterher in bekannter Weise ergibt; summiert wird über die von $\mathfrak{r}_0'$ verschiedenen normalen Teilräume. Für die Parameter der Greenschen Funktion gilt, vgl. (5.5), (5.14),

$$\underline{U}_{hj} = \sum_\nu{}' \frac{w_h^{(\nu)}\,\omega_j^{(\nu)}(\underline{t})}{\lambda^{(\nu)}}, \quad U_{hk} = \sum_\nu{}' \frac{w_h^{(\nu)} w_k^{(\nu)}}{\lambda^{(\nu)}}, \tag{8.7}$$

wobei die Reihen unbedingt konvergieren.

9. Die Vollständigkeitsrelationen für zulässige Funktionen.

Neben der für die *Koordinaten* jeder zulässigen Funktion der Klasse D' wegen (8.4) gültigen Vollständigkeitsrelation

$$\int x(t)^2 dt = \sum_\mu \left(\int x\,\omega^{(\mu)} dt\right)^2 \tag{9.1}$$

gibt die Greensche Formel (1.3) sowie (1.5) für eine zulässige Funktion $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der Klasse D' und eine zulässige Funktion $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ der Klasse C', D'' (d. h. mit stetigem q und $\dot{q}$, stetigem p und abteilungsweise stetigem $\dot{p}$) die Beziehung

$$\begin{aligned} \int c_{ij} y_i p_j dt &= -\int \sum_\mu x^{(\mu)} \omega_i^{(\mu)} R_i^0(q, p)\,dt + [xp]_0^1 \\ &= -\sum_\mu x^{(\mu)} \int q_i R_i^0(\omega^{(\mu)}, \pi^{(\mu)})\,dt + \sum_\mu x^{(\mu)} [\pi_i^{(\mu)} q_i - \omega_i^{(\mu)} p_i]_0^1 + \sum_\mu x^{(\mu)} [\omega_i^{(\mu)} p_i]_0^1, \end{aligned} \tag{9.2}$$

also, da $[\pi^{(\mu)} q]_0^1 = 0$ ist,

$$\int c_{ij} y_i p_j dt = \sum_\mu \lambda^{(\mu)} x^{(\mu)} q^{(\mu)}, \quad q^{(\mu)} = \int q\,\omega^{(\mu)} dt. \tag{9.3}$$

Die Verallgemeinerung dieser Vollständigkeitsrelation für den *Impuls* auf den Fall, dass auch $\binom{q}{p}$ nur eine zulässige Funktion der Klasse D' ist, geht von folgenden Bemerkungen aus, die schon beim (nicht ausgeführten) Beweis des Entwicklungssatzes oben eine Rolle spielen:

Erstens folgt aus (9.3) für jedes zulässige Funktionenpaar $\binom{x}{y}$ der Klasse D'

$$g^{(\nu)} \equiv \int c_{ij} y_i \pi_j^{(\nu)} dt = \lambda^{(\nu)} \int x_i \omega_i^{(\nu)} dt, \tag{9.4}$$

so dass insbesondere die zu $\lambda^{(\nu)} > 0$ gehörigen Funktionen $\frac{1}{\sqrt{\lambda^{(\nu)}}} \mathfrak{c}\pi^{(\nu)}$ ein normiertes Orthogonalsystem bilden. Deshalb gilt zweitens für eine beliebige, sagen wir abteilungsweise stetige Funktion $y(t)$ die Konvergenz von

$$\sum_\nu{}' \frac{1}{\lambda^{(\nu)}} \left(\int c_{ij} y_i \pi_j^{(\nu)} dt\right)^2 \leqq \int c_{ij} y_i y_j dt, \tag{9.5}$$

insbesondere für jedes zulässige Funktionenpaar $\binom{x}{y}$ der Klasse D' die Konvergenz der Reihe

$$\sum_\nu \lambda^{(\nu)} \left(\int x\,\omega^{(\nu)} dt\right)^2. \tag{9.6}$$

In der Form

$$\int c_{ij} y_i p_j dt = \sum_\nu{}' \frac{1}{\lambda^{(\nu)}} \int c_{ij} y_i \pi_j^{(\nu)} dt \int c_{ij} p_i \pi_j^{(\nu)} dt \tag{9.7}$$

lässt sich aber die Vollständigkeitsrelation (9.3) durch genau dieselben Betrachtungen, wie ich, [3], sie bei festen Grenzen im Anschluss an Courant [1], S. 43 f., 370; [2], S. 42 angestellt habe, auf ein zulässiges Funktionenpaar $\binom{q}{p}$ der Klasse D' ausdehnen.

Identifikation von $\binom{q}{p}$ mit $\binom{x}{y}$ gibt

$$\int c_{ij} y_i y_j dt = \sum_\nu \lambda^{(\nu)} x^{(\nu)2}. \tag{9.8}$$

Für den Fall, dass $\lambda = 0$ ein normaler Eigenwert von (3.1) ist, bilde ich noch mit $a_0 < 0$ den Ausdruck

$$\int (c_{ij} y_i y_j - a_0 x_i^2) dt = \sum_{\mu} (\lambda^{(\mu)} - a_0) x^{(\mu)2} = \sum_{\mu} \Lambda^{(\mu)} x^{(\mu)2}, \tag{9.9}$$

wo gewiss alle

$$\Lambda^{(\mu)} = \lambda^{(\mu)} - a_0 > 0 \tag{9.10}$$

sind. Setzen wir dann

$$X^{(\nu)} = \sqrt{\Lambda^{(\nu)}} x^{(\nu)}, \tag{9.11}$$

über ν, das von jetzt an alle normalen Eigenräume durchläuft, nicht summiert, so wird

$$\int \left(c_{ij} y_i y_j - a_0 x_i^2 \right) dt = \sum_{\nu} X^{(\nu)2} = (XX) \tag{9.12}$$

die Einheitsform.

10. Einführung einer vollstetigen quadratischen Form.

Sei wieder $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein zulässiges Funktionenpaar der Klasse D'. Dann wird auf Grund des Entwicklungssatzes (8.4)

$$\int \hat{a}_{ij} x_i x_j dt = \hat{A}(X, X), \quad \hat{a}_{ij} = a_{ij} - a_0 \delta_{ij} \tag{10.1}$$

eine quadratische Form in den unendlich vielen Variablen $X^{(\nu)}$:

$$\hat{A}(X, X) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \left(\frac{1}{\sqrt{\Lambda^{(\mu)}} \sqrt{\Lambda^{(\nu)}}} \int \hat{a}_{ij} \omega_i^{(\mu)} \omega_j^{(\nu)} dt \right) X^{(\mu)} X^{(\nu)}, \tag{10.2}$$

die auf Grund der bilinearen Entwicklung (8.6) ebenso wie bei festen Endpunkten (vgl. auch die analoge Betrachtung, die in Nr. 17 durchgeführt wird) als vollstetig erkannt wird. Wegen (8.5), (9.11) wird analog die Randform

$$\beta_{hk} u_h u_k = B(X, X), \tag{10.3}$$

wo

$$B(X, X) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \left(\beta_{hk} \frac{u_h^{(\mu)}}{\sqrt{\Lambda^{(\mu)}}} \frac{u_k^{(\nu)}}{\sqrt{\Lambda^{(\nu)}}} \right) X^{(\mu)} X^{(\nu)} \tag{10.4}$$

ebenfalls eine vollstetige quadratische Form in den $X^{(\nu)}$ ist; die Quadratsumme der Koeffizienten ist nämlich

$$(10.5)\quad \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N}\left(\beta_{hk}\frac{w_h^{(\mu)}}{\sqrt{A^{(\mu)}}}\frac{w_k^{(\nu)}}{\sqrt{A^{(\nu)}}}\right)\left(\beta_{h'k'}\frac{w_{h'}^{(\mu)}}{\sqrt{A^{(\mu)}}}\frac{w_{k'}^{(\nu)}}{\sqrt{A^{(\nu)}}}\right)=\beta_{hk}\beta_{h'k'}\sum_{\mu=1}^{N}\frac{w_h^{(\mu)}w_{h'}^{(\mu)}}{A^{(\mu)}}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{w_k^{(\nu)}w_{k'}^{(\nu)}}{A^{(\nu)}},$$

also beschränkt.

Die vollstetige quadratische Form $\hat{A}(X, X) - B(X, X)$, die wir (vgl. [3], Anm. 42), als nicht identisch verschwindend voraussetzen, kann durch eine orthogonale Transformation auf die Diagonalgestalt gebracht werden

$$(10.6)\quad \int (a_{ij} - a_0\delta_{ij})x_i x_j dt - \beta_{hk}u_h u_k = \hat{A}(X, X) - B(X, X) = \sum_\alpha \frac{1}{\mu^{(\alpha)}}(l^{(\alpha)}X)^2.$$

Dabei gehen die reellen reziproken Eigenwerte $\frac{1}{\mu^{(\alpha)}} \to 0$. Die Eigenformen

$$(10.7)\quad (l^{(\alpha)}X) = \sum_\nu l_\nu^{(\alpha)} X^{(\nu)}$$

sind beschränkte Linearformen, besitzen also konvergente Koeffizientenquadratsumme und sind zu einander orthogonal

$$(10.8)\quad (l^{(\alpha)}l^{(\beta)}) = \sum_\varrho l_\varrho^{(\alpha)} l_\varrho^{(\beta)} = \delta^{\alpha\beta}.$$

Polarisieren wir (10.6) mit einem Vektor Y des Hilbertschen Raumes und spezialisieren $Y = \sqrt{|\mu^{(\alpha)}|}\, l^{(\alpha)}$ und führen wir die wegen (10.8), (8.6), (8.7) nach der Schwarzschen Ungleichheit unbedingt und gleichmässig konvergenten Reihen ein:

$$(10.9)\quad \sqrt{|\mu^{(\alpha)}|}\sum_\nu \frac{l_\nu^{(\alpha)}}{\sqrt{A^{(\nu)}}}\,\omega_j^{(\nu)}(t) = \varphi_j^{(\alpha)}(t),\quad \sqrt{|\mu^{(\alpha)}|}\sum_\nu \frac{l_\nu^{(\alpha)}}{\sqrt{A^{(\nu)}}}\,w_k^{(\nu)} = v_k^{(\alpha)},$$

wobei

$$(10.10)\quad \varphi_i^{(\alpha)}(t^s) = \gamma_{ih}^s v_h^{(\alpha)}$$

gilt, so kommt

$$(10.11)\quad \int \hat{a}_{ij}x_i\varphi_j^{(\alpha)}dt - \beta_{hk}u_h v_k^{(\alpha)} = \frac{\sqrt{|\mu^{(\alpha)}|}}{\mu^{(\alpha)}}(l^{(\alpha)}X),$$

also insbesondere, wenn α durch β, x durch $\varphi^{(\alpha)}$, X durch $\sqrt{|\mu^{(\alpha)}|}\, l^{(\alpha)}$ ersetzt wird,

$$(10.12)\quad \int (a_{ij} - a_0\delta_{ij})\varphi_i^{(\alpha)}\varphi_j^{(\beta)}dt - \beta_{hk}v_h^{(\alpha)}v_k^{(\beta)} = \operatorname{sig}\mu^{(\alpha)}\cdot\delta^{\alpha\beta}.$$

Daher ist

$$\int (a_{ij} - a_0\delta_{ij})x_i x_j dt - \beta_{hk} u_h u_k = \hat{A}(X, X) - B(X, X)$$
$$(10.13) \qquad = \sum_\alpha \operatorname{sig} \mu^{(\alpha)} \left(\int (a_{ij} - a_0 \delta_{ij}) x_i \varphi_j^{(\alpha)} dt - \beta_{hk} u_h v_k^{(\alpha)} \right)^2$$

und

$$\int c_{ij} y_i y_j dt - a_0 \int x_i^2 dt = (XX)$$
$$(10.14) \qquad \geqq \sum_\alpha (l^{(\alpha)} X)^2 = \sum_\alpha |\mu^{(\alpha)}| \left(\int (a_{ij} - a_0 \delta_{ij}) x_i \varphi_j^{(\alpha)} dt - \beta_{hk} u_h v_k^{(\alpha)} \right)^2 .$$ [1]

Hier und im folgenden gilt das Gleichheitszeichen, wenn die Form $\hat{A}(X, X) - B(X, X)$ abgeschlossen ist, worauf ich in **15** eingehe.

11. Die normalen Eigenfunktionen der erweiterten Jacobischen Gleichungen.

Für das System (3.1) lässt sich zum Parameterwert $\lambda = a_0 \leqq 0$,[2] der nicht normaler Eigenwert ist, nach Nr. **4** der erweiterte »normale» Greensche Tensor $\begin{pmatrix} {}^\circ G & {}^\circ H \\ {}^\circ I & {}^\circ K \end{pmatrix}$ konstruieren. $\begin{pmatrix} {}^\circ G \\ {}^\circ I \end{pmatrix}$ besitzt als zulässige Funktion der Klasse D' die Fourierreihen (nach den Eigenfunktionen von (3.1))

$$(11.1) \qquad {}^\circ G_{ij} = \sum_\mu \frac{\omega_i^{(\mu)} \underline{\omega}_j^{(\mu)}}{\Lambda^{(\mu)}}, \quad {}^\circ U_{hi} = \sum_\mu \frac{\omega_i^{(\mu)}(t) w_h^{(\mu)}}{\Lambda^{(\mu)}}, \quad {}^\circ U_{hk} = \sum_\mu \frac{w_h^{(\mu)} w_k^{(\mu)}}{\Lambda^{(\mu)}},$$

unbedingt und gleichmässig konvergente bilineare Entwicklungen. Wird in die mit der Integrationsvariablen $\underline{t}$ und dem Summationsindex l statt i geschriebene Formel (10.11) $\underline{x}_l = G_{il}(t, \underline{t})$, $\underline{y}_l = H_{il}(t, \underline{t})$ eingesetzt, so ergibt sich daraus — bei sinngemässer Übertragung der Bezeichnungen von Nr. **5** auf den neuen Tensor — mit Rücksicht auf (10.9) für $\varphi = \varphi^{(\alpha)}$, $\mu = \mu^{(\alpha)}$ die Integralgleichung[3]

$$(11.2) \qquad \varphi_i = \mu \left\{ \int {}^\circ G_{il} \underline{\hat{a}}_{lj} \underline{\varphi}_j d\underline{t} - \beta_{hk} {}^\circ U_{hi} v_k \right\}.$$

$$(11.3) \qquad \chi_i = \mu \left\{ \int {}^\circ I_{il} \underline{\hat{a}}_{lj} \underline{\varphi}_j d\underline{t} - \beta_{hk} {}^\circ V_{hi} v_k \right\}$$

---

[1] Eine analoge Ungleichheit gibt Reid [2], S. 789 für die als positiv definit vorausgesetzte zweite Variation.

[2] Je nachdem $m_0 \geqq 0$ ist.

[3] Sie ist »belastet» im Sinne von Kneser [1], S. 117.

als Impuls $\chi = \chi^{(\alpha)}$ daneben gestellt, gilt für $\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi^{(\alpha)}\\ \chi^{(\alpha)}\end{pmatrix}$, $v_k = v_k^{(\alpha)}$, $\mu = \mu^{(\alpha)}$ das Differentialgleichungssystem[1] — analog zu (6.2), (5.14) —

$$
\begin{array}{lll}
(11.4) & L_i(\varphi, \chi) = 0 & \varphi_i^0 = \gamma_{ih}^0 v_h, \quad \varphi_i^1 = \gamma_{ih}^1 v_h \\
 & R_i^0(\varphi, \chi) + a_0\varphi_i + \mu(a_{ij} - a_0\delta_{ij})\varphi_j = 0, & \chi_i^0\gamma_{ih}^0 - \chi_i^1\gamma_{ih}^1 = \mu\beta_{hk}v_k,
\end{array}
$$

und mit Rücksicht auf (5.7), (5.10) die Orthogonalitätsrelation

$$
(11.5) \qquad \int y^{(\varkappa)}\chi\, dt = 0.
$$

Die Transversalitätsbedingung in $(11.4)_2$ folgt aus dem Analogon zu (5.13), die Endbedingung in $(11.4)_1$ einfach aus (10.10).

Eine Eigenfunktion von (11.4) mit der Eigenschaft (11.5) nennen wir in Analogie zu Nr. **3** *normal*, ebenso den zugehörigen Eigenwert μ. Dann sind die Funktionen (10.9), (11.3) normale Eigenfunktionen von (11.4), und zwar genau eine Basis dieser. Denn ist $\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$ eine normale Eigenfunktion von (11.4), so genügen ihre Komponenten Integralgleichungen von der Form (11.2), (11.3); das folgert man am besten aus der mit $\underline{t}$ und $R_i^0(x, y) + a_0 x_i = {}^\circ R(x, y)$ statt $R(x, y)$ geschriebenen zweigliedrigen Greenschen Formel (1.5): man ersetzt $\begin{pmatrix}\underline{q_l}\\ p_l\end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix}\underline{\varphi_l}\\ \underline{\chi_l}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\underline{x_l}\\ y_l\end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix}{}^\circ G_{il}(t, \underline{t})\\ {}^\circ H_{il}(t, \underline{t})\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}{}^\circ I_{il}(t, \underline{t})\\ {}^\circ K_{il}(t, \underline{t})\end{pmatrix}$ und berücksichtigt den Sprung (5.6), die Differentialgleichungen (11.4), (5.2) $\left(\text{ohne } \sum\limits_{\varrho} \text{ rechts}\right)$ sowie die Randbedingungen in (11.4) und (5.3), letzteres rechts in (1.5) beim Term

$$
(11.6) \qquad -[x_l p_l]_{t_0}^{t_1} = -[{}^\circ G_{il}(t, t^s)\chi_l^s]_0^1 = -[\chi_l^s\gamma_{lh}^s]\,{}^\circ U_{hi} = \mu\beta_{hk}\,{}^\circ U_{hi}v_k,
$$

und analog mit ${}^\circ I_{il}(t, t^s)$ und ${}^\circ V_{hi}$.

Die Integralgleichungen (11.2), (11.3) gehen bei Einführung der bilinearen Reihen (11.1) für ${}^\circ G$, ${}^\circ U$ und der Fourierentwicklungen (8.4), (8.5) für φ, v in das unendliche Gleichungssystem über, das mit der nach einem beliebigen Vektor Y polarisierten Beziehung (10.6) äquivalent ist und als Lösungsvektoren genau die $l_\nu^{(\alpha)}$ hat.

---

[1] Ähnliche, noch allgemeinere Gleichungssysteme wie (11.4) und auch (11.2), (11.3) betrachtet Reid [2], S. 778.

Zum Schluss sei noch aus der Greenschen Formel (1.3) gefolgert

$$\mu\left(\int(a_{ij}-a_0\delta_{ij})\varphi_i\varphi_j\,dt-\beta_{hk}v_hv_k\right)=\int(c_{ij}\chi_i\chi_j-a_0\varphi_i^2)\,dt; \tag{11.7}$$

diese Beziehung zeigt von vornherein, dass selbstverständlich jeder normale Eigenwert $\mu \neq 0$ ist und dass

$$\operatorname{sig}\mu\cdot\left(\int(a_{ij}-a_0\delta_{ij})\varphi_i\varphi_j\,dt-\beta_{hk}v_hv_k\right) \tag{11.8}$$

in jedem normalen Eigenraum von (11.4) als (positiv definite) Metrik genommen werden kann, da auch für $a_0=0$ die rechte Seite von (11.7) nicht verschwinden kann (sonst wäre $m_0>0$). $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots$ seien die positiven normalen Eigenwerte von (11.4), jeder nach seiner Vielfachheit aufgeführt, $\mu^{(-1)}, \mu^{(-2)}, \ldots$ ebenso die negativen; entsprechend seien die normalen Eigenfunktionen $\begin{pmatrix}\varphi^{(\alpha)}\\ \chi^{(\alpha)}\end{pmatrix}$ numeriert.

12. Die Minimumseigenschaft der normalen Eigenwerte.

Seien $({}^*l^{(\alpha)}X)$ die orthonormierten Linearformen, welche die $(l^{(\alpha)}X)$ zu einem abgeschlossenen System ergänzen. Es gilt

$$(X\,X)=\sum_\alpha(l^{(\alpha)}X)^2+\sum_\alpha({}^*l^{(\alpha)}X)^2, \qquad ({}^*l^{(\alpha)}, l^{(\beta)})=0. \tag{12.1}$$

Durch die gleichmässig konvergenten Reihen

$$\sum_\nu\frac{{}^*l_\nu^{(\alpha)}}{\sqrt{\Lambda^{(\nu)}}}\omega_i^{(\nu)}(t)=\overset{*}{\varphi}{}_i^{(\alpha)}(t), \quad \sum_\nu\frac{{}^*l_\nu^{(\alpha)}}{\sqrt{\Lambda^{(\nu)}}}w_h^{(\nu)}=\overset{*}{v}{}_h^{(\alpha)}, \quad \overset{*}{\varphi}{}_i^{(\alpha)}(t^s)=\gamma_{ih}^s\overset{*}{v}{}_h^{(\alpha)} \tag{12.2}$$

ist zu ${}^*l^{(\alpha)}$ eine stetige Funktion $\overset{*}{\varphi}{}^{(\alpha)}$ und zugehörige Randparameter $\overset{*}{v}{}^{(\alpha)}$ gegeben.

Für eine zulässige Funktion $x(t)$ der Klasse D' ist

$$({}^*l^{(\alpha)}X)=\sum_\nu{}^*l_\nu^{(\alpha)}\cdot\sqrt{\Lambda^{(\nu)}}\int x\,\omega^{(\nu)}\,dt; \tag{12.3}$$

das lässt sich für den Fall, dass $x(t)$ sogar der Klasse C', D'' angehört, umformen

$$\begin{aligned}\Lambda^{(\nu)}\int x\,\omega^{(\nu)}\,dt&=-\int x_i(R_i^0(\omega^{(\nu)},\pi^{(\nu)})+a_0\omega_i^{(\nu)})\,dt=\\ &-\int\omega_i^{(\nu)}(R_i^0(x,y)+a_0x_i)\,dt+[\omega^{(\nu)}y-\pi^{(\nu)}x]_0^1,\end{aligned} \tag{12.4}$$

also, falls $R_i^0(x, y) + a_0 x_i = -\overset{0}{g}_i$ gesetzt wird,

$$(12.5)\quad ({}^*l^{(\alpha)}X) = \sum_\nu \frac{{}^*l_\nu^{(\alpha)}}{\sqrt{\Lambda^{(\nu)}}}\left\{\int \omega_i^{(\nu)}\overset{0}{g}_i\,dt + [y_i^s \gamma_{ik}^s]_0^1 w_k^{(\nu)}\right\} = \int \overset{*}{\varphi}{}^{(\alpha)}\overset{0}{g}\,dt + [y_i^s\gamma_{ik}^s]\overset{*}{v}{}_k^{(\alpha)}.$$

Hingegen ist für den Vektor $Y_i = \left(\frac{\omega_i^{(\nu)}}{\sqrt{\Lambda^{(\nu)}}}\right)$, welcher der Greenschen Funktion ${}^\circ G_{il}(t, \underline{t}) = x_l(\underline{t})$, ${}^\circ H_{il}(t, \underline{t}) = y_l(\underline{t})$ entspricht, wegen (12.2)

$$(12.6)\qquad ({}^*l^{(\alpha)}Y_i) = \overset{*}{\varphi}{}_i^{(\alpha)}.$$

Das folgt auch aus den obenstehenden Formeln, zu denen jetzt als Sprungterm

in (12.4) $$[\omega^{(\nu)}y] = [\underline{\omega}_l^{(\nu)}\,{}^\circ H_{il}(t, \underline{t})]_{\underline{t}=t+0}^{\underline{t}=t-0} = \omega_i^{(\nu)},$$

in (12.5) $$\sum_\nu \frac{{}^*l_\nu^{(\alpha)}}{\sqrt{\Lambda_\nu^{(\nu)}}}\omega_i^{(\nu)} = \overset{*}{\varphi}{}_i^{(\alpha)}(t)$$

hinzutritt.

Die Minimumseigenschaft der normalen Eigenwerte[1] lässt sich (ganz wie bei festen Endpunkten) folgern aus (2.5), (9.12), (10.6), (12.1), d. h.

$$(12.7)\qquad I = \sum_\alpha\left(1 - \frac{1}{\mu^{(\alpha)}}\right)(l^{(\alpha)}X)^2 + \sum_\alpha({}^*l^{(\alpha)}X)^2 \geqq \left(1 - \frac{1}{\mu^{(1)}}\right)(XX),$$

wo $\mu^{(1)}\,(\leqq +\infty)$ der kleinste positive normale Eigenwert sei, somit, vgl. auch (11.7),

$$(12.8)\qquad \int(c_{ij}y_iy_j - a_0x_i^2)\,dt \geqq \mu^{(1)}\left\{\int(a_{ij} - a_0\delta_{ij})x_ix_j\,dt - \beta_{hk}u_hu_k\right\}.$$

$\mu^{(1)}$ ist der kleinste Wert, den das Integral $\int(c_{ij}y_iy_j - a_0x_i^2)\,dt$ für alle der Normierungsbedingung $\int(a_{ij} - a_0\delta_{ij})x_ix_j\,dt - \beta_{hk}u_hu_k = 1$ genügenden zulässigen Funktionen der Klasse D' annehmen kann. Denn das Gleichheitszeichen gilt in diesen Formeln dann und nur dann, falls alle zu $\mu^{(\alpha)} \neq \mu^{(1)}$ gehörigen $(l^{(\alpha)}X) = 0$ und alle $({}^*l^{(\alpha)}X) = 0$ sind, d. h. wegen der Abgeschlossenheit des Systems der $l^{(\alpha)}$, ${}^*l^{(\alpha)}$, falls x eine lineare Kombination der zu $\mu^{(1)}$ gehörigen normalen Eigenfunktionen $\varphi^{(\alpha)}$ ist.

[1] Sie bildet bei Reid [2], S. 779 die Grundlage des Existenzbeweises für die Eigenwerte.

Ordnen wir die nach ihrer Vielfachheit aufgeführten normalen Eigenwerte von (11.4) in eine Reihe[1] $\cdots \leqq \mu^{(-2)} \leqq \mu^{(-1)} < 0 < \mu^{(1)} \leqq \mu^{(2)} \leqq \cdots$ und numerieren entsprechend die zugehörigen Eigenfunktionen, so lassen sich die höheren positiven Eigenwerte durch eine analoge Minimumseigenschaft charakterisieren, aber auch die negativen Eigenwerte, da z. B. $|\mu^{(-1)}|$ der kleinste positive Eigenwert desjenigen Problems ist, bei dem $a_{ij} - a_0\delta_{ij}$, β_{hk} durch $-(a_{ij} - a_0\delta_{ij}) = (-a_{ij} + 2a_0\delta_{ij}) - -a_0\delta_{ij}$, $-\beta_{hk}$ ersetzt sind. Zusammenfassend: $|\mu^{(\gamma)}|$ ist der kleinste Wert von $\int (c_{ij}y_iy_j - a_0x_i^2)dt$ für alle zulässigen Funktionen der Klasse D', die den Nebenbedingungen genügen:

$$\int (a_{ij} - a_0\delta_{ij})x_ix_j dt - \beta_{hk}u_hu_k = \operatorname{sig} \mu^{(\gamma)} = \varepsilon. \tag{12.9}$$

$$\int (a_{ij} - a_0\delta_{ij})x_i\varphi_j^{(\alpha)} dt - \beta_{hk}u_hv_k^{(\alpha)} = 0 \text{ für } \alpha = \varepsilon \cdot 1, \varepsilon \cdot 2, \ldots, \varepsilon \cdot (|\gamma| - 1). \tag{12.10}$$

13. Entwicklung der zweiten Variation.

Endgültig besitzt jetzt die zweite Variation (2.5) für ein zulässiges Funktionenpaar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der Klasse D' nach (10.13), (10.14) die Entwicklung

$$\begin{aligned} I &= \beta_{hk}u_hu_k + \int (c_{ij}y_iy_j - a_{ij}x_ix_j)dt \\ &= \sum_\alpha |\mu^{(\alpha)}| \left(1 - \frac{1}{\mu^{(\alpha)}}\right)\left(\int (a_{ij} - a_0\delta_{ij})x_i\varphi_j^{(\alpha)} dt - \beta_{hk}u_hv_k^{(\alpha)}\right)^2 + \sum_\alpha ({}^*l^{(\alpha)}X)^2. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Falls die Form $\hat{A} - B$ *abgeschlossen* ist, fällt hier der Zusatzterm mit ${}^*l$ weg. Dies ist das Analogon der von Lichtenstein angegebenen Fundamentalformel.

Dafür dass $I \geqq 0$ ausfällt, ist in allen Fällen notwendig und hinreichend, dass der kleinste positive normale Eigenwert $\mu^{(1)} \geqq 1$ ist. Das Hinreichen dieser Bedingung ist klar; notwendig ist sie deshalb, weil aus (13.1) für $x = \varphi^{(\alpha)}$ wegen $({}^*l^{(\beta)}l^{(\alpha)}) = 0$ die Gleichheit

$$I = |\mu^{(\alpha)}| - \operatorname{sig} \mu^{(\alpha)} \tag{13.2}$$

folgt, der Ausdruck rechts aber negativ ist, falls $0 < \mu^{(\alpha)} < 1$ ist.

[1] Unendlich viele normale Eigenwerte existieren z. B. in dem später, **15**, näher behandelten Fall der Abgeschlossenheit von $\hat{A} - B$.

Sind allgemein $\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(n_1)}$ die positiven Eigenwerte < 1, so ist für alle zulässigen Funktionen $\binom{x}{y}$ der Klasse D', die den Orthogonalitätsbedingungen

$$(13.3) \qquad \int (a_{ij} - a_0 \delta_{ij}) x_i \varphi_j^{(\alpha)} dt - \beta_{hk} u_h v_k^{(\alpha)} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n_1,$$

genügen,

$$(13.4) \qquad I \geqq 0.$$

Da nach (13.1), $(12.1)_2$, (10.12) die polarisierte Variation

$$(13.5) \qquad \begin{aligned} I(\varphi^{(\alpha)}, x) &= \beta_{hk} u_h v_k^{(\alpha)} + \int (c_{ij} y_i \chi_j^{(\alpha)} - a_{ij} x_i \varphi_j^{(\alpha)}) dt \\ &= (\mu^{(\alpha)} - 1)\left(\int (a_{ij} - a_0 \delta_{ij}) x_i \varphi_j^{(\alpha)} dt - \beta_{hk} u_h v_k^{(\alpha)} \right) \end{aligned}$$

ist, sind (13.3) natürliche isoperimetrische Nebenbedingungen in der Bezeichnung von Birkhoff und Hestenes [1], nämlich

$$(13.6) \qquad I(\varphi^{(1)}, x) = 0, \ldots, I(\varphi^{(n_1)}, x) = 0,$$

und für eine lineare Kombination der $\binom{\varphi^{(\alpha)}}{\chi^{(\alpha)}}$ ist in naheliegender Schreibweise die zweite Variation

$$(13.7) \qquad I\left(\sum_{\alpha=1}^{n_1} a_\alpha \varphi^{(\alpha)} \right) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n_1} I(\varphi^{(\alpha)}, \varphi^{(\beta)}) a_\alpha a_\beta = \sum_{\alpha=1}^{n_1} (|\mu^{(\alpha)}| - \operatorname{sig} \mu^{(\alpha)}) a_\alpha^2 < 0,$$

eine negativ definite Form in $a_1, \ldots, a_{n_1}$.

Natürliche isoperimetrische Bedingungen (13.6) vom negativ definiten Charakter (13.7), deren Erfülltsein (13.4) nach sich zieht, bilden ein »proper minimal set» nach Birkhoff-Hestenes [1], S. 218. Die Gliederzahl ist für jeden solchen Satz die gleiche: der Index (Typenzahl) n_1 des Ausgangsextremalenbogens e^0: $x \equiv 0$ $(t^0 \leqq t \leqq t^1)$; vgl. später Nr. **19**.

14. Analogon der Jacobischen Bedingung.[1]

Ein solches lässt sich formulieren im Spezialfall der von Morse [2], S. 50 als »focal boundary problem» bezeichneten Randwertaufgabe, wo $(\gamma_{ih}^1) = 0$ und

[1] Vgl. Hestenes [1], S. 802, [3]; Reid [3], [4].

(γ_{ih}^0) vom Rang $r \leqq n$ ist, $h = 1, \ldots, r$, somit x^0 an eine lineare Mannigfaltigkeit M^0 gebunden ist, während $x^1 = 0$ fest ist. Dann folgt aus unserer mit $I \geqq 0$ äquivalenten Bedingung für den kleinsten positiven normalen Eigenwert: $\mu^{(1)} \geqq 1$ notwendig das Erfülltsein der »Jacobischen Bedingung»: eine Lösung $\hat{x}(t)$, $\hat{y}(t)$ des zu $\mu = 1$ gehörigen Jacobischen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} L_i(x, y) &= 0 \qquad x_i^0 = \gamma_{ih}^0 u_h \\ R_i(x, y) &= 0 \qquad y_i^0 \gamma_{ih}^0 = \beta_{hk} u_k, \end{aligned} \tag{14.1}$$

deren sämtliche Koordinaten in einem inneren Punkt $\bar{t}$ des Intervalls $\langle t^0, t^1 \rangle$ verschwinden, $\hat{x}_i(\bar{t}) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$, hat in $\langle t^0, \bar{t} \rangle$ identisch verschwindende Koordinaten, $\hat{x}_i(t) \equiv 0$. Die zu M^0 transversale feldartige Extremalenschar (die durch (14.1) gegeben ist), kurz die Mannigfaltigkeit M^0 darf innerhalb von (t^0, t^1) keinen Brennpunkt besitzen. Beim Beweis hat man nur den festen Endpunkt bei t^0 in meiner früheren Arbeit [3][1] durch die lineare Mannigfaltigkeit M^0 zu ersetzen, wenn bei $\bar{t}$ oder t^1 Bedingungen zu stellen sind, lauten sie nach wie vor $x_i = 0$.

Eine analoge Aussage gilt in dem (hier nicht näher zu behandelnden) Fall der »two end manifolds» nach der Bezeichnung von Morse [2], S. 64. Hier ist für x^0 die r_0-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit $M^0: x_i^0 = \gamma_{ih}^0 u_h$, $h = 1, \ldots, r_0$, für x^1 die r_1-dimensionale Mannigfaltigket $M^1: x_i^1 = \gamma_{ih'}^1 u_{h'}$, $h' = r_0, r_0 + 1, \ldots, r_0 + r_1 = r$ vorgeschrieben, und es zerfällt die Randform (2.2) in

$$\sum_{h, k=1}^{r_0} \beta_{hk}^0 u_h u_k - \sum_{h', k' = r_0 + 1}^{r} \beta_{h'k'}^1 u_{h'} u_{k'}.$$

Hier ist für $I \geqq 0$, d. h. $\mu^{(1)} \geqq 1$ notwendig, dass weder M^0 noch M^1 innerhalb des Intervalls (t^0, t^1) einen Brennpunkt im Sinne der sich an (14.1) anschliessenden Definition besitzt.

Bei den genannten Problemen kann eine zum kleinsten positiven Eigenwert $\mu^{(1)} (\gtreqless 1)$ gehörige normale Eigenfunktion in einem Punkt des Intervalls $t^0 < < t < t^1$ nicht mit allen Koordinaten verschwinden, denn das Problem mit $\mu^{(1)} a_{ij}$, $\mu^{(1)} \beta_{hk}^0$, $\mu^{(1)} \beta_{h'k'}^1$ statt a_{ij}, β_{hk}^0, $\beta_{h'k'}^1$ hat den kleinsten positiven normalen Eigenwert $\mu = 1$.

Sei endlich insbesondere ein Endpunkt frei beweglich, etwa x^0 in der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M^0, M^1 beliebig, so ist wegen der in Nr. **12**

[1] Dort kann die Formel (14.1), in der übrigens X durch $\bar{X}$ zu ersetzen ist, entbehrt und durch (1.7) ersetzt werden.

bewiesenen Minimumseigenschaft der zu M^0, M^1 gehörige kleinste positive Eigenwert $\mu^{(1)} \leqq \mu_0^{(1)}$, wenn $\mu_0^{(1)}$ der entsprechende Eigenwert bei festem Endpunkt $x^0 = 0$ und der gleichen M^1 ist. Hier steht wirklich das Kleiner-Zeichen; denn sonst müsste eine zu $\mu_0^{(1)} = \mu^{(1)}$ gehörige, für t^0 und t^1 verschwindende Eigenfunktion (welche verschwindende Parameter u_h, $h = 1, \ldots, r_0 = n$, besitzt) auch die Transversalitätsbedingung $y_i^0 \gamma_{ih}^0 = \mu^{(1)} \beta_{hk}^0 u_k = 0$ erfüllen. Das zöge $y_i^0 = 0$, $i = 1, \ldots, n$ nach sich, was zusammen mit $x_i^0 = 0$ die identisch verschwindende Lösung ergäbe.[1]

Um wenigstens zu skizzieren, wie beim Problem mit festem Endpunkt[2] $x^1 = 0$ in Verallgemeinerung eines Satzes von Morse [2], S. 58, vgl. Birkhoff-Hestenes [1], S. 236, der Index als Brennpunktsanzahl auf e^0 zu gewinnen ist, erinnere ich an ein Hauptergebnis der Carathéodoryschen [3] Theorie der zweiten Variation, das ich folgendermassen formulieren will:

Die durch (14.1) gegebene feldartige Schar besitzt in $\langle t^0, t^1\rangle$ und, was ausdrücklich vorausgesetzt werden soll, in irgendeinem Teilintervall $\langle t^0, t_0\rangle$ mit $t_0 < t^1$ genau $q_* = q - s$ singuläre Extremalen $\begin{pmatrix} 0 \\ y^{(\varkappa)} \end{pmatrix}$, $\varkappa = 1, \ldots, q_*$, vgl. Nr. **3**. Wir nehmen eine Basis der feldartigen Schar bestehend aus diesen singulären Extremalen und weiteren $n - q + s$ linear unabhängigen »normalen» Extremalen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $\int\limits_{t^0}^{t_0} y y^{(\varkappa)} dt = 0$. Die Dimension der feldartigen Schar ist im x-Raum für alle Werte von t in $\langle t^0, t^1\rangle$ ausser in gewissen isolierten Punkten, den Brennpunkten der Schar, konstant und immer gleich $n - q + s$. Ein Brennpunkt t_* in $\langle t^0, t^1\rangle$ werde jetzt mit der Vielfachheit k_* gezählt, wenn die Schar im x-Raum für $t = t_*$ nur die Dimension $n - q + s - k_*$ statt $n - q + s$ besitzt. Es gibt dann k_* linear unabhängige *normale Nullösungen* des durch (14.1) und die Endbedingung $x_i(t_*) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, gegebenen Randwertproblems.

Seien nun die Brennpunkte der Schar (14.1) in (t^0, t^1) der Reihe nach t_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$, ihre Vielfachheiten k_ν mit der Summe $\Sigma k_\nu = S$. Die zu

---

[1] Vgl. Lichtenstein [5], S. 158 f.

[2] Bei allgemeinen Randbedingungen ist für Variationsprobleme ohne Nebenbedingungen der Zusammenhang zwischen dem Index und der Anzahl der zum Anfangspunkt konjugierten Punkte auf dem Extremalenbogen aufgestellt worden von Morse [2], S. 95, Birkhoff-Hestenes [1], S. 224; dort auch Hinweis auf ein entsprechendes Ergebnis von Morse bzgl. des (identisch normalen) Bolzaschen Problems. Der von Hestenes und von Reid, vgl. dessen Bericht [5], S. 653, in Aussicht gestellten diesbezüglichen Untersuchung sollte durch die sich im Rahmen der Lichtensteinschen Methode von selbst bietenden Überlegungen des Textes nicht vorgegriffen werden.

$\langle t^0, t_\nu \rangle$ gehörigen normalen Nullösungen mit $\int_{t^0}^{t_\nu} y y^{(\varkappa)} dt = 0$ setze ich in $\langle t_\nu, t^1 \rangle$ durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als zulässige Funktionen der Klasse D' fort und nenne alle so (für $\nu = 1, \ldots, N$) gewonnenen fortgesetzten Nullösungen insgesamt $\begin{pmatrix} \overset{1}{q} \ldots \overset{S}{q} \\ \overset{1}{p} \ldots \overset{S}{p} \end{pmatrix}$. Diese Funktionen sind ersichtlich linear unabhängig, auch wenn man die etwa vorhandenen zu $\langle t^0, t^1 \rangle$ gehörigen normalen Nullösungen hinzunimmt, ausserdem aber zueinander I-orthogonal, d. h. für irgend zwei solche Funktionen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$, deren Knick in t_0 bzw. $t_* \geqq t_0$ liegen möge, ist nach (1.3) die Polarform

$$
\begin{aligned}
(14.2) \qquad I\begin{pmatrix} x & q \\ y & p \end{pmatrix} &= \beta_{hk} u_h v_k + \int_{t^0}^{t_*} (c_{ij} y_i p_j - a_{ij} x_i q_j) dt \\
&= \beta_{hk} u_h v_k + [x_i p_i]_{t^0}^{t_*} = (\beta_{hk} v_k - \overset{0}{p}_i \overset{0}{\gamma}_{ih}) u_h = 0;
\end{aligned}
$$

insbesondere ergibt sich durch Identifikation für jede fortgesetzte Nullösung

$$
(14.3) \qquad I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,
$$

und dies gilt nunmehr auch für jede Linearkombination $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma c_\sigma q^\sigma \\ \Sigma c_\sigma p^\sigma \end{pmatrix}$. Wäre hier die Gliederzahl $S > n_1$, so könnte man eine zu sämtlichen $\varphi^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, n_1$, bez. (11.8) orthogonale nichttriviale Linearkombination bilden, die wegen (13.1), (14.3) im Koordinatenteil mit einer zum Eigenwert $\mu = 1$ des Intervalls $\langle t^0, t^1 \rangle$ gehörigen normalen Nullösung übereinstimmen müsste, was der bereits festgestellten linearen Unabhängigkeit widerspricht.

Dass auf der anderen Seite der Index $n_1 \leqq S$ sein muss, erkennt man durch eine Kontinuitätsbetrachtung: Denken wir uns ein variables Intervall $\langle t^0, t_* \rangle$ und dazu einen positiven normalen Eigenwert μ_* des focal boundary problem's, so ist $\mu_* \neq 0$ und hängt als Eigenwert einer Integralgleichung mit symmetrischem, von t_* stetig abhängigen Kern, die ich an anderer Stelle aufstellen werde, stetig von t_* ab; ein vielfacher Eigenwert kann sich dabei in mehrere einfachere aufspalten, die Summe der Multiplizitäten bleibt aber dabei ungeändert.

Für genügend kleines $t_* - t^0$ gehören zum Intervall $\langle t^0, t_* \rangle$ der Ausgangsextremalen $x = 0$, das ein Minimum liefert, keine positiven normalen Eigenwerte $\mu_* < 1$, vgl. Carathéodory [1], S. 215 und Nr. **13**.

Wächst t_* dann gegen t^1, so kann das Intervall $\langle t^0, t_* \rangle$ positive Eigenwerte < 1 (mit Rücksicht auf $\mu \neq 0$) nur so erhalten, dass der Eigenwert $\mu = 1$ ins Intervall $0 < \mu < 1$ hereinwandert; das kann nur geschehen, wenn t_* durch einen Brennpunkt t_ν (wachsend) hindurch geht, dann ist $\mu = 1$ ein k_ν-facher normaler Eigenwert von $\langle t^0, t_* \rangle$, von dem für $t_* > t_\nu$ höchstens k_ν Eigenwerte nach $0 < \mu < 1$ eindringen können.

Auf diese Weise findet man für den Index $n_1 \leqq \Sigma k_\nu = S$, was mit der bereits gewonnenen Ungleichheit $S \leqq n_1$ zusammengehalten das Resultat

$$n_1 = S \tag{14.4}$$

gibt: der Index ist gleich der (nach den Vielfachheiten gezählten) Anzahl der in (t^0, t^1) gelegenen Brennpunkte der feldartigen Schar (14.1). Ist $\mu = 1$ ein m_1-facher normaler Eigenwert des focal boundary problem's für $\langle t^0, t^1 \rangle$, so ist noch t^1 ein m_1-facher Brennpunkt der Schar (14.1).

15. Über die Abgeschlossenheit von $\hat{A} - B$.

Unter gewissen Voraussetzungen lässt sich die Abgeschlossenheit von $\hat{A} - B$ behaupten. Zunächst, ist $\hat{A} - B$ nicht abgeschlossen, so gibt es einen zum Eigenwert ∞ gehörigen Eigenvektor ${}^*l = ({}^*l_\nu)$ und daher die durch die (zu (12.2) analogen) gleichmässig konvergenten Reihen

$$\sum_\nu \frac{{}^*l_\nu}{\sqrt{\Delta^{(\nu)}}}\,\omega_i^{(\nu)}(t) = \overset{*}{\varphi}_i(t), \qquad \sum_\nu \frac{{}^*l_\nu}{\sqrt{\Delta^{(\nu)}}}\,w_h^{(\nu)} = \overset{*}{v}_h, \qquad \overset{*}{\varphi}_i(t^s) = \gamma_{ih}^s\,\overset{*}{v}_h, \tag{15.1}$$

gegebene stetige, nicht verschwindende Funktion nebst Randparametern, die der Beziehung genügen:

$$0 = \int {}^\circ G_{ik}\,\underline{\hat{a}}_{kj}\,\underline{\overset{*}{\varphi}}_j\,d\underline{t} - \beta_{hk}{}^\circ U_{hi}\overset{*}{v}_k. \tag{15.2}$$

Daraus folgt, wenn man die bilinearen Entwicklungen (11.1) einsetzt,

$$\int \omega_i^{(\nu)}\,\hat{a}_{ij}\,\overset{*}{\varphi}_j\,dt - \beta_{hk}\,w_h^{(\nu)}\overset{*}{v}_j = 0. \tag{15.3}$$

Es müsste dann insbesondere

$$\int \overset{*}{\varphi}_i \hat{a}_{ij} \overset{*}{\varphi}_j dt - \beta_{hk} \overset{*}{v}_h \overset{*}{v}_k = 0 \tag{15.4}$$

gelten. Wenn daher das Funktional

$$\int \varphi_i (a_{ij} - a_0 \delta_{ij}) \varphi_j dt - \beta_{hk} v_h v_k \tag{15.5}$$

(positiv) definit[1] ist (also insbesondere für genügend grosses $-a_0$), kann man die Abgeschlossenheit von $\hat{A} - B$ behaupten.

Aus (15.2) lässt sich noch eine Folgerung ziehen für den Fall, dass die Endform nicht vorhanden ist, $\beta_{hk} = 0$, und *jeder Teilbogen von* e^0 *normal* ist. Dann gilt nämlich die Vollständigkeitsrelation (9.1) für jede stetige Funktion $x(t)$, da sich diese, wie sich zeigen liesse, im Mittel beliebig genau durch Extremalpolygone, also zulässige Funktionen der Klasse D' approximieren lässt; der Kern G ist allgemein, eigentlich positiv definit und sicher abgeschlossen. Also müsste die nach (15.2) zum Eigenwert ∞ des Kerns ${}^0G$ gehörige Eigenfunktion $a_{ij} \overset{*}{\varphi}_j \equiv 0$ sein, mindestens in einem Teilintervall von $\langle t^0, t^1 \rangle$ somit $\det(a_{ij}) \equiv 0$. Kommt also zu den beiden eingangs gemachten Voraussetzungen noch $\det(a_{ij}) \not\equiv 0$ in jedem Teilintervall von (t^0, t^1), so ist $A(X, X)$ abgeschlossen.

In besonderen Fällen, z. B. bei Variationsproblemen mit höheren Ableitungen, die normal sind, kann man die Abgeschlossenheit schon behaupten, wenn nur eine gewisse Unterdeterminante der Matrix (a_{ij}) in keinem Intervall identisch verschwindet.

Im Fall der Abgeschlossenheit lauten die Formeln (10.14), (13.1)

$$\int (c_{ij} y_i y_j - a_0 x_i^2) dt = \sum_\alpha |\mu^{(\alpha)}| \left(\int (a_{ij} - a_0 \delta_{ij}) x_i \varphi_j^{(\alpha)} dt - \beta_{hk} u_h v_k^{(\alpha)} \right)^2; \tag{15.6}$$

$$I = \sum_\alpha (|\mu^{(\alpha)}| - \operatorname{sig} \mu^{(\alpha)}) \left(\int (a_{ij} - a_0 \delta_{ij}) x_i \varphi_j^{(\alpha)} dt - \beta_{hk} u_h v_k^{(\alpha)} \right)^2. \tag{15.7}$$

16. Neue Entwicklungssätze.

Aus (10.14), (12.1) ergibt sich durch Polarisation mit der zulässigen Funktion $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ der Klasse D', zu welcher der Koeffizientenvektor Y gehöre, die Beziehung

[1] Vgl. Morse [2], S. 31, 32.

$$\begin{aligned}(16.1)\quad \int (c_{ij} y_i p_j - a_0 x_i q_i)\, dt = \sum_\alpha |\mu^{(\alpha)}| \Big(\int (a_{ij} - a_0 \delta_{ij}) x_i \varphi_j^{(\alpha)}\, dt - \beta_{hk} u_h v_k^{(\alpha)} \Big) \\ \cdot \Big(\int (a_{ij} - a_0 \delta_{ij}) q_i \varphi_j^{(\alpha)}\, dt - \beta_{hk} v_h v_k^{(\alpha)} \Big) + \sum_\alpha ({}^*l^{(\alpha)} X)({}^*l^{(\alpha)} Y).\end{aligned}$$

Hierin $\begin{pmatrix} q_l \\ p_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^\circ G_{il} \\ {}^\circ I_{il} \end{pmatrix}$ eingesetzt, liefern die Formeln (1.3) und (11.2) für jede zulässige Funktion $x(t)$ der Klasse D' die (übrigens gleichmässig) konvergente Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}(16.2)\quad x_i(t) = \sum_\alpha \operatorname{sig} \mu^{(\alpha)} \Big(\int (a_{lj} - a_0 \delta_{lj}) x_l \varphi_j^{(\alpha)}\, dt - \beta_{hk} u_h v_k^{(\alpha)} \Big) \varphi_i^{(\alpha)}(t) + \\ + \sum_\alpha ({}^*l^{(\alpha)} X) \overset{*}{\varphi}{}_i^{(\alpha)}(t).\end{aligned}$$

Insbesondere kommt für $x_i(t) = {}^\circ G_{ij}(t, \underline{t})$ die bilineare Formel

$$\begin{aligned}(16.3)\quad {}^\circ G_{ij}(t, \underline{t}) &= \sum_\alpha \frac{\varphi_i^{(\alpha)}(t) \varphi_j^{(\alpha)}(\underline{t})}{|\mu^{(\alpha)}|} + \sum_\alpha \overset{*}{\varphi}{}_i^{(\alpha)}(t) \overset{*}{\varphi}{}_j^{(\alpha)}(\underline{t}), \\ {}^\circ U_{hk} &= \sum_\alpha \frac{v_h^{(\alpha)} v_k^{(\alpha)}}{|\mu^{(\alpha)}|} + \sum_\alpha \overset{*}{v}{}_h^{(\alpha)} \overset{*}{v}{}_k^{(\alpha)}.\end{aligned}$$

Im Fall der Abgeschlossenheit von $\hat{A} - B$ sind in (16.2) und (16.3) die Zusatzglieder mit den Funktionen $\overset{*}{\varphi}{}^{(\alpha)}$ nicht vorhanden, und wir bekommen Fourierreihe und bilineare Formel in der üblichen Gestalt.

17. Ein weiteres Eigenwertproblem.

Ich setze jetzt voraus, dass für das System

$$(17.1)\quad \begin{aligned} &L_i(x, y) = 0 && x_i^0 = \gamma_{ih}^0 u_h, \quad x_i^1 = \gamma_{ih}^1 u_h \\ &R_i^0(x, y) + a_0 x_i + \mu(a_{ij} + (a_1 - a_0)\delta_{ij}) x_j = 0, && y_i^0 \gamma_{ih}^0 - y_i^1 \gamma_{ih}^1 = \mu \beta_{hk} u_k \end{aligned}$$

der kleinste positive normale Eigenwert $\mu^{(1)} > 1$ ist. Wenn das für $a_1 = 0$, d. h. für das System (11.4) nicht der Fall sein sollte, kann man es für das neue System, in dem a_{ij} durch $a_{ij} + a_1 \delta_{ij}$ ersetzt ist, durch geeignete Wahl der Konstanten a_1 stets erreichen. Ist bei beliebigem, aber festgehaltenen $a_0 < 0$ (bzw. $a_0 = 0$, falls $\lambda = 0$ nicht normaler Eigenwert ist) beispielsweise $-a_1 > 0$ genügend gross, so sind mit Rücksicht auf die Formel (11.7), in der anstelle von $\hat{a}_{ij} = a_{ij} - a_0\delta_{ij}$ jetzt $\check{a}_{ij} = a_{ij} + (a_1 - a_0)\delta_{ij}$ zu treten hat, bei (17.1) sicher alle normalen Eigenwerte $\mu < 0$.

Unser Ziel ist das Studium des Eigenwertproblems

$$(17.2)\quad \begin{array}{ll} L_i(x, y) = 0 & x_i^0 = \gamma_{ik}^0 u_k, \quad x_i^1 = \gamma_{ik}^1 u_k \\ R_i(x, y) + a_1 x_i + \tau(k_{ij} - a_1\delta_{ij})x_j = 0, & y_i^0\gamma_{ih}^0 - y_i^1\gamma_{ih}^1 = \beta_{hk}u_k, \end{array}$$

wo die Koeffizientenmatrix $k_{ij} = k_{ji}$ stetig in $\langle t^0, t^1\rangle$ vorausgesetzt ist.

Die Fundamentalformel (13.1) für die zweite Variation ist jetzt mit $a_{ij} + a_1\delta_{ij}$ statt a_{ij} und für ein $\mu\begin{Bmatrix} > 1 \\ < 0 \end{Bmatrix}$ mit $|\mu| - \operatorname{sig}\mu = \begin{Bmatrix} \mu - 1 \\ 1 - \mu \end{Bmatrix} = |\mu - 1|$ und mit dem abgeschlossenen System der Eigenformen hinzuschreiben, da wir die jetzt in Frage kommende Form $\check{A} - B$ nicht als abgeschlossen voraussetzen wollen (obwohl wir das durch genügend grosse Wahl von $-a_0 > 0$ erreichen könnten):

$$(17.3)\quad \begin{aligned} I &= \beta_{hk}u_h u_k + \int (c_{ij}y_i y_j - a_{ij}x_i x_j - a_1 x_i^2)\,dt \\ &= \sum_\alpha |\mu^{(\alpha)} - 1| \left(\int \check{a}_{ij}x_i\varphi_j^{(\alpha)}\,dt - \beta_{hk}u_h v_k^{(\alpha)}\right)^2 + \sum_\alpha ({}^*l^{(\alpha)}X)^2 = \sum_\nu \mathfrak{X}^{(\nu)2} = (\mathfrak{X}\mathfrak{X}). \end{aligned}$$

Dabei ist, einfach durchnumeriert

$$(17.4)\quad \begin{gathered} \mathfrak{X}^{(\nu)} = \begin{cases} \operatorname{sig}\mu^{(\alpha)}\sqrt{|\mu^{(\alpha)} - 1|}\left(\int \check{a}_{ij}x_i\varphi_j^{(\alpha)}\,dt - \beta_{hk}u_h v_k^{(\alpha)}\right), \\ ({}^*l^{(\alpha)}X) \end{cases} \\ \bar{\varphi}_i^{(\nu)} = \begin{cases} \varphi_i^{(\alpha)}/\sqrt{|\mu^{(\alpha)} - 1|}, \\ \overset{*}{\varphi}{}_i^{(\alpha)} \end{cases} \qquad \bar{v}_h^{(\nu)} = \begin{cases} v_h^{(\alpha)}/\sqrt{|\mu^{(\alpha)} - 1|} \\ \overset{*}{v}{}_h^{(\alpha)} \end{cases} \end{gathered}$$

gesetzt, und es gilt für jede zulässige Funktion der Klasse D' nach (16.2)

$$(17.5)\quad x_i(t) = \sum_\nu \mathfrak{X}^{(\nu)}\bar{\varphi}_i^{(\nu)}(t).$$

Ich betrachte nun die durch Einsetzen dieser Reihe entstehende quadratische Form

$$(17.6)\quad \int (k_{ij} - a_1\delta_{ij})x_i x_j\,dt = Q(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}) = \sum_\mu\sum_\nu \left(\int (k_{ij} - a_1\delta_{ij})\bar{\varphi}_i^{(\mu)}\bar{\varphi}_j^{(\nu)}\,dt\right)\mathfrak{X}^{(\mu)}\mathfrak{X}^{(\nu)}.$$

$Q(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ ist *vollstetig*. Es gilt ja, $k_{ij} - a_1 \delta_{ij} = \underset{1}{k}_{ij}$, $\underset{1}{k} = \sqrt{\sum_i \sum_j \underset{1}{k}_{ij}^2}$ gesetzt,

$$\left| \sum_j \sum_i \underset{1}{k}_{ij} \bar{\varphi}_i^{(\mu)} \bar{\varphi}_j^{(\nu)} \right| \leqq \sqrt{\sum_j \sum_i \underset{1}{k}_{ij}^2} \sqrt{\sum_i \bar{\varphi}_i^{(\mu)2}} \sqrt{\sum_j \bar{\varphi}_j^{(\nu)2}} = \underset{1}{k} \cdot \sqrt{\sum_i} \sqrt{\sum_j},$$

$$(17.7) \quad \left(\int \sum_j \sum_i \underset{1}{k}_{ij} \bar{\varphi}_i^{(\mu)} \bar{\varphi}_j^{(\nu)} dt \right)^2 \leqq \left(\int | \quad | dt \right)^2 \leqq \left(\operatorname{Max} \underset{1}{k} \cdot \int \sqrt{\sum_i} \sqrt{\sum_j} dt \right)^2 \leqq$$

$$\leqq \operatorname{Max} \underset{1}{k}^2 \cdot \int \sum_i dt \int \sum_j dt.$$

Daraus folgt für die Doppelsumme der Koeffizientenquadrate des N^{ten} Abschnitts von Q

$$(17.8) \quad \begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{N} \left(\int \underset{1}{k}_{ij} \bar{\varphi}_i^{(\mu)} \bar{\varphi}_j^{(\nu)} dt \right)^2 &\leqq \operatorname{Max} \underset{1}{k}^2 \cdot \int \sum_i \sum_{\mu=1}^{N} \bar{\varphi}_i^{(\mu)2} dt \int \sum_j \sum_{\nu=1}^{N} \bar{\varphi}_j^{(\nu)2} dt \\ &\leqq \operatorname{Max} \underset{1}{k}^2 \cdot \left(\int \sum_i \mathfrak{G}_{ii}(t, t) dt \right)^2, \end{aligned}$$

letzteres wegen (17.20). Die Doppelsumme ist also, übrigens bereits wegen (16.3), beschränkt, was für die Vollstetigkeit von Q hinreicht.

Die vollstetige quadratische Form $Q(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$, die wir als nicht identisch verschwindend voraussetzen, kann durch eine orthogonale Transformation auf die Diagonalgestalt gebracht werden

$$(17.9) \qquad \int (k_{ij} - a_1 \delta_{ij}) x_i x_j \, dt = Q(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}) = \sum_\alpha \frac{1}{\tau^{(\alpha)}} (\mathfrak{l}^{(\alpha)} \mathfrak{X})^2.$$

Dabei gehen reellen reziproken Eigenwerte $\frac{1}{\tau^{(\alpha)}} \to 0$. Die Eigenformen

$$(17.10) \qquad (\mathfrak{l}^{(\alpha)} \mathfrak{X}) = \sum_\nu \mathfrak{l}_\nu^{(\alpha)} \mathfrak{X}^{(\nu)}$$

sind beschränkte Linearformen, besitzen also konvergente Koeffizientenquadratsumme ($= 1$) und sind zueinander orthogonal

$$(17.11) \qquad (\mathfrak{l}^{(\alpha)} \mathfrak{l}^{(\beta)}) = \sum_\varrho \mathfrak{l}_\varrho^{(\alpha)} \mathfrak{l}_\varrho^{(\beta)} = \delta^{\alpha\beta}.$$

Polarisieren wir (17.9) mit einem Vektor $\mathfrak{Y}$ des Hilbertschen Raumes und spezialisieren $\mathfrak{Y} = \sqrt{|\tau^{(\alpha)}|}\mathfrak{l}^{(\alpha)}$ und führen wir die wegen (16.3) nach der Schwarzschen Ungleichheit unbedingt und gleichmässig konvergenten Reihen

$$\sqrt{|\tau^{(\alpha)}|} \sum_{\sigma} \mathfrak{l}_\sigma^{(\alpha)} \bar{\varphi}_i^{(\sigma)}(t) = \Phi_i^{(\alpha)}(t), \quad \sqrt{|\tau^{(\alpha)}|} \sum_{\sigma} \mathfrak{l}_\sigma^{(\alpha)} \bar{v}_h^{(\sigma)} = \mathfrak{v}_h^{(\alpha)}, \tag{17.12}$$

ein, wobei

$$\Phi_i^{(\alpha)}(t^s) = \gamma_{ih}^s \mathfrak{v}_h^{(\alpha)} \tag{17.13}$$

gilt, so kommt

$$\int (k_{ij} - a_1 \delta_{ij}) x_i \Phi_j^{(\alpha)} dt = \frac{\sqrt{|\tau^{(\alpha)}|}}{\tau^{(\alpha)}} (\mathfrak{l}^{(\alpha)} \mathfrak{X}), \tag{17.14}$$

also insbesondere

$$\int (k_{ij} - a_1 \delta_{ij}) \Phi_i^{(\alpha)} \Phi_j^{(\beta)} dt = \operatorname{sig} \tau^{(\alpha)} \cdot \delta^{\alpha\beta}. \tag{17.15}$$

Daher ist

$$\int (k_{ij} - a_1 \delta_{ij}) x_i x_j dt = Q(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}) = \sum_\alpha \operatorname{sig} \tau^{(\alpha)} \left(\int (k_{ij} - a_1 \delta_{ij}) x_i \Phi_j^{(\alpha)} dt \right)^2 \tag{17.16}$$

und

$$\begin{aligned} \beta_{hk} u_h u_k + \int (c_{ij} y_i y_j - a_{ij} x_i x_j - a_1 x_i^2)\, dt &= (\mathfrak{X}\mathfrak{X}) \\ &\geqq \sum_\alpha (\mathfrak{l}^{(\alpha)} \mathfrak{X})^2 = \sum_\alpha |\tau^{(\alpha)}| \left(\int (k_{ij} - a_1 \delta_{ij}) x_i \Phi_j^{(\alpha)} dt \right)^2, \end{aligned} \tag{17.17}$$

mit dem Gleichheitszeichen, falls die Form $Q(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ abgeschlossen ist, also insbesondere falls $-a_1$ genügend gross ist.

Für das System (17.1) lässt sich zum Parameterwert $\mu = 1$, der nicht normaler Eigenwert sein soll, nach Nr. **4** der erweiterte normale Greensche Tensor $\begin{pmatrix} \mathfrak{G} & \mathfrak{H} \\ \mathfrak{J} & \mathfrak{K} \end{pmatrix}$ konstruieren. Die Fourierkoeffizienten der zulässigen Funktion $\begin{pmatrix} \mathfrak{G} \\ \mathfrak{J} \end{pmatrix}$ nach den $\varphi^{(\alpha)}$ berechnen sich, wenn man in (17.1) statt μ, $1 + (\mu - 1)$ schreibt, dann kommt für $\varphi = \varphi^{(\alpha)}$, $v = v^{(\alpha)}$, $\mu = \mu^{(\alpha)}$

$$\varphi_i = (\mu - 1) \left\{ \int \mathfrak{G}_{il} \check{a}_{lj} \varphi_j dt - \beta_{hk} \mathfrak{U}_{hi} v_k \right\}, \tag{17.18}$$

bei sinngemässer Übertragung aller Bezeichnungen aus Nr. **5** auf den neuen Tensor. Die Koeffizienten von $\underline{\overset{*}{\varphi}}^{(\alpha)}$ berechnen sich aus (12.5) mit demselben Sprungzusatzglied wie bei $°G_{ij}(t, \underline{t})$, also

$$(17.19)\qquad ({}^*l^{(\alpha)}X) = \overset{*}{\varphi}_i^{(\alpha)} + \int \underline{\overset{*}{\varphi}}_l^{(\alpha)} \check{a}_{lj} \mathfrak{G}_{ij}(t, \underline{t})\, d\underline{t} - \beta_{hk} \mathfrak{U}_{hi} \overset{*}{v}_k^{(\alpha)} = \overset{*}{\varphi}_i^{(\alpha)},$$

da $\mathfrak{G}_{ij}$, $\mathfrak{U}_{hi}$ nach $\underline{\omega}_j^{(\nu)}$, $w_h^{(\nu)}$ entwickelbar sind und dann (15.3) mit $\check{a}_{ij}$ statt $\hat{a}_{ij}$ in Kraft tritt. Somit ergibt sich, da unter unseren Voraussetzungen $\frac{\operatorname{sig} \mu}{\mu - 1} = \frac{1}{|\mu - 1|}$ gilt, die Fourierreihe

$$(17.20)\qquad \mathfrak{G}_{ij} = \sum_\alpha \frac{\varphi_i^{(\alpha)} \underline{\varphi}_j^{(\alpha)}}{|\mu^{(\alpha)} - 1|} + \sum_\alpha \overset{*}{\varphi}_i^{(\alpha)} \underline{\overset{*}{\varphi}}_j^{(\alpha)} = \sum_\nu \bar{\varphi}_i^{(\nu)} \underline{\bar{\varphi}}_j^{(\nu)}$$

eine unbedingt und gleichmässig konvergente bilineare Entwicklung. Wird $\binom{\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}}$ in (17.14) eingesetzt, so ergibt sich daraus für $\Phi = \Phi^{(\alpha)}$, $\tau = \tau^{(\alpha)}$ die Integralgleichung

$$(17.21)\qquad \Phi_i = \tau \int \mathfrak{G}_{il}(\underline{k}_{lj} - a_1 \delta_{lj}) \underline{\Phi}_j\, d\underline{t}.$$

$$(17.22)\qquad X_i = \tau \int \mathfrak{J}_{il}(\underline{k}_{lj} - a_1 \delta_{lj}) \underline{\Phi}_j\, d\underline{t}$$

als Impuls $X = X^{(\alpha)}$ daneben gestellt, gilt für $\binom{\Phi}{X} = \binom{\Phi^{(\alpha)}}{X^{(\alpha)}}$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}^{(\alpha)}$, $\tau = \tau^{(\alpha)}$ das Differentialgleichungssystem (17.2), also

$$(17.23)\qquad \begin{aligned} &L_i(\Phi, X) = 0 && \Phi_i(t^s) = \gamma_{ih}^s \mathfrak{v}_h = \gamma_{ih}^s \int \mathfrak{U}_{hl}(k_{lj} - a_1 \delta_{lj}) \Phi_j\, dt \\ &R_i(\Phi, X) + a_1 \Phi_i + \tau(k_{ij} - a_1 \delta_{ij}) \Phi_j = 0, && X_i(t^0) \gamma_{ih}^0 - X_i(t^1) \gamma_{ih}^1 = \beta_{hk} \mathfrak{v}_k \end{aligned}$$

sowie die Orthogonalitätsbeziehung

$$(17.24)\qquad \int y^{(\varkappa)} X\, dt = 0.$$

Die durch (17.12), (17.22) gegebenen Funktionen $\binom{\Phi^{(\alpha)}}{X^{(\alpha)}}$ sind also normale Eigenfunktionen von (17.2) und zwar, wie man analog zu von Nr. **11** erkennt, die sämtlichen.

Endlich ergibt sich nach (17.17), (17.16)

$$\beta_{hk}u_h u_k + \int (c_{ij}y_iy_j - a_{ij}x_ix_j - k_{ij}x_ix_j)\,dt = (\mathfrak{X}\mathfrak{X}) - Q(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$$
$$(17.25)\qquad \geqq \sum_\alpha (|\tau^{(\alpha)}| - \operatorname{sig}\tau^{(\alpha)})\left(\int (k_{ij} - a_1\delta_{ij})x_i\Phi_j^{(\alpha)}\,dt\right)^2.$$

18. Fourierentwicklung.

Ist Q abgeschlossen (etwa bei genügend grossem $-a_1 > 0$), so folgt aus (17.17), d. h.

$$\beta_{hk}u_hu_k + \int (c_{ij}y_iy_j - a_{ij}x_ix_j - a_1x_i^2)\,dt =$$
$$(18.1)\qquad = \sum_\alpha |\tau^{(\alpha)}|\left(\int (k_{ij} - a_1\delta_{ij})x_i\Phi_j^{(\alpha)}\,dt\right)^2$$

bei Polarisation $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $u \Big| \begin{pmatrix}q\\p\end{pmatrix}$, v und nachfolgender Substitution $\begin{pmatrix}q_l\\p_l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{G}_{il}\\\mathfrak{J}_{il}\end{pmatrix}$ wegen (1.3) und (17.21) für jede zulässige Funktion $x(t)$ der Klasse D' die gleichmässig konvergente Fourierentwicklung

$$(18.2)\qquad x_i(t) = \sum_\alpha \operatorname{sig}\tau^{(\alpha)}\left(\int (k_{lj} - a_1\delta_{lj})\,x_l\Phi_j^{(\alpha)}\,dt\right)\Phi_i^{(\alpha)}(t).$$

Insbesondere kommt für $x_i(t) = \mathfrak{G}_{ij}(t, \underline{t})$ die bilineare Formel

$$(18.3)\qquad \mathfrak{G}_{ij}(t, \underline{t}) = \sum_\alpha \frac{\Phi_i^{(\alpha)}(t)\,\Phi_j^{(\alpha)}(\underline{t})}{|\tau^{(\alpha)}|}.$$

Falls Q nicht abgeschlossen sein sollte, wären die Formeln durch ähnliche Zusatzreihen zu ergänzen wie in Nr. **16**.

19. Das akzessorische Eigenwertproblem als einfachster Spezialfall.

Für den Fall, dass $k_{ij} \equiv 0$ ist, vereinfacht sich die Differentialgleichung (17.23) bei passendem $a_1 < 0$ zu

$$(19.1)\qquad \begin{aligned} &L_i(\Phi^{(\alpha)}, X^{(\alpha)}) = 0\\ &R_i(\Phi^{(\alpha)}, X^{(\alpha)}) - a_1(\tau^{(\alpha)} - 1)\Phi_i^{(\alpha)} = 0\end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$-a_1(\tau^{(\alpha)}-1)=\sigma^{(\alpha)} \tag{19.2}$$

setzen,

$$R_i(\Phi^{(\alpha)},\ X^{(\alpha)})+\sigma^{(\alpha)}\Phi_i^{(\alpha)}=0. \tag{19.3}$$

Die Differentialgleichungen $(19.1)_1$, (19.3) sowie die End- und Transversalitätsbedingungen von (17.2) bilden zusammen das akzessorische Eigenwertproblem von Morse [1], S. 523. Die Formel (17.25) wird, wenn noch

$$\bar{\Phi}^{(\alpha)}=\sqrt{-a_1}\,\Phi^{(\alpha)},\quad \bar{X}^{(\alpha)}=\sqrt{-a_1}\,X^{(\alpha)},\quad \left(\int \bar{\Phi}^{(\alpha)}\bar{\Phi}^{(\beta)}\,dt=\delta^{\alpha\beta}\right) \tag{19.4}$$

gesetzt und $\tau^{(\alpha)}>0$ sowie die Abgeschlossenheit von Q beachtet wird,

$$I=\beta_{hk}u_hu_k+\int(c_{ij}y_iy_j-a_{ij}x_ix_j)\,dt=\sum_\alpha \sigma^{(\alpha)}\left(\int x_i\bar{\Phi}_i^{(\alpha)}dt\right)^2. \tag{19.5}$$

Die Fourierentwicklung lautet jetzt einfach

$$x_l(t)=\sum_\alpha\left(\int x_i\bar{\Phi}_i^{(\alpha)}dt\right)\cdot\bar{\Phi}_l^{(\alpha)}(t). \tag{19.6}$$

Im *Fall fester Endpunkte* habe ich [2] schon vor einiger Zeit die zweite Variation auf die Form (19.5) gebracht. An die Ausführungen meiner früheren Arbeit [3] könnte man leicht einen Beweis für (19.5) anschliessen, indem man von einem System

$$\begin{aligned} &L_i(x,\ y)=0 && x_i(t^0)=x_i(t^1)=0\\ &R_i(x,\ y)+\sigma_0x_i+(\sigma-\sigma_0)x_i=0 && (-\sigma_0>0 \text{ genügend gross}) \end{aligned} \tag{19.7}$$

ausgeht, das für $(\sigma-\sigma_0)=0$ der Jacobischen Bedingung genügt, **14**, und mittels Legendrescher Transformation (vgl. die Darstellung von Radon [2], S. 288 f.) zu einem vereinfachten kanonischen System im Sinne von **3** übergeht, nach dessen (im Koordinatenteil bei der Transformation ungeänderten) Eigenfunktionen ich früheren Ergebnissen zufolge, vgl. [3], Nr. **9**, die zweite Variation I entwickeln kann.

Für die nach ihrer Grösse geordneten, entsprechend ihrer Vielfachheit aufgeführten Eigenwerte $\sigma^{(1)}\leqq\sigma^{(2)}\leqq\cdots$ von $(19.1)_1$, (19.3) ist nach (19.5) die isoperimetrische Minimumseigenschaft evident: $\sigma^{(\nu)}$ ist das Minimum von I unter den Nebenbedingungen

(19.8)
$$\int x\bar{\Phi}^{(1)}dt = 0, \ldots, \int x\bar{\Phi}^{(\nu-1)}dt = 0; \quad \int x^2 dt = 1.$$

Sind insbesondere $\sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(n_0)}$ die negativen Eigenwerte, so liefert der Ausgangsextremalenbogen $x = 0$, $t^0 \leqq t \leqq t^1$ ein *Minimum* von I im Vergleich zu allen zulässigen Kurven der Klasse D', welche den Orthogonalitätsrelationen

(19.9)
$$\int \bar{\Phi}^{(1)}x\,dt = 0, \ldots, \int \bar{\Phi}^{(n_0)}x\,dt = 0$$

genügen. Da nach (19.5) die mit $\begin{pmatrix}\bar{\Phi}^{(\alpha)}\\ \bar{X}^{(\alpha)}\end{pmatrix}$ polarisierte zweite Variation

(19.10)
$$I(\bar{\Phi}^{(\alpha)}, x) = \sigma^{(\alpha)}\int \bar{\Phi}^{(\alpha)}x\,dt$$

ist, sind (19.9) ein eigentlicher Minimalsatz von natürlichen isoperimetrischen Nebenbedingungen, sie besagen

(19.11)
$$I(\bar{\Phi}^{(1)}, x) = 0, \ldots, I(\bar{\Phi}^{(n_0)}, x) = 0,$$

ihr Erfülltsein zieht $I \geqq 0$ nach sich, und es ist die für eine lineare Kombination $\begin{pmatrix}\Sigma c_\nu \bar{\Phi}^{(\nu)}\\ \Sigma c_\nu \bar{X}^{(\nu)}\end{pmatrix}$, zu summieren über $\nu = 1, \ldots, n_0$, gebildete zweite Variation

(19.12)
$$I(\Sigma c_\nu \bar{\Phi}^{(\nu)}) = \sum_{\nu=1}^{n_0} \sigma^{(\nu)} c_\nu^2 < 0 \text{ für } (c) \neq (0),$$

eine negativ definite Form in den $c_1, \ldots, c_{n_0}$.

Wie schon in **13** erwähnt, ist die Gliederzahl für jeden solchen eigentlichen Minimalsatz die gleiche, also insbesondere $n_0 = n_1$, vgl. Birkhoff-Hestenes [1], S. 205. Wäre nämlich etwa $n_0 > n_1$, so könnte die eben betrachtete lineare Kombination mit $(c_\nu) \neq (0)$ so gewählt werden, dass alle früheren Bedingungen

(19.13)
$$I\left(\varphi^{(\alpha)}, \sum_{\nu=1}^{n_0} c_\nu \bar{\Phi}^{(\nu)}\right) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n_1$$

erfüllt sind. Nach (13.4) müsste dann $I(\Sigma c_\nu \bar{\Phi}^{(\nu)}) \geqq 0$ ausfallen, im Widerspruch zu (19.12). Analog wird $n_1 > n_0$ ausgeschlossen. Das oben nach Lichtenstein betrachtete Jacobische und das akzessorische Eigenwertproblem führen beide auf *den* Index des Ausgangsextremalenbogens.

Leipzig, den 8. Januar 1938.