FLÄCHENPROBLEME DER VARIATIONSRECHNUNG BEI FESTER UND VARIABLER BEGRENZUNG UND FÜR GESCHLOSSENE FLÄCHEN.

VON

MICHAEL KERNER

in WARSCHAU.

Dem Andenken von Leo Lichtenstein gewidmet.

1. Einleitung.

A. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Analogon der Jacobischen Bedingung für zweidimensionale Variationsprobleme in Parameterdarstellung. Drei Probleme sind unten behandelt. Erstens, das Problem des Extremums eines Flächenintegrals über ein Flächenstück, dessen Rand von vornherein gegeben ist. Zweitens, dasselbe Problem für ein Flächenstück, dessen Rand auf einer gegebenen Fläche zu liegen gezwungen ist. Drittens, das Problem des Extremums eines Flächenintegrals über eine geschlossene Fläche.

Wir setzen in allen Problemen voraus, dass die Bedingungen von Euler, Legendre und Weierstrass, beziehungsweise ihre Analoga erfüllt sind. Dann beweisen wir, dass die Jacobische Bedingung eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhanden des Extremums ist. Man muss natürlich die hinreichende Bedingung in der starken, die notwendige dagegen in der schwachen Form fassen.

Es soll noch erläutert werden, was wir unter der Jacobischen Bedingung verstehen. Für jedes der drei Probleme bilden wir ein Problem, das wir *assoziiert* nennen, und das in dem Auflösen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung unter bestimmten Randbedingungen besteht. Für das Variationsproblem bei fester Begrenzung ist diese Randwertaufgabe von erster Art; bei varia-

1—38333. *Acta mathematica.* 70. Imprimé le 12 octobre 1938.

bler Begrenzung ist sie von dritter Art; endlich, für die geschlossenen Flächen haben wir mit einer partiellen Differentialgleichung über eine Kugelfläche zu tun. Die Differentialgleichung selbst ist mit der Theorie der zweiten Variation verknüpft, bildet eine Verallgemeinerung der Jacobischen Gleichung und enthält einen Parameter λ.

Dann besteht in allen drei Fällen das Analogon der starken (hinreichenden) Jacobischen Bedingung darin, dass *der kleinste positive Eigenwert des assozierten Problems grösser als eins ist.* Im Falle der schwachen (notwendigen) Bedingung soll er *nicht kleiner als eins* sein. In dieser Form wurde die Jacobische Bedingung für das gewöhnliche zweidimensionale Funktionenproblem mit einer unbekanten Funktion im Falle der festen und der freien Begrenzung von Lichtenstein[1] aufgestellt. Für die Parameterdarstellung, sowie für variable Begrenzung und für geschlossene Flächen scheint mir das gestellte Problem bisher nicht gelöst zu sein.

Wir betonen es, dass das eigentliche Ziel der Arbeit nur in der Betrachtung der zwei letzten aufgezählten Probleme besteht. Das Problem der festen Begrenzung ist nur der Vollständigkeit halber angebracht und wird daher ganz kurz gefasst.

B. Die Lösung der zwei letzten Probleme (variable Begrenzung und geschlossene Flächen) erforderte eine Eindringung in die Theorie des dritten Randwertproblems für partielle Differentialgleichungen. Wir stützen uns dabei auf die Ergebnisse von Lichtenstein.[2] Wir schlossen die darauf eingehenden Untersuchungen in einen besonderen Paragraphen 5 ein. Ausserdem waren wir gezwungen einige Betrachtungen über das Problem einer Differentialgleichung über die Kugelfläche hinzufügen, die wir in einen Absatz B des letzten Paragraphen 8 einschlossen.

C. Was die Methode betrifft, so stützen wir uns auf *die Beziehungen zwischen der Determinante einer Extremalenschar und den Krümmungseigenschaften der Transversalkurve, beziehungsweise der Transversalfläche dieser Schar.* Diese zwei Grundbeziehungen bilden den Gegenstand der Paragraphen 3 und 4. Sie sind Verallgemeinerungen der vom Verfasser aufgestellten analogen Beziehung auf der

---

[1] LICHTENSTEIN, Monatshefte für Mathematik und Physik 28 (1917), SS. 3—51. Auch Mathematische Zeitschrift 5 (1919), SS. 26—51.

[2] LICHTENSTEIN, Mathematische Zeitschrift 3 (1919), SS. 127—160.

Ebene.[1] In dieser Hinsicht bildet die vorliegende Arbeit ein neues Anwendungsfeld der Transversalenkrümmungsmethode.

D. Noch eine Bemerkung. Wir werden uns oft auf eine bereits erschienene Arbeit vom Verfasser[2] berufen. Diese Arbeit enthält drei Beiträge, welche die Vervollständigung der Weierstrassschen Theorie im Falle des Flächenintegrals verabsichtigten. Der erste Beitrag enthält den Beweis der Existenz eines Extremalenfeldes, wenn die Jacobische Gleichung eine nichtverschwindende Lösung hat. Der zweite Beitrag enthält den Beweis der Weierstrassschen Formel unter naturgemäss allgemeinen Voraussetzungen über die Vergleichsfläche. Der dritte Beitrag zeigt, dass die Weierstrasssche Bedingung, falls sie auf der abgeschlossenen Extremalfläche erfüllt ist, noch in einem die Extremalfläche umgebenden Felde gilt. Diese Arbeit werden wir nur mit dem Namen des Verfassers und der Nummer des Beitrags ohne weitere Einzelheiten zitieren.

2. Allgemeine Voraussetzungen und Bezeichnungen.

A. Es sei in dem dreidimensionalen Raum (x, y, z) ein Bereich $\mathcal{B}$ gegeben. Für alle dem Bereiche $\mathcal{B}$ gehörenden (x, y, z)-Werte und für alle solchen Werte der Veränderlichen x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v, dass die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right\| \tag{2. 1}$$

den Rang 2 hat, sei eine analytische reguläre Funktion

$$F(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v) \tag{2. 2}$$

erklärt.

Wir führen die Bezeichnung

$$\begin{aligned} l &= y_u z_v - z_u y_v, \\ m &= z_u x_v - x_u z_v, \\ n &= x_u y_v - y_u x_v \end{aligned} \tag{2. 3}$$

für die Determinanten der Matrix (2. 1) ein. Für die in Betracht kommenden Werte ist die Ungleichung

[1] ~~KERNER, Mathe~~matische Annalen 101 (1929), SS. 633—671.

[2] KERNER, Monatshefte für Mathematik und Physik 46 (1937), SS. 209—231.

$$l^2 + m^2 + n^2 > 0 \tag{2.4}$$

erfüllt. Wir setzen voraus, dass die Funktion (2. 2) von einer besonderen Art ist:

$$F(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v) = \mathfrak{F}(x, y\ z, l, m, n), \tag{2.5}$$

wo die Funktion $\mathfrak{F}$ für alle (x, y, z) des Bereiches $\mathcal{B}$ und für alle die Ungleichung (2. 4) erfüllenden Werte $l, m\ n$ analytisch regulär und ausserdem noch *positiv-homogen vom ersten Grade* ist.

Es sei in der (u, v)-Ebene ein Bereich gegeben, der von einer endlichen Zahl von geschlossenen Kurven der Klasse D' (glatten Kurven mit endlich vielen Knickpunkten) begrenzt ist. Dieser Bereich soll mittels der Funktionen

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \\ z &= z(u, v) \end{aligned} \tag{2.6}$$

in den Bereich $\mathcal{B}$ des (x, y, z)-Raumes abgebildet werden. Wir bekommen damit eine Fläche $\mathfrak{S}$ im Bereiche $\mathcal{B}$. Dabei setzen wir voraus, dass die Funktionen (2. 6) stetige Ableitungen

$$x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v \tag{2.7}$$

nach u, v besitzen, für welche die Matrix (2. 1) den Rang 2 hat.

Dann sind für die Werte (2. 6) und (2. 7) die Funktionen F und $\mathfrak{F}$ erklärt, und man kann für die Fläche $\mathfrak{S}$ das Integral

$$I(\mathfrak{S}) = \iint_{\mathfrak{S}} F(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v)\, d\,u\,d\,v \tag{2.8}$$

oder

$$I(\mathfrak{S}) = \iint_{\mathfrak{S}} \mathfrak{F}(x, y, z, l, m, n)\, d\,u\,d\,v \tag{2.9}$$

bilden. Aus unseren Voraussetzungen folgt es, dass dieses Integral nur von der Fläche $\mathfrak{S}$ abhängt und sich nicht ändert, wenn man eine zulässige Änderung der Parameter u, v ausübt.[1] Das rechtfertigt unsere Bezeichnung $I(\mathfrak{S})$, als ein Funktional der Fläche $\mathfrak{S}$.

Wir werden auch mit den Vergleichsflächen einer allgemeineren Art, als die

[1] Vgl. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung (1925), SS. 305—312.

oben beschriebene, zu tun haben. Doch soll für alle diese Flächen das Integral (2. 8) oder (2. 9) einen bestimmten Sinn haben. Wir gehen nicht auf die ausdrückliche Beschreibung dieser Flächen ein, weil dies ausserhalb unseres Betrachtungsfeldes liegt.[1] Dagegen werden alle Extremalflächen ausschliesslich analytisch sein.

Wir setzen voraus, dass

$$\mathfrak{F}(x, y, z, l, m, n) > 0 \tag{2. 10}$$

für alle (x, y, z) des Bereiches $\mathcal{B}$ und für alle die Ungleichung (2. 4) erfüllenden Werte l, m, n. Mit anderen Worten, ist das betreffende Variationsproblem *positiv definit.*

B. Aus der positiven Homogenität der Funktion $\mathfrak{F}(x, y, z, l, m, n)$ folgt die Existenz der Funktionen F_{11}, F_{12}, F_{22}, für welche die folgenden Beziehungen gelten[2]:

$$\begin{aligned}
&\frac{F_{x_u x_u}}{l^2} = \frac{F_{y_u y_u}}{m^2} = \frac{F_{z_u z_u}}{n^2} = \frac{F_{y_u z_u}}{mn} = \frac{F_{z_u x_u}}{nl} = \frac{F_{x_u y_u}}{lm} = F_{11},\\
&\frac{F_{x_u x_v}}{l^2} = \frac{F_{y_u y_v}}{m^2} = \frac{F_{z_u z_v}}{n^2} = \frac{F_{y_u z_v} + F_{z_u y_v}}{2\,mn} = \frac{F_{z_u x_v} + F_{x_u z_v}}{2\,nl} =\\
&\qquad\qquad\qquad = \frac{F_{x_u y_v} + F_{y_u x_v}}{2\,lm} = F_{12},\\
&\frac{F_{x_v x_v}}{l^2} = \frac{F_{y_v y_v}}{m^2} = \frac{F_{z_v z_v}}{n^2} = \frac{F_{y_v z_v}}{mn} = \frac{F_{z_v x_v}}{nl} = \frac{F_{x_v y_v}}{lm} = F_{22}.
\end{aligned} \tag{2. 11}$$

Aus der Gleichheit (2. 5) folgen unter Benutzung von (2. 3) und von der positiven Homogenität der Funktion $\mathfrak{F}$ die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
F_{y_u z_v} - F_{z_u y_v} &= 2\,\mathfrak{F}_l,\\
F_{z_u x_v} - F_{x_u z_v} &= 2\,\mathfrak{F}_m,\\
F_{x_u y_v} - F_{y_u x_v} &= 2\,\mathfrak{F}_n.
\end{aligned} \tag{2. 12}$$

Führt man diese Werte in die zweite der Formeln (2. 11) ein, so bekommt man

$$\begin{aligned}
F_{y_u z_v} - \mathfrak{F}_l &= F_{z_u y_v} + \mathfrak{F}_l = F_{12}\, m\, n,\\
F_{z_u x_v} - \mathfrak{F}_m &= F_{x_u z_v} + \mathfrak{F}_m = F_{12}\, n\, l,\\
F_{x_u y_v} - \mathfrak{F}_n &= F_{y_u x_v} + \mathfrak{F}_n = F_{12}\, l\, m.
\end{aligned} \tag{2. 13}$$

[1] Vgl. Kerner, Beitrag 2.

[2] Vgl. Forsyth, Calculus of variations (1927), S. 486.

Wir führen jetzt *die Eulerschen (Lagrangeschen) Gleichungen*

$$
\begin{aligned}
E_x &\equiv F_x - \frac{\partial}{\partial u} F_{x_u} - \frac{\partial}{\partial v} F_{x_v} = 0, \\
E_y &\equiv F_y - \frac{\partial}{\partial u} F_{y_u} - \frac{\partial}{\partial v} F_{y_v} = 0, \qquad (2.\ 14) \\
E_z &\equiv F_z - \frac{\partial}{\partial u} F_{z_u} - \frac{\partial}{\partial v} F_{z_v} = 0
\end{aligned}
$$

ein, und bemerken, dass sie identisch die Beziehungen

$$
E_x \equiv l\,E, \quad E_y \equiv m\,E, \quad E_z \equiv n\,E \qquad (2.\ 15)
$$

erfüllen, wo

$$
\begin{aligned}
E \equiv\ & F_{11}(l\,x_{uu} + m\,y_{uu} + n\,z_{uu}) + \\
&+ 2\,F_{12}(l\,x_{uv} + m\,y_{uv} + n\,z_{uv}) + \\
&+ F_{22}(l\,x_{vv} + m\,y_{vv} + n\,z_{vv}) - \\
&- (\mathfrak{F}_{xl} + \mathfrak{F}_{ym} + \mathfrak{F}_{zn}).
\end{aligned}
$$

Wir nennen auch die einzige Gleichung

$$
E = 0, \qquad (2.\ 16)
$$

die wegen der immer geltenden Ungleichung (2. 4) den Gleichungen (2. 15) äquivalent ist, die Eulersche Gleichung.

Eine Fläche $\mathfrak{S}$, die in jedem Punkte die Gleichungen (2. 14) oder (2. 16) erfüllt, nennen wir *Extremalfläche.* Wir werden, wie gesagt, nur mit *den analytischen Extremalflächen* zu tun haben.

Wir sagen, dass für die Extremalfläche $\mathfrak{S}$ *die (starke) Legendre-Brunaccische Bedingung* erfüllt ist, wenn in jedem Punkte von $\mathfrak{S}$ die quadratische Form

$$
F_{11}\,\alpha^2 + 2\,F_{12}\,\alpha\,\beta + F_{22}\,\beta^2
$$

der Variabeln α, β definit ist. Und zwar ist diese Bedingung mit dem Minimum verknüpft, wenn die Form positiv definit ist.

Für gegebene Extremalfläche $\mathfrak{S}$ führen wir *die Jacobischen Gleichungen* (die akzessorischen Gleichungen in bezug auf (2. 14))

$$
J_x \equiv \Omega_\xi - \frac{\partial}{\partial u}\Omega_{\xi_u} - \frac{\partial}{\partial v}\Omega_{\xi_v} = 0, \qquad (2.\ 17)
$$

$$J_y \equiv \Omega_\eta - \frac{\partial}{\partial u}\Omega_{\eta_u} - \frac{\partial}{\partial v}\Omega_{\eta_v} = 0, \tag{2. 17}$$

$$J_z \equiv \Omega_\zeta - \frac{\partial}{\partial u}\Omega_{\zeta_u} - \frac{\partial}{\partial v}\Omega_{\zeta_v} = 0$$

ein. Hier bedeutet

$$\Omega \equiv \Omega(\xi, \eta, \zeta, \xi_u, \eta_u, \zeta_u, \xi_v, \eta_v, \zeta_v)$$

eine quadratische Form ihrer Argumente, deren Koëffizienten von u, v analytisch abhängen. Auch gelten die Identitäten

$$J_x \equiv l\,J, \quad J_y \equiv m\,J, \quad J_z \equiv n\,J, \tag{2. 18}$$

wo l, m, n sich auf die Extremalfläche $\mathfrak{S}$ beziehen. Um J explizit zu schreiben, führen wir die einzige Veränderliche

$$\omega \equiv l\,\xi + m\,\eta + n\,\zeta \tag{2. 19}$$

ein. Dann ist J einem Differentialausdruck $J(\omega)$ von ω allein gleich. Die Gleichungen (2. 18) sind wegen (2. 4) der einzigen Jacobischen Gleichung

$$J(\omega) \equiv F_0\,\omega - \frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\,\omega_u + F_{12}\,\omega_v) - \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\,\omega_u + F_{22}\,\omega_v) = 0 \tag{2. 20}$$

äquivalent. Die Koëffizienten F_{11}, F_{12}, F_{22} sind durch (2. 11) gegeben; F_0 schreiben wir nicht explizit. Alle Koëffizienten sind analytische reguläre Funktionen von u, v.

Endlich wird die Weierstrasssche Funktion

$$\mathcal{E}(x, y, z, l, m, n, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}) \equiv \tilde{\mathfrak{F}} - \tilde{l}\,\mathfrak{F}_l - \tilde{m}\,\mathfrak{F}_m - \tilde{n}\,\mathfrak{F}_n$$

benutzt, wo $\tilde{\mathfrak{F}}$ für $\mathfrak{F}(x, y, z, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n})$ und $\mathfrak{F}_l$ für $\mathfrak{F}_l(x, y, z, l, m, n)$ steht. Wir sagen, dass für die Extremalfläche $\mathfrak{S}$ *die (starke) Weierstrasssche Bedingung* für das Minimum erfüllt ist, wenn für jede sich auf $\mathfrak{S}$ beziehenden Werte x, y, z, l, m, n und für alle Werte $\tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}$ die Ungleichung

$$\mathcal{E}(x, y, z, l, m, n, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}) \geqq 0$$

erfüllt ist, wobei das Gleichheitszeichen nur für ordentliches Verschwinden von $\mathcal{E}$, das heisst für zu l, m, n proportionale Werte von $\tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}$, statt findet.

3. Krümmung der Transversalkurve.

A. Es sei eine analytische Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ durch die Gleichungen

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} x &= x(u,\ v),\\ y &= y(u,\ v),\\ z &= z(u,\ v) \end{aligned}$$

gegeben. Durch einen bestimmten Punkt P der Fläche $\mathfrak{S}_0$, dem die Parameterwerte u, v entsprechen, soll eine analytische Kurve $\mathfrak{D}$ geführt werden, welche die Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ im Punkte P *transversal* schneidet.

Durch die Punkte von $\mathfrak{D}$, die in der Umgebung von P liegen, führen wir die Extremalflächen $\mathfrak{S}_a$, die von $\mathfrak{D}$ auch transversal geschnitten werden. Wir erhalten damit eine Extremalenschar $\mathfrak{S}_a$, die durch die Gleichungen

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} x &= x(u,\ v,\ a),\\ y &= y(u,\ v,\ a),\\ z &= z(u,\ v,\ a) \end{aligned}$$

ausgedrückt sein möge. Hier bedeutet a den Parameter der Schar $\mathfrak{S}_a$.

Wir nehmen an, dass die Funktionen (3.2) in der Umgebung von P analytisch sind, dass für $a = 0$ die Fläche der Schar (3.2) mit der Fläche $\mathfrak{S}_0$ zusammenfällt, und dass der Kurve $\mathfrak{D}$ auf den Flächen $\mathfrak{S}_a$ dasselbe Parameterpaar u, v, wie auf $\mathfrak{S}_0$, entspricht. Setzt man also in (3.2) für u, v dieses Wertepaar, so erhält man die Gleichungen der Kurve $\mathfrak{D}$, die *eine Transversalkurve der Schar $\mathfrak{S}_a$ ist.*

Wir bezeichnen mit

$$(3.3)\qquad \Delta(u,\ v,\ a) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

die Determinante der Schar $\mathfrak{S}_a$ und setzen voraus, dass

$$(3.4)\qquad \Delta(u,\ v,\ a) \neq 0,$$

wo u, v dem Punkte P entsprechen.

Die Aufgabe dieses Paragraphen besteht darin, *einen Zusammenhang zwischen den Krümmungseigenschaften der Kurve $\mathfrak{D}$ im Punkte P und dem Werte der De-*

terminante $\varDelta$ *nebst ihrer Ableitungen* $\varDelta_u$, $\varDelta_v$ *nach* u, v *in demselben Punkte* P aufzustellen. Dabei ist nur die Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ und der Punkt P fest bestimmt; die Schar $\mathfrak{S}_a$ und die Transversalkurve $\mathfrak{D}$ mögen dagegen variert werden.

B. Da die Funktionen (3. 2) für die oben gewählten Werte u, v eine Transversalkurve $\mathfrak{D}$ der Schar $\mathfrak{S}_a$ bestimmen, so ist

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} F_{x_u} x_a + F_{y_u} y_a + F_{z_u} z_a &= 0, \\ F_{x_v} x_a + F_{y_v} y_a + F_{z_v} z_a &= 0, \end{aligned}$$

wo sich die Ableitungen von F auf die Extremalflächen der Schar $\mathfrak{S}_a$ beziehen. Anderseits folgt es aus der Homogenität von $\mathfrak{F}$ in bezug auf l, m, n:

$$(3.6)\qquad \begin{aligned} F_{x_u} x_u + F_{y_u} y_u + F_{z_u} z_u &= F, \\ F_{x_u} x_v + F_{y_u} y_v + F_{z_u} z_v &= 0, \\ F_{x_v} x_u + F_{y_v} y_u + F_{z_v} z_u &= 0, \\ F_{x_v} x_v + F_{y_v} y_v + F_{z_v} z_v &= F. \end{aligned}$$

Wir lösen die erste Gleichung (3. 5) und zwei erste Gleichungen (3. 6) in bezug auf F_{x_u}, F_{y_u}, F_{z_u} auf, was wegen (3. 4) im Punkte P möglich ist. Dann lösen wir die zweite Gleichung (3. 5) und zwei letzte Gleichungen (3. 6) in bezug auf F_{x_v}, F_{y_v}, F_{z_v} auf. Wir bekommen:

$$(3.7)\qquad \begin{aligned} F_{x_u} &= \frac{F}{\varDelta}(y_v z_a - z_v y_a);\quad F_{y_u} = \frac{F}{\varDelta}(z_v x_a - x_v z_a);\quad F_{z_u} = \frac{F}{\varDelta}(x_v y_a - y_v x_a); \\ F_{x_v} &= -\frac{F}{\varDelta}(y_u z_a - z_u y_a);\quad F_{y_v} = -\frac{F}{\varDelta}(z_u x_a - x_u z_a);\quad F_{z_v} = -\frac{F}{\varDelta}(x_u y_a - y_u x_a). \end{aligned}$$

Wir führen die quadratischen Formen

$$(3.8)\qquad \begin{aligned} M_u(\xi, \eta, \zeta) \equiv{} & F_{x x_u} \xi^2 + F_{x y_u} \xi \eta + F_{x z_u} \xi \zeta + \\ & + F_{y x_u} \eta \xi + F_{y y_u} \eta^2 + F_{y z_u} \eta \zeta + \\ & + F_{z x_u} \zeta \xi + F_{z y_u} \zeta \eta + F_{z z_u} \zeta^2, \\ M_v(\xi, \eta, \zeta) \equiv{} & F_{x x_v} \xi^2 + F_{x y_v} \xi \eta + F_{x z_v} \xi \zeta + \\ & + F_{y x_v} \eta \xi + F_{y y_v} \eta^2 + F_{y z_v} \eta \zeta + \\ & + F_{z x_v} \zeta \xi + F_{z y_v} \zeta \eta + F_{z z_v} \zeta^2 \end{aligned}$$

ein und differenzieren die erste Formel (3. 5) in bezug auf a:

$$
(3.\ 9)\quad
\begin{aligned}
&F_{x_u} x_{aa} + F_{y_u} y_{aa} + F_{z_u} z_{aa} + \\
&+ M_u(x_a, y_a, z_a) + \\
&+ F_{x_u x_u} x_a x_{ua} + F_{y_u x_u} y_a x_{ua} + F_{z_u x_u} z_a x_{ua} + \\
&+ F_{x_u y_u} x_a y_{ua} + F_{y_u y_u} y_a y_{ua} + F_{z_u y_u} z_a y_{ua} + \\
&+ F_{x_u z_u} x_a z_{ua} + F_{y_u z_u} y_a z_{ua} + F_{z_u z_u} z_a z_{ua} + \\
&+ F_{x_u x_v} x_a x_{va} + F_{y_u x_v} y_a x_{va} + F_{z_u x_v} z_a x_{va} + \\
&+ F_{x_u y_v} x_a y_{va} + F_{y_u y_v} y_a y_{va} + F_{z_u y_v} z_a y_{va} + \\
&+ F_{x_u z_v} x_a z_{va} + F_{y_u z_v} y_a z_{va} + F_{z_u z_v} z_a z_{va} = 0.
\end{aligned}
$$

Wir beschränken uns jetzt auf den Punkt P und führen in drei erste Glieder die Formeln (3. 7) ein. Wir benutzen ausserdem die Formeln (2. 11) und (2. 13) Die Beziehung (3. 9) wird zu

$$
(3.\ 10)\quad
\begin{aligned}
&\frac{F}{\Delta}\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_{aa} & y_{aa} & z_{aa} \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} + M_u(x_a, y_a, z_a) + \\
&+ F_{11}(l x_a + m y_a + n z_a)(l x_{ua} + m y_{ua} + n z_{ua}) + \\
&+ F_{12}(l x_a + m y_a + n z_a)(l x_{va} + m y_{va} + n z_{va}) + \\
&+ \mathfrak{F}_l(y_a z_{va} - z_a y_{va}) + \mathfrak{F}_m(z_a x_{va} - x_a z_{va}) + \mathfrak{F}_n(x_a y_{va} - y_a x_{va}) = 0.
\end{aligned}
$$

Es folgt aus (3. 5), dass[1]

$$
(3.\ 11)\quad \frac{x_a}{\mathfrak{F}_l} = \frac{y_a}{\mathfrak{F}_m} = \frac{z_a}{\mathfrak{F}_n},
$$

woraus, da

$$
(3.\ 12)\quad
\begin{aligned}
l x_a + m y_a + n z_a &= \Delta, \\
l \mathfrak{F}_l + m \mathfrak{F}_m + n \mathfrak{F}_n &= F,
\end{aligned}
$$

man bekommt (mit Berücksichtigung von (2. 10))

$$
(3.\ 13)\quad x_a = \frac{\Delta}{F}\mathfrak{F}_l, \quad y_a = \frac{\Delta}{F}\mathfrak{F}_m, \quad z_a = \frac{\Delta}{F}\mathfrak{F}_n.
$$

[1] Vgl. KNESER, loc. cit., S. 331.

Aus (3. 11) folgt es, dass sich drei letzte Glieder von (3. 10) aufheben.

Differenziert man (3. 12) nach u und v (was gestattet ist, da (3. 12) auch in Umgebung von P gilt), so wird

$$
\begin{aligned}
l x_{ua} + m y_{ua} + n z_{ua} &= \varDelta_u - (l_u x_a + m_u y_a + n_u z_a), \\
l x_{va} + m y_{va} + n z_{va} &= \varDelta_v - (l_v x_a + m_v y_a + n_v z_a).
\end{aligned} \tag{3. 14}
$$

Wir führen die quadratischen Formen

$$
\begin{aligned}
N_u(\xi, \eta, \zeta) &\equiv (l\xi + m\eta + n\zeta)(l_u\xi + m_u\eta + n_u\zeta), \\
N_v(\xi, \eta, \zeta) &\equiv (l\xi + m\eta + n\zeta)(l_v\xi + m_v\eta + n_v\zeta)
\end{aligned} \tag{3. 15}
$$

ein und setzen noch

$$
\begin{aligned}
L_u(\xi, \eta, \zeta) &\equiv M_u(\xi, \eta, \zeta) - F_{11} N_u(\xi, \eta, \zeta) - F_{12} N_v(\xi, \eta, \zeta), \\
L_v(\xi, \eta, \zeta) &\equiv M_v(\xi, \eta, \zeta) - F_{12} N_u(\xi, \eta, \zeta) - F_{22} N_v(\xi, \eta, \zeta).
\end{aligned} \tag{3. 16}
$$

Dann wird (3. 10) unter Benutzung von (3. 14) zu

$$
\frac{F}{\varDelta} \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_{aa} & y_{aa} & z_{aa} \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} + L_u(x_a, y_a, z_a) + \varDelta(F_{11}\varDelta_u + F_{12}\varDelta_v) = 0. \tag{3. 17}
$$

Differenziert man die zweite Gleichung (3. 5) in bezug auf a, benutzt man die Definitionen (3. 8), (3. 15) und (3. 16), so kommt man ganz analog zur Formel

$$
-\frac{F}{\varDelta} \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_{aa} & y_{aa} & z_{aa} \\ x_u & y_u & z_u \end{vmatrix} + L_v(x_a, y_a, z_a) + \varDelta(F_{12}\varDelta_u + F_{22}\varDelta_v) = 0. \tag{3. 18}
$$

Die Formeln (3. 17) *und* (3. 18) *bilden den Ausgangpunkt fast aller späteren Überlegungen.* Wir wollen ihnen eine etwa mehr geometrische Gestalt geben, indem wir den Parameter a eliminieren und ihre Invarianz ans Licht bringen.

C. Wir führen in L_u und L_v für x_a, y_a, z_a die Werte (3. 13) ein und bemerken, dass L_u und L_v quadratische Formen sind. Die betreffenden Glieder werden zu

$$
\frac{\varDelta^2}{F^2} L_u(\mathfrak{F}_l, \mathfrak{F}_m, \mathfrak{F}_n), \quad \frac{\varDelta^2}{F^2} L_v(\mathfrak{F}_l, \mathfrak{F}_m, \mathfrak{F}_n).
$$

Dann dividieren wir die Formeln (3. 17) und (3. 18) durch Δ^2. Es bleibt das erste Glied zu transformieren. Wir beschränken uns auf das Glied

$$(3.19)\qquad \frac{F}{\Delta^3}\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_{aa} & y_{aa} & z_{aa} \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

in der Formel (3. 17). Was die Formel (3. 18) betrifft, so verfährt man ganz analog.

Wir machen vorübergehend anstatt (3. 4) die Voraussetzung

$$(3.20)\qquad \Delta(u, v, 0) > 0.$$

Ist $\Delta < 0$, so soll man nur das Vorzeichen von a umtauschen. Wir finden aus (3. 13)

$$\Delta = F\frac{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}{\sqrt{\mathfrak{F}_l^2 + \mathfrak{F}_m^3 + \mathfrak{F}_n^2}},$$

oder

$$\Delta = \frac{F\dfrac{ds}{da}}{\sqrt{\mathfrak{F}_l^2 + \mathfrak{F}_m^2 + \mathfrak{F}_n^2}},$$

wenn man auf der Kurve $\mathfrak{D}$ die Bogenlänge s in der mit a übereinstimmenden Richtung als Parameter einführt. Dann kann man (3. 19) in der Form

$$(3.21)\qquad \frac{(\mathfrak{F}_l^2 + \mathfrak{F}_m^2 + \mathfrak{F}_n^2)^{3/2}}{F^2}\begin{vmatrix} x_a\dfrac{da}{ds} & y_a\dfrac{da}{ds} & z_a\dfrac{da}{ds} \\ x_{aa}\left(\dfrac{da}{ds}\right)^2 & y_{aa}\left(\dfrac{da}{ds}\right)^2 & z_{aa}\left(\dfrac{da}{ds}\right)^2 \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

schreiben.

Jetzt führen wir *den tangenten Einheitsvektor* $\mathfrak{t}$ mit den Komponenten

$$(3.22)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{t}_x &= \frac{dx}{ds} = x_a\frac{da}{ds}, \\ \mathfrak{t}_y &= \frac{dy}{ds} = y_a\frac{da}{ds}, \\ \mathfrak{t}_z &= \frac{dz}{ds} = z_a\frac{da}{ds} \end{aligned}$$

und *den Krümmungsvektor* $\mathfrak{r}$ mit den Komponenten

$$\mathfrak{r}_x = \frac{d^2 x}{d s^2} = x_{aa} \left(\frac{d a}{d s}\right)^2 + x_a \frac{d^2 a}{d s^2},$$

$$\mathfrak{r}_y = \frac{d^2 y}{d s^2} = y_{aa} \left(\frac{d a}{d s}\right)^2 + y_a \frac{d^2 a}{d s^2},$$

$$\mathfrak{r}_z = \frac{d^2 z}{d s^2} = z_{aa} \left(\frac{d a}{d s}\right)^2 + z_a \frac{d^2 a}{d s^2}$$

ein. Dann wird die Determinante in (3. 21) zu

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{t}_x & \mathfrak{t}_y & \mathfrak{t}_z \\ \mathfrak{r}_x & \mathfrak{r}_y & \mathfrak{r}_z \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Wir erhalten somit die endgültige Form der Formeln für die Krümmung der Transversalkurve:

$$(3.\,23)\quad \begin{aligned} \frac{(\mathfrak{F}_l^2 + \mathfrak{F}_m^2 + \mathfrak{F}_n^2)^{3/2}}{F^2} \begin{vmatrix} \mathfrak{t}_x & \mathfrak{t}_y & \mathfrak{t}_z \\ \mathfrak{r}_x & \mathfrak{r}_y & \mathfrak{r}_z \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} + \frac{1}{F^2} L_u(\mathfrak{F}_l, \mathfrak{F}_m, \mathfrak{F}_n) + \frac{F_{11}\Delta_u + F_{12}\Delta_v}{\Delta} = 0, \\ -\frac{(\mathfrak{F}_l^2 + \mathfrak{F}_m^2 + \mathfrak{F}_n^2)^{3/2}}{F^2} \begin{vmatrix} \mathfrak{t}_x & \mathfrak{t}_y & \mathfrak{t}_z \\ \mathfrak{r}_x & \mathfrak{r}_y & \mathfrak{r}_z \\ x_u & y_u & z_u \end{vmatrix} + \frac{1}{F^2} L_v(\mathfrak{F}_l, \mathfrak{F}_m, \mathfrak{F}_n) + \frac{F_{12}\Delta_u + F_{22}\Delta_v}{\Delta} = 0. \end{aligned}$$

Es sei noch explizit betont, dass wegen (3. 20) die Richtung des Vektors $\mathfrak{t}$ so bestimmt wurde, dass *die Richtungen* $d u$, $d v$, $\mathfrak{t}$ *ein mit* x, y, z *gleichorientiertes Trippel bilden.* Wäre aber von Hause aus $\Delta < 0$, so sollte man das Vorzeichen von a wieder rückgängig umtauschen, was das einzige Δ enthaltende Glied (das dritte Glied) ohne Einfluss lässt. Die Orientierung $d u$, $d v$, $\mathfrak{t}$ bleibt also immer dieselbe.

Nehmen wir an, dass die Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ gegeben ist, dass die Parameter u, v auf $\mathfrak{S}_0$ bestimmt sind, und dass der Punkt P fest gewählt ist. Dann beziehen sich die ersten Glieder der beiden Formeln ausschliesslich auf die Krümmungseigenschaften der Transversalkurve $\mathfrak{T}$, die zweiten sind fest für alle möglichen Extremalscharen, die dritten endlich hängen von der Schardeterminante Δ und ihren Ableitungen nach u, v ab.

Betrachtet man die Formeln (3. 23) vom Standpunkt der affinen Geometrie der Fläche $\mathfrak{S}_0$ aus, so bilden ihre linken Seiten die Bestimmungszahlen eines kovarianten Vektors auf der Fläche. Doch muss man zuerst in der zweiten Formel das Vorzeichen abändern und die Reihenfolge der beiden Formeln umtauschen, wenn die Bestimmungszahlen den Variabeln u, v entsprechen sollen.

4. Krümmung der Transversalfläche.

A. Es sei wieder eine analytische Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$, die durch (3. 1) bestimmt ist, gegeben. Sie sei in eine Schar $\mathfrak{S}_a$, die durch (3. 2) bestimmt ist, eingebettet. Es sei insbesondere die Ungleichung (3. 4) erfüllt.

Wir setzen voraus, dass auf der Fläche $\mathfrak{S}_0$ eine analytische reguläre orientierte Kurve $\mathfrak{C}$ liegt, die durch die Gleichungen

$$u = u(s), \quad v = v(s), \tag{4. 1}$$

definiert wird. Es sei immer

$$u_s^2 + v_s^2 > 0. \tag{4. 2}$$

Wird in Umgebung eines Punktes P der Kurve $\mathfrak{C}$ dem Parameter s auf der Fläche $\mathfrak{S}_0$ ein anderer Parameter σ hinzugenommen, der auf $\mathfrak{C}$ verschwindet, und ist

$$\frac{\partial(s, \sigma)}{\partial(u, v)} > 0,$$

so wird der Teil der Umgebung, wo

$$\sigma > 0,$$

die positive Seite der Kurve $\mathfrak{C}$ *genannt.*

Jetzt führen wir durch die Kurve $\mathfrak{C}$ *eine Fläche* $\mathfrak{T}$, *welche die Extremalflächen der Schar* $\mathfrak{S}_a$ *transversal schneidet.* Diese Transversalfläche $\mathfrak{T}$ können wir uns als von den durch einzelne Punkte P der Kurve $\mathfrak{C}$ geführten Transversalkurven $\mathfrak{D}$ der Schar $\mathfrak{S}_a$ gebildet vorstellen. Auf diese Kurven können wir die Formeln des vorigen Paragraphen anwenden.

Auch in dem Raume unterscheiden wir in der Umgebung der Transversalfläche $\mathfrak{T}$ die positive Seite von $\mathfrak{T}$.

Jetzt multiplizieren wir die erste der Formeln (3. 23) mit v_s, die zweite mit

$-u_s$, und addieren (wir bilden das skalare Produkt des am Ende des vorigen Paragraphen beschriebenen Vektors mit dem Vektor u_s, v_s):

$$\frac{(\mathfrak{F}_l^2+\mathfrak{F}_m^2+\mathfrak{F}_n^2)^{3/2}}{F^2}\begin{vmatrix} \mathfrak{t}_x & \mathfrak{t}_y & \mathfrak{t}_z \\ \mathfrak{r}_x & \mathfrak{r}_y & \mathfrak{r}_z \\ x_s & y_s & z_s \end{vmatrix} + \frac{1}{F^2}[L_u(\mathfrak{F}_l, \mathfrak{F}_m, \mathfrak{F}_n)\,v_s - L_v(\mathfrak{F}_l, \mathfrak{F}_m, \mathfrak{F}_n)\,u_s] + \tag{4.3}$$
$$+\frac{(F_{11}v_s - F_{12}u_s)\Delta_u + (F_{12}v_s - F_{22}u_s)\Delta_v}{\Delta} = 0.$$

Wir entwickeln die Determinante

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{t}_x & \mathfrak{t}_y & \mathfrak{t}_z \\ \mathfrak{r}_x & \mathfrak{r}_y & \mathfrak{r}_z \\ x_s & y_s & z_s \end{vmatrix} = -(\mathfrak{r}_x\mathfrak{n}_x + \mathfrak{r}_y\mathfrak{n}_y + \mathfrak{r}_z\mathfrak{n}_z), \tag{4.4}$$

wo

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_x &\equiv \mathfrak{t}_y z_s - \mathfrak{t}_z y_s, \\ \mathfrak{n}_y &\equiv \mathfrak{t}_z x_s - \mathfrak{t}_x z_s, \\ \mathfrak{n}_z &\equiv \mathfrak{t}_x y_s - \mathfrak{t}_y x_s \end{aligned} \tag{4.5}$$

die Bestimmungszahlen eines zur Fläche $\mathfrak{T}$ normalen Vektors $\mathfrak{n}$ sind, der nach der positiven Seite von $\mathfrak{T}$ gerichtet ist. Der Vektor $\mathfrak{n}$ verschwindet niemals.

Jetzt führen wir den Krümmungsradius ϱ der Transversalkurve $\mathfrak{D}$ im Schnittpunkte P mit der Fläche $\mathfrak{S}_0$ ein. Er hängt von s ab und ist durch die Formel

$$\frac{1}{\varrho^2} = \mathfrak{r}_x^2 + \mathfrak{r}_y^2 + \mathfrak{r}_z^2$$

gegeben. Bezeichnet θ den Winkel zwischen der Hauptnormale der Kurve $\mathfrak{D}$ (Richtung $\mathfrak{r}_x, \mathfrak{r}_y, \mathfrak{r}_z$) und der positiven Normale der Fläche $\mathfrak{T}$ (Richtung $\mathfrak{n}_x, \mathfrak{n}_y, \mathfrak{n}_z$), so folgt

$$\cos\theta = \frac{\mathfrak{r}_x\mathfrak{n}_x + \mathfrak{r}_y\mathfrak{n}_y + \mathfrak{r}_z\mathfrak{n}_z}{\sqrt{(\mathfrak{r}_x^2+\mathfrak{r}_y^2+\mathfrak{r}_z^2)(\mathfrak{n}_x^2+\mathfrak{n}_y^2+\mathfrak{n}_z^2)}},$$

oder

$$\cos\theta = \frac{\varrho}{\mathfrak{n}}(\mathfrak{r}_x\mathfrak{n}_x + \mathfrak{r}_y\mathfrak{n}_y + \mathfrak{r}_z\mathfrak{n}_z),$$

wo

$$\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}_x^2 + \mathfrak{n}_y^2 + \mathfrak{n}_z^2. \tag{4.6}$$

Benutzt man dies in der Formel (4.4), so folgt

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{t}_x & \mathfrak{t}_y & \mathfrak{t}_z \\ \mathfrak{r}_x & \mathfrak{r}_y & \mathfrak{r}_z \\ x_s & y_s & z_s \end{vmatrix} = -\frac{\mathfrak{n}\cos\theta}{\varrho}. \tag{4.7}$$

Jetzt betrachten wir den ebenen Normalschnitt (immer im Punkte P der Kurve $\mathfrak{C}$) der Transversalfläche $\mathfrak{T}$, der die Transversalkurve $\mathfrak{D}$ im Punkte P berührt. Es sei R der Krümmungsradius dieses Schnittes im Punkte P, nach der positiven Seite von $\mathfrak{T}$ positiv gezählt. Dann ergibt der Meusniersche Satz

$$\varrho = R\cos\theta,$$

woraus für die betrachtete Determinante die Darstellung

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{t}_x & \mathfrak{t}_y & \mathfrak{t}_z \\ \mathfrak{r}_x & \mathfrak{r}_y & \mathfrak{r}_z \\ x_s & y_s & z_s \end{vmatrix} = -\frac{\mathfrak{n}}{R} \tag{4.8}$$

folgt.

Führen wir den Ausdruck (4. 8) in die Formel (4. 3) ein, so bekommen wir

$$\begin{aligned} &\frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{F}_l^2 + \mathfrak{F}_m^2 + \mathfrak{F}_n^2)^{3/2}}{F^2}\cdot\frac{1}{R} + \frac{1}{F^2}\left[L_v(\mathfrak{F}_l, \mathfrak{F}_m, \mathfrak{F}_n)\,u_s - L_u(\mathfrak{F}_l, \mathfrak{F}_m, \mathfrak{F}_n)\,v_s\right] + \\ &\qquad + \frac{(F_{12}u_s - F_{11}v_s)\,\Delta_u + (F_{22}u_s - F_{12}v_s)\,\Delta_v}{\Delta} = 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Wir wollen hier noch die Grösse $\mathfrak{n}$ umformen. Es folgt aus den Formeln (3. 22), dass

$$\mathfrak{t}_x = \pm\frac{x_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}},$$

$$\mathfrak{t}_y = \pm\frac{y_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}},$$

$$\mathfrak{t}_z = \pm\frac{z_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}},$$

woraus man nach (3. 13) bekommt

$$\mathfrak{t}_x = \pm\frac{\mathfrak{F}_l}{\sqrt{\mathfrak{F}_l^2 + \mathfrak{F}_m^2 + \mathfrak{F}_n^2}},$$

$$\mathfrak{t}_y = \pm\frac{\mathfrak{F}_m}{\sqrt{\mathfrak{F}_l^2 + \mathfrak{F}_m^2 + \mathfrak{F}_n^2}},$$

$$\mathfrak{t}_z = \pm \frac{\mathfrak{F}_n}{\sqrt{\mathfrak{F}_l^2 + \mathfrak{F}_m^2 + \mathfrak{F}_n^2}}.$$

Führt man diese Werte in (4. 5) und dann in (4. 6) ein, so folgt

$$\mathfrak{n} = \frac{\sqrt{(\mathfrak{F}_m z_s - \mathfrak{F}_n y_s)^2 + (\mathfrak{F}_n x_s - \mathfrak{F}_l z_s)^2 + (\mathfrak{F}_l y_s - \mathfrak{F}_m x_s)^2}}{\sqrt{\mathfrak{F}_l^2 + \mathfrak{F}_m^2 + \mathfrak{F}_n^2}}. \tag{4. 10}$$

Wir bezeichnen:

$$A \equiv \frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{F}_l^2 + \mathfrak{F}_m^2 + \mathfrak{F}_n^2)^{3/2}}{F^2}, \tag{4. 11}$$

$$B \equiv \frac{1}{F^2}[L_v(\mathfrak{F}_l, \mathfrak{F}_m, \mathfrak{F}_n) u_s - L_u(\mathfrak{F}_l, \mathfrak{F}_m, \mathfrak{F}_n) v_s], \tag{4. 12}$$

und schreiben die Formel (4. 9) in der Gestalt:

$$\frac{A}{R} + B + \frac{(F_{12} u_s - F_{11} v_s) \varDelta_u + (F_{22} u_s - F_{12} v_s) \varDelta_v}{\varDelta} = 0, \tag{4. 13}$$

oder

$$\frac{A}{R} + B + (F_{12} u_s - F_{11} v_s) \frac{\partial}{\partial u} \lg \varDelta + (F_{22} u_s - F_{12} v_s) \frac{\partial}{\partial v} \lg \varDelta = 0.$$

Das ist *die Fundamentalformel für die Krümmung der Transversalfläche.* Auf ihr soll sich die Hauptzahl der folgenden Überlegungen basieren.

Sind die Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ und die Kurve $\mathfrak{C}$ auf ihr fest gewählt, so sind A, B und die Koëffizienten von $\varDelta_u$, $\varDelta_v$ wohl bestimmte Funktionen des Parameters s. Also schafft die Fundamentalformel (4. 13) eine Beziehung zwischen einer Krümmungseigenschaft der Transversalfläche $\mathfrak{T}$, die in dem Krümmungsradius R des die Transversalrichtung zur Fläche $\mathfrak{S}_0$ enthaltenden Normalschnittes von $\mathfrak{T}$ ihren Ausdruck hat, und der Determinante $\varDelta$ (nebst ihrer Ableitungen $\varDelta_u$, $\varDelta_v$) der Schar $\mathfrak{S}_a$, die von $\mathfrak{T}$ transversal geschnitten wird.

B. Wir heben jetzt die wichtige Eigenschaft von A auf:

$$A > 0. \tag{4. 14}$$

In der Tat folgt aus (4. 10) und (4. 11), dass A nur dann verschwinden kann, wenn

$$\frac{\mathfrak{F}_l}{x_s} = \frac{\mathfrak{F}_m}{y_s} = \frac{\mathfrak{F}_n}{z_s}. \tag{4. 15}$$

Da aber die Richtung ($\mathfrak{F}_l$, $\mathfrak{F}_m$, $\mathfrak{F}_n$) nach (3. 13) die Transversalrichtung ist, die nach (2. 10) nicht in der Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ liegen kann, so sind die Gleichungen (4. 15) unmöglich zu erfüllen. Damit ist die Ungleichung (4. 14) bewiesen.

Wir führen der Bequemlichkeit halber die Funktion

$$h(s) \equiv \frac{A}{R} + B \tag{4. 16}$$

ein. Diese Funktion kann auch als ein Krümmungsmass dienen. Die Fundamentalformel (4. 13) schreiben wir jetzt

$$(F_{12}\, u_s - F_{11}\, v_s)\, \varDelta_u + (F_{22}\, u_s - F_{12}\, v_s)\varDelta_v + h\, \varDelta = 0. \tag{4. 17}$$

Sind einige Transversalflächen (z. B. $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$) durch dieselbe Kurve $\mathfrak{C}$ geführt (sie entsprechen selbstverständlich verschiedenen Extremalscharen $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}'_a$), so dient der Vergleich der Werte von h und h' zur Beurteilung der gegenseitigen Lage der beiden sich berührenden Flächen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$.

Es sei in der Tat längs der Kurve $\mathfrak{C}$

$$h' > h. \tag{4. 18}$$

Dann folgt es aus (4. 14) und (4. 16), dass

$$\frac{1}{R'} > \frac{1}{R}.$$

Alle Normalschnitte von $\mathfrak{T}'$ liegen an der positiven Seite der Normalschnitte von $\mathfrak{T}$. Dabei sind beide Normalschnitte durch dieselben Ebenen erzeugt, die durch die Transversalrichtungen zu $\mathfrak{S}_0$ normal zu $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ geführt sind. Wir bemerken noch, dass diese Ebenen nicht zu $\mathfrak{S}_0$ tangent sind, weil sie die Transversalrichtungen enthalten. Dies erstattet uns zu behaupten, dass *die Transversalfläche* $\mathfrak{T}'$ *an positiver Seite der Transversalfläche* $\mathfrak{T}$ *liegt* (in der Umgebung von $\mathfrak{C}$).

Liegt umgekehrt $\mathfrak{T}'$ an positiver Seite von $\mathfrak{T}$, so ist

$$h' \geqq h.$$

Ist insbesondere die Kurve $\mathfrak{C}$ geschlossen ohne mehrfache Punkte, so wählen wir immer den positiven Sinn auf $\mathfrak{C}$ so, dass die positive Seite von $\mathfrak{C}$ im Innern von $\mathfrak{C}$ liegt (die innere Normale ist dann die positive Normale). Ist dann für zwei Transversalflächen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ durch $\mathfrak{C}$ die Ungleichung (4. 18) erfüllt, so *liegt die Transversalfläche* $\mathfrak{T}'$ *an der inneren Seite der Transversalfläche* $\mathfrak{T}$. Diesen, etwas unklaren Ausdruck kann man so verstehen, dass die zu $\mathfrak{S}_0$ benachbarten Flächen einer analytischen, $\mathfrak{S}_0$ enthaltenden Flächenschar die Flächen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ so schneiden, dass der zweite Durchschnitt im Innern des ersten liegt. Wir gehen nicht auf diesen Gegenstand ausführlich ein.

C. Jetzt wollen wir für den Fall der geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}$ ein eng mit unseren Untersuchungen verbundenes Randwertproblem über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufstellen. Wir bemerken dazu, dass

$$\Delta(u, v, 0) = l x_a + m y_a + n z_a, \tag{4. 19}$$

und da x_a, y_a, z_a für $a = 0$ die Jacobischen Differentialgleichungen (2. 18) erfüllen, so ist $\Delta(u, v, 0)$ eine Lösung (für ω) der einzigen Gleichung (2. 20):

$$-J(\Delta) \equiv \frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\Delta_u + F_{12}\Delta_v) + \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\Delta_u + F_{22}\Delta_v) - F_0\Delta = 0. \tag{4. 20}$$

Wir sehen also, dass Δ im Innern von $\mathfrak{C}$ eine Lösung von (4. 20) mit der längs $\mathfrak{C}$ zu erfüllenden Randbedingung (4. 17) ist.

Ist also die zu $\mathfrak{S}_0$ transversale Fläche, $\mathfrak{T}$, also auch die Funktion $h(s)$ gegeben, so besteht eine notwendige Bedingung dafür, dass $\mathfrak{T}$ eine Transversalfläche einer $\mathfrak{S}_0$ enthaltenden Extremalschar sei, darin, dass das Problem (4. 20) mit der Randbedingung (4. 17) eine nichttriviale Lösung Δ besitze.

Wir wollen für weitere Zwecke dieses Problem ein wenig allgemeiner fassen. Wir führen eine Zahl

$$q < 0 \tag{4. 21}$$

ein, die für alle u, v die Ungleichung

$$q < -F_0(u, v)$$

erfüllt, und dann noch

$$k(u, v) \equiv -q - F_0(u, v). \tag{4. 22}$$

Dann ist

$$k(u, v) > 0. \tag{4. 23}$$

Wir bilden die Differentialgleichung

$$(4.24)\quad \Delta(\omega) \equiv \frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\,\omega_u + F_{12}\,\omega_v) + \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\,\omega_u + F_{22}\,\omega_v) + q\,\omega + \lambda\,k\,\omega = 0$$

mit der Randbedingung

$$(4.25)\quad \Gamma(\omega) \equiv (F_{12}\,u_s - F_{11}\,v_s)\,\omega_u + (F_{22}\,u_s - F_{12}\,v_s)\,\omega_v + \lambda\,h\,\omega = 0$$

längs der Kurve $\mathfrak{C}$. Für $\lambda = 1$ fällt das neue Problem mit dem vorigen zusammen.

Wir nennen das Problem (4. 24), (4. 25) *das assozierte Differentialproblem für die Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ und die Transversalfläche $\mathfrak{T}$.*

Ist $\mathfrak{T}$ die Transversalfläche einer Extremalenschar $\mathfrak{S}_a$ so ist $\lambda = 1$ *ein Eigenwert des assozierten Problems,* und die Determinante Δ der Schar (immer für $a = 0$) die zugehörige Eigenfunktion.

D. Wir haben alle Ergebnisse unter der Voraussetzung (3. 4) über die Schardeterminante erhalten. Ist dagegen in einem Punkte P der Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$

$$(4.26)\quad \Delta = 0,$$

so folgt aus den Formeln (3. 13), dass im Punkte P der Kurve $\mathfrak{D}$

$$x_a = 0, \quad y_a = 0, \quad z_a = 0.$$

Also darf a nicht zum Parameter auf der Kurve $\mathfrak{D}$ gewählt werden. Die Formel (4. 17) kann in diesem Falle falsch sein.

Doch wollen wir zwei Fälle von (4. 25) betrachten:

1. *Es sei $\Delta = 0$ in einem isolierten Punkte P der Kurve $\mathfrak{C}$.* Dann können wir die Gleichung (4. 17) für den Punkt P durch Grenzübergang (im analytischen Falle) aufstellen. Im allgemeinen wird

$$h = \infty,$$

weil die Transversalfläche in P einen singulären Punkt hat. Ausnahmsweise kann aber h auch endlich bleiben, was zur Beziehung

$$(F_{12}\,u_s - F_{11}\,v_s)\,\Delta_u + (F_{22}\,u_s - F_{12}\,v_s)\,\Delta_v = 0$$

führt.

2. Es sei $\Delta = 0$ längs der ganzen Kurve $\mathfrak{C}$, aber nicht identisch auf $\mathfrak{S}_0$ ($\mathfrak{C}$ ist dann eine Brennlinie der Extremalenschar $\mathfrak{S}_a$). Wir behaupten, dass man längs $\mathfrak{C}$ in der Formel (4. 17)

$$h = \infty$$

setzen muss, falls noch die Legendre-Brunaccische Bedingung erfüllt ist.

Nehmen wir im Gegensatz an, dass h längs eines Bogens von $\mathfrak{C}$ endlich ist. Dann folgt aus (4. 26) erstens nach (4. 17) und zweitens durch Differenzierung in bezug auf s

$$(F_{12}u_s - F_{11}v_s)\Delta_u + (F_{22}u_s - F_{12}v_s)\Delta_v = 0,$$

$$u_s\Delta_u + v_s\Delta_v = 0.$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems (in bezug auf Δ_u, Δ_v) ist gleich

$$-(F_{11}v_s^2 - 2F_{12}v_s u_s + F_{22}u_s^2),$$

also nach der Legendre-Brunaccischen Bedingung von Null verschieden. Wir finden also

$$\Delta_u = 0, \quad \Delta_v = 0$$

längs des Teilbogens von $\mathfrak{C}$, was nach (4. 26) unter Berücksichtigung der Analytizität und der Differentialgleichung (4. 19) zum identischen Verschwinden von Δ führt, entgegen der Voraussetzung.

Doch sei es ausdrücklich betont, dass im Falle der Brennlinie die geometrische Bedeutung (4. 16) von h fallen muss. In der Tat, soll die Transversalfläche $\mathfrak{T}$ längs der Brennlinie $\mathfrak{C}$ nicht notwendig singulär sein (z. B. eine Rückkehrkante besitzen, oder zu einer Kurve ausarten). Sie kann auch regulär sein: dann ist $\frac{1}{R}$ endlich, obwohl man in der Formel (4. 17) $h = \infty$ setzen muss.

5. Hilfsmittel aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

A. Wir wenden uns jetzt der Untersuchung des assozierten Differentialproblems bei gegebener Transversalfläche (also bei gegebenem h) zu. Wir fassen das Problem ein wenig allgemeiner, indem wir in die Randbedingung noch die Konstante c einführen.

Es sei also ein Bereich $\mathcal{S}$ der u, v-Ebene gegeben, der von einer analytischen regulären Kurve $\mathcal{C}$ ohne Doppelpunkte begrenzt ist. Der Umlaufssinn der Kurve $\mathcal{C}$ soll so gewählt werden, dass er mit der inneren Normalen ein mit u, v gleichorientiertes Richtungenpaar bildet.

Es sei im Bereiche $\mathcal{S}$ eine analytische reguläre Funktion $\omega(u, v)$ gesucht, welche die selbstadjungierte Gleichung

$$(5.1)\qquad \Delta(\omega) \equiv \frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\,\omega_u + F_{12}\,\omega_v) + \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\,\omega_u + F_{22}\,\omega_v) + q\,\omega + \lambda\,k\,\omega = 0$$

erfüllt, und am Rande $\mathcal{C}$ der Bedingung

$$(5.2)\qquad \Gamma_c(\omega) \equiv (F_{12}\,u_s - F_{11}\,v_s)\,\omega_u + (F_{22}\,u_s - F_{12}\,v_s)\,\omega_v + \lambda\,(h + c)\,\omega = 0$$

genug tut.

Wir setzen die Legendre-Brunaccische Bedingung für das Minimum voraus. Dann ist die Form

$$F_{11}\,\alpha^2 + 2\,F_{12}\,\alpha\,\beta + F_{22}\,\beta^2$$

positiv definit. Die Gleichung (5. 1) ist vom elliptischen Typus. Wir setzen noch voraus, dass die Ungleichungen (4. 21) und (4. 23) erfüllt sind:

$$(5.3)\qquad q < 0,$$

$$(5.4)\qquad k > 0.$$

Alle Funktionen sind analytisch regulär.

Unter angenommenen Voraussetzungen hat das gestellte Randwertproblem unendlich viele positive Eigenwerte $\lambda_i(c)$.[1] Wir bezeichnen mit $\lambda_1(c)$ den kleinsten positiven Eigenwert. Dabei ist die Abhängigkeit von der Konstante c explizit ausgedrückt.

Es bedeute D' die Klasse der stetigen Funktionen $\theta(u, v)$ im Bereiche $\mathcal{S}$, die abteilungsweise stetige partielle Ableitungen θ_u, θ_v erster Ordnung haben. Dann folgt aus der Lichtensteinschen Theorie[2] nach einer leichten Umformung, dass

$$\frac{1}{\lambda_1(c)}$$

dem Maximum des Funktionals

$$(5.5)\qquad \iint\limits_{\mathcal{S}} k\,\theta^2\,du\,dv + \int\limits_{\mathcal{C}} (h + c)\,\theta^2\,ds$$

gleich ist, wenn $\theta(u, v)$ alle Funktionen der Klasse D' durchläuft, für die

$$(5.6)\qquad \iint\limits_{\mathcal{S}} (F_{11}\,\theta_u^2 + 2\,F_{12}\,\theta_u\,\theta_v + F_{22}\,\theta_v^2 - q\,\theta^2)\,du\,dv = 1$$

erfüllt ist.

[1] Vgl. LICHTENSTEIN, loc. cit. (Math. Zeitschrift 3), S. 143.
[2] Vgl. LICHTENSTEIN, loc. cit. (Math. Zeitschrift 3), SS. 157—160.

Nach Lichtenstein ist $\lambda_1(c)$ ein einfacher Eigenwert. Die Funktion $\theta_1(u, v)$, für welche das Funktional (5. 5) sein Maximum annimmt, ist dem Eigenwert $\lambda_1(c)$ entsprechende Eigenfunktion. Sie bewahrt im Innern von $\mathcal{S}$ ein konstantes Vorzeichen. Wir nehmen an, dass sie dort positiv ist:

$$\theta_1(u, v) > 0, \tag{5. 7}$$

und wollen beweisen, dass sie noch am Rande $\mathcal{C}$ die Ungleichung (5. 7) erfüllt. Um die Kernuntersuchungen nicht zu unterbrechen, werden wir diesen Beweis am Ende dieses Paragraphen (Absatz C) anführen.

Wir betrachten hilfsweise neben dem Problem (5. 1), (5. 2), das einen Fall der dritten Randwertaufgabe bildet, noch die erste Randwertaufgabe. Sie besteht in derselben Differentialgleichung (5. 1) unter der Nebenbedingung

$$\omega = 0 \tag{5. 8}$$

längs des Randes $\mathcal{C}$. Wir bezeichnen λ_1^* den kleinsten positiven Eigenwert des Problems (5. 1), (5. 8). Nach Lichtenstein ist dann

$$\lambda_1(c) < \lambda_1^*. \tag{5. 9}$$

B. Wir werden jetzt einige Eigenschaften von $\lambda_1(c)$, als Funktion von c, aufstellen.

1. *Die Funktion $\lambda_1(c)$ ist eine nicht wachsende Funktion von c.*

In der Tat, aus der Tatsache, dass $1/\lambda_1(c)$ das Maximum von (5. 5) unter einer von c unabhängigen Nebenbedingung (5. 6) ist, folgt es, dass $1/\lambda_1(c)$ als Funktion von c nicht abnehmen kann. Daraus folgt die Behauptung.

2. *Wenn $c \to +\infty$, so gilt $\lambda_1(c) \to 0$.*

Für ein beliebiges, festes, (5. 6) erfüllendes $\theta(u, v)$, wächst (5. 5) mit c unbegrenzt. Dasselbe gilt dann für das Maximum $1/\lambda_1(c)$ von (5. 5).

3. *Wenn $c \to -\infty$, so gilt $\lambda_1(c) \to \lambda_1^*$.* In mancher Hinsicht strebt dann die dritte Randwertaufgabe an die erste.

Als eine nicht wachsende Funktion hat $\lambda_1(c)$ für $c \to -\infty$ einen positiven Grenzwert λ_0, für den nach (5. 9) die Ungleichung

$$\lambda_0 \leqq \lambda_1^*$$

gilt. Setzen wir voraus, dass entgegen der Behauptung

$$\lambda_0 < \lambda_1^*, \tag{5. 10}$$

und wählen eine Zahl $\bar{\lambda}$, für welche

$$\lambda_0 < \bar{\lambda} < \lambda_1^*. \tag{5.11}$$

Es ist für jedes

$$\lambda_1(c) < \bar{\lambda}. \tag{5.12}$$

Da λ_1^* der kleinste positive Eigenwert der ersten Randwertaufgabe (5. 1), (5. 8) ist, so ist $\bar{\lambda}$ nach (5. 11) kein Eigenwert derselben Aufgabe. Dann existiert eine Lösung $\omega(u, v)$ der nicht homogenen Aufgabe

$$\frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\omega_u + F_{12}\omega_v) + \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\omega_u + F_{22}\omega_v) + q\,\omega + \bar{\lambda}\,k\,\omega = 0, \tag{5.13}$$

$$\omega(s) = 1. \tag{5.14}$$

Die Funktion $\omega(u, v)$ kann nicht in $\mathcal{S}$ negativ werden. Denn wäre es so, so würde $\omega(u, v)$ eine Eigenfunktion der ersten Randwertaufgabe für einen Teilbereich $\mathcal{S}'$ von $\mathcal{S}$ sein. Dem Teilbereiche $\mathcal{S}'$ entspricht ein kleinster positiver Eigenwert, der grösser als λ_1^* ist[1], und destomehr grösser als $\bar{\lambda}$. Die Eigenfunktion $\omega(u, v)$ dürfte also nicht der Gleichung (5. 13) genügen. Also ist

$$\omega(u, v) \geqq 0 \tag{5.15}$$

und nicht identisch $\omega(u, v) = 0$ (es ist sogar $\omega(u, v) > 0$, doch wollen wir den Beweis vermeiden).

Anderseits erfüllt die Funktion $\theta_1(u, v)$, die wir jetzt mit $\theta(u, v)$ bezeichnen, die Gleichung (5. 1):

$$\frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\theta_u + F_{12}\theta_v) + \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\theta_u + F_{22}\theta_v) + q\,\theta + \lambda_1(c)\,k\,\theta = 0 \tag{5.16}$$

und die Nebenbedingung (5. 2):

$$(F_{12}u_s - F_{11}v_s)\theta_u + (F_{22}u_s - F_{12}v_s)\theta_v + \lambda_1(c)(h + c)\theta = 0. \tag{5.17}$$

Wir multiplizieren (5. 13) mit θ und (5. 16) mit ω und subtrahieren. Dann integrieren wir über $\mathcal{S}$ und wenden auf die Differentialglieder die Greensche Formel an:

---

[1] Vgl. LICHTENSTEIN, loc. cit. (Monatshefte), S. 12.

$$
(5.\ 18)\qquad \begin{aligned}
&\int_{C} \{\omega\,[(F_{12}u_s - F_{11}v_s)\,\theta_u + (F_{22}u_s - F_{12}v_s)\,\theta_v] - \\
&\qquad\qquad - \theta\,[(F_{12}u_s - F_{11}v_s)\,\omega_u + (F_{22}u_s - F_{12}v_s)\,\omega_v]\}\,ds + \\
&\qquad + \iint_{S} [\bar{\lambda} - \lambda_1(c)]\,k\,\omega\,\theta\,du\,dv = 0.
\end{aligned}
$$

Im ersten Integral setzen wir für den Koëffizienten von ω den aus (5. 17) erhaltenen Wert und für ω den Wert 1 nach (5. 14). Das zweite Integral ist positiv nach (5. 12), (5. 4), (5. 15) und (5. 7). Es folgt daraus

$$
\int_{C} \{-\lambda_1(c)(h + c)\,\theta - \theta\,[(F_{12}u_s - F_{11}v_s)\,\omega_u + (F_{22}u_s - F_{12}v_s)\,\omega_v]\}\,ds < 0,
$$

oder

$$
(5.\ 19)\qquad \int_{C} [\lambda_1(c)(h + c) + (F_{12}u_s - F_{11}v_s)\,\omega_u + (F_{22}u_s - F_{12}v_s)\,\omega_v]\,\theta\,ds > 0.
$$

Betrachten wir den in den eckigen Klammern enthaltenen Ausdruck. Strebt c gegen $-\infty$, so ist

$$
\lambda_1(c) \to \lambda_0
$$

also

$$
\lambda_1(c)(h + c) \to -\infty.
$$

Für genügend grosses negatives c ist also der betrachtete Ausdruck negativ. Da θ nach (5. 7) positiv ist, so führt (5. 19) zum Widerspruch.

Damit ist die Ungleichung (5. 10) als unmöglich anerkannt und die Behauptung 3. bewiesen.

4 a. *Die Funktion $\lambda_1(c)$ ist nach links (und nach oben) halbstetig.*

Es sei für einen Wert c_0 von c die Eigenfunktion (5. 7) gleich $\theta_1(u, v)$. Dann folgt aus der Grundeigenschaft von $1/\lambda_1(c)$, dass für jedes c

$$
\frac{1}{\lambda_1(c)} \geqq \iint_{S} k\,\theta_1^2\,du\,dv + \int_{C} (h + c)\,\theta_1^2\,ds,
$$

oder

$$
\frac{1}{\lambda_1(c)} \geqq \iint_{S} k\,\theta_1^2\,du\,dv + \int_{C} (h + c_0)\,\theta_1^2\,ds + (c - c_0)\int_{C} \theta_1^2\,ds,
$$

oder endlich

(5. 20) $$\frac{1}{\lambda_1(c)} \geqq \frac{1}{\lambda_1(c_0)} + (c - c_0) \int_{\mathfrak{C}} \theta_1^2 \, ds.$$

Also ist $1/\lambda_1(c)$ nach unten halbstetig, und $\lambda_1(c)$ nach oben halbstetig. Da aber $\lambda_1(c)$ nicht wachsend ist, ist es auch nach links halbstetig.

Nebenbei sei bemerkt, dass nach (5. 20) $\lambda_1(c)$ nicht nur »nicht wachsend», sondern auch *abnehmend* ist.

4 b. *Die Funktion $\lambda_1(c)$ ist nach rechts (und nach unten) halbstetig.*

Wir betrachten die zweite Randwertaufgabe, die aus unserem Problem (5. 1), (5. 2) für verschwindendes λ entsteht:

$$\frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\,\omega_u + F_{12}\,\omega_v) + \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\,\omega_u + F_{22}\,\omega_v) + q\,\omega = 0,$$

$$(F_{12}\,u_s - F_{11}\,v_s)\,\omega_u + (F_{22}\,u_s - F_{12}\,v_s)\,\omega_v = 0.$$

Es existiert wegen (5. 3) für diese Aufgabe eine Greensche Funktion, die wir mit $\Gamma(u, v; \tilde{u}, \tilde{v})$ bezeichnen. Ist $\theta(u, v)$ die Lösung des Problems (5. 1), (5. 2), so folgt, wie im Falle von (5. 18), unter Benutzung der Greenschen Formel und nach einem Grenzübergang im Punkte $(\tilde{u}, \tilde{v})$ die Gleichung

(5. 21) $$\frac{\lambda}{2\pi}\left[\iint_{\mathfrak{S}} k\,\Gamma\,\theta\,du\,dv + \int_{\mathfrak{C}} (h + c)\,\Gamma\,\theta\,du\,dv\right] = \theta(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Wir haben vor uns eine homogene Fredholmsche Gleichung zweiter Art. Sie ist von einem allgemeineren Typus, als gewöhnlich, weil neben dem Doppelintegral ein einfaches Integral auftritt. Doch lässt sie sich, wie üblich, behandeln. Der Kern hat eine Singularität vom logarithmischen Typus für $u = \tilde{u}$, $v = \tilde{v}$.

Unseres $\lambda_1(c)$ ist gleich dem kleinsten positiven Eigenwert der Gleichung (5. 21). Wir dürfen auf (5. 21) die von Hilbert[1] auf singuläre Kerne übergetragene Fredholmsche Theorie anwenden. Also sei

$$D(\lambda, c)$$

der Fredholmsche Nenner in Hilbertscher Fassung. Er ist eine ganze Funktion von λ und c. Die kleinste positive Wurzel der Gleichung

[1] HILBERT, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (1912), SS. 30—38. Auch kann man die Poincarésche Methode für singuläre Kerne benutzen; vgl. GOURSAT, Cours d'analyse mathématique 3 (1923), SS. 384—386.

$$D(\lambda, c) = 0 \tag{5.22}$$

in bezug auf λ ist gleich dem Eigenwert $\lambda_1(c)$. Wir wissen schon, dass $\lambda_1(c)$ eine abnehmende Funktion von c ist.

Wählen wir einen bestimmten Wert c_0 von c. Dann existiert die rechtseitige Grenze von $\lambda_1(c)$, wenn c gegen c_0 von rechts strebt. Wir bezeichnen

$$\lim_{c \to c_0 + 0} \lambda_1(c) = \bar{\lambda}.$$

Dann ist sicher (der Monotonität von $\lambda_1(c)$ wegen)

$$0 < \bar{\lambda} \leqq \lambda_1(c_0). \tag{5.23}$$

Da für jedes c

$$D[\lambda_1(c), c] = 0,$$

so folgt aus der Stetigkeit von $D(\lambda, c)$, dass auch nach dem Grenzübergang

$$D(\bar{\lambda}, c_0) = 0.$$

Also ist $\bar{\lambda}$ eine Wurzel der Gleichung (5. 22) für $c = c_0$, und da $\lambda_1(c_0)$ die kleinste positive Wurzel dieser Gleichung ist, muss man in (5. 23) das Ungleichheitszeichen ausschliessen.

Wir sehen also, dass

$$\lim_{c \to c_0 + 0} \lambda_1(c) = \lambda_1(c_0),$$

womit die Behauptung **4 b.** bewiesen worden ist.

Aus **4 a.** und **4 b.** folgt

4. *Die Funktion $\lambda_1(c)$ ist stetig.*

Zusammenfassend können wir sagen, dass *der kleinste positive Eigenwert $\lambda_1(c)$ des dritten Randwertproblems* (5. 1), (5. 2) *vom kleinsten positiven Eigenwert λ_1^* des ersten Randwertproblems* (5. 1), (5. 8) *stetig bis Null abnimmt, wenn c von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst.*

C. Es bleibt noch den weggelassenen Beweis zu vervollständigen, dass die Eigenfunktion $\theta(u, v)$, die dem kleinsten positiven Eigenwert entspricht, nicht nur im Innern von $\mathcal{S}$, sondern auch auf dem Rande $\mathcal{C}$ positiv bleibt.

Setzen wir im Gegensatz voraus, dass in einem Punkte $P(u, v)$ des Randes $\mathcal{C}$

$$\theta(u, v) = 0. \tag{5.24}$$

Dann folgt aus (5. 2), dass in P

$$(F_{12} u_s - F_{11} v_s)\theta_u + (F_{22} u_s - F_{12} v_s)\theta_v = 0. \tag{5. 25}$$

Anderseits nimmt $\theta(u, v)$ auf dem Rande $\mathcal{C}$ sein Minimum 0 im Punkte P an. Wir haben also in P

$$\theta_s = 0,$$

oder

$$u_s \theta_u + v_s \theta_v = 0. \tag{5. 26}$$

Aus (5. 25) und (5. 26) folgt unter Benutzung der Legendre-Brunaccischen Bedingung, dass in P

$$\theta_u = 0, \quad \theta_v = 0. \tag{5. 27}$$

Jetzt üben wir eine analytische Transformation der Variabeln u, v

$$u = u(u', v'), \quad v = v(u', v')$$

mit positiver Determinante,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} > 0,$$

aus, welche die Gleichung (5. 1) in die Normalform

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u'^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v'^2} + \Psi\left(\omega, \frac{\partial \omega}{\partial u'}, \frac{\partial \omega}{\partial v'}\right) = 0$$

überführt. Hier ist Ψ eine lineare Funktion ihrer Argumente.

Der Einfachkeit von Bezeichnungen halber behalten wir für die Variabeln u', v' alte Symbole u, v. Dann erfüllt $\theta(u, v)$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \Psi\left(\theta, \frac{\partial \theta}{\partial u}, \frac{\partial \theta}{\partial v}\right) = 0. \tag{5. 28}$$

Es sind im Punkte P wieder die Beziehungen (5. 24), (5. 27) erfüllt.

Es bezeichne jetzt n eine solche Zahl, dass im Punkte P:

1. für $m < n$ und für jedes zulässige k

$$\frac{\partial^m \theta}{\partial u^k \partial v^{m-k}} = 0,$$

2. wenigstens für ein k

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial u^k \partial v^{n-k}} \neq 0.$$

Es ist wegen (5. 24), (5. 27)

$$n \geqq 2. \tag{5. 29}$$

Jetzt differenzieren wir die Gleichung (5. 28) $(n - k - 2)$-mal nach u und k-mal nach v. Wir erhalten

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial u^{n-k} \partial v^k} + \frac{\partial^n \theta}{\partial u^{n-k-2} \partial v^{k+2}} + \Psi_{n,k}\left(\theta, \frac{\partial \theta}{\partial u}, \frac{\partial \theta}{\partial v}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}, \cdots\right) = 0,$$

wo $\Psi_{n,k}$ eine lineare Funktion von θ und ihren Ableitungen bis die Ordnung $(n - 1)$ einschliesslich ist. Aus der Definition der Zahl n folgt es, dass im Punkte P

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial u^{n-k} \partial v^k} + \frac{\partial^n \theta}{\partial u^{n-k-2} \partial v^{k+2}} = 0. \tag{5. 30}$$

Wir setzen der Kürze halber:

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial u^n} \equiv A, \quad \frac{\partial^n \theta}{\partial u^{n-1} \partial v} \equiv B.$$

Dann ist nach (5. 30) für gerades k

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial u^{n-k} \partial v^k} = (-1)^{\frac{k}{2}} A = i^k A, \tag{5. 31}$$

und für ungerades k

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial u^{n-k} \partial v^k} = (-1)^{\frac{k-1}{2}} B = i^{k-1} B. \tag{5. 32}$$

Nach der Definition von n sind nicht A und B beide gleich Null, und wir setzen

$$A = R \cos \Phi, \quad B = R \sin \Phi,$$

$$(R = \sqrt{A^2 + B^2} > 0)$$

oder

$$A = \frac{1}{2} R (e^{i\Phi} + e^{-i\Phi}), \quad B = \frac{1}{2i} R (e^{i\Phi} - e^{-i\Phi}).$$

Die Formeln (5. 31) und (5. 32) schreiben wir: für gerades k

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial u^{n-k} \partial v^k} = \frac{1}{2} R (e^{i\Phi} + e^{-i\Phi}) i^k = \frac{1}{2} R [e^{i\Phi} (-i)^k + e^{-i\Phi} i^k], \tag{5. 33}$$

und für ungerades k

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial u^{n-k} \partial v^k} = \frac{1}{2i} R (e^{i\Phi} - e^{-i\Phi}) i^{k-1} = \frac{1}{2} R [e^{i\Phi} (-i)^k + e^{-i\Phi} i^k]. \tag{5. 34}$$

Wir haben damit denselben Ausdruck für jedes k gewonnen.

Nach der Definition der Zahl n ist das n-te Differential von $\theta(u, v)$ das Differential von der niedrigsten Ordnung, das im Punkte P nicht verschwindet. Es ist für das Verhalten von $\theta(u, v)$ im Punkte P massgebend. Sind $(u + \alpha)$, $(v + \beta)$ die Koordinaten eines Punktes Q in Umgebung von P, welcher im Innern von $\mathcal{S}$ liegt, so ist das n-te Differential durch die Form

$$H(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n \theta}{\partial u^{n-k} \partial v^k} \alpha^{n-k} \beta^k \tag{5.35}$$

gegeben.

Wir setzen (für $\alpha^2 + \beta^2 > 0$)

$$\alpha = \varrho \cos \varphi, \quad \beta = \varrho \sin \varphi, \tag{5.36}$$

und führen in die Form (5.35) die Werte (5.33) und (5.34) ein:

$$H = \frac{1}{2} R\, e^{i\Phi} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-i)^k \alpha^{n-k} \beta^k + \frac{1}{2} R\, e^{-i\Phi} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \alpha^{n-k} \beta^k,$$

woraus

$$H = \frac{1}{2} R\, e^{i\Phi} (\alpha - i\beta)^n + \frac{1}{2} R\, e^{-i\Phi} (\alpha + i\beta)^n,$$

$$H = \frac{1}{2} R\, e^{i\Phi} \varrho^n e^{-in\varphi} + \frac{1}{2} R\, e^{-i\Phi} \varrho^n e^{in\varphi}, \tag{5.37}$$

$$H = R \varrho^n \cos(n\varphi - \Phi).$$

Sind

$$u = u(s), \quad v = v(s)$$

die Gleichungen der Kurve $\mathcal{C}$, so sind im Punkte P

$$u_s, \quad v_s$$

die Richtungskoëffizienten der positiven Tangente an die Kurve $\mathcal{C}$. Wir setzen

$$u_s = r \cos \psi, \quad v_s = r \sin \psi. \tag{5.38}$$

Ist ϱ genügend klein, so muss der Punkt Q an positiver Seite der Tangente (im Innern von $\mathcal{S}$) liegen, woraus die Ungleichung

$$u_s \beta - v_s \alpha > 0$$

folgt. Nach (5.36) und (5.38) finden wir

$$\sin(\varphi - \psi) > 0. \tag{5.39}$$

Der Winkel φ kann wirklich alle (5. 39) erfüllenden Werte durchlaufen. Er nimmt die Werte

$$\psi < \varphi < \psi + \pi \tag{5. 40}$$

und alle modulo 2π kongruenten Werte an.

Kehren wir zur letzten Gestalt (5. 37) des Differentials H zurück, so sehen wir, dass der Winkel $n\varphi - \Phi$ sich um $n\pi$ ändert, wenn φ die Werte (5. 40) durchläuft. Da nach (5. 20) $n \geqq 2$, so durchläuft der Winkel $n\varphi - \Phi$ alle möglichen Werte. Also wächselt das Differential (5. 37) sein Vorzeichen, obwohl der Punkt Q im Innern von $\mathcal{S}$ bleibt.

Wir schliessen daraus, dass die Funktion $\theta(u, v)$, im Bereiche $\mathcal{S}$ betrachtet, im Punkte P kein (einseitiges) Minimum annehmen kann. Da sie aber in P gleich Null sein sollte, und keiner negativen Werte fähig ist, so führt die Annahme (5. 24) in P auf einen Widerspruch. Die Eigenfunktion $\theta(u, v)$ bleibt also auch auf dem Rande $\mathcal{C}$ positiv.

6. Das Flächenproblem bei fester Begrenzung.

A. Wir betrachten dieses Problem nur der Vollständigkeit halber. Es bedarf der in vorigen Paragraphen enthaltenen Ergebnisse nicht und lässt sich mit denselben Methoden, wie das Funktionenproblem, behandeln. Wir werden es ganz kurz fassen.

Für das Problem bei fester Begrenzung besteht *das assozierte Differentialproblem* in der Differentialgleichung

$$\Delta(\omega) \equiv \frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\,\omega_u + F_{12}\,\omega_v) + \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\,\omega_u + F_{22}\,\omega_v) + q\,\omega + \lambda\,k\,\omega = 0 \tag{6. 1}$$

unter der Nebenbedingung

$$\omega(s) = 0 \tag{6. 2}$$

am Rande. Es ist ein erstes Randwertproblem. Die Eigenwerte dieses Problems sollen *Eigenwerte des Flächenproblems bei fester Begrenzung* heissen.

Wir machen folgende Voraussetzungen:

I. $\mathfrak{S}_0$ *ist eine analytische Extremalfläche ohne Doppelpunkte, von einer analytischen regulären geschlossenen Kurve* $\mathfrak{C}$ *begrenzt.*

II. *Auf* $\mathfrak{S}_0$ *ist die starke Legendre-Brunaccische Bedingung für das Minimum erfüllt.*

III. *Auf $\mathfrak{S}_0$ ist die starke Weierstrasssche Bedingung für das Minimum erfüllt.*

IV. *Der kleinste positive Eigenwert genügt der Ungleichung*

$$\lambda_1 > 1. \tag{6. 3}$$

Wir behaupten, dass

das Integral I für $\mathfrak{S}_0$ ein starkes, eigentliches, relatives Minimum in bezug auf die Flächen, die mit $\mathfrak{S}_0$ denselben Rand $\mathfrak{C}$ haben, annimmt.

Wir beschränken uns auf die Vergleichsflächen, die stetige Bilder der Kreisscheibe sind und in eine endliche Anzahl glatter Teile sich zerstückeln lassen.

Aus der Voraussetzung IV. folgt es, ganz analog wie bei Lichtenstein[1] für Funktionenproblem, dass die Gleichung (6. 1) für $\lambda = 1$ eine positive Lösung $\theta(u, v)$ auf der ganzen Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ (samt der Begrenzung) hat. Doch ist für $\lambda = 1$:

$$\Delta(\omega) = \frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\,\omega_u + F_{12}\,\omega_v) + \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\,\omega_u + F_{22}\,\omega_v) + (q + k)\,\omega = 0,$$

was nach (4. 22) mit der Jacobischen Gleichung (2. 20) gleichbedeutend ist. Also hat die Jacobische Gleichung

$$J(\omega) = 0$$

eine auf $\mathfrak{S}_0$ positive Lösung $\theta(u, v)$.

Dann lässt sich die Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ mit einem Extremalfeld $\mathcal{F}$ umgeben.[2] Es lässt sich der Voraussetzungen II. und III. wegen aus $\mathcal{F}$ ein Teilfeld $\mathcal{F}_0$ aussondern, in dem noch die Weierstrasssche Bedingung erfüllt ist.[3] Auf die Vergleichflächen $\bar{\mathfrak{S}}$, die im Felde $\mathcal{F}_0$ liegen, kann man die Weierstrasssche Formel

$$I(\bar{\mathfrak{S}}) - I(\mathfrak{S}_0) = \int\!\!\int_{\bar{\mathfrak{S}}} \mathcal{E}(x, y, z, l, m, n, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n})\,du\,dv$$

anwenden[4], woraus die Ungleichung

$$I(\bar{\mathfrak{S}}) \geqq I(\mathfrak{S}_0) \tag{6. 4}$$

folgt. Es lässt sich wie üblich zeigen, dass im Felde $\mathcal{F}_0$ das Gleichheitszeichen in (6. 4) nur für $\bar{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}_0$ stattfinden kann. Damit ist die Behauptung bewiesen.

---

[1] LICHTENSTEIN, loc. cit. (Monatshefte, auch Math. Zeitschrift 5).

[2] Vgl. KERNER, Beitrag 1.

[3] Vgl. KERNER, Beitrag 3.

[4] Vgl. KERNER, Beitrag 2.

B. Sind die Voraussetzungen I., II., III. erfüllt, und *soll das Integral I für $\mathfrak{S}_0$ wenigstens ein schwaches, uneigentliches, relatives Minimum annehmen*, so muss die folgende Bedingung erfüllt sein:

IV a. *Der kleinste positive Eigenwert genügt der Ungleichung*

$$\lambda_1 \geqq 1.$$

Nehmen wir im Gegensatz an, dass

$$\lambda_1 < 1, \tag{6. 5}$$

und sei $\theta(u, v)$ die entsprechende Eigenfunktion des assozierten Problems (6. 1), (6. 2).

Für das Problem bei fester Begrenzung lässt sich die zweite Variation des Integrals I in der Form

$$\delta^2 I(\omega) = \iint\limits_{\mathfrak{S}_0} \omega\, J(\omega)\, du\, dv$$

darstellen, wo die Funktion $\omega(u, v)$ die Bedeutung (2. 19) hat und auf dem Rande $\mathfrak{C}$ verschwindet. Wir berechnen $\delta^2 I(\omega)$ für $\omega = \theta$:

$$\delta^2 I(\theta) = \iint\limits_{\mathfrak{S}_0} \theta \left[-\frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\theta_u + F_{12}\theta_v) - \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\theta_u + F_{22}\theta_v) - q\theta - k\theta \right] du\, dv$$

oder nach der von der Funktion $\theta(u, v)$ für $\lambda = \lambda_1$ erfüllten Gleichung (6. 1):

$$\delta^2 I(\theta) = -\iint\limits_{\mathfrak{S}_0} \theta(1 - \lambda_1)\, k\,\theta\, du\, dv =$$

$$= -(1 - \lambda_1) \iint\limits_{\mathfrak{S}_0} k\,\theta^2\, du\, dv.$$

Also ist nach (4. 22), (6. 5) die zweite Variation für $\theta(u, v)$ negativ.

Wir lassen den Beweis des Satzes, dass im Falle des schwachen, uneigentlichen, relativen Minimums die zweite Variation nicht negativ werden kann, aus. Es folgt aus diesem Satze, dass die Ungleichung (6. 5) nicht erfüllt sein kann, womit die Behauptung IV a. bewiesen worden ist.

Im Falle der festen Begrenzung darf man die Gleichung (6. 1) durch eine einfachere

$$(6.6)\qquad \frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\,\omega_u + F_{12}\,\omega_v) + \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\,\omega_u + F_{22}\,\omega_v) - \lambda\,F_0\,\omega = 0$$

ersetzen. Alle Behauptungen dieses Paragraphen lassen sich für die Gleichung (6. 6) beweisen. Da aber in unten folgenden Problemen die Differentialgleichung (6. 6) nicht ausreicht, wollten wir der Einheitlichkeit halber schon im Falle der festen Begrenzung uns der Gleichung (6. 1) bedienen.

7. Das Flächenproblem bei variabler Begrenzung.

A. Es sei jetzt wieder eine analytische Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ gegeben, die von einer analytischen Kurve $\mathfrak{C}$ begrenzt ist. Längs $\mathfrak{C}$ sei eine analytische reguläre Fläche $\mathfrak{T}$ geführt, die $\mathfrak{S}_0$ transversal schneidet. Das vorliegende Problem besteht in der Untersuchung, ob $\mathfrak{S}_0$ ein Minimum in bezug auf Vergleichsflächen, welche ihren Rand auf der Fläche $\mathfrak{T}$ haben, schafft.

In jedem Punkt P der Kurve $\mathfrak{C}$ führen wir eine zur Transversalfläche $\mathfrak{T}$ normale Ebene, welche die zur Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ transversale Richtung in P enthält. Diese Ebene schneidet $\mathfrak{T}$ längs einer Kurve. Wir bezeichnen mit R den Krümmungsradius dieser Kurve im Punkte P. Wir zählen R positiv nach der inneren (positiven) Seite von $\mathfrak{T}$. Natürlich ist R eine Funktion $R(s)$ des Parameters s auf der Randkurve $\mathfrak{C}$.

Wir führen den Formeln (4. 11) und (4. 12) gemäss die Funktionen $A(s)$, $B(s)$ ein, die für die Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ und die Kurve $\mathfrak{C}$ auf ihr berechnet werden sollen. Dann führen wir die Funktion $h(s)$ nach der Formel (4. 16) ein.

Wir erinnern noch an die wichtige Eigenschaft: wenn für eine andere Transversalfläche $\mathfrak{T}'$ längs $\mathfrak{C}$

$$h' > h,$$

so liegt $\mathfrak{T}'$ an der inneren Seite von $\mathfrak{T}$.

Das assozierte Differentialproblem für das Flächenproblem bei variabler Begrenzung besteht bei gegebener Transversalfläche $\mathfrak{T}$ in der Differentialgleichung

$$(7.1)\qquad \Lambda(\omega) \equiv \frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\,\omega_u + F_{12}\,\omega_v) + \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\,\omega_u + F_{22}\,\omega_v) + q\,\omega + \lambda\,k\,\omega = 0$$

unter der Nebenbedingung

$$(7.2)\qquad \Gamma(\omega) \equiv (F_{12}\,u_s - F_{11}\,v_s)\,\omega_u + (F_{22}\,u_s - F_{12}\,v_s)\,\omega_v + \lambda\,h\,\omega = 0$$

am Rande $\mathfrak{C}$. Die Eigenwerte dieses Problems sollen *Eigenwerte des vorgelegten Flächenproblems bei variabler Begrenzung* heissen.

Wir machen folgende Voraussetzungen:

I. $\mathfrak{S}_0$ *ist eine analytische Extremalfläche ohne Doppelpunkte, von einer analytischen regulären geschlossenen Kurve* $\mathfrak{C}$ *begrenzt.*

I'. $\mathfrak{T}$ *ist eine analytische reguläre Fläche, welche die Randkurve* $\mathfrak{C}$ *im Innern enthält und längs* $\mathfrak{C}$ *die Extremalfläche* $\mathfrak{S}_0$ *transversal schneidet.*

II. *Auf* $\mathfrak{S}_0$ *ist die starke Legendre-Brunaccische Bedingung für das Minimum erfüllt.*

III. *Auf* $\mathfrak{S}_0$ *ist die starke Weierstrasssche Bedingung für das Minimum erfüllt.*

IV. *Der kleinste positive Eigenwert genügt der Ungleichung*

$$\lambda_1 > 1. \tag{7.3}$$

Wir erinnern ausserdem an die allgemeine Voraussetzung (2. 10), die für unseren Satz wesentlich ist.

Wir behaupten, dass

das Integral I *für* $\mathfrak{S}_0$ *ein starkes, eigentliches, relatives Minimum in bezug auf die Flächen, deren Rand auf der Transversalfläche* $\mathfrak{T}$ *liegt und mit* $\mathfrak{C}$ *gleichorientiert ist, annimmt.*

Wir sollen noch die Annahme über Randorientierung ausklären. Bei relativem Minimum soll nicht nur die Vergleichsfläche $\overline{\mathfrak{S}}$ in der Umgebung von $\mathfrak{S}_0$, sondern auch ihr Rand $\overline{\mathfrak{C}}$ auf der Transversalfläche $\mathfrak{T}$ *in der Umgebung von* $\mathfrak{C}$ liegen. Wir dürfen diese Umgebung von $\mathfrak{C}$ als einen topologischen Kreisring annehmen, den wir fortan mit demselben Symbol $\mathfrak{T}$ bezeichnen werden. Dann ist eine geschlossene Kurve auf $\mathfrak{T}$ mit dem Rande $\mathfrak{C}$ *gleichorientiert,* wenn sie, als 1-Kette betrachtet, mit $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{T}$ homolog ist.

Was die Vergleichsflächen betrifft, so sind sie wieder stetige Bilder der Kreisscheibe, die sich aus einer endlichen Anzahl glatter Flächenstücke zusammensetzen.

Wir betrachten das allgemeinere Problem

$$\Lambda(\omega) \equiv \frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\,\omega_u + F_{12}\,\omega_v) + \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\,\omega_u + F_{22}\,\omega_v) + q\,\omega + \lambda\,k\,\omega = 0 \tag{7.4}$$

mit der Nebenbedingung

$$\Gamma_c(\omega) \equiv (F_{12} u_s - F_{11} v_s)\,\omega_u + (F_{22} u_s - F_{12} v_s)\,\omega_v + \lambda(h + c)\,\omega = 0 \tag{7.5}$$

am Rande $\mathfrak{C}$. Das ist gerade das im Paragraphen 5 betrachtete Problem (5. 1), (5. 2).

Für $c = 0$ ist dieses Problem mit dem assozierten Problem (7. 1), (7. 2) identisch, woraus

$$\lambda_1(0) = \lambda_1 \tag{7.6}$$

folgt. Wächst c von 0 bis ∞, so nimmt die Funktion $\lambda_1(c)$ von λ_1 bis 0 stetig ab (siehe den Paragraphen 5 B). Es gibt also nach der Voraussetzung IV. einen positiven Wert $\bar{c}$ von c, für den

$$\lambda_1(\bar{c}) = 1, \tag{7.7}$$

$$\bar{c} > 0. \tag{7.8}$$

Wir setzen in (7. 5) $c = \bar{c}$ und bezeichnen mit $\theta(u, v)$ die Eigenfunktion des Problems (7. 4), (7. 5), welche dem kleinsten positiven Eigenwert (7. 7) entspricht. Wir schreiben explizit

$$\Gamma_{\bar{c}}(\omega) \equiv (F_{12} u_s - F_{11} v_s)\,\theta_u + (F_{22} u_s - F_{12} v_s)\,\theta_v + [h(s) + \bar{c}]\,\theta = 0. \tag{7.9}$$

Es ist nach dem Paragraphen 5 C

$$\theta(u, v) > 0$$

im Innern und am Rande der Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$. Wegen (7. 4) erfüllt $\theta(u, v)$ die Jacobische Gleichung (2. 20), die nach (4. 22) mit (7. 4) für $\lambda = 1$ identisch ist. Nach der Theorie des Extremalenfeldes[1] können wir also die Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ in ein Feld $\mathcal{F}_1$ einbetten, das von einer analytischen Extremalenschar $\mathfrak{S}_a$,

$$x = x(u, v, a),$$
$$y = y(u, v, a),$$
$$z = z(u, v, a)$$

gebildet wird, so, dass für $a = 0$ die Extremalfläche $\mathfrak{S}_a$ mit $\mathfrak{S}_0$ zusammenfällt, und dass für $a = 0$ die Beziehung

$$l\,x_a + m\,y_a + n\,z_a = \theta(u, v) \tag{7.10}$$

---

[1] Vgl. KERNER, Beitrag 1, insbesondere Paragraph 6.

statt findet. Wir bezeichnen mit $\varDelta(u, v, a)$ die Funktionaldeterminante der Schar $\mathfrak{S}_a$. Dann besagt (7. 10)

$$\varDelta(u, v, 0) = \theta(u, v). \tag{7. 11}$$

Wir einschränken das Feld $\mathcal{F}_1$ bis ein Teilfeld $\mathcal{F}_2$ so, dass in $\mathcal{F}_2$ noch die Weierstrasssche Bedingung erfüllt sei.[1]

Jetzt bilden wir die Transversalfläche $\mathfrak{T}'$ der Schar $\mathfrak{S}_a$, indem wir durch jeden Punkt P der Kurve $\mathfrak{C}$ eine Transversalkurve $\mathfrak{D}$ führen. Wir einschränken das Feld $\mathcal{F}_2$ bis ein Teilfeld $\mathcal{F}$ so, dass die in $\mathcal{F}$ liegende Transversalfläche ein topologischer Kreisring wird und das Feld $\mathcal{F}$ in zwei Teile $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$ zerschneidet, von denen der erste $\mathcal{F}'$ einer Kugel homöomorph ist (wir nennen ihn *den inneren Teil des Feldes* $\mathcal{F}$), und der zweite $\mathcal{F}''$ einem Kreistorus homöomorph ist (wir nennen ihn *den äusseren Teil des Feldes* $\mathcal{F}$).

Man kann $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$ folgendermassen konstruieren: man prolongiert $\mathfrak{S}_0$ bis eine $\mathfrak{S}_0$ umgebende Extremalfläche $\mathfrak{S}'_0$, die von einer glatten Kurve $\mathfrak{C}'$ begrenzt ist, und lässt die Zahl a die Werte

$$-d \leqq a \leqq d$$

durchlaufen, wo d eine positive Zahl bedeutet. Führt man durch $\mathfrak{C}'$ eine Transversalfläche des Feldes (nur für die betrachteten Werte von a), so schneidet sie aus dem Felde ein Teilfeld, der in $\mathcal{F}_2$ liegt, falls $\mathfrak{S}'_0$ nicht zu viel über $\mathfrak{S}_0$ heraussteckt und d hinreichend klein ist. Dann wird $\mathcal{F}$ sicher von $\mathfrak{T}$ in zwei Teile, $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$ zerschnitten, die eine Art von Zylindern (auf der Fläche $\mathfrak{S}_0$ beziehungsweise $\mathfrak{S}'_0 - \mathfrak{S}_0$ basiert) bilden.

Wir bezeichnen mit $h'(s)$ die Funktion, die für die Fläche $\mathfrak{T}'$ in derselben Weise, wie $h(s)$ für die Fläche $\mathfrak{T}$, berechnet wird. Wir wenden auf die Schar $\mathfrak{S}_a$ und die Transversalfläche $\mathfrak{T}'$ die Fundamentalformel (4. 17) an:

$$(F_{12}\, u_s - F_{11}\, v_s)\, \varDelta_u + (F_{22}\, u_s - F_{12}\, v_s)\, \varDelta_v + h'(s)\, \varDelta = 0. \tag{7. 12}$$

Wir vergleichen die Formeln (7. 9) und (7. 12), die wegen (7. 11) von derselben Funktion erfüllt sind. Es folgt daraus, dass

$$h'(s) = h(s) + \bar{c}$$

oder nach (7. 8)

$$h'(s) > h(s).$$

Also liegt die Transversalfläche $\mathfrak{T}'$ *an innerer Seite* der Fläche $\mathfrak{T}$.

[1] Vgl. KERNER, Beitrag 3.

Da die Transversalfläche $\mathfrak{T}'$ den Teil $\mathcal{F}'$ des Feldes $\mathcal{F}$ vom Teile $\mathcal{F}''$ trennt, so liegt die Fläche $\mathfrak{T}$ in der Umgebung der Berührungskurve $\mathfrak{C}$ im Bereiche $\mathcal{F}''$. Wir beschränken uns auf eine (im Bereiche $\mathcal{F}''$ liegende) kreisringformige Umgebung der Kurve $\mathfrak{C}$ auf der Fläche $\mathfrak{T}$; wir bezeichnen diese Umgebung dem oben gesagten gemäss mit demselben Symbol $\mathfrak{T}$.

Wir wählen jetzt eine Vergleichsfläche $\overline{\mathfrak{S}}$ von dem oben beschriebenen Typus, die ganz im Felde $\mathcal{F}$ liegt, und deren Rand $\overline{\mathfrak{C}}$ auf der Fläche $\mathfrak{T}$ liegt und darin dem Rande $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{S}_0$ homolog ist. Wir wollen beweisen, dass

$$I(\overline{\mathfrak{S}}) > I(\mathfrak{S}_0), \tag{7. 13}$$

falls die Fläche $\overline{\mathfrak{S}}$ nicht mit der Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ zusammenfällt.

Wir approximieren $\overline{\mathfrak{S}}$ mit einer analytischen regulären Fläche, die ihren (analytischen) Rand auch auf der Fläche $\mathfrak{T}$ hat. Diese approximierende Fläche approximieren wir ihrerseits mit einer anderen Fläche $\mathfrak{R}$ von derselben Beschaffenheit, die nirgends die Transversalfläche $\mathfrak{T}'$ berührt. Die Approximation soll so geführt werden, dass in den einander entsprechenden Punkten von $\overline{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{R}$ die Richtungen der Tangentebenen an diese Flächen erforderlich wenig voneinander abweichen. Dann kann auch der Unterschied der Integrale $I(\overline{\mathfrak{S}})$ und $I(\mathfrak{R})$ beliebig klein gemacht werden.

Der Durchschnitt von $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{R}$ besteht aus einer endlichen Anzahl von analytischen regulären geschlossenen Kurven (mit eventuellen Doppelpunkten). Wir erteilen diesen Kurven einen solchen positiven Sinn, dass auf der Fläche $\mathfrak{R}$ die positive Seite von diesen Kurven (vgl. Paragraph 4 A) in dem Bereiche $\mathcal{F}'$ liegt. Die Fläche $\mathfrak{R}$ ist in zwei Teile $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ zerschnitten, von denen der erste in $\mathcal{F}'$ und der zweite in $\mathcal{F}''$ liegt. Der Rand von $\mathfrak{R}'$ ist samt seiner Orientierung von den oben betrachteten Kurven auf $\mathfrak{T}'$ gebildet. Er ist auf der Fläche $\mathfrak{T}'$, als 1-Kette betrachtet, dem Rande $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{S}_0$ homolog.

Wir sind imstande auf die Teilfläche $\mathfrak{R}'$ die Weierstrasssche Formel

$$I(\mathfrak{R}') - I(\mathfrak{S}_0) = \iint\limits_{\mathfrak{R}'} \mathcal{E}(x, y, z, l, m, n, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n})\, du\, dv \tag{7. 14}$$

anwenden.[1] In der Tat, liegt $\mathfrak{R}'$ in dem Felde $\mathcal{F}$ und hat einen auf der Transversalfläche $\mathfrak{T}'$ des Feldes $\mathcal{F}$ liegenden, zu $\mathfrak{C}$ homologen Rand. Da im Felde $\mathcal{F}$ die Weierstrasssche Bedingung für das Minimum erfüllt ist, so folgt aus (7. 14)

[1] Vgl. KERNER, Beitrag 2.

$$I(\mathfrak{R}') \geqq I(\mathfrak{S}_0). \tag{7.15}$$

Anderseits ist nach (2. 10)

$$I(\mathfrak{R}'') \geqq 0,$$

woraus

$$I(\mathfrak{R}) = I(\mathfrak{R}') + I(\mathfrak{R}'') \geqq I(\mathfrak{S}_0). \tag{7.16}$$

Es folgt daraus, dass auch

$$I(\overline{\mathfrak{S}}) \geqq I(\mathfrak{S}_0). \tag{7.17}$$

Wäre es im Gegensatz

$$I(\overline{\mathfrak{S}}) - I(\mathfrak{S}_0) < 0, \tag{7.18}$$

so könnte man die Approximation durch $\mathfrak{R}$ so weit führen, dass

$$|I(\mathfrak{R}) - I(\overline{\mathfrak{S}})| < I(\mathfrak{S}_0) - I(\overline{\mathfrak{S}}).$$

Daraus würde, entgegen der Beziehung (7. 16), die Ungleichung

$$I(\mathfrak{R}) < I(\mathfrak{S}_0)$$

folgen.

In (7. 17) haben wir ein uneigentliches Minimum festgesetzt. Es bleibt noch das Gleichheitszeichen wegzuschaffen. Wir betrachten zwei Fälle.

Ist der Rand $\overline{\mathfrak{C}}$ mit der Kurve $\mathfrak{C}$ identisch, so liegt der Fall der festen Begrenzung vor uns. Da $\overline{\mathfrak{S}}$ in dem Felde $\mathcal{F}$ liegt, so muss

$$I(\overline{\mathfrak{S}}) > I(\mathfrak{S}_0)$$

sein, sei es denn die Fläche $\overline{\mathfrak{S}}$ mit $\mathfrak{S}_0$ zusammenfällt. Man kann auch unmittelbar den Satz des Paragraphen 6 A anwenden, indem man nach (5. 9) die Bedingung (6. 3) aus (7. 3) schliesst.

Es bleibt noch der allgemeine Fall, wenn $\overline{\mathfrak{C}}$ nicht mit $\mathfrak{C}_0$ identisch ist, zu untersuchen. Es ist in diesem Falle möglich aus $\overline{\mathfrak{S}}$ ein glattes Flächenstück $\mathfrak{Q}$ auszusondern, das ganz in $\mathcal{F}''$ liegt und eine von Null verschiedene Entfernung von $\mathfrak{T}'$ hat. Ist die Approximationsfläche $\mathfrak{R}$ hinreichend genau gewählt, so muss auch sie ein Flächenstück enthalten, das ganz in $\mathcal{F}''$ liegt, und das für das Integral I einen von $\frac{1}{2} I(\mathfrak{Q})$ grösseren Wert liefert. Es ist destomehr

$$I(\mathfrak{R}'') > \frac{1}{2} I(\mathfrak{Q}). \tag{7.19}$$

Es folgt aus (7. 15) und (7. 19) durch Addition

$$(7.20)\qquad I(\mathfrak{N}) > I(\mathfrak{S}_0) + \frac{1}{2} I(\mathfrak{L}).$$

Ist die Approximation genau genug getrieben, dass

$$(7.21)\qquad |I(\mathfrak{N}) - I(\overline{\mathfrak{S}})| < \frac{1}{2} I(\mathfrak{L}),$$

so folgt aus (7. 20) und (7. 21), dass

$$I(\overline{\mathfrak{S}}) > I(\mathfrak{S}_0),$$

was zu beweisen war.

Wir sind damit mit dem Beweise unseres Satzes fertig und gehen zur notwendigen Bedingung des Minimums über.

B. Sind die Voraussetzungen I, I′, II, III erfüllt, und *soll das Integral I für* $\mathfrak{S}_0$ *wenigstens ein schwaches, uneigentliches, relatives Minimum* in bezug auf die oben beschriebenen Flächen *annehmen*, so muss die folgende Bedingung erfüllt sein:

IV a. *Der kleinste positive Eigenwert genügt der Ungleichung*

$$(7.22)\qquad \lambda_1 \geqq 1.$$

Wir führen den Beweis ohne den Gebrauch von der zweiten Variation zu machen.

Wir setzen im Gegensatz zu (7. 22) voraus, dass

$$(7.23)\qquad \lambda_1 < 1,$$

und unterscheiden drei Fälle, je nachdem der kleinste positive Eigenwert λ_1^* der ersten Randwertaufgabe für die Gleichung (7. 1) kleiner, gleich oder grösser als 1 ist:

1. Wenn $\lambda_1^* < 1$, so gibt es nach dem Paragraphen 6 B kein Minimum sogar bei fester Begrenzung. Destoweniger gibt es eines für unser Problem, was der Voraussetzung widerspricht.

2. Wenn $\lambda_1^* = 1$, so verfährt man folgendermassen.

Setzen wir voraus, dass $\mathfrak{S}_0$ für das gestellte Problem ein wenigstens schwaches, uneigentliches Minimum liefert. Es sei $\mathcal{U}$ die Umgebung von $\mathfrak{S}_0$, in der dieses Minimum statt findet. Wir nehmen an, es sei $\mathcal{U}$ klein genug, dass $\mathfrak{T}$ es in zwei

Teile zerschneide. Wir werfen den äusseren Teil ab, indem wir $\mathcal{U}$ bis den inneren Teil einschränken (wegen der Schwäche des Minimums ist das kein wesentliches Einschränken, weil die Vergleichsflächen sich so wie so in dem inneren Teil befinden). Jetzt führen wir auf der verlängerten Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ eine geschlossene analytische Kurve $\mathfrak{C}'$, welche die Kurve $\mathfrak{C}$ umschliesst. Das von $\mathfrak{C}'$ begrenzte Extremalenstück bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}'_0$.

Wir betrachten das folgende Variationsproblem: unter allen kreisringformigen Flächen, deren ein Rand auf der Fläche $\mathfrak{T}$ liegt und der zweite mit der Kurve $\mathfrak{C}'$ zusammenfällt, diejenige zu finden, die für das Integral I das schwache eigentliche Minimum liefert. Ist die Kurve $\mathfrak{C}'$ eng genug bei der Kurve $\mathfrak{C}$ geführt, so lässt sich ganz leicht, sogar mit elementaren Methoden zeigen, dass das zwischen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ enthaltene kreisringformige Extremalenstück $\mathfrak{S}'_0 - \mathfrak{S}_0$ ein schwaches, eigentliches Minimum liefert. Es sei $\mathcal{V}$ die entsprechende Umgebung. Wir können, wie oben, annehmen, dass $\mathcal{V}$ ganz ausserhalb der Fläche $\mathfrak{T}$ liegt.

Betrachten wir jetzt eine beliebige in der Umgebung $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ von $\mathfrak{S}'_0$ liegende Fläche $\overline{\mathfrak{S}}'$, die den Rand $\mathfrak{C}'$ hat und eine Nachbarschaft erster Ordnung aufweist. Sie wird von der Fläche $\mathfrak{T}$ in zwei Teile $\overline{\mathfrak{S}}$ und $\overline{\mathfrak{S}}' - \overline{\mathfrak{S}}$ geteilt, von denen der erste in $\mathcal{U}$, der zweite in $\mathcal{V}$ liegt. Nach Voraussetzung ist dann

$$I(\overline{\mathfrak{S}}) \geqq I(\mathfrak{S}_0),$$

und nach der Minimumeigenschaft von $\mathfrak{S}'_0 - \mathfrak{S}_0$

$$I(\overline{\mathfrak{S}}' - \overline{\mathfrak{S}}) > I(\mathfrak{S}'_0 - \mathfrak{S}_0),$$

woraus durch Addition folgt

$$I(\overline{\mathfrak{S}}') > I(\mathfrak{S}'_0).$$

Da die Vergleichsfläche $\overline{\mathfrak{S}}'$ beliebig war, so folgt, dass die Extremalfläche $\mathfrak{S}'_0$ bei fester Begrenzung ein schwaches eigentliches Minimum liefert.

Anderseits hat $\mathfrak{S}'_0$ bei fester Begrenzung den kleinsten positiven Eigenwert, der kleiner als λ_1^* (für $\mathfrak{S}_0$) ist.[1] Er ist also kleiner als 1, und $\mathfrak{S}'_0$ kann nach dem Paragraphen 6 B kein Minimum liefern. Wir sind damit wieder auf einen Widerspruch gekommen.

3. Wenn $\lambda_1^* > 1$, so müssen wir wieder zum Problem (7.4), (7.5) zurückkehren. Wie in (7.6), haben wir jetzt

$$\lambda_1^* > 1.$$

[1] Vgl. LICHTENSTEIN, loc. cit. (Monatshefte), S. 12.

Nimmt c von 0 bis $-\infty$ ab, so wächst die Funktion $\lambda_1(c)$ von λ_1 bis λ_1^* stetig (nach dem Paragraphen 5 B). Da aber

$$\lambda_1 < 1 < \lambda_1^*,$$

so gibt es einen negativen Wert $\bar{c}$ von c, für den

$$\lambda_1(\bar{c}) = 1, \tag{7.24}$$

$$\bar{c} < 0. \tag{7.25}$$

Wir setzen in (7.5) $c = \bar{c}$ und bezeichnen mit $\theta(u, v)$ die Eigenfunktion des Problems (7.4), (7.5), die dem kleinsten positiven Eigenwert (7.24) entspricht. Wir schreiben explizit

$$\Gamma_{\bar{c}}(\theta) \equiv (F_{12} u_s - F_{11} v_s)\theta_u + (F_{22} u_s - F_{12} v_s)\theta_v + [h(s) + \bar{c}]\theta = 0. \tag{7.26}$$

Es ist nach dem Paragraphen 5 C

$$\theta(u, v) > 0$$

im Innern und am Rande der Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$. Wegen (7.24) erfüllt $\theta(u, v)$ die Jacobische Gleichung (2.20), die nach (4.22) mit (7.4) für $\lambda = 1$ identisch ist. Nach der Theorie des Extremalenfeldes[1] können wir also die Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ in eine Extremalenschar $\mathfrak{S}_a$,

$$x = x(u, v, a),$$
$$y = y(u, v, a),$$
$$z = z(u, v, a)$$

einbetten, so, dass für $a = 0$ die Extremalfläche $\mathfrak{S}_a$ mit $\mathfrak{S}_0$ zusammenfällt, und dass für $a = 0$ die Bedingung

$$l x_a + m y_a + n z_a = \theta(u, v) \tag{7.27}$$

statt findet.

Wir bezeichnen mit $\Delta(u, v, a)$ die Funktionaldeterminante der Schar $\mathfrak{S}_a$. Dann besagt (7.27)

$$\Delta(u, v, 0) = \theta(u, v). \tag{7.28}$$

Wir bilden die Transversalfläche $\mathfrak{T}'$ der Schar $\mathfrak{S}_a$, indem wir durch jeden

[1] Vgl. KERNER, Beitrag I.

Punkt P der Kurve $\mathfrak{C}$ eine Transversalkurve $\mathfrak{D}$ führen, und bezeichnen mit $h'(s)$ die Funktion, die für die Fläche $\mathfrak{T}'$ in derselben Weise, wie $h(s)$ für die Fläche $\mathfrak{T}$, berechnet wird. Wir wenden auf die Schar $\mathfrak{S}_a$ und die Transversalfläche $\mathfrak{T}'$ die Fundamentalformel (4. 17) an:

$$(F_{12} u_s - F_{11} v_s) \Delta_u + (F_{22} u_s - F_{12} v_s) \Delta_v + h'(s) \Delta = 0. \tag{7. 29}$$

Aus dem Vergleiche der Formel (7. 26) und (7. 29) mit Berücksichtigung von (7. 28) folgt, dass

$$h'(s) = h(s) + \bar{c},$$

oder nach (7. 25)

$$h'(s) < h(s).$$

Also liegt die Fläche $\mathfrak{T}$ *an innerer Seite* der Transversalfläche $\mathfrak{T}'$.

Wir bezeichnen mit $\overline{\mathfrak{S}}$ den von der Fläche $\mathfrak{T}$ ausgeschnittenen Teil der Scharfläche $\mathfrak{S}_a$. Mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir den von der Transversalfläche $\mathfrak{T}'$ ausgeschnittenen. Da $\mathfrak{T}$ an innerer Seite von $\mathfrak{T}'$ liegt, so ist $\overline{\mathfrak{S}}$ ein Teil (und für $a \neq 0$ sogar ein echter Teil) von $\mathfrak{S}$. Es folgt daraus, dass für $a \neq 0$

$$I(\overline{\mathfrak{S}}) < I(\mathfrak{S}). \tag{7. 30}$$

Anderseits folgt aus dem Radonschen Satz[1] (der eine unmittelbare Folge der Weierstrassschen Formel ist), dass für alle Flächen $\mathfrak{S}_a$ der Schar

$$I(\mathfrak{S}) = I(\mathfrak{S}_0) \tag{7. 31}$$

(die aus der Scharflächen durch eine Transversalfläche ausgeschnittenen Stücke liefern denselben Wert für das Integral).

Aus (7. 30) und (7. 31) folgt, dass für $a \neq 0$

$$I(\overline{\mathfrak{S}}) < I(\mathfrak{S}_0). \tag{7. 32}$$

Wir bemerken, dass die Extremalenstücke $\overline{\mathfrak{S}}$ die für Vergleichsflächen geforderten Bedingungen erfüllen, und ausserdem die Nachbarschaft der ersten Ordnung zur $\mathfrak{S}_0$ haben. Also besagt (7. 32), dass $\mathfrak{S}_0$ für unser Problem kein schwaches, uneigentliches Minimum liefert, was wieder zum Widerspruch führt.

Alle drei Sonderfälle führen also auf einen Widerspruch, wenn die Ungleichung (7. 23) erfüllt sein soll. Damit ist die Behauptung IV a. bewiesen worden.

---

[1] Vgl. KNESER, loc. cit., S. 331.

8. Das Flächenproblem für geschlossene Flächen.

A. Wir setzen jetzt voraus, dass die Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ *eine analytische reguläre geschlossene Fläche ohne Doppelpunkte, vom Typus einer Kugelfläche ist.* Topologisch ist sie eine 2-Sphäre. Da man auf der Kugelfläche kein reguläres Koordinatennetz einführen kann, so bedarf die Bildung von $\mathfrak{S}_0$ einiger Erläuterungen.[1]

Es sei $\mathcal{S}$ die Urkugelfläche, die auf $\mathfrak{S}_0$ abgebildet werden soll. Wir wählen einen Teilbereich $\mathcal{S}'$ von $\mathcal{S}$ und üben darin eine eineindeutige analytische Transformation der Parameter u, v aus:

$$u = u(u', v'),$$

$$v = v(u', v')$$

mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante

$$D = \begin{vmatrix} u_{u'} & u_{v'} \\ v_{u'} & v_{v'} \end{vmatrix}.$$

Dann bleiben alle Gleichungen und Ungleichungen des Flächenproblems invariant.

Insbesondere interessiert uns die Jacobische Gleichung (2. 20), deren linke Seite sich folgendermassen transformiert:

$$J'(\omega) = D\, J(\omega), \tag{8. 1}$$

was man ohne umständliche Rechnungen aus der Invarianz des Integrals

$$\iint_{\mathcal{S}'} \omega\, J(\omega)\, du\, dv$$

vermuten kann.

Es seien $\mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}''$ zwei einfach zusammenhängende Bereiche, die die ganze Kugelfläche $\mathcal{S}$ bedecken. Sie sollen ineinander eingreifen, indem sie einen kreisringformigen Gesamtbereich $\mathcal{S}'''$ bilden. Die ganze Fläche $\mathcal{S}$ soll so auf $\mathfrak{S}_0$ abgebildet werden, dass die Abbildungen von $\mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}''$ alle oben für nichtgeschlossene Flächen vorausgesetzten Bedingungen erfüllen. Dann sind in $\mathcal{S}'''$ alle Gleichungen für beide Abbildungsarten einander äquivalent. Wir bemerken, dass man auch in den oben betrachteten Problemen in Teilbereichen von $\mathfrak{S}_0$ andere Parameter u, v benutzen konnte.

[1] Vgl. Hilbert, loc. cit., SS. 219—242.

Wir formulieren *das assozierte Differentialproblem* im Falle des Flächenproblems für geschlossene Flächen. Die partielle Differentialgleichung ist immer dieselbe

$$(8.\ 2)\qquad \Delta(\omega) \equiv \frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\,\omega_u + F_{12}\,\omega_v) + \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\,\omega_u + F_{22}\,\omega_v) + q\,\omega + \lambda\,k\,\omega = 0.$$

Dagegen besteht die Nebenbedingung darin, dass die Lösung $\omega(u, v)$ von (8. 2) eine analytische reguläre Funktion auf der *ganzen* Kugelfläche $\mathcal{S}$ (oder auf der ganzen Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$) ist. Die Invarianz von (8. 2) wird versichert, wenn man bei der Transformation von u, v die Koëffizienten q und k getrennt mit D multipliziert. Die Eigenwerte des Problems (8. 2) auf der Kugelfläche sollen *Eigenwerte des Flächenproblems für geschlossene Flächen* heissen.

Wir machen folgende Voraussetzungen:

I. *$\mathfrak{S}_0$ ist eine analytische geschlossene Extremalfläche vom Typus einer Kugelfläche, ohne Doppelpunkte.*

II. *Auf $\mathfrak{S}_0$ ist die starke Legendre-Brunaccische Bedingung für das Minimum erfüllt.*

III. *Auf $\mathfrak{S}_0$ ist die starke Weierstrasssche Bedingung für das Minimum erfüllt.*

IV. *Der kleinste positive Eigenwert genügt der Ungleichung*

$$\lambda_1 > 1.$$

Wir behaupten, dass

das Integral I für $\mathfrak{S}_0$ ein starkes, eigentliches, relatives Minimum in bezug auf die gleichorientierten geschlossenen Flächen annimt.

Man muss erläutern, was man jetzt unter dem relativen, starken Minimum verstehen soll. Wir bilden eine Umgebung $\mathcal{U}$ von $\mathfrak{S}_0$, welche einer ausgehöhlten Kugel homöomorph ist, und in welcher $\mathfrak{S}_0$, als 2-Kette betrachtet, *nicht* nullhomolog ist. Als Vergleichsflächen sind stetige Bilder der Kugelfläche zugelassen, die sich aus einer endlichen Anzahl glatter Flächenstücke zusammensetzen. Als 2-Ketten betrachtet, sollen sie der Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ homolog sein (man könnte auch zulassen, dass sie einem positiven Vielfachen von $\mathfrak{S}_0$ homolog wären). Ist in einer solchen Umgebung $\mathcal{U}$ für die zulässigen Vergleichsflächen ein Minimum vorhanden, so sprechen wir von einem relativen, starken Minimum.

Wir gehen zum Beweis unserer Behauptung über. Wir zerschneiden die Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ mittels einer analytischen regulären geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}$ in zwei Teile $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, die den Bereichen $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ der Kugelfläche $\mathcal{S}$ entsprechen. Es ist bequem vorauszusetzen, dass $\mathfrak{C}$ das Bild einer in dem Bereiche $\mathcal{S}'''$ liegenden Kurve $\mathcal{C}$ ist, und dass $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}_2$ in $\mathcal{S}''$ liegt.

Wir führen auf $\mathfrak{C}$ zwei Parameter s und t ein, die untereinander durch die Beziehung

$$t = -s$$

verknüpft sind. Wir nehmen an, dass den wachsenden s-Werten eine Orientierung von $\mathfrak{C}$ entspricht, bei welcher der Bereich $\mathfrak{S}_1$ an positiver Seite von $\mathfrak{C}$ liegt. Dann ergibt der Parameter t eine in gleichem Verhältnis zu $\mathfrak{S}_2$ stehende Orientierung von $\mathfrak{C}$. Es ist dann identisch:

$$\begin{aligned}(8.\ 3)\qquad &[(F_{12}u_t - F_{11}v_t)\,\omega_u + (F_{22}u_t - F_{12}v_t)\,\omega_v] = \\ &= -[(F_{12}u_s - F_{11}v_s)\,\omega_u + (F_{22}u_s - F_{12}v_s)\,\omega_v]\end{aligned}$$

für jede Funktion $\omega(u, v)$.

Es sei $\theta(u, v)$ die Eigenfunktion des assozierten Problems, die dem kleinsten positiven Eigenwerte λ_1 entspricht. Es ist

$$(8.\ 4)\qquad \frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\theta_u + F_{12}\theta_v) + \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\theta_u + F_{22}\theta_v) + q\,\theta + \lambda_1 k\,\theta = 0.$$

Wir werden unten beweisen, dass $\theta(u, v)$ nirgends verschwindet.

Wir führen längs $\mathfrak{C}$ zwei Funktionen $h_1(s)$ und $h_2(t)$ ein, die durch folgende Gleichungen definiert sind:

$$(8.\ 5)\qquad (F_{12}u_s - F_{11}v_s)\,\theta_u + (F_{22}u_s - F_{12}v_s)\,\theta_v + \lambda_1 h_1(s)\,\theta = 0,$$

$$(8.\ 6)\qquad (F_{12}u_t - F_{11}v_t)\,\theta_u + (F_{22}u_t - F_{12}v_t)\,\theta_v + \lambda_1 h_2(t)\,\theta = 0.$$

Da $\theta(u, v) \neq 0$, so sind $h_1(s)$ und $h_2(t)$ endlich, und es gilt nach (8. 3)

$$(8.\ 7)\qquad h_2(t) = h_2(-s) = -h_1(s) = -h_1(-t).$$

Jetzt betrachten wir zwei Probleme, die sich auf Teilbereiche $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ beziehen, und Nebenbedingungen dritter Art enthalten. In beiden Problemen sei die Differentialgleichung von (8. 2) gegeben. Im ersten Problem, sagen wir im $\mathcal{S}_1$-Problem, laute die Nebenbedingung

$$(8.\ 8)\qquad (F_{12}u_s - F_{11}v_s)\,\omega_u + (F_{22}u_s - F_{12}v_s)\,\omega_v + \lambda\,h_1(s)\,\omega = 0,$$

und in dem $\mathcal{S}_2$-Problem

$$(F_{12} u_t - F_{11} v_t)\,\omega_u + (F_{22} u_t - F_{12} v_t)\,\omega_v + \lambda\, h_2(t)\,\omega = 0. \tag{8. 9}$$

Wir bemerken unmittelbar, dass nach (8. 4), (8. 5) und (8. 6) λ_1 ein Eigenwert und $\theta(u, v)$ die entsprechende Eigenfunktion der beiden Teilprobleme ist.

Wir werden unten beweisen, dass

α. *der kleinste positive Eigenwert* λ_1 *des Problems kleiner, als der kleinste positive Eigenwert* λ_1^* *der sich auf einen beliebigen Teilbereich von* $\mathcal{S}$ *beziehenden ersten Randwertaufgabe, ist;*

β. *die entsprechende Eigenfunktion* $\theta(u, v)$ *nirgends verschwindet;*

γ. *der Eigenwert* λ_1 *auch der kleinste positive Eigenwert der beiden oben formulierten Teilprobleme, die sich auf* $\mathcal{S}_1$ *und* $\mathcal{S}_2$ *beziehen, ist.*

Um den variationstheoretischen Beweis nicht zu unterbrechen, werden wir auf diese drei Behauptungen nachher zurückkommen.

Jetzt wenden wir uns den allgemeineren Teilproblemen zu, die an Stelle von (8. 8) und (8. 9) die Nebenbedingungen

$$(F_{12} u_s - F_{11} v_s)\,\omega_u + (F_{22} u_s - F_{12} v_s)\,\omega_v + \lambda\,[h_1(s) + c]\,\omega = 0, \tag{8. 10}$$

$$(F_{12} u_t - F_{11} v_t)\,\omega_u + (F_{22} u_t - F_{12} v_t)\,\omega_v + \lambda\,[h_2(t) + c]\,\omega = 0 \tag{8. 11}$$

enthalten.

Es sei im ersten Problem $\lambda_1^{(1)}(c)$ der kleinste positive Eigenwert. Nach der Behauptung γ. ist

$$\lambda_1^{(1)}(0) = \lambda_1.$$

Nach dem Paragraphen 5 B nimmt $\lambda_1^{(1)}(c)$ von λ_1 bis 0 stetig ab, wenn c von 0 bis ∞ wächst. Da aber nach der Voraussetzung IV. $\lambda_1 > 1$, so gilt für ein positives c, sagen wir c_1, die Beziehung

$$\lambda_1^{(1)}(c_1) = 1,$$

$$c_1 > 0. \tag{8. 12}$$

Ebenso gibt es ein positives c, sagen wir c_2, für welches der kleinste positive Eigenwert $\lambda_1^{(2)}(c)$ des zweiten Problems die Beziehung

$$\lambda_1^{(2)}(c_2) = 1,$$

$$c_2 > 0 \tag{8. 13}$$

erfüllt.

Jetzt verfahren wir für jedes Teilproblem (über den Bereich $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$) getrennt ganz, wie im Paragraphen 7 A. Wir erhalten damit zwei Extremalenfelder $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ (unter Benutzung der Behauptung β.), in welche beziehungsweise $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ eingebettet sind. Wir führen durch die Kurve $\mathfrak{C}$ Transversalflächen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ beziehungsweise zum Felde $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$. Wir behalten von den Feldern $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ nur die von den Flächen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ ausgeschnittenen Teile, indem wir das übrige wegwerfen.

Aus (8. 10) und (8. 11) erfahren wir, dass den Transversalflächen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ beziehungsweise die Funktionen $h_1(s) + c_1$ und $h_1(t) + c_2$ entsprechen. Wir können aber nicht diese Funktionen untereinander vergleichen, weil sie verschiedenen Bereichen $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ entsprechen, was auf das Vorzeichen Einfluss hat. Will man die zweite Funktion $h_2(t) + c_2$ auf den Bereich $\mathcal{S}_1$ reduzieren, so soll man die positive Richtung der Normale an $\mathfrak{T}_2$ umtauschen. Dann ist die Funktion $h(s)$ für $\mathfrak{T}_2$ gleich

$$- h_2(t) - c_2$$

oder nach (8. 7)

$$h_1(s) - c_2.$$

Es ist nach (8. 12) und (8. 13)

$$h_1(s) + c_1 > h_1(s) - c_2.$$

Also liegt nach dem Paragraphen 4 B *die Transversalfläche* $\mathfrak{T}_1$ *an innerer Seite von* $\mathfrak{T}_2$ *in bezug auf das Extremalenstück* $\mathfrak{S}_1$.

Wir können etwa sagen, dass die Transversalflächen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ gegenseitig an der Seite ihrer Felder $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ (oder entsprechender Extremalenstücke $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$) liegen. Die Felder $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ füllen zusammen keine Umgebung von $\mathfrak{S}_0$ aus. Wir sollen einen Bereich $\mathcal{F}_3$ zwischen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ hinzufügen, damit

$$\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$$

eine Umgebung $\mathcal{U}$ der Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$ bilde. Wir setzen voraus, dass $\mathcal{U}$ klein genug genommen ist, um einer ausgehöhlten Kugel homöomorph zu sein.

Es sei $\overline{\mathfrak{S}}$ eine Vergleichsfläche von der oben beschriebenen Art, die in der Umgebung $\mathcal{U}$ liegt und der Fläche $\mathfrak{S}_0$ homolog ist. Es ist zu beweisen, dass

$$I(\overline{\mathfrak{S}}) > I(\mathfrak{S}_0),$$

falls $\overline{\mathfrak{S}}$ nicht mit $\mathfrak{S}_0$ identisch ist.

Wir approximieren, wie im Paragraphen 7 A, die Fläche $\overline{\mathfrak{S}}$ mit einer analytischen regulären geschlossenen Fläche, welche wir der Reihe nach mit einer anderen ebensolchen Fläche $\mathfrak{R}$ approximieren, die nirgends die Transversalflächen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ berührt. Der Durchschnitt von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{T}_1$ (beziehungsweise $\mathfrak{T}_2$) besteht aus einer endlichen Anzahl von analytischen regulären geschlossenen Kurven. Wir erteilen den Kurven auf $\mathfrak{T}_1$ (beziehungsweise $\mathfrak{T}_2$) einen solchen positiven Sinn, dass auf der Fläche $\mathfrak{R}$ die positive Seite von diesen Kurven in dem Bereiche $\mathcal{F}_1$ (beziehungsweise $\mathcal{F}_2$) liegt. Die Fläche $\mathfrak{R}$ ist in drei Teile $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ zerschnitten, die der Reihe nach in den Bereichen $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ liegen. Der Rand von $\mathfrak{R}_1$ (beziehungsweise $\mathfrak{R}_2$) ist samt der Orientierung von den oben betrachteten Kurven auf $\mathfrak{T}_1$ (beziehungsweise $\mathfrak{T}_2$) gebildet. Der Rand von $\mathfrak{R}_1$ ist auf $\mathfrak{T}_1$ der von dem Parameter s orientierten Kurve $\mathfrak{C}$ homolog; der Rand von $\mathfrak{R}_2$ ist auf $\mathfrak{T}_2$ der von dem Parameter $t = -s$ orientierten Kurve $-\mathfrak{C}$ homolog.

Wir sind imstande auf die Teilfläche $\mathfrak{R}_1$ (beziehungsweise $\mathfrak{R}_2$) im Felde $\mathcal{F}_1$ (beziehungsweise $\mathcal{F}_2$) die Wierstrasssche Formel

$$(8.\ 14)\qquad I(\mathfrak{R}_1) - I(\mathfrak{S}_1) = \iint\limits_{\mathfrak{R}_1} \mathcal{E}(x, y, z, l, m, n, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n})\, du\, dv,$$

$$(8.\ 15)\qquad I(\mathfrak{R}_2) - I(\mathfrak{S}_2) = \iint\limits_{\mathfrak{R}_2} \mathcal{E}(x, y, z, l, m, n, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n})\, du\, dv$$

anwenden.[1] Da in den Feldern $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ die Weierstrasssche Bedingung für das Minimum erfüllt ist, so folgt aus (8. 14) und (8. 15)

$$(8.\ 16)\qquad I(\mathfrak{R}_1) \geqq I(\mathfrak{S}_1)$$

$$(8.\ 17)\qquad I(\mathfrak{R}_2) \geqq I(\mathfrak{S}_2).$$

Anderseits ist nach (2. 10)

$$I(\mathfrak{R}_3) \geqq 0,$$

woraus nach Addition

$$I(\mathfrak{R}_1) + I(\mathfrak{R}_2) + I(\mathfrak{R}_3) \geqq I(\mathfrak{S}_1) + I(\mathfrak{S}_2),$$

oder

$$(8.\ 18)\qquad I(\mathfrak{R}) \geqq I(\mathfrak{S}_0).$$

Es folgt daraus, dass auch

$$(8.\ 19)\qquad I(\bar{\mathfrak{S}}) \geqq I(\mathfrak{S}_0).$$

Wäre es im Gegensatz

$$I(\bar{\mathfrak{S}}) - I(\mathfrak{S}_0) < 0,$$

[1] Vgl. KERNER, Beitrag 2.

so könnte man die Approximation durch $\mathfrak{R}$ so weit führen, dass

$$|I(\mathfrak{R}) - I(\overline{\mathfrak{S}})| < I(\mathfrak{S}_0) - I(\overline{\mathfrak{S}}).$$

Daraus würde es, entgegen der Beziehung (8. 18), die Ungleichung

$$I(\mathfrak{R}) < I(\mathfrak{S}_0)$$

folgen.

Es bleibt noch zu beweisen, dass in (8. 19) kein Gleichheitszeichen gelten kann. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Enthält die Fläche $\overline{\mathfrak{S}}$ keine inneren Punkte des Bereiches $\mathcal{F}_3$, so muss sie die ganze Kurve $\mathfrak{C}$ enthalten, die wenigstens zwei Teile $\overline{\mathfrak{S}}_1$ und $\overline{\mathfrak{S}}_2$ von $\overline{\mathfrak{S}}$ berandet, welche beziehungsweise in den Feldern $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ liegen. Es ist nach der Theorie der festen Begrenzung

$$I(\overline{\mathfrak{S}}_1) \geqq I(\mathfrak{S}_1),$$

$$I(\overline{\mathfrak{S}}_2) \geqq I(\mathfrak{S}_2),$$

woraus

$$I(\overline{\mathfrak{S}}) \geqq I(\mathfrak{S}_0).$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn $\overline{\mathfrak{S}}_1$ mit $\mathfrak{S}_1$, $\overline{\mathfrak{S}}_2$ mit $\mathfrak{S}_2$ übereinstimmt, und der übrige Teil von $\overline{\mathfrak{S}}$ verschwindet. Dann aber ist $\overline{\mathfrak{S}}$ mit $\mathfrak{S}_0$ identisch, was wir abgeworfen haben. Es bleibt also

$$I(\overline{\mathfrak{S}}) > I(\mathfrak{S}_0).$$

Es bleibt noch der allgemeine Fall zu untersuchen, in welchem $\overline{\mathfrak{S}}$ die innere Punkte von $\mathcal{F}_3$ enthält. Wir können aus $\overline{\mathfrak{S}}$ ein glattes Flächenstück $\mathfrak{Q}$ aussondern, das ganz im Innern von $\mathcal{F}_3$ liegt. Ist die Approximationsfläche $\mathfrak{R}$ hinreichend genau gewählt, so muss auch sie ein Flächenstück enthalten, das ganz in $\mathcal{F}_3$ liegt, und das für das Integral I einen von $\frac{1}{2} I(\mathfrak{Q})$ grösseren Wert liefert. Es ist destomehr

$$I(\mathfrak{R}_3) > \frac{1}{2} I(\mathfrak{Q}). \tag{8. 20}$$

Es folgt aus (8. 16), (8. 17) und (8. 20) durch Addition

$$I(\mathfrak{R}) > I(\mathfrak{S}_0) + \frac{1}{2} I(\mathfrak{Q}). \tag{8. 21}$$

Ist die Approximation genau genug getrieben, dass

(8. 22) $$|I(\mathfrak{R}) - I(\overline{\mathfrak{S}})| < \frac{1}{2} I(\mathfrak{Q}),$$

so folgt aus (8. 21) und (8. 22), dass

$$I(\overline{\mathfrak{S}}) > I(\mathfrak{S}_0),$$

was zu beweisen war.

Wir haben damit den Beweis des Satzes über die hinreichenden Bedingungen des Minimums beendigt. Zur Vollständigkeit sollen wir aber noch die Behauptungen $\alpha.$, $\beta.$, $\gamma.$ über das Problem der Differentialgleichung (8. 2) auf der Kugelfläche bestätigen.

B. Wir bemerken erstens nach (8. 1) oder unmittelbar, dass

$$\frac{J(\omega)}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

sich bei Transformation der Parameter u, v invariant verhält. Dabei dürfen l, m, n sich so wohl auf die Extremalfläche $\mathfrak{S}_0$, wie auch auf die Urkugelfläche $\mathcal{S}$ beziehen. Wir können deshalb auf $J(\omega)$ die Hilbertsche Theorie[1] anwenden.

$\alpha.$ Es sei $\mathcal{S}^*$ ein Teilbereich der Fläche $\mathcal{S}$, der von einer analytischen Kurve ohne Doppelpunkte begrenzt ist, und λ_1^* der kleinste positive Eigenwert der ersten Randwertaufgabe für $\mathcal{S}^*$. Dann ist λ_1^* gleich dem Minimum des Integrals

(8. 23) $$\iint_{\mathcal{S}^*} (F_{11}\theta_u^2 + 2F_{12}\theta_u\theta_v + F_{22}\theta_v^2 - q\theta^2)\,du\,dv$$

für alle Funktionen $\theta(u, v)$ der Klasse D', für welche

(8. 24) $$\iint_{\mathcal{S}^*} k\theta^2\,du\,dv = 1.$$

Der kleinste positive Eigenwert λ_1 des Problems für die Kugelfläche $\mathcal{S}$ ist dem Minimum des Integrals

(8. 25) $$\iint_{\mathcal{S}} (F_{11}\theta_u^2 + 2F_{12}\theta_u\theta_v + F_{22}\theta_v^2 - q\theta^2)\,du\,dv$$

für alle Funktionen $\theta(u, v)$ der Klasse D', für welche

[1] HILBERT, loc. cit., SS. 219—242.

(8. 26)
$$\iint\limits_{\mathcal{S}} k\theta^2\,du\,dv = 1,$$

gleich.[1]

Es sei $\theta(u, v)$ im Bereiche $\mathcal{S}^*$ der durch (8. 24) normierten Eigenfunktion der ersten Randwertaufgabe, die dem Eigenwerte λ_1^* entspricht, gleich; im Bereiche $\mathcal{S} - \mathcal{S}^*$ sei es $\theta(u, v) = 0$ gesetzt. Dann ist λ_1^* gleich dem Werte (8. 23). Die Funktion $\theta(u, v)$ erfüllt auch die Bedingung (8. 26). Daher ist der Wert (8. 25), der jetzt (8. 23) gleich ist, nicht von dem Minimum λ_1 kleiner. Es ist

$$\lambda_1 \leqq \lambda_1^*.$$

Will man das Gleichheitszeichen wegschaffen, so vergrössere man ein wenig den Bereich $\mathcal{S}^*$. Der Eigenwert λ_1^* nimmt dann ein wenig ab, und trotzdem ist er nicht kleiner, als λ_1. Es ist

$$\lambda_1 < \lambda_1^*,$$

was den Inhalt der Behauptung **α.** bildet.

β. Es sei jetzt $\theta(u, v)$ die dem Eigenwert λ_1 entsprechende Eigenfunktion auf der Kugelfläche $\mathcal{S}$. Sie kann in keinem Punkte von $\mathcal{S}$ nebst der beiden ersten Ableitungen θ_u, θ_v verschwinden. Würde sie in $\mathcal{S}$ das Vorzeichen wechseln, so wäre sie eine Eigenfunktion der ersten Randwertaufgabe für einen Teilbereich $\mathcal{S}^*$. Die Zahl λ_1 würde ein Eigenwert dieser Aufgabe sein, was der Behauptung **α.** widerspricht. Also muss $\theta(u, v)$ in $\mathcal{S}$ ein festes Vorzeichen haben (ohne Null zu werden).

γ. Wir wissen schon, dass der kleinste positive Eigenwert λ_1 des Kugelflächenproblems auch ein Eigenwert der beiden Teilprobleme ist, die sich auf Teilbereiche $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ beziehen, und beziehungsweise die Nebenbedingungen (8. 8) und (8. 9) enthalten. Wir wollen beweisen, dass λ_1 der kleinste positive Eigenwert dieser Probleme ist. Es genügt natürlich dies für $\mathcal{S}_1$ tun.

Wir wenden uns wieder dem allgemeineren Problem mit der Nebenbedingung (8. 10) zu. Bezeichnet $\lambda_1^{(1)}(c)$ den kleinsten positiven Eigenwert, so ist die Gleichung

(8. 27)
$$\lambda_1^{(1)}(0) = \lambda_1$$

zu beweisen. Wir wissen, dass

(8. 28)
$$\lambda_1^{(1)}(0) \leqq \lambda_1 < \lambda_1^*,$$

[1] Vgl. Hilbert, loc. cit., S. 241.

wo λ_1^* der kleinste positive Eigenwert der ersten Randwertaufgabe für $\mathcal{S}_1$ ist (in der Tat, ist λ_1 ein Eigenwert des $\mathcal{S}_1$-Problems für $c = 0$).

Nehmen wir an, dass (8.27) nicht erfüllt ist. Dann haben wir nach (8.28)

$$\lambda_1^{(1)}(0) < \lambda_1 < \lambda_1^*.$$

Es nehme c von 0 bis $-\infty$ ab. Dann wächst $\lambda_1^{(1)}(c)$ stetig von $\lambda_1(0)$ bis λ_1^*. Es sei c_1 derjenige negative Wert von c, für den

$$\lambda_1^{(1)}(c_1) = \lambda_1, \tag{8.29}$$

$$c_1 < 0. \tag{8.30}$$

Es sei $\omega(u, v)$ die Eigenfunktion des $\mathcal{S}_1$-Problems für $c = c_1$, die dem Eigenwerte (8.29) entspricht. Wir können annehmen, dass überall in $\mathcal{S}_1$

$$\omega(u, v) > 0. \tag{8.31}$$

Die Funktion $\omega(u, v)$ erfüllt die Randbedingung

$$(F_{12} u_s - F_{11} v_s)\,\omega_u + (F_{22} u_s - F_{12} v_s)\,\omega_v + \lambda_1 (h_1 + c_1)\,\omega = 0. \tag{8.32}$$

Es sei weiter $\theta(u, v)$ die Eigenfunktion des Kugelflächenproblems, die dem Werte λ_1 entspricht. Es kann nach der Behauptung β.

$$\theta(u, v) > 0 \tag{8.33}$$

angenommen werden. Nach der Definition (8.5) von $h(s)$ folgt

$$(F_{12} u_s - F_{11} v_s)\,\theta_u + (F_{22} u_s - F_{12} v_s)\,\theta_v + \lambda_1 h_1 \theta = 0 \tag{8.34}$$

längs $\mathcal{C}$.

Beide Funktionen $\omega(u, v)$ und $\theta(u, v)$ erfüllen in $\mathcal{S}_1$ die Differentialgleichung (8.2) mit demselben Wert λ_1 von λ. Wir multiplizieren die Differentialgleichung für ω mit θ, die für θ mit ω und substrahieren. Es folgt nach der Greenschen Formel

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \{\omega\,[(F_{12} u_s - F_{11} v_s)\,\theta_u + (F_{22} u_s - F_{12} v_s)\,\theta_v] - \\ - \theta\,[(F_{12} u_s - F_{11} v_s)\,\omega_u + (F_{22} u_s - F_{12} v_s)\,\omega_v]\}\, ds = 0,$$

woraus nach (8.32) und (8.34)

$$\int_{\mathcal{C}} \{\omega(-\lambda_1 h_1 \theta) - \theta[-\lambda_1(h_1 + c_1)\omega]\}\, ds = 0$$

folgt. Wir erhalten damit die Beziehung

$$\lambda_1 c_1 \int_{\mathcal{C}} \omega\theta\, ds = 0,$$

die mit (8. 30), (8. 31) und (8. 33) unverträgbar ist.

Die Voraussetzung, dass (8. 27) nicht erfüllt ist, führt also zum Widerspruch. Damit sind wir mit dem Beweise der Behauptung γ. fertig.

Wir wollen noch bemerken, dass nach der Hilbertschen Theorie[1] der Bedingung (4. 21) wegen das assozierte Problem im Falle der geschlossenen Flächen überhaupt keine negative Eigenwerte hat, so dass der kleinste positive auch der kleinste Eigenwert ohnehin ist. Wir berücksichtigen dies der Einheitlichkeit halber nicht.

C. Wir gehen jetzt zur notwendigen Bedingung des Minimums über.

Sind die Voraussetzungen I., II., III. erfüllt, und *soll das Integral I für $\mathfrak{S}_0$ wenigstens ein schwaches, uneigentliches, relatives Minimum* in bezug auf die oben beschriebenen Flächen *annehmen*, so muss die folgende Bedingung erfüllt sein:

IV a. *Der kleinste positive Eigenwert genügt der Ungleichung*

$$\lambda_1 \geqq 1.$$

Nehmen wir im Gegensatz an, dass

$$\lambda_1 < 1, \tag{8. 35}$$

und sei $\theta(u, v)$ die entsprechende Eigenfunktion des assozierten Problems.

Für die geschlossene Extremalfläche hat die zweite Variation des Integrals I den Wert

$$\delta^2 I(\omega) = \iint_{\mathcal{S}} \omega\, J(\omega)\, du\, dv. \tag{8. 36}$$

Um das zu erkennen, kann man die Variationen über die Bereiche $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ berechnen. Dann heben sich die einfache Integrale längs der Grenzkurve $\mathcal{C}$ in der Summe der beiden Variationen auf, worüber der Ausdruck (8. 36) bleibt.

[1] HILBERT, loc. cit., S. 237.

Wir berechnen $\delta^2 I(\omega)$ für $\omega = \theta$:

$$\delta^2 I(\theta) = \int\!\!\int_{\mathcal{S}} \theta \left[-\frac{\partial}{\partial u}(F_{11}\theta_u + F_{12}\theta_v) - \frac{\partial}{\partial v}(F_{12}\theta_u + F_{22}\theta_v) - q\theta - k\theta \right] du\, dv,$$

oder nach der von der Funktion $\theta(u, v)$ für $\lambda = \lambda_1$ erfüllten Gleichung (8. 2):

$$\delta^2 I(\theta) = -\int\!\!\int_{\mathcal{S}} \theta (1 - \lambda_1) k \theta\, du\, dv =$$

$$= -(1 - \lambda_1) \int\!\!\int_{\mathcal{S}} k\theta^2\, du\, dv.$$

Also ist nach (4. 23), (8. 15) die zweite Variation für $\theta(u, v)$ negativ, und das Minimum kann nicht statt finden. Somit ist die notwendige Bedingung IV a. bewiesen worden.

Warschau, im Oktober 1937.