ANALYSE DE LA LOI ASYMPTOTIQUE DE LA DISTRIBUTION DES NOMBRES PREMIERS GÉNÉRALISÉS. I.

MÉMOIRE DÉDIÉ À M. HOLMGREN

Par

ARNE BEURLING

à Upsal.

§ 1. Introduction.

Le problème.

A toute suite de nombres réels (y):

(1) $$1 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < \cdots$$

on peut associer une suite nouvelle (x):

(2) $$1 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$$

formée par l'ensemble des produits

(3) $$x = y_{n_1} y_{n_2} \cdots y_{n_\nu}, \qquad n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_\nu, \quad \nu \geq 1$$

avec la convention que tout nombre x figure dans (2) autant de fois qu'il y a de représentations (3) distinctes. Nous appellerons (y) les nombres premiers de la suite (x) et désignerons par $\pi(x)$ le nombre des $y_n \leq x$ et par $N(x)$ le nombre des $x_n \leq x$. Si (y) s'identifie avec l'ensemble des nombres premiers ordinaires 2, 3, 5, 7, 11, ... on obtient pour (x) la suite des nombres naturels supérieurs à 1 et on aura

(4) $$N(x) = x + O(1)$$

et, d'après le théorème célèbre de MM. Hadamard et de la Vallée-Poussin,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}. \tag{5}$$

Si l'on supprime de la suite 2, 3, 5, 7, ... un nombre fini de premiers $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, on aura évidemment

$$N(x) = x \prod_1^\nu \left(1 - \frac{1}{p_\nu}\right) + O(1),$$

tandis que (5) est inchangé. Nous allons dans ce mémoire étudier quelques traits de ce problème général: *$N(x)$ étant connu, au moins à une certaine erreur près, déterminer si possible une fonction équivalant à $\pi(x)$, c'est-à-dire une fonction $p(x)$ telle que $\pi(x) \sim p(x)$.*

Surtout, nous chercherons à résoudre le problème particulier suivant, qui constitue le point de départ tout naturel dans l'étude du problème général: *De quelle manière $\varepsilon(x)$ doit-il converger vers zéro quand x tend vers l'infini, pour que l'hypothèse*

$$N(x) = x(A + \varepsilon(x)), \qquad A = \text{const.} > 0,$$

entraîne la loi asymptotique (5)*?*

Remarquons dès maintenant que par la transformation $(x^a \mid x)$ on peut normer le problème général. La fonction $\varphi(x) = x^a$ est multiplicative en ce sens que $\varphi(xx') = \varphi(x)\varphi(x')$. Par conséquent, si l'on part des suites (y) et (x) telles que

$$\log N(x) \sim a \log x,$$

où a est un constante positive, on arrive par la transformation $x' = x^a$, à deux suites (y') et (x') liées l'une à l'autre de la même manière que (y) et (x) et telles que

$$\log N(x) \sim \log x. \tag{6}$$

Dans ce qui suit la relation (6) sera toujours vérifiée.

La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le produit d'Euler.

Rappelons les notions et les procédés qui fondent la théorie analytique des nombres premiers ordinaires. A toute suite (x) on peut associer *une fonction $\zeta(s)$ de Riemann* définie par la série de Dirichlet

(7) $$\zeta(s) = 1 + x_1^{-s} + x_2^{-s} + \cdots = 1 + \int_1^{\infty} x^{-s}\, d\, N(x)$$

qui, dans la condition (6), converge absolument dans le demi-plan $\sigma = \Re(s) > 1$. *Le produit d'Euler* correspondant à la suite (y) s'écrit

$$\prod_1^{\infty} \frac{1}{1 - y_n^{-s}}.$$

Ce produit converge de même absolument pour $\sigma > 1$ et donne naissance à cette formule fondamentale:

(8) $$\prod_1^{\infty} \frac{1}{1 - y_n^{-s}} = \prod_1^{\infty} (1 + y_n^{-s} + y_n^{-2s} + \cdots) = 1 + x_1^{-s} + x_2^{-s} + \cdots = \zeta(s)$$

qui traduit en termes analytiques la relation entre les nombres x_n et ses premiers y_n. En vertu de la convergence absolue pour $\sigma > 1$, en obtient de plus

(9) $$\log \zeta(s) = \sum_1^{\infty} \log \frac{1}{1 - y_n^{-s}} = \sum_1^{\infty} y_n^{-s} + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} y_n^{-2s} + \frac{1}{3} \sum_1^{\infty} y_n^{-3s} + \cdots = \int_1^{\infty} x^{-s}\, d\, \Pi(x),$$

où nous avons posé

(10) $$\Pi(x) = \pi(x) + \frac{1}{2} \pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3} \pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \cdots.$$

On est ainsi conduit à cette nouvelle représentation de $\zeta(s)$,

(11) $$\zeta(s) = e^{\int_1^{\infty} x^{-s}\, d\, \Pi(x)}$$

La fonction $\Pi(x)$ est évidemment non décroissante et s'annule comme $\pi(x)$ pour $x < y_1$; de la relation (6) et de l'inégalité triviale $\pi(x) \leq N(x)$ on tire

$$\Pi(x) - \pi(x) = \sum_2^{\left[\frac{\log x}{\log y_1}\right]} \frac{1}{n} \pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Il s'ensuit que $\pi(x) \sim \Pi(x)$ si l'on a $\log \Pi(x) \sim \log x$, et cette dernière relation sera toujours vérifiée dans le cas que nous traiterons. Dans la suite nous considérons aussi $\Pi(x)$ au lieu de $\pi(x)$.

Pour gagner en généralité et en uniformité nous entendrons dans ce mémoire par fonction de Riemann et désignerons par $\zeta(s)$ non seulement une série de Dirichlet (7) mais aussi *toute fonction analytique ayant dans le demi-plan $\sigma > 1$ la représentation* (11), *où $\Pi(x)$ est une fonction non décroissante qui rend l'intégrale convergente pour $\sigma > 1$.* Toute fonction $\zeta(s)$ est aussi pour $\sigma > 1$, comme on le conclut facilement, représentable par une intégrale

$$(12) \qquad \zeta(s) = 1 + \int_1^\infty x^{-s}\, d\, N(x),$$

où $N(x)$ est une fonction non décroissante, uniquement déterminée par $\Pi(x)$ si l'on ajoute la condition $N(1) = \Pi(1) = 0$. Cela étant, notre problème devient: *Si pour une fonction $\zeta(s)$ on connaît $N(x)$, déterminer une fonction équivalant à $\Pi(x)$.*

Résumé des résultats.

Pour plus de clarté, nous donnerons déjà dans cette introduction un aperçu de la méthode et des résultats principaux. Commençons par donner quelques définitions. Comme lien entre $N(x)$ et $\Pi(x)$, la fonction

$$v(t) = -\lim_{\sigma=1+0} \arg \zeta(\sigma + i\, t),$$

supposée existante, va jouer un rôle dominant dans cette étude. Nous emploierons la notation $v(\sigma, t) = -\arg \zeta(1 + \sigma + i\, t)$, où la fonction harmonique $v(\sigma, t)$ est uniquement déterminée dans le demi-plan $\sigma > 0$ par la convention $v(\sigma, 0) = 0$. Nous dirons par définition que cette fonction harmonique, ainsi que la fonction de Riemann $\zeta(s)$, satisfait à la condition (A_λ) si pour $\sigma \to +0$, $-\lambda \leq t \leq \lambda$, $v(\sigma, t)$ converge, en restant borné, vers une fonction limite $v(t)$ qui est à variation bornée sur l'intervalle $(-\lambda, \lambda)$. Par la notation (A) nous entendrons la condition précédente satisfaite pour tout nombre λ fini. De plus, si une condition (A_λ) est remplie, le point $1 + i\, t$, $-\lambda < t < \lambda$, sera dit un pôle d'ordre ϱ ou un zéro d'ordre α de $\zeta(s)$ si l'on a respectivement

$$\frac{1}{\pi}(v(t+0)-v(t-0))=\varrho>0, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\pi}(v(t-0)-v(t+0))=\alpha>0. \tag{14}$$

Une fonction $\zeta(s)$ ayant au point $s=1$ un pôle d'ordre ϱ sera appellée elle-même d'ordre ϱ. Pour le logarithme intégral, désigné dans ce mémoire par la lettre L, nous remarquons cette relation

$$\begin{aligned}\Re\{L(x^{1+it})\} &= \text{v. p.}\int_0^x \frac{\cos(t\log x)}{\log x}\,dx = \\ &= \frac{x}{\log x}\cdot\frac{t\sin(t\log x)+\cos(t\log x)}{1+t^2}+O\left\{\frac{x}{(1+|t|)\log^2 x}\right\}\end{aligned} \tag{15}$$

valable uniformément pour $x \geq x_0 > 1$, $t \gtreqless 0$. Faisons aussi remarquer que la relation formelle entre les fonctions $\Pi(x)$ et $v(t)$ est

$$\Pi(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Re\{L(x^{1+it})\}\,d\,v(t)+\text{const.}, \tag{16}$$

valable dans certaines conditions qui ne sont cependant jamais remplies par une fonction $\zeta(s)$ définie par une série de Dirichlet.

Cela étant, nous allons énoncer trois théorèmes qui constituent ensemble le fondement d'une théorie générale des fonctions de Riemann d'ordre positif et fini.

Théorème I. *Soit $\zeta(s)$ une fonction de Riemann satisfaisant à la condition (A) et de l'ordre positif. Soit*

$$v(t)=v_1(t)+v_2(t)+v_3(t)$$

la décomposition de v en une fonction absolument continue v_1, une fonction des sauts v_2 et une »fonction singulière» v_3. On a alors

$$\Pi(x)\sim\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Re\{L(x^{1+it})\}\,d\,[v_2(t)+v_3(t)] \tag{17}$$

à condition que cette intégrale converge absolument, ce qui revient à supposer que

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\,|\,d\,[v_2(t)+v_3(t)]\,| < \infty. \tag{18}$$

Théorème II. *Pour une fonction $\zeta(s)$ de l'ordre ϱ, satisfaisant à la condition (A) et n'admettant sur $\sigma = 1$ aucun pôle autre que $s = 1$, »le nombre total» des zéros $1 + it$, $t > 0$, est inférieur ou égal à $\varrho/2$ en ce sens que*

$$\sum_{t>0} \alpha(t) \leq \frac{\varrho}{2}, \tag{19}$$

où $\alpha(t)$ désigne l'ordre du zéro $1 + it$.

Théorème III. *Si $\zeta(s)$ satisfait à une condition (A_λ), $\lambda > 0$, et si l'ordre ϱ est positif, les constantes de Tchebyscheff a et b définies par les relations*

$$a = \varliminf_{x=\infty} \frac{\Pi(x)\log x}{x}, \qquad b = \varlimsup_{x=\infty} \frac{\Pi(x)\log x}{x} \tag{20}$$

sont finies et positives.

Ces trois théorèmes sont, par leur contenu, liés respectivement aux noms de Riemann, de M. Hadamard et de Tchebyscheff. Le Théorème I a été inspiré par les recherches importantes de M. Wiener exposées dans son livre intitulé »The Fourier integral and certain of its applications». Le Théorème II sera démontré par une amélioration d'un procédé du à M. Hadamard, et aussi par une méthode nouvelle. Le troisième théorème n'est au fond qu'un cas particulier du premier.

Tirons maintenant quelques conclusions des Théorèmes I et II. Si $N(x)$ satisfait à certaines conditions de régularité et si $N(x) \sim A\,x \log^{\varrho-1} x$, $\varrho > 0$, $A > 0$, on peut affirmer que $\zeta(s)$ est une fonction de l'ordre ϱ n'ayant sur $\sigma = 1$ aucun pôle autre que $s = 1$, et de plus que $v(t)$ ne contient pas de partie singulière $v_3(t)$. Donc, si $\zeta(s)$ ne possède aucun zéro $1 + it$ d'ordre positif, on aura d'après (17)

$$\Pi(x) \sim \varrho\, L(x) \sim \varrho \frac{x}{\log x}, \tag{21}$$

et nous parlerons d'une *distribution* $\Pi(x)$ *régulière.* Si d'autre part il y a des zéros $1 + i t_\nu$, d'ordre positif, on aura d'après (17) et (15),

$$(22)\qquad \begin{cases} \Pi(x) \sim \text{v. p.} \displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(x)}{\log x}\, dx, \\ \varphi(x) = \varrho - 2 \displaystyle\sum_{t_\nu > 0} \alpha(t_\nu) \cos(t_\nu \log x). \end{cases}$$

$\varphi(x)$ est une fonction presque-périodique de la variable $\log x$, et non négative en vertu de (19). En notant que $\Pi(x)$ est non décroissant, on reconnaît aisément par la formule ci-dessus que l'inégalité (19) du Théorème II est étroitement liée à la relation asymptotique (17) du Théorème I. Par une application de (15) on trouve que la relation (22) équivaut à la suivante

$$(23)\qquad \begin{cases} \Pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}\left(\varrho - 2 \displaystyle\sum_{t_\nu > 0} \frac{\alpha(t_\nu)}{\sqrt{1 + t_\nu^2}} \cos(t_\nu y - \theta_\nu)\right) \\ \operatorname{tg} \theta_\nu = t_\nu, \quad 0 < \theta_\nu < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

où nous avons posé $y = \log x$. En ce cas la *distribution* $\Pi(x)$ sera appelée *presque-périodique.* De la relation (23) résultent ces inégalités intéressantes pour les constantes de Tchebyscheff:

$$(24)\qquad \begin{cases} a \geq \varrho\left(1 - 2 \displaystyle\sum_{t_\nu > 0} \frac{\alpha(t_\nu)}{\sqrt{1 + t_\nu^2}}\right), \\ b \leq \varrho\left(1 + 2 \displaystyle\sum_{t_\nu > 0} \frac{\alpha(t_\nu)}{\sqrt{1 + t_\nu^2}}\right), \end{cases}$$

où l'égalité a lieu, d'après le théorème de Kronecker, si les nombres t_ν sont linéairement indépendants. Observons de plus que si $\zeta(s)$ ne possède sur le segment $\sigma = 1, -\lambda < t < \lambda$, aucun zéro d'ordre positif, on aura

$$(25)\qquad \begin{cases} a \geq \varrho\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}\right), \\ b \leq \varrho\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}\right). \end{cases}$$

A l'aide des Théorèmes I et II on obtient la solution, au moins en un point essentiel, du problème particulier posé:

Théorème IV. *L'hypothèse*

$$N(x) = A\,x + O\left(\frac{x}{\log^{\gamma} x}\right), \qquad A = \text{const.} > 0, \tag{26}$$

entraîne

$$\Pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \tag{27}$$

si $\gamma > 3/2$, *mais n'entraîne pas cette relation si* $\gamma = 3/2$.

Pour élucider la relation entre $N(x)$ et $\Pi(x)$, nous allons comparer $N(x)$ avec certaines fonctions à croissance régulière. Dans ce but nous désignons par $A_\varrho(x)$ une fonction de la forme

$$A_\varrho(x) = x \sum_{1}^{n} A_\nu \log^{\varrho_\nu - 1} x, \tag{28}$$

où $\varrho = \varrho_1 > \varrho_2 > \cdots > \varrho_n$, le coefficient A_1 étant positif et $A_2, A_3, \ldots$ arbitraires. Cela étant, le théorème précédent admet cette généralisation:

Théorème V. *Pour* $1 \leq \varrho < 2$ *l'hypothèse*

$$N(x) = A_\varrho(x) + O\left(\frac{x}{\log^{\gamma} x}\right) \tag{29}$$

entraîne

$$\Pi(x) \sim \varrho\,\frac{x}{\log x} \tag{30}$$

si $\gamma > 1 + \varrho/2$, *mais n'entraîne pas cette relation si* $\gamma = 1 + \varrho/2$.

Ce théorème reste aussi vrai pour $0 < \varrho < 1$, mais la démonstration exige des procédés plus avancés que ceux qui conduisent au Théorème I et nous n'insisterons plus. Cependant, par la méthode employée, on montre que (30) a lieu même pour $0 < \varrho < 1$ dans la condition (29) avec $\gamma > 3/2$. Dans les cas $\varrho \geq 2$ d'autre part, le problème présente un changement capital:

Théorème VI. *Pour* $\varrho \geq 2$ *l'hypothèse*

$$N(x) = A_\varrho(x) + O(1) \tag{31}$$

n'entraîne pas (30), *tandis que la condition* (29) *avec* $\gamma > 1 + \varrho/2$ *entraîne l'existence — mais non pas la détermination — de* $q = [\varrho/2]$ *nombres réels*

$$0 < t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_q \leq \infty,$$

parmi lesquels tous ou quelques-uns peuvent s'identifier avec $+\infty$, *tels que*

$$\Pi(x) \sim \text{v. p.} \int_0^x \left(\varrho - 2 \sum_1^q \cos(t_\nu \log x)\right) \frac{dx}{\log x}, \tag{32}$$

où l'on pose $\cos(t_\nu \log x) \equiv 0$ *pour* $t_\nu = \infty$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer ce principe général: si la croissance de $N(x)$ se trouve dans le champ $x \log^p x$, $-1 < p < 1$, et si $N(x)$ satisfait à certaines conditions de régularité, la relation entre $N(x)$ et $\Pi(x)$ est *stable* en ce sens que l'ordre de grandeur de $N(x)$ détermine uniquement une fonction équivalant à $\Pi(x)$. Si d'autre part $N(x)$ croît comme $x \log x$ ou plus vite, la relation est *instable* en ce sens que la connaissance de $N(x)$ à une erreur près, qui reste bornée ou qui tend même vers zéro, ne suffit pas pour la détermination unique d'une fonction équivalant à $\Pi(x)$.

Dans cette première partie nous avons essayé de développer les propriétés élémentaires des fonctions $\zeta(s)$ d'ordre positif. Dans une seconde partie nous allons étudier des questions plus compliquées, surtout la relation entre les deux fonctions $R_1(x)$ et $R_2(x)$ définies par les formules

$$N(x) = Ax + R_1(x), \qquad A = \text{const.} > 0,$$

$$\Pi(x) = L(x) + R_2(x).$$

§ 2. Préliminaires.

Quelques propriétés des fonctions à variation bornée.

Une fonction $v(t)$ qui est à variation totale finie sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$ peut, dans le cas général, être décomposée en trois parties

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t)$$

dont chacune est à variation totale finie sur $(-\infty, \infty)$; v_1 étant absolument continue, v_2 une fonction des sauts et v_3 une »fonction singulière» caractérisé par sa continuité et possédant presque partout une dérivée s'annulant. Posons

$$f_\nu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\, v_\nu(t), \qquad \nu = 1, 2, 3.$$

Quelle est l'allure à l'infini de ces trois fonctions $f_\nu(x)$? Par un théorème fondamental de M. Lebesgue — appelé généralement théorème de Riemann-Lebesgue — on sait que

$$\lim_{x=+\infty} f_1(x) = 0.$$

Quant à $f_2(x)$, on a

$$f_2(x) = \sum A_\nu e^{it_\nu x},$$

où t_ν désigne les points de sauts de $v_2(t)$, et où $A_\nu = v_2(t_\nu + 0) - v_2(t_\nu - 0)$. Cette fonction appartient à une classe particulièrement simple des fonctions presque-périodiques, et ses propriétés sont bien connues. En se rappelant la relation

$$(33) \qquad \lim_{b-a=\infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b |f_2(x)|^2\, dx = \sum |A_\nu|^2,$$

on reconnaît que

$$\overline{\lim_{x=+\infty}}\, |f_2(x)| > 0$$

à moins que $f_2(x) \equiv 0$. Nos connaissances sur l'allure d'une fonction $f_3(x)$ sont très incomplètes. On sait en résumé: 1° par des exemples donnés par MM. Riesz[1] et Carleman[2] qu'il y a des »fonctions singulières» $v_3(t)$ telles que

$$(34) \qquad \overline{\lim_{x=\infty}}\, |f_3(x)| > 0;$$

2° par des exemples construits par MM. Menchoff[3] et Littlewood[4] que la limite (34) peut s'annuler sans que $v_3(t) \equiv$ const.; 3° par un théorème de M. Wiener[5] que

---

[1] *Math. Zeitschrift*, t. 2, p. 312, (1918).

[2] *Sur les équations intégrales etc.*, p. 225. *Uppsala universitets årsskrift* (1923).

[3] *C. R. de l'Ac. de Sc.*, t. 163 p. 433, (1916).

[4] *Quart. J. Math.* (1936).

[5] *The Fourier integral etc.*, p. 146, *Cambridge* (1933). Les propriétés 2° et 3° énoncées dans le texte ne se trouvent pas explicitement dans les travaux cités mais en sont des conséquences immédiates.

(35)
$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f_3(x)|^2 \, dx = 0.$$

Donc, même si la limite (34) est positive, la relation (35) exprime que la densité des valeurs où $|f_3(x)| \geq \delta > 0$ est petite en moyenne.

Lemme I. *Soit* $v(t)$ *réel et impair et en conséquence*

$$f_\nu(x) = 2 \int_0^\infty \cos xt \, d\, v_\nu(t), \qquad \nu = 1, 2, 3.$$

Alors, l'hypothèse

(36)
$$\underline{\lim}_{x=\infty} \, (f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)) \geq 0$$

entraîne

(37)
$$\underline{\text{Borne}} \; f_2(x) \geq 0.$$

Cette propriété est une conséquence de la relation (35) et de la théorie générale des fonctions presque-périodiques. Rappelons qu'une fonction $\varphi(x)$ est presque-périodique au sens de M. Bohr si l'on peut associer à tout $\varepsilon > 0$ un nombre fini $l = l(\varepsilon) > 0$ tel que tout intervalle de longueur l contienne un nombre τ pour lequel

$$|\varphi(x + \tau) - \varphi(x)| \leq \varepsilon, \qquad x \gtreqless 0.$$

Pour qu'une fonction presque-périodique ne s'annule pas indentiquement, il faut que la limite (33) soit positive. Cela étant, supposons que la fonction $f_2(x)$ du lemme soit susceptible des valeurs négatives. La fonction

$$f_2^-(x) = \begin{matrix} 0, & f_2(x) \geq 0, \\ f_2(x), & f_2(x) \leq 0, \end{matrix}$$

satisfait à l'inégalité

$$|f_2^-(x + \tau) - f_2^-(x)| \leq |f_2(x + \tau) - f_2(x)|,$$

qui montre que $f_2^-(x)$ aussi est presque-périodique. Donc, si la proposition (37) était fautive, on aurrait $f_2^-(x) \not\equiv 0$ et en conséquence

(38)
$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \{f_2^-(x)\}^2 \, dx > 0.$$

Notons aussi que l'on a, d'après le théorème de Riemann-Lebesgue,

$$\varliminf_{x=\infty} (f_2(x) + f_3(x)) \geq 0. \tag{39}$$

Or, les trois relations (35), (38) et (39) sont incompatibles, d'où résulte notre proposition. Remarquons enfin que ce lemme ainsi que la théorie des fonctions presque-périodiques et le théorème de M. Wiener sont dispensables pour les résultats énoncés dans l'introduction. Cependant le Lemme I nous fournit une démonstration simple du Théorème II que nous allons établir aussi par une méthode élémentaire.

Un facteur de convergence.

Supposons que $f(t)$ soit une fonction définie pour $-\infty < t < \infty$ par l'intégrale de Fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} g(x)\, dx,$$

où $g(x)$ est sommable sur $(-\infty, \infty)$. Si $f(t)$ n'est pas sommable sur $(-\infty, \infty)$, il s'agit de donner un sens à l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Soit dans ce but $h(t)$ une fonction continue et non négative, sommable sur $(-\infty, \infty)$ et satisfaisant à la condition $h(0) = 1$. Posons

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, h\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt,$$

où λ est un paramètre positif. Il est évident que l'on obtient une méthode régulière de sommation en posant par definition

$$I = \lim_{\lambda=\infty} I(\lambda)$$

si cette limite existe. Supposons maintenant que la fonction réciproque $H(x)$ de $h(t)$,

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\, h(t)\, dt,$$

soit de même sommable sur $(-\infty, \infty)$, d'où résulte d'après les formules de Fourier

$$(40) \qquad \begin{cases} \lambda H(\lambda x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, h\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt, \\[2ex] h\left(\dfrac{t}{\lambda}\right) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \lambda H(\lambda x)\, dx. \end{cases}$$

Pour $I(\lambda)$ on obtient donc la représentation

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} g(x)\, h\left(\frac{t}{\lambda}\right) dx\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda H(\lambda x)\, g(x)\, dx,$$

où le changement de l'ordre de l'intégration est légitime en vertu de la convergence absolue. Par cette formule on voit que l'existence de la limite I ainsi que sa valeur dépendent de certaines propriétés, faciles à comprendre, des fonctions $g(x)$ et $H(x)$.

La puissance de la méthode dont nous venons de décrire les traits essentiels, est mise en lumière par les recherches importantes de M. Wiener relatives aux intégrales de Fourier. La liberté avec laquelle le facteur de convergence $h(t)$ peut être choisi, constitue un avantage notable, dont nous n'avons d'ailleurs nullement, dans cette étude, tiré tout le profit possible. Nous aurons besoin d'une fonction paire $h(t)$ qui satisfasse, avec sa fonction réciproque $H(x)$, paire elle aussi, aux trois conditions suivantes:

1° *$h(t)$ est continu et décroît monotonement de* 1 *à* 0 *quand t croît de* 0 *à* 1 *et s'annulle constamment pour $t > 1$.*

2° *$H(x)$ est positif et décroît monotonement vers zéro quand x croît de* 0 *à* ∞.

3° *L'intégrale*

$$\int_0^{\infty} x H(x)\, dx$$

est convergente.

Remarquons dès maintenant que la condition 3° entraîne que $h(t)$ possède une dérivée continue. Dans le but de former une telle fonction $h(t)$, dont l'existence n'est point évidente, nous partons de la fonction

$$k(t) = \begin{cases} (1-|t|)^2, & |t| \leq 1, \\ 0 & , \quad |t| \geq 1, \end{cases}$$

qui donne

$$K(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, k(t)\, d\,t = 2\int_{0}^{1} (1-t)^2 \cos t\,x\, d\,t = \frac{4}{x^2}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right).$$

Cette fonction $K(x)$ est positive, et un calcul élémentaire montre que $K'(x) < 0$ pour x positif. Posons maintenant

$$k_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t-s)\, k(s)\, d\,s.$$

On voit facilement que $k_1(t)$ est une fonction paire, qui s'annule pour $t \geq 2$ et qui décroît monotonement quand t croît de 0 à 2. On a de plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, k_1(t)\, d\,t = K^2(x).$$

Il s'ensuit que la fonction

$$h(t) = \frac{k_1(2\,t)}{k_1(0)} = \frac{5}{2}\, k_1(2\,t)$$

et sa fonction réciproque

$$H(x) = \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^6 \left(x - 2\sin\frac{x}{2}\right)^2$$

répondent aux trois conditions posées. Nous supposerons dans tout ce mémoire que h et H désignent les fonctions ainsi définies.

Quelques propriétés des fonctions harmoniques dans un demi-plan.

Supposons que $u(\sigma, t)$ soit une fonction paire de t et harmonique dans le demi-plan $\sigma > 0$. Dans ces conditions, la fonction

$$v(\sigma, t) = \int_0^t u(\sigma, t)\, d\, t$$

est aussi harmonique pour $\sigma > 0$. La condition (A_λ) ou (A) étant satisfaite par $v(\sigma, t)$, nous dirons par définition que $u(\sigma, t)$ vérifie la condition (B_λ) ou (B). Pour que $u(\sigma, t)$ satisfasse à la condition (B), il faut et il suffit, d'après une propriété bien connue des fonctions harmoniques, que l'on ait pour tout λ fini

$$\overline{\lim_{\sigma=+0}} \int_{-\lambda}^{+\lambda} |u(\sigma, t)|\, d\, t < \infty.$$

Une condition (A_λ) étant remplie, on a

$$v(\sigma, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (t - \tau)^2} v(\tau)\, d\, \tau + R(\sigma, t),$$

où $R(\sigma, t)$ est une fonction harmonique pour $\sigma > 0$, s'annulant sur le segment ouvert $(-\lambda, \lambda)$ de l'axe t, et où

$$(41) \qquad v(t) = \lim_{\sigma=+0} v(\sigma, t).$$

On en conclut que

$$u(\sigma, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (t - \tau)^2}\, d\, v(\tau) + R_1(\sigma, t),$$

où R_1 est une fonction de la même espèce que R.

Pour $v(\sigma, t) = -\arg \zeta(1 + \sigma + i\, t)$ on aura

$$u(\sigma, t) = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \log |\zeta(1 + \sigma + i\, t)|,$$

d'où l'on tire facilement cette proposition: *Si $\zeta(s)$ satisfait à une condition (A_λ), on aura pour $-\lambda < t < \lambda$:*

$$(42) \qquad \lim_{\sigma=1+0} \frac{\log |\zeta(\sigma + i\, t)|}{\log \frac{1}{\sigma - 1}} = \frac{1}{\pi}(v(t + 0) - v(t - 0)).$$

§ 3. Sur l'intégrale de Laplace pour une classe de fonctions harmoniques.

Soit $u(\sigma, t)$ une fonction harmonique définie dans le demi-plan $\sigma > 0$ par l'intégrale absolument convergente

$$u(\sigma, t) = \int_0^\infty e^{-\sigma x} \cos x t \, d\mu(x),$$

où $\mu(x)$ est une fonction *non décroissante* et $\mu(0) = 0$. Dans ce paragraphe nous allons, à l'aide de la méthode de sommation signalée, étudier ce problème: *Une condition* (B) *ou* (B_λ) *étant remplie par* $u(\sigma, t)$, *déterminer* $\mu(x)$ *et ses propriétés en partant de la fonction* $v(t)$ *définie par* (41) *et supposée connue.*

Si $u(\sigma, t)$ répond à la condition (B_λ), nous formons la fonction harmonique $u_\lambda(\sigma, t)$ définie pour $\sigma > 0$ par l'intégrale de Poisson-Stieltjes

$$u_\lambda(\sigma, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{\sigma h\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)}{\sigma^2 + (t-\tau)^2} \, d v(\tau).$$

En notant que

$$\frac{\sigma}{\sigma^2 + (t-\tau)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma |x| - ixt + ix\tau} \, dx, \qquad \sigma > 0,$$

on obtient

$$u_\lambda(\sigma, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma |x| - ixt + ix\tau} \, h\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) dx \, d v(\tau).$$

Par un changement de l'ordre de l'intégration et en posant

$$\mu'_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{ix\tau} h\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) d v(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\lambda h\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) \cos x\tau \, d v(\tau),$$

on aura

$$u_\lambda(\sigma, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma |x| - ixt} \mu'_\lambda(x) \, dx,$$

d'où les formules

$$(43)\qquad \begin{cases} u_\lambda(\sigma, t) = \int\limits_0^\infty e^{-\sigma x} \cos x t \, d\mu_\lambda(x) \\ \mu_\lambda(x) = \dfrac{2}{\pi} \int\limits_0^\lambda \dfrac{\sin x t}{t} h\left(\dfrac{t}{\lambda}\right) d v(t). \end{cases}$$

Cherchons maintenant la relation entre $\mu_\lambda(x)$ et $\mu(x)$. Si l'on définit $\mu(x)$ pour $x < 0$ par la condition $\mu(-x) = -\mu(x)$, on peut écrire

$$u(\sigma, t) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma|\xi| - it\xi} d\mu(\xi), \qquad \sigma > 0,$$

d'où,

$$(44)\qquad \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\lambda}^{+\lambda} e^{ixt} h\left(\frac{t}{\lambda}\right) u(\sigma, t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\lambda}^{+\lambda} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h\left(\frac{t}{\lambda}\right) e^{-\sigma|\xi| - it\xi + ixt} d\mu(\xi)\, dt.$$

Cette intégrale double converge absolument pour $\sigma > 0$, et l'on obtient, en changeant l'ordre de l'intégration et en notant (40),

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\lambda}^{+\lambda} e^{ixt} h\left(\frac{t}{\lambda}\right) u(\sigma, t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda H(\lambda x - \lambda \xi) e^{-\sigma|\xi|} d\mu(\xi).$$

Faisons maintenant tendre σ vers 0. Le premier membre de (44) est égal à

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\lambda h\left(\frac{t}{\lambda}\right) \cos x t \, d v(\sigma, t) = -\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\lambda v(\sigma, t) \frac{d}{dt}\left\{h\left(\frac{t}{\lambda}\right) \cos x t\right\} dt,$$

intégrale qui, en vertu d'un théorème de M. Lebesgue, converge pour $\sigma \to +0$ vers

$$(45)\qquad \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\lambda h\left(\frac{t}{\lambda}\right) \cos x t \, d v(t) = \mu'_\lambda(x).$$

Quant au second membre de (44), il est à remarquer que $e^{-\sigma|\xi|}$ en croissant tend vers 1 pour $\sigma \to +0$, que $H(x)$ est positif et $\mu(x)$ non décroissant. On en conclut que l'intégrale considérée tend, en croissant, vers la limite

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda H(\lambda x-\lambda\xi)\,d\mu(\xi),$$

et en conséquence que

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\lambda} h\left(\frac{t}{\lambda}\right)\cos xt\,dv(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda H(\lambda x-\lambda\xi)\,d\mu(\xi). \tag{46}$$

Tirons de cette relation quelques conclusions importantes. Si δ est un nombre positif, le second membre de (46) est supérieur ou égal à

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\lambda H(\lambda x-\lambda\xi)\,d\mu(\xi)\ge\frac{\lambda}{2\pi}H(\lambda\delta)(\mu(x+\delta)-\mu(x-\delta)),$$

tandis que l'on obtient pour le premier membre

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\lambda} h\left(\frac{t}{\lambda}\right)\cos tx\,dv(t)\right|\le\frac{2}{\pi}\int_0^{\lambda}|dv(t)|,$$

et, par une application du théorème de Riemann-Lebesgue,

$$\overline{\lim_{x=\infty}}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\lambda} h\left(\frac{t}{\lambda}\right)\cos tx\,dv(t)\right|\le\frac{2}{\pi}\int_0^{\lambda}|d[v_2(t)+v_3(t)]|,$$

où v_1, v_2 et v_3 ont la signification déjà introduite. Il en résulte les inégalités

$$\mu(x+\delta)-\mu(x-\delta)\le\frac{4}{H(\lambda\delta)}\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}|dv(t)|,$$

$$\overline{\lim_{x=\infty}}(\mu(x+\delta)-\mu(x-\delta))\le\frac{4}{H(\lambda\delta)}\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}|d[v_2(t)+v_3(t)]|,$$

d'où l'on tire cette proposition:

1° *Une condition* (B_{λ_0}), $\lambda_0>0$, *entraîne*

$$|\mu(x+\xi)-\mu(x)|\le A(1+|\xi|), \tag{47}$$

$$(48) \qquad \lim_{\xi=+0} \overline{\lim_{x=\infty}} (\mu(x+\xi) - \mu(x)) \leq \frac{4}{H(0)} \operatorname*{Borne}_{0<\lambda\leq\lambda_0} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda |d[v_2(t) + v_3(t)]|,$$

où A est une certaine constante positive et finie.

Tirons dès maintenant une autre conclusion importante de la relation (46). Supposons que $u(\sigma, t)$ satisfasse à la condition (B) et que $v(t)$ possède au point $t = 0$ un saut positif $a_0 = v(+0) - v(-0)$. Désignons par $a_1, a_2, \ldots$ les sauts positifs et par $b_1, b_2, \ldots$ les valeurs numériques des sauts négatifs de $v(t)$ pour $t > 0$.

2° *Si la somme des sauts positifs est finie, la somme des sauts négatifs est aussi finie et*

$$(49) \qquad \sum b_\nu \leq \frac{a_0}{2} + \sum a_\nu.$$

En effet, H étant positif et μ non décroissant, on a d'après (46)

$$\sum_1^3 \int_0^\lambda h\left(\frac{t}{\lambda}\right) \cos tx \, d\, v_\nu(t) \equiv \sum_1^3 f_\nu(x) > 0,$$

d'où résulte, en vertu du Lemme I, que $f_2(0) \geq 0$. Or on a

$$f_2(0) = \int_0^\lambda h\left(\frac{t}{\lambda}\right) d\, v_2(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{0<t_\nu<\lambda} a_\nu h\left(\frac{t_\nu}{\lambda}\right) - \sum_{0<t'_\nu<\lambda} b_\nu h\left(\frac{t'_\nu}{\lambda}\right),$$

où t_ν et t'_ν désignent les points correspondant aux sauts a_ν et $-b_\nu$. Donc

$$\sum_{0<t'_\nu<\lambda} b_\nu h\left(\frac{t'_\nu}{\lambda}\right) \leq \frac{a_0}{2} + \sum_{0<t_\nu<\lambda} a_\nu h\left(\frac{t_\nu}{\lambda}\right),$$

d'où l'inégalité (49), si l'on fait tendre λ vers l'infini.

3° *Une condition (B_λ), $\lambda > 0$, entraîne que la limite*

$$G(\lambda) = \overline{\lim_{x=\infty}} |\mu_\lambda(x) - \mu(x)|$$

est finie.

4° *Si la condition (B) est remplie et si*

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} |d[v_2(t) + v_3(t)]| = 0, \tag{50}$$

on a

$$\lim_{\lambda=\infty} G(\lambda) = 0. \tag{51}$$

Pour démontrer ces propositions nous intégrons les deux membres de (46) de 0 à $x > 0$. En tenant compte de (45), on obtient

$$\mu_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi, x)\, d\mu(\xi), \tag{52}$$

où nous avons posé

$$K(\xi, x) = \int_0^x \lambda H(\lambda x - \lambda \xi)\, dx.$$

Observons que

$$\lim_{\xi=\pm\infty} \xi K(\xi, x) = 0; \quad \frac{\partial K}{\partial \xi} = -\lambda H(\lambda x - \lambda \xi) + \lambda H(-\lambda \xi). \tag{53}$$

Il résulte de (47) et (53) qu'une intégration partielle dans (52) est légitime. On obtient donc, en notant que $H(-\lambda\xi)$ est pair et $\mu(\xi)$ impair,

$$\mu_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda H(\lambda x - \lambda \xi)\, \mu(\xi)\, d\xi. \tag{54}$$

Si, dans cette intégrale, on fait la substitution $(x - \xi \mid -\xi)$ et si l'on tient compte de la relation

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda H(\lambda \xi)\, d\xi = h(0) = 1,$$

on aura

$$\mu_\lambda(x) - \mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda H(\lambda \xi)(\mu(x + \xi) - \mu(x))\, d\xi,$$

d'où résulte, par une application de (47),

$$|\mu_\lambda(x) - \mu(x)| \leq \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda H(\lambda \xi)(1 + |\xi|)\, d\xi,$$

inégalité qui met en évidence la proposition 3°.

Pour démontrer 4°, nous faisons remarquer que

$$\varDelta(\xi) = \overline{\lim_{x=\infty}} \left| \mu(x+\xi) - \mu(x) \right|$$

est une fonction paire qui, en vertu de (50) et (48), jouit de cette propriété:

$$\lim_{\xi=0} \varDelta(\xi) = 0.$$

D'après (47), la différence $|\mu(x+\xi) - \mu(x)|$ possède une majorante fixe de la forme $A(1+|\xi|)$. Il s'ensuit, en vertu d'un théorème fondamental de M. LEBESGUE, que

$$G(\lambda) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda H(\lambda \xi) \varDelta(\xi)\, d\xi.$$

Par un procédé bien connu, on démontre ensuite que

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda H(\lambda \xi) \varDelta(\xi)\, d\xi = \lim_{\xi=0} \varDelta(\xi) = 0,$$

ce qui établit la proposition 4°.

5° *Les deux conditions* (B_{λ_0}), $\lambda_0 > 0$, *et* $v(+0) > 0$ *entraînent l'existence de trois constantes positives et finies* ξ, B *et* C *telles que, pour tout* x *suffisamment grand:*

$$B < \mu(x+\xi) - \mu(x) < C. \tag{55}$$

En effet, déterminons d'abord λ, $0 < \lambda \leq \lambda_0$, si petit que

$$\int_{+0}^{\lambda} \left| d\left[v_2(t) + v_3(t)\right] \right| < \frac{v(+0)}{2}.$$

En considérant la relation (45), on obtient par un procédé déjà employé

$$\underline{\lim}_{x=\infty} \mu'_\lambda(x) \geq \frac{2}{\pi} \left\{ v(+0) - \int_{+0}^{x} \left| d\left[v_2(t) + v_3(t)\right] \right| \right\} > \frac{v(+0)}{\pi},$$

$$\overline{\lim_{x=\infty}}\, \mu'_\lambda(x) \leq \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\lambda} \left| d\left[v_2(t) + v_3(t)\right] \right| < \frac{3\,v(+0)}{\pi}.$$

Déterminons ensuite ξ si grand que

$$\xi \frac{v(+0)}{\pi} > 2\, G(\lambda).$$

Cela étant, l'inégalité (55) devient vérifiée si

$$B = \frac{\xi v(+0)}{\pi} - 2\, G(\lambda), \quad C = \frac{3\, \xi v(+0)}{\pi} + 2\, G(\lambda),$$

dès que x dépasse une certaine limite finie.

6° *Si la condition* (B) *est remplie et si l'intégrale*

$$\int_1^\infty \frac{1}{t} \left| d\, [v_2(t) + v_3(t)] \right| \tag{56}$$

converge, on a pour $x \to \infty$,

$$\mu(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin x t}{t}\, d\, [v_2(t) + v_3(t)] + \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin x t}{t}\, d\, v_1(t) + o(1), \tag{57}$$

δ étant une constante positive quelconque.

Rappelons d'abord que la convergence de (56) entraîne

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \left| d\, [v_2(t) + v_3(t)] \right| = 0. \tag{58}$$

Désignons par $\nu(x)$ la somme des deux intégrales dans (57) et soit

$$g(\lambda) = \overline{\lim_{x=\infty}} \left| \nu(x) - \mu_\lambda(x) \right|.$$

On a donc pour tout $\lambda > 0$

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \left| \mu(x) - \nu(x) \right| \leq G(\lambda) + g(\lambda),$$

et la relation (57) est établie si l'on peut prouver que $G(\lambda) + g(\lambda) \to 0$ pour $\lambda \to \infty$. Or, d'après (58) et (51), $G(\lambda)$ s'annule pour $\lambda \to \infty$, et il suffit donc de montrer qu'il en est de même pour $g(\lambda)$. Introduisons à cet effet la fonction $V(t)$ égale à $v(t)$ dans l'intervalle $(0, \delta)$ et égale à $v_1(\delta) + v_2(t) + v_3(t)$ pour $t \geq \delta$, et notons que

$$(59)\quad \nu(x) - \mu_\lambda(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(1 - h\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right)\frac{\sin xt}{t}\,d\,V(t) - \frac{2}{\pi}\int_\delta^\lambda h\left(\frac{t}{\lambda}\right)\frac{\sin xt}{t}\,d\,v_1(t).$$

La fonction $h(t)$ étant différentiable, on a

$$1 - h\left(\frac{t}{\lambda}\right) \leq \begin{cases} a\dfrac{t}{\lambda}, & 0 \leq t \leq \lambda \\ 1, & t \geq \lambda, \end{cases}$$

où a est une certaine constante. Cela étant, on obtient, en appliquant de nouveau le théorème de Riemann-Lebesgue à la dernière intégrale dans (59),

$$g(\lambda) \leq \frac{2a}{\pi\lambda}\int_0^\lambda |d\,V(t)| + \frac{2}{\pi}\int_\lambda^\infty \frac{1}{t}|d\,V(t)|,$$

ce qui met en évidence que $g(\lambda)$ converge vers zéro pour $\lambda \to \infty$.

Remarque. Grâce à des recherches[1] faites surtout par MM. Landau, Hardy et Littlewood et récemment par M. Wiener et ses élèves, on connaît une suite de théorèmes importants rattachés au problème traité dans ce paragraphe. Les résultats que nous venons d'obtenir conduisent à des propositions plus générales et plus précises que celles déjà connues. Cela résulte en premier lieu de l'avantage important qu'on obtient en considérant la fonction harmonique $u(\sigma, t)$ au lieu de la fonction analytique $f(s)$ qui a $u(\sigma, t)$ pour partie réelle. Remarquons en particulier le théorème de M. Ikahara: *Soit $\alpha(x)$ une fonction non décroissante telle que l'intégrale*

$$f(s) = \int_1^\infty x^{-s}\,d\,\alpha(x)$$

converge absolument dans le demi-plan $\sigma > 1$. Pour que $\alpha(x) \sim Ax$, il suffit de supposer que la fonction $g(s) = f(s) - \dfrac{A}{s-1}$ soit continue sur le demi-plan fermé $\sigma \geq 1$ ($s = \infty$ exclu).

[1] Voir la bibliographie dans Wiener: *Tauberian Theorems* (*Ann. of Math.* t. 33, 1933). Voir aussi Bochner: *Ein Satz von Landau und Ikehara* (*Math. Zeitschr.* t. 37, 1933), Landau und Heilbronn: *Bemerkung zur vorstehenden Arbeit,* ibid., *Ein Satz über Potenzreihen,* ibid., *Anvendung der Wienerschen Methode,* ibid., Karamata: *Weiterführung der N. Wienerschen Methode,* ibid., t. 38, 1934.

A l'aide de la proposition 6°, on déduit, d'après quelques transformations, qu'il suffit de supposer que $u(\sigma, t) = \Re(f(1 + \sigma + it))$ satisfait à la condition (B) et que la fonction $v(t)$ est absolument continue à l'exception d'un saut égal à πA pour $t = 0$. Or on démontre aisément que ces conditions sont remplies (en particulier) si pour tout λ fini on a

$$\overline{\lim_{\sigma=1+0}} \int_{-\lambda}^{+\lambda} |g(\sigma + it)|\, dt < \infty.$$

§ 4. Les Théorèmes I, II et III.

Considérons d'abord quelques transformations. En posant $\overset{*}{\Pi}(y) = \Pi(e^y)$ on aura

$$\log \zeta(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\, d\overset{*}{\Pi}(y), \qquad \sigma > 1 \tag{60}$$

et si l'on remplace ici s par $1 + s$ et qu'on pose

$$\nu(y) = \int_0^y e^{-y}\, d\overset{*}{\Pi}(y),$$

la formule (60) devient

$$\log \zeta(1 + s) = \int_0^\infty e^{-sy}\, d\nu(y), \qquad \sigma > 0. \tag{61}$$

On obtient par conséquent

$$v(\sigma, t) = \int_0^\infty e^{-\sigma y} \sin y t\, d\nu(y), \qquad \sigma > 0, \tag{62}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v(\sigma, t) = \int_0^\infty e^{-\sigma y} \cos y t\, d\mu(y), \qquad \sigma > 0, \tag{63}$$

où

$$\mu(y) = \int_0^y y\, d\nu(y) = \int_0^y y e^{-y}\, d\overset{*}{\Pi}(y).$$

Les fonctions $\Pi(y)$, $\nu(y)$ et $\mu(y)$ sont non décroissantes et les intégrales (61), (62) et (63) convergent absolument dans les demi-plans indiqués. Remarquons aussi cette formule d'inversion

$$(64) \qquad \overset{*}{\Pi}(y) - \overset{*}{\Pi}(y_0) = \int_{y_0}^y \frac{e^y}{y}\, d\mu(y); \qquad y > y_0 \geq 0.$$

Cela étant, les Théorèmes I, II et III résultent directement des propositions du § 3 appliquées à la fonction $\frac{\partial v}{\partial t}$ de la relation (63). Commençons par le Théorème III. D'après la proposition 5°, nos hypothèses entraînent l'existence de trois constantes positives et finies ξ, B et C telles que pour $y > y_0$ on ait $B < \mu(y+\xi) - \mu(y) < C$. Par un procédé évident on en déduit à l'aide de (64) que

$$(65) \qquad a = \varliminf_{y=\infty} \frac{\overset{*}{\Pi}(y)\, y}{e^y} \geq \frac{B e^{-\xi}}{1 - e^{-\xi}}$$

$$(66) \qquad b = \varlimsup_{y=\infty} \frac{\overset{*}{\Pi}(y)\, y}{e^y} \leq \frac{C}{1 - e^{-\xi}}.$$

Le Théorème I résulte de la proposition 6°. En effet, on obtient d'après (57) la décomposition $\mu(y) = \mu_1(y) + \mu_2(y) + \mu_3(y)$, où

$$\mu_1(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin y t}{t}\, d\,[v_2(t) + v_3(t)],$$

$$\mu_2(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin y t}{t}\, d\mu_1(t),$$

$\mu_3(y)$ étant une fonction inconnue qui s'annule pour $y \to \infty$. Donc

$$\int_{y_0}^y \frac{e^y}{y}\, d\mu_3(y) = o\left(\frac{e^y}{y}\right) - \int_{y_0}^y \mu_3(y)\, d\left(\frac{e^y}{y}\right) = o\left(\frac{e^y}{y}\right).$$

Par une application du théorème de Riemann-Lebesgue on voit que la dérivée $\mu'_2(y)$ s'annule pour $y \to \infty$, d'où résulte que

$$\int_{y_0}^{y} \frac{e^y}{y} d\mu_2(y) = o\left(\frac{e^y}{y}\right) \cdot$$

Ces deux relations, ainsi que (65), entraînent

$$\overset{*}{\Pi}(y) \sim \int_{y_0}^{y} \frac{e^y}{y} d\mu_1(y). \tag{67}$$

Or on démontre facilement que la condition (18) rend légitime cette opération:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{e^y}{y} d_y \int_{0}^{\infty} \frac{\sin y t}{t} d[v_2(t) + v_3(t)] = \int_{0}^{\infty}\int_{y_0}^{y} \frac{e^y \cos y t}{y} d y\, d[v_2(t) + v_3(t)].$$

En notant cette relation, où le dernier terme ne dépand pas de y,

$$\Re\{L(e^{y+iyt})\} = \int_{y_0}^{y} \frac{e^y \cos y t}{y} d y + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

on aura enfin

$$\overset{*}{\Pi}(y) \sim \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \Re\{L(e^{y+iyt})\}\, d[v_2(t) + v_3(t)].$$

Le théorème II n'est qu'un cas particulier de la proposition 2°. Par une méthode élémentaire due à M. Hadamard nous démontrerons maintenant une forme plus générale, et d'ailleurs plus commode dans les applications, de ce théorème.

Théorème II'. *Posons*

$$\varrho = \overline{\lim_{\sigma=1+0}} \frac{\log|\zeta(\sigma)|}{\log \dfrac{1}{\sigma - 1}} \tag{68}$$

$$\beta(t) = \lim_{\sigma=1+0} \frac{\log|\zeta(\sigma + i t)|}{\log(\sigma - 1)} \tag{69}$$

et supposons que $\beta(t) \geq 0$ pour $t > 0$. Dans ces conditions on a

$$\sum_{t>0} \beta(t) \leq \frac{\varrho}{2}, \tag{70}$$

où la somme est étendue à l'ensemble des nombres $t > 0$ pour lesquels $\beta(t)$ est positif.

Cette proposition contient le Théorème II. Si en effet la condition (A) est remplie, on a d'après (42)

$$\beta(t) = \frac{1}{\pi}(v(t-0) - v(t+0)) = \alpha(t),$$

et l'ordre ϱ défini dans l'introduction coincide avec ϱ défini par (68). Le théorème précédent, d'autre part, repose sur ce lemme:

Lemme II. *Étant donné un nombre k, $0 < k < 2$, et une suite finie de nombres réels positifs et distincts entre eux, $t_1, t_2, \ldots, t_n$, on peut toujours déterminer une suite finie de nombres réels ne s'annulant pas, $t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots, t_N$, et des nombres positifs, $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_N$, tels que*

$$P(y) = 1 + k\sum_{1}^{n} \cos t_\nu y + \sum_{n+1}^{N} a_\nu \cos t_\nu y \geq 0.$$

Partant du développement

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos y + r^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|\nu|} \cos \nu y, \qquad 0 < r < 1,$$

et de la formule

$$\cos y_1 \cos y_2 \ldots \cos y_p = 2^{-p} \sum \cos(\pm y_1 \pm y_2 \pm \cdots \pm y_p),$$

où la somme est étendue à toutes les combinaisons des signes $\pm$, on obtient

$$\prod_{1}^{p} \frac{1-r^2}{1-2r\cos y_p + 1} = \sum_{\nu_1=-\infty}^{\nu_1=\infty} \cdots \sum_{\nu_p=-\infty}^{\nu_p=\infty} r^{|\nu_1|+\cdots+|\nu_p|} \cos(\nu_1 y_1 + \cdots + \nu_p y_p).$$

Si les nombres $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ne sont pas linéairement indépendants, on peut toujours trouver une suite de nombres $s_1, s_2, \ldots, s_p$ linéairement indépendants et tels que

$$t_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} a_{\nu,\mu} s_\mu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

où $a_{\nu,\mu}$ sont des entiers; si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont linéairement indépendants nous posons $s_\nu = t_\nu$ et en conséquence $a_{\nu,\nu} = 1$ et $a_{\nu,\mu} = 0$ pour $\nu \neq \mu$. Posons

$$n_1 = \underset{\nu=1,2,\ldots p}{\mathrm{Max.}} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} |a_{\nu,\mu}|,$$

et déterminons $0 < \varrho < 1$ tel que

$$\varrho^{n_1} \geq \frac{k}{2},$$

k étant la constante dans l'énoncé du lemme. Déterminons ensuite un entier $n_2 > n_1$ de sorte que

$$\sum_{|\nu_1|+\cdots+|\nu_p|>n_2} \varrho^{|\nu_1|+\cdots+|\nu_p|} \leq \left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\right)^p.$$

Le polynôme

$$P(y) = \sum_{|\nu_1|+\cdots+|\nu_p|\leq n_2} \varrho^{|\nu_1|+\cdots+|\nu_p|} \cos(\nu_1 s_1 + \cdots + \nu_p s_p) y$$

est, d'après ce qui précède, non négatif, le terme constant est égal à 1, ses coefficients sont positifs et la somme des coefficients de $\cos t_\nu x$ et $\cos - t_\nu x$ est supérieure ou égale à k pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$. On en déduit que $P(y)$ remplit les conditions énoncées.

Retournons au Théorème II' et supposons que $\beta(t)$ soit positif pour $t = t_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Soit $0 < k < 2$ et $P(y)$ le polynôme dont nous venons de prouver l'existence. La fonction $\overset{*}{\Pi}(y)$ étant non décroissante et $P(y)$ non négatif on aura pour $1 < \sigma < 2$,

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma y} P(y)}{\log \frac{1}{\sigma - 1}} d\overset{*}{\Pi}(y) = \frac{\log |\zeta(\sigma)|}{\log \frac{1}{1-\sigma}} -$$

$$- k \sum_1^n \frac{\log |\zeta(\sigma + i t_\nu)|}{\log (\sigma - 1)} - \sum_{n+1}^N a_\nu \frac{\log |\zeta(\sigma + i t_\nu)|}{\log (\sigma - 1)}.$$

En prenant la limite supérieure du second membre pour $\sigma \to 1 + 0$, on obtient, en notant que $a_\nu > 0$ et $\beta(t_\nu) \geq 0$,

$$0 \leq \varrho - k \sum_{1}^{n} \beta(t_\nu) - \sum_{n+1}^{N} a_\nu \beta(t_\nu) \leq \varrho - k \sum_{1}^{n} \beta(t_\nu),$$

d'où l'on tire (70) par un raisonnement évident.

§ 5. Les Théorèmes IV, V et VI.

Propriétés de $\zeta(s)$ et de $N(x)$ entraînant une distribution régulière pour $0 < \varrho < 2$ et une distribution presque-périodique pour $\varrho \geq 2$.

Le nombre $\varkappa$ étant positif et non entier, nous dirons q'une fonction holomorphe $f(s)$ satisfait à *la condition infinitésimale* $(\varkappa)$ sur un domaine D si l'on a, dans le cas $0 < \varkappa < 1$, sur D

$$|f(s_2) - f(s_1)| \leq C|s_2 - s_1|^{\varkappa},$$

où C est une constante fixe, et, dans le cas $\varkappa > 1$, si $f(s)$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n = [\varkappa]$ sont uniformément continues sur D et si

$$|f^{(n)}(s_2) - f^{(n)}(s_1)| \leq C|s_2 - s_1|^{\varkappa - [\varkappa]}.$$

Cela étant, considérons une fonction $\zeta(s)$ d'ordre $\varrho > 0$ jouissant de ces propriétés:

1° *$\zeta(s)$ satisfait dans toute demi-couronne $\sigma \geq 1$, $\varepsilon \leq |s - 1| \leq 1/\varepsilon$, à une condition infinitésimale $(\varkappa)$ avec $\varkappa > \varrho/2$.*

2° *$\zeta(s)(s-1)^\varrho$ est continu sur le demi-plan fermé $\sigma \geq 1$ ($s = \infty$ exclu) et se réduit sur $\sigma = 1$ à une fonction absolument continue qui ne s'annule pas au point $s = 1$.*

Dans la suite nous dirons pour abréger que $\zeta(s)$ satisfait à la condition $(\varkappa, \varrho)$ avec $\varkappa > \varrho/2$[1] si les conditions précédentes 1° et 2° sont vérifiées. Démontrons d'abord que cette condition entraîne la distribution régulière (21) dans le champ $0 < \varrho < 2$. Eu égard au Théorème I, il suffit de prouver que $v(\sigma, t)$ répond à la condition (A) et que $v(t)$ est absolument continu à l'exception d'un saut égal à $\pi\varrho$ au point $t = 0$. Or $v(\sigma, t)$ jouit évidemment de ces propriétés si la fonction $\log \zeta(s)(s-1)^\varrho$ converge pour $\sigma \to 1 + 0$, en restant bornée quand t est borné, vers une fonction absolument continue. Ce fait est à son tour une conséquence de 2° si $|\zeta(s)(s-1)^\varrho|$ possède sur tout demi-circle $\sigma \geq 1$,

[1] Dans tous les calculs on suppose aussi $\varkappa < [\varrho/2] + 1$.

$|s-1|\leq R$, une borne inférieure positive, ce qui revient à prouver que $\zeta(1+it)\neq 0$. Cette dernière propriété est enfin une conséquence de la condition 1° et du Théorème II. En effet, si $\zeta(1+it_0)=0$ on aurait

$$\beta(t_0)\geq \varkappa > \frac{\varrho}{2}, \tag{71}$$

ce qui est contradictoire au Théorème II'. La relation (21) est ainsi établie.

Passons au cas $\varrho\geq 2$. Posons

$$q=\left[\frac{\varrho}{2}\right],$$

et démontrons que la condition $(\varkappa, \varrho)$ avec $\varkappa > \varrho/2$ entraîne l'existence de q nombres positifs $t_1, t_2, \ldots, t_q$, parmi lesquels tous ou quelques-uns peuvent s'identifier avec $+\infty$, tels que la relation (32) ait lieu. La fonction $\zeta(s)$ possède par hypothèse des dérivées jusqu'à l'ordre q, continues sur le demi-plan fermé $\sigma\geq 1$ ($s=1$ et $s=\infty$ exclus). En ce cas la fonction $\zeta(s)$ peut s'annuler sur $\sigma=1$; cependant elle ne peut pas s'annuler avec ses q premières dérivées en un point $1+it_0$, car on aurait en vertu de 1°

$$\beta(t_0)\geq \varkappa > \frac{\varrho}{2},$$

inégalité contradictoire au Théorème II'. L'ordre β d'un zéro $1+it$ est donc un nombre naturel inférieur ou égal à q. Le Théorème II' nous dit aussi que la somme des zéros $1+it$, $t>0$, comptés avec multiplicité, est inférieure ou égale à q. On peut par conséquent désigner ces zéros par $1+it_\nu$, $\nu=1, 2, \ldots, q$, où chaque zéro fini apparaît $\beta(t_\nu)$ fois et où l'on pose au besoin $t_q=t_{q-1}=\cdots+\infty$. Cela posé, on déduit facilement de ce qui précède et des conditions 1° et 2° que la fonction

$$f(s)=\frac{\zeta(s)(s-1)^{\varrho}}{\prod\limits_{1}^{q}\left(1+\left(\frac{s-1}{t_\nu}\right)^2\right)}$$

est continue sur tout demi-cercle $\sigma\geq 1$, $|s-1|\leq R$, que son module y possède une borne inférieure positive et de plus, que dans le voisinage d'un zéro $1+it_\nu$, on a

$$|f'(s)|\leq \text{const.}\,|s-1-it_\nu|^{a}, \qquad \sigma\geq 1,$$

où $a=0$ pour $\beta(t_\nu)<q$ et $a=\varkappa-q-1$ pour $\beta(t_\nu)=q$. On en conclut d'une

part que $f(1 + it)$ est absolument continu, et d'autre part, par le même raisonnement qu'au cas $\sigma < \varrho < 2$, que $v(\sigma, t)$ jouit des propriétés qui, conformément au Théorème I, correspondent à la distribution énoncée.

Nous allons déduire maintenant les conditions qu'on doit imposer à $N(x)$ pour que les résultats précédents soient applicables. Supposons dans ce but qu'on puisse effectuer une décomposition, $N(x) = A(x) + a(x)$, telle que la »partie régulière» $A(x)$ jouisse d'une certaine propriété de régularité et que la »partie irrégulière» $a(x)$ satisfasse à une condition

$$a(x) = O\left(\frac{x}{\log^{\gamma} x}\right). \tag{72}$$

Nous supposons aussi que $A(x)$ est nulle pour $x < e$. Posons

$$\overset{*}{N}(y) = N(e^y), \quad \overset{*}{A}(y) = A(e^y), \quad \overset{*}{a}(y) = a(e^y),$$

$$F(s) = \int_1^\infty e^{-ys} \overset{*}{A}(y)\, dy, \qquad \sigma > 1,$$

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-ys} \overset{*}{a}(y)\, dy, \qquad \sigma > 1,$$

et observons que

$$\zeta(s) - 1 = \int_0^\infty e^{-ys}\, d\overset{*}{N}(y) = s \int_0^\infty e^{-ys} \overset{*}{N}(y)\, dy.$$

A la décomposition de $N(x)$ correspond donc une décomposition de $\zeta(s)$:

$$\zeta(s) = 1 + sF(s) + sf(s),$$

où $sF(s)$ est la »partie régulière» et $sf(s)$ la »partie irrégulière» de $\zeta(s)$. Démontrons maintenant cette proposition:

Si l'on peut décomposer $N(x) = A(x) + a(x)$, *de sorte que* $F(s)$ *satisfasse à la condition* $(\varkappa, \varrho)$, $\varkappa > \varrho/2$, *et que* γ *soit supérieur au plus grand des nombres* $3/2$ *et* $1 + \varrho/2$, *la fonction* $\zeta(s)$ *vérifie elle-même la condition* $(\varkappa, \varrho)$, $\varkappa > \varrho/2$. *La distribution* $\Pi(x)$ *est en conséquence régulière pour* $0 < \varrho < 2$ *et presque-périodique d'après la relation* (32) *pour* $\varrho \geq 2$.

Il existe par hypothèse une constante C telle que

$$|\overset{*}{a}(y)| < \frac{C e^y}{(1+y)^\gamma}, \qquad y > 0.$$

Donc, si $\gamma > 1$, l'intégrale qui définit $f(s)$ converge absolument et uniformément pour $\sigma \geq 1$; $f(s)$ est par suite continu sur le demi-plan fermé $\sigma \geq 1$. De plus, si $1 < \gamma < 2$, $f(s)$ satisfait dans $\sigma \geq 1$ à la condition de Lipschitz

$$|f(s_2) - f(s_1)| < \text{const.}\, |s_2 - s_1|^{\gamma - 1}.$$

En effet, si l'on pose $|s_2 - s_1| = \delta$ on aura pour $\sigma \geq 1$

$$|e^{-s_1 y} - e^{-s_2 y}| < \begin{matrix} 4 e^{-y} \delta y, & \delta y \leq 1, \\ 4 e^{-y} \quad , & \delta y \geq 1, \end{matrix}$$

d'où

$$|f(s_2) - f(s_1)| < 4\, C \left\{ \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{\delta y\, d y}{(1+y)^\gamma} + \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{d y}{(1+y)^\gamma} \right\} < C' \delta^{\gamma - 1}.$$

Si d'autre part γ est un nombre non entier supérieur à 2, les intégrales qui représentent $f(s)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $\nu = [\gamma - 1]$ convergent uniformément et absolument pour $\sigma \geq 1$ et la dérivée $f^{(\nu)}(s)$ satisfait, d'après ce qui précède, à une condition de Lipschitz à l'exposant $\gamma - [\gamma]$. *Donc, si* $\gamma > 1 + \varrho/2$, *la fonction* $f(s)$ *satisfait dans le demi-plan* $\sigma \geq 1$ *à une condition infinitésimale* $(\varkappa)$ *avec* $\varkappa > \varrho/2$.

Supposons maintenant que $\overset{*}{a}(y)\, y\, e^{-y}$ soit à carré sommable sur $(0, \infty)$, et remarquons que

$$f'(\sigma + i t) = -\int_0^\infty e^{-\sigma y - i t y}\, y\, \overset{*}{a}(y)\, d y, \qquad \sigma > 1.$$

En vertu de la relation de Parseval pour la transformation de Fourier, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(\sigma + i t)|^2\, d t = \int_0^\infty \{e^{-\sigma y}\, y\, \overset{*}{a}(y)\}^2\, d y, \qquad \sigma > 1$$

ou bien

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f'(\sigma+it)-f'(\sigma'+it)|^2\,dt=\int_0^\infty\{(e^{-\sigma y}-e^{-\sigma' y})\,y\,\overset{*}{a}(y)\}^2\,dy,\quad \sigma>1,\sigma'>1.$$

Or, dans l'hypothèse qui vient d'être faite, on a

$$\lim_{\substack{\sigma=1+0\\ \sigma'=1+0}}\int_0^\infty\{(e^{-\sigma y}-e^{-\sigma' y})\,y\,\overset{*}{a}(y)\}^2\,dy=0,$$

d'où résulte, d'après le théorème de FISCHER-RIESZ, que $f'(\sigma+it)$ pour $\sigma\to 1+0$ converge en moyenne vers une fonction à carré sommable. On en conclut: *si* $\gamma>3/2$, $f(s)$ *se réduit pour* $\sigma=1$ *à une fonction absolument continue.* De ces deux propriétés de $f(s)$ on déduit la proposition énoncée, en notant que $sF(s)$ et $sf(s)$ possèdent la même régularité infinitésimale que $F(s)$ et $f(s)$, et de plus que $s(s-1)^\varrho f(s)$ est absolument continu sur le bord $\sigma=1$ en même temps que $f(s)$.

Montrons enfin que le théorème que nous venons de prouver s'applique aux propositions énoncées dans l'introduction. Pour s'en assurer il suffit de montrer que la condition $(\varkappa,\varrho)$, $\varkappa>\varrho/2$, est satisfaite par $F(s)$, qui correspond au type de fonction $A(x)=A_\varrho(x)$ qui entre dans les Théorèmes IV, V et VI. Posons à cet effet

$$\varphi_\varrho(s)=\Gamma(\varrho)(s-1)^{-\varrho},\qquad \varrho\neq 0,-1,-2,\ldots$$

$$\varphi_\varrho(s)=\frac{(-1)^\varrho}{\Gamma(1-\varrho)}(s-1)^{-\varrho}\log\frac{1}{s-1},\quad \varrho=0,-1,-2,\ldots$$

et remarquons cette relation, aisément vérifiée:

$$\int_1^\infty e^{-ys+y}y^{\varrho-1}\,dy=\varphi_\varrho(s)+\text{fonct. entière de } s.$$

On aura par conséquent

$$F(s)=\sum_1^n A_\nu\,\varphi_{\varrho_\nu}(s)+\text{fonct. entière de } s,$$

et cette fonction répond visiblement à la condition dont il s'agit si le plus grand des nombres ϱ_ν ainsi que le coefficient A_ν correspondant sont positifs.

Exemples élémentaires montrant que les bornes obtenues sont les meilleures.

Considérons la fonction

$$\varphi(s) = \prod_1^n \left\{ 1 + \left(\frac{t_\nu}{s-1}\right)^2 \right\}^{\alpha_\nu},$$

où $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, et où les α_ν sont des nombres positifs tels que

$$2 \sum_1^n \alpha_\nu = \varrho.$$

La fonction

$$v(t) = \lim_{\sigma=1+0} - \arg \varphi(s)$$

présente pour $t = 0$ un saut positif égal à $\pi\varrho$ et pour $t = t_\nu$ un saut négatif égal à $\pi\alpha_\nu$; tandis que $v(t)$ reste constant dans les intervalles $(0, t_1)$, (t_1, t_2), $\ldots, (t_n, \infty)$. On démontre facilement que

$$\log \varphi(s) = \int_1^\infty x^{-s}\, d\, \Pi(x)$$

où

$$\Pi(x) = \int_1^x \left(\varrho - 2\sum_1^n \alpha_\nu \cos(t_\nu \log x)\right) \frac{dx}{\log x}.$$

Cette fonction $\Pi(x)$ est croissante, et $\varphi(s)$ est en conséquence une fonction de Riemann d'après la définition générale posée dans l'introduction. La fonction $\overset{*}{N}(y) = N(e^y)$ qui correspond à $\varphi(s)$ satisfait à cette relation

$$\overset{*}{N}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\varphi(s) - 1}{s} e^{ys}\, ds, \qquad \sigma > 1.$$

Si l'on désigne par $l_\varepsilon(\sigma + i t)$ le chemin d'intégration dont la distance à la coupure $(-\infty + i t,\ \sigma + i t)$ reste constamment égale à $\varepsilon > 0$, on aura pour $y > 0$,

$$\overset{*}{N}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_\varepsilon(1)} \frac{\varphi(s) - 1}{s} e^{ys}\, d s + \sum_1^n \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int\limits_{l_\varepsilon(1-it_\nu)} + \int\limits_{l_\varepsilon(1+it_\nu)} \frac{\varphi(s) - 1}{s} e^{ys}\, d s \right\},$$

où l'intégration est prise dans le sens positif par rapport aux coupures enfermées. Désignons dans cette formule la première intégrale par $\overset{*}{A}(y)$ et la somme des autres par $\overset{*}{a}(y)$. Observons que l'intégrale qui correspond au chemin $l_\varepsilon(1 + i t_\nu)$ s'annule si α_ν est un nombre entier, et de plus qu'elle est égale à

$$\tag{73} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_0(1+it_\nu)} \frac{\varphi(s)}{s} e^{ys}\, d s,$$

où $l_0(1 + i t_\nu)$ désigne les deux bords de la coupure. Notons aussi que (73) admet comme majorante

$$\text{const. } e^y \int\limits_0^\infty e^{-\sigma y} \sigma^{\alpha_\nu}\, d\sigma = O\left(\frac{e^y}{y^{1+\alpha_\nu}}\right) \cdot$$

Donc, si $\varphi(s)$ est une fonction rationnelle, $\overset{*}{a}(y)$ s'annule identiquement; si d'autre part il y a parmi les α_ν des nombres non entiers et si α est leur minimum, on a

$$\overset{*}{a}(y) = O\left(\frac{e^y}{y^{1+\alpha}}\right) \cdot$$

Par un calcul un peu plus détaillé, on trouve aussi que cet ordre de grandeur est atteint par les valeurs positives ainsi que par les valeurs négatives pour $y \to \infty$.

Considérons maintenant le terme $\overset{*}{A}(y)$; supposons dans ce but que les nombres A_n soient définis par la série de Taylor suivante

$$\frac{\varphi(s)}{s} = \frac{1}{(s-1)^\varrho} \cdot \frac{1}{s} \cdot \prod_1^n \{(s-1)^2 + t_\nu^2\}^{\alpha_\nu} = \frac{1}{(s-1)^\varrho} \sum_0^\infty A_n (s-1)^n.$$

Cela posé, on démontre facilement que $\overset{*}{A}(y)$ est asymptotiquement représenté par cette série divergente

$$\overset{*}{A}(y) \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{l_\varepsilon(1)} e^{ys} A_n (s-1)^{n-\varrho}\, ds = e^y y^{\varrho-1} \sum_{0}^{\infty} \frac{A_n}{\Gamma(\varrho-n)} \frac{1}{y^n},$$

et de plus, si ϱ est un nombre entier, que $\overset{*}{A}(y)$ se réduit à la somme de résidus

$$\overset{*}{A}(y) = e^y y^{\varrho-1} \sum_{0}^{\varrho-1} \frac{A_n}{\Gamma(\varrho-n)} \frac{1}{y^n} + \varphi(0) - 1.$$

La fonction considérée $\varphi(s)$ élucide plusieurs questions traitées dans ce mémoire. En premier lieu elle fournit une décomposition toute naturelle de $N(x)$ en »partie régulière» $A(x)$ et »partie irrégulière» $a(x)$, qui met en évidence la relation entre $a(x)$ et les zéros d'ordre non entier. On voit aussi que l'inégalité (19) du Théorème II ne peut être améliorée, ce qui est d'ailleurs assez évident. Les cas particuliers suivants:

$$(74)\qquad \begin{cases} \varphi(s) = \left\{1 + \left(\dfrac{t_1}{s-1}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\[2ex] \Pi(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1-\cos(t_1 \log x)}{\log x}\, dx \\[2ex] N(x) = t_1 x + O\left(\dfrac{x}{\log^{3/2} x}\right) \end{cases}$$

$$(75)\qquad \begin{cases} \varphi(s) = \left\{1 + \left(\dfrac{t_1}{s-1}\right)^2\right\}^{\frac{\varrho}{2}} \qquad 0 < \varrho < 2,\ \varrho \neq 1 \\[2ex] \Pi(x) = \varrho \displaystyle\int_1^x \frac{1-\cos(t_1 \log x)}{\log x}\, dx \\[2ex] N(x) = x \log^{\varrho-1} x \displaystyle\sum_{0}^{\left[\frac{3\varrho}{2}\right]} \frac{A_n}{\Gamma(\varrho-n)} \frac{1}{\log^n x} + O\left(\dfrac{x}{\log^{1+\varrho/2} x}\right) \end{cases}$$

montrent que la condition $\gamma > 1 + \varrho/2$ dans les Théorèmes IV et V ne peut être remplacée par $\gamma = 1 + \varrho/2$. Si ϱ est un nombre entier supérieur ou égal à 2, une fonction $\varphi(s)$ rationnelle met en évidence que l'hypothèse

$$N(x) = A_\varrho(x) + O(1)$$

n'entraîne pas $\zeta(1 + it) \neq 0$. Des exemples un peu plus compliquées montrent que cette propriété subsiste pour tout nombre $\varrho > 2$.

Table des matières.