STELLENTRANSFORMATION IN ALGEBRAISCHEN KÖRPERN ZWEIER VERÄNDERLICHER.

VON

H. W. E. JUNG

in HALLE-S.

Während sich in einem algebraischen Körper einer Veränderlichen die Stellen im wesentlichen nur auf eine Art definieren lassen, ist das bei zwei Veränderlichen ganz anders. Hier kann man die Stellen auf wesentlich verschiedene Arten definieren. Die folgende Arbeit behandelt den Übergang von einer Stellendefinition zu einer andern. Das Ergebnis ist sehr einfach. Es gibt nämlich eine Elementartransformation derart, dass sich aus ihr und ihrer Umkehrung jede Abänderung in der Definition der Stellen zusammensetzen lässt. Daraus ergibt sich z. B.: Um die Änderung einer Grösse bei einer Stellentransformation zu bestimmen, braucht man nur festzustellen, wie sie sich bei einer Elementartransformation ändert. Mit den Ergebnissen dieser Arbeit lässt sich die birationale Transformation in algebraischen Körpern zweier Veränderlicher einfacher und übersichtlicher darstellen als bisher. Ausserdem zeigt sich, dass es i. a. eine eindeutig bestimmte »einfachste« Stellendefinition gibt.

Mit einem Teil der hier behandelten Fragen habe ich mich schon in den unten angegebenen Arbeiten beschäftigt, ohne eine voll befriedigende Lösung zu finden. Erst die Trennung der Stellentransformation von der birationalen Transformation gab die volle Klärung.

1. H. W. E. JUNG, Über die Cremonasche Transformation der Ebene. Journal für Mathematik, Bd. 138, (1910), S. 255—318.

2. H. W. E. JUNG, Über die ausgezeichneten Kurven algebraischer Flächen. Journal für Mathematik, Bd. 142, (1913), S. 61—117.

3. H. W. E. JUNG, Singuläre Punkte ebener algebraischer Kurven. Math. Ann., Bd. 84, (1921), S. 161—201.

Die Kenntnis dieser Arbeiten ist zum Verständnis des folgenden nicht notwendig.

Inhaltsverzeichnis.

I. Einleitung.

II. Stellentransformationen.

III. Einseitige Stellentransformationen.

IV. Die allgemeine Stellentransformation.

V. Ausgezeichnete Stellendefinitionen.

I. Einleitung.

§ 1. Stellen.

In einem Körper K zweier unabhängiger Veränderlicher wird eine Stelle S mit ihrer Umgebung dadurch definiert, dass man die Funktionen des Körpers in der Umgebung von S als Quotienten zweier gewöhnlicher Potenzreihen zweier Ortsfunktionen u, v darstellt. Die Ortsfunktionen sind nicht eindeutig durch die Stelle S bestimmt. Sind u', v' zwei andere Ortsfunktionen, mit deren Hilfe auch die Stelle S und ihre Umgebung definiert werden kann, so müssen u', v' sich als gewöhnliche Potenzreihen von u, v darstellen lassen, die für $u = v = 0$ verschwinden, und es darf die Funktionaldeterminante von u', v' nach u, v in S nicht gleich 0 sein. Im besonderen können u, v als Funktionen aus K gewählt werden.

§ 2. Primteiler.

Jede homomorphe Abbildung von K auf einen algebraischen Körper $[\mathfrak{P}]$ einer Veränderlichen definiert einen Primteiler $\mathfrak{P}$. Eine Funktion R aus K enthält $\mathfrak{P}$ in positiver Potenz, wenn R auf 0 abgebildet wird. In welcher Potenz $\mathfrak{P}$ in irgendeiner Funktion aus K enthalten ist, wird sich im folgenden ergeben. Den Übergang von K zu $[\mathfrak{P}]$ drücken wir durch $\mathfrak{P} = 0$ aus.

Die Stelle S mit den Ortsfunktionen u, v gehe für $\mathfrak{P} = 0$ in eine Stelle s von $[\mathfrak{P}]$ über. Von einer solchen Stelle sagen wir, sie liegt auf $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P}$ geht durch sie. Ist R eine Funktion aus K, die für $\mathfrak{P} = 0$ in 0 übergeht, und ist bei S

$$R = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)},$$

so muss $P(0, 0) = 0$ sein, da R in allen Stellen von $[\mathfrak{P}]$ identisch 0 ist. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Da $R = 0$ wird für $\mathfrak{P} = 0$, so kann $[\mathfrak{P}]$ bei S durch eine Gleichung

$$\mathfrak{P}(u, v) = 0$$

definiert sein, wo $\mathfrak{P}(u, v)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v ist, die für $u = v = 0$ verschwindet, und die ein Teiler des Zählers $P(u, v)$ von R ist. Wir nennen $\mathfrak{P}(u, v)$ die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ für S. Sie ist naturgemäss nur bis auf eine Einheit als Faktor bestimmt. Ist S_0 eine Stelle von K, die für $\mathfrak{P} = 0$ nicht in eine Stelle von $[\mathfrak{P}]$ übergeht, so soll die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ für S_0 gleich 1 oder gleich einer Einheit sein.

Wir sagen, eine Funktion T aus K ist genau durch $\mathfrak{P}^\lambda$ teilbar, wenn sie sich bei einer Stelle S, durch die $\mathfrak{P}$ geht, in der Form darstellen lässt

$$T = \mathfrak{P}^\lambda(u, v)\frac{G(u, v)}{H(u, v)},$$

wo die gewöhnlichen Potenzreihen G und H durch $\mathfrak{P}(u, v)$ nicht teilbar sind. Die so zu definierenden Primteiler heissen *Primteiler erster Art.* Sie gehen durch unendlichviele Stellen. Sind nämlich u_0, v_0 innerhalb des Konvergenzgebietes von $\mathfrak{P}(u, v)$ so gewählt, dass $\mathfrak{P}(u_0, v_0) = 0$, so geht $\mathfrak{P}$ auch durch die Stelle $u = u_0$, $v = v_0$.

Es gilt der Satz:

Jede Funktion aus K lässt sich auf eine und nur eine Art in ein Produkt von Primteilern erster Art zerlegen.

Ist

$$T = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1}\mathfrak{P}_2^{\alpha_2}\ldots\mathfrak{P}_n^{\alpha_n},$$

wo die α_i positive oder negative ganze Zahlen sind, *die rein formale Zerlegung* einer Funktion T aus K in Primteiler erster Art, so ergibt sich hieraus die Darstellung von T bei einer Stelle S, also *eine wirkliche Gleichung*, dadurch, dass man die $\mathfrak{P}_i$ durch ihre zugeordneten Funktionen für S ersetzt und noch eine passende Einheit als Faktor hinzufügt.

2. Es kann R für $\mathfrak{P} = 0$ auch dadurch in 0 übergehen, dass u und v beide für $\mathfrak{P} = 0$ in 0 übergehen. Damit auch in diesem Falle K für $\mathfrak{P} = 0$ in einen Körper $[\mathfrak{P}]$ einer Veränderlichen übergeht, dürfen u und v nicht unabhängig voneinander zu 0 werden. Die genauere Untersuchung ergibt folgende Definition einer derartigen Abbildung.

Der Körper, auf den wir abbilden, sei jetzt mit $[\mathfrak{a}_1]$ und der durch sie definierte Primteiler mit $\mathfrak{a}_1$ bezeichnet. Es sei

$$(1) \qquad v_1(u) = a_0 u^{\frac{\alpha}{\beta}} + a_1 u^{\frac{\alpha+1}{\beta}} + \cdots + a_{\nu-1} u^{\frac{\alpha+\nu-1}{\beta}} + t_1 u^{\frac{\alpha+\nu}{\beta}},$$

wo die a_k konstant sein sollen, während t_1 ein Parameter ist. Wir denken uns die Funktionen aus K bei S durch u, v dargestellt, ersetzen v durch $v_1(u)$ und lassen dann u nach 0 gehen. Dadurch gehen alle Funktionen aus K in rationale Funktionen von t_1 über. Der Körper $[\mathfrak{a}_1]$ hat also das Geschlecht 0. Die auf diese Weise definierten Primteiler heissen *Primteiler zweiter Art.* Jeder von ihnen gehört zu einer bestimmten Stelle S.

Der Hauptnenner der ersten ν Exponenten von u in (1) sei $\gamma = \beta/\delta$, während β der Hauptnenner aller Exponenten sein soll. Für $\mathfrak{a}_1 = 0$ gehe die Funktion R aus K in die Funktion r über. Bei S ist dann, nachdem wir v durch $v_1(u)$ ersetzt haben,

$$R = r + u^{\frac{\lambda}{\beta}} e(u),$$

wo $\lambda > 0$, und $e(u)$ eine Einheit für $u = 0$ ist. Lassen wir u den Punkt $u = 0$ γ-mal umlaufen, so nimmt der letzte Summand von $v_1(u)$ einen Faktor ε auf, der eine δ-te Einheitswurzel ist, während die anderen Summanden ungeändert bleiben. Dabei bleibt r ungeändert. Dasselbe erreichen wir dadurch, dass wir t_1 durch εt_1 ersetzen. Also darf sich r auch hierbei nicht ändern, sodass r eine rationale Funktion von

$$\tau_1 = t_1^\delta$$

sein muss. Der Körper $[\mathfrak{a}_1]$ besteht daher aus den rationalen Funktionen von τ_1.

Wir setzen

$$A_1(u, v; \tau_1) = \text{Norm}\,\{v - v_1(u)\},$$

wo die Norm sich auf die β konjugierten Werte von $v_1(u)$ bezieht. Es heisst A_1 die *Eichfunktion* von $\mathfrak{a}_1$. Sie ist eine ganze rationale Funktion von u, v und τ_1. Ihr Grad in u, v sei mit $(\delta_{11}, \delta_{12}) = (\alpha + \nu, \beta)$ bezeichnet. Ferner gilt

$$(2) \qquad \frac{A_1(u, v; \tau_{11})}{A_1(u, v; \tau_{12})} \to \frac{\tau_1 - \tau_{11}}{\tau_1 - \tau_{12}} \text{ für } \mathfrak{a}_1 = 0,$$

sodass τ_1 dem Körper $[\mathfrak{a}_1]$ angehört. Daher sind seine Stellen eineindeutig den Werten von τ_1 zugeordnet. Ist $\mathfrak{a}_2$ ein zweiter zur Stelle S gehörender Primteiler zweiter Art und $A_2(u, v; \tau_2)$ seine Eichfunktion, so gilt ferner

$$(3) \qquad \frac{A_2(u, v; \tau_{21})}{A_2(u, v; \tau_{22})} \to c \text{ für } \mathfrak{a}_1 = 0,$$

wo c unabhängig von τ_1 ist.

Ist T eine Funktion aus K und ist bei S

$$T_{v=v_1} = u^{\frac{\lambda}{\delta_{12}}} e(u),$$

wo e eine Einheit für S ist, so sagen wir, T ist genau durch $\mathfrak{a}_1^\lambda$ teilbar. Ist ferner $\mathfrak{P}(u, v)$ die zugeordnete Funktion eines Primteilers erster Art für S und beginnt die Entwicklung von $\mathfrak{P}(u, v_1)$ nach steigenden Potenzen von u mit $u^{\frac{\mu}{\delta_{12}}}$, so sagen wir, der Primteiler erster Art $\mathfrak{P}$ enthält den Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}_1$ genau in der Potenz μ. *Die Primteiler zweiter Art sind also in denen erster Art enthalten* und durch diese mit gegeben. Jeder Primteiler zweiter Art gehört, wie schon angegeben, zu einer und nur einer Stelle von K, und zu jeder Stelle von K gehören unendlichviele Primteiler zweiter Art.

§ 3. Divisoren, Divisorenklassen.

1. *Definitionen.*

Sind $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ Primteiler und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ganze Zahlen, so nennen wir

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \ldots \mathfrak{P}_n^{\lambda_n} \tag{4}$$

einen Divisor. Er heisst ganz, wenn kein λ_k negativ ist, und von der ersten oder zweiten Art, wenn alle $\mathfrak{P}_i$ erster oder zweiter Art sind. Wir beschränken uns in diesem und dem folgenden Paragraphen auf Divisoren erster Art. Sie werden in *Klassen* eingeteilt, indem man zwei Divisoren $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ dann und nur dann in dieselbe Klasse rechnet, wenn ihr Quotient gleich einer Funktion des Körpers ist, in Zeichen $\mathfrak{Q}_1 \sim \mathfrak{Q}_2$; zwei solche Divisoren heissen *äquivalent.* Die Klasse, der $\mathfrak{Q}$ angehört, wird mit $(\mathfrak{Q})$ bezeichnet. Die Anzahl der in ihr enthaltenen linear unabhängigen ganzen Divisoren heisst die *Dimension* von $(\mathfrak{Q})$ und wird mit $\{\mathfrak{Q}\}$ bezeichnet.

Unter den Klassen heben wir zwei hervor. Erstens die *Hauptklasse* (1), die die Divisoren enthält, die den Funktionen aus K entsprechen, und zweitens die *kanonische oder Differentialklasse.* Diese wird in folgender Weise definiert. Sind x und y zwei voneinander unabhängige Grössen aus K, so ist bei einer Stelle S

$$dx\, dy = \mathfrak{K}(u, v)\, du\, dv.$$

$\mathfrak{K}(u, v)$ ist die zugeordnete Funktion eines Divisors $\mathfrak{K}$. Dieser hängt von der Wahl von x und y ab. Aber alle diese Divisoren gehören derselben Klasse an, nämlich der kanonischen Klasse $(\mathfrak{K})$. Die Zahl $\{\mathfrak{K}\} = p_g$ heisst das geometrische Geschlecht von K.

Ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}^* \sim \mathfrak{K}$, so nennt man die Klassen $(\mathfrak{Q})$ und $(\mathfrak{Q}^*)$ Ergänzungsklassen voneinander.

2. *Zahl der Schnittpunkte zweier Divisoren.*

Ist $\mathfrak{P}$ ein Primteiler erster Art, so geht für $\mathfrak{P} = 0$ jede Funktion aus K in eine Funktion des Körpers $[\mathfrak{P}]$ über. Ebenso geht jede Klasse $(\mathfrak{Q})$ in eine ganz bestimmte Klasse $(\mathfrak{q})$ von $[\mathfrak{P}]$ über. Den Grad von $(\mathfrak{q})$ bezeichnen wir mit $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$, und nennen diese Zahl die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$. Ist $\mathfrak{P}$ kein Primteiler, sondern ein Divisor erster Art, und ist

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1^{\mu_1} \mathfrak{Q}_2^{\mu_2} \dots \mathfrak{Q}_m^{\mu_m},$$

während $\mathfrak{P}$ durch (4) gegeben ist, so setzen wir

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = \sum \lambda_i (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{Q}) = \sum \lambda_i \mu_k (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{Q}_k) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}). \tag{5}$$

Diese Rechenregel soll auch für alle späteren Verallgemeinerungen von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ gelten.

Ferner gilt für das Symbol $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$

$$(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = (\overline{\mathfrak{Q}}_1, \overline{\mathfrak{Q}}_2), \text{ wenn } \mathfrak{Q}_1 \sim \overline{\mathfrak{Q}}_1,\ \mathfrak{Q}_2 \sim \overline{\mathfrak{Q}}_2. \tag{6}$$

Man nennt im besonderen $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q})$ den *Grad der Klasse* $(\mathfrak{Q})$.

3. *Das Geschlecht eines Primteilers erster Art.*

Die zugeordnete Funktion $\mathfrak{P}(u, v)$ eines Primteilers $\mathfrak{P}$ bei S kann mit Gliedern höherer als erster Ordnung beginnen, sodass die Kurve $\mathfrak{P}(u, v) = 0$ im Punkte $u = v = 0$ einen mehrfachen Punkt hat. Ein solcher Punkt liefert einen Beitrag zu dem Divisor der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{P}$, der ein Divisor des Körpers $[\mathfrak{P}]$ ist. Er wird ganz so definiert wie der Divisor der mehrfachen Stellen einer ebenen algebraischen Kurve. Wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$ und seine Ordnung mit $2\sigma(\mathfrak{P})$. Es gilt der Satz:

Die Klasse $(\mathfrak{P}\mathfrak{K})$ geht für $\mathfrak{P} = 0$ in die Klasse $(\mathfrak{k}\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}})$ über, wo $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$ der Divisor der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{P}$ und $(\mathfrak{k})$ die kanonische Klasse von $[\mathfrak{P}]$ ist.

Da die Ordnung von $(\mathfrak{k})$ gleich $2\pi(\mathfrak{P}) - 2$ ist, wenn wir das Geschlecht von $[\mathfrak{P}]$ oder $\mathfrak{P}$ mit $\pi(\mathfrak{P})$ bezeichnen, so folgt die für jeden Primteiler erster Art $\mathfrak{P}$ bestehende Gleichung

(7) $$2\pi(\mathfrak{P}) - 2 = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}\mathfrak{K}) - 2\sigma(\mathfrak{P}).$$

4. *Der Riemann-Rochsche Satz.*

Sind $(\mathfrak{Q})$ und $(\mathfrak{Q}^*)$ zwei Ergänzungsklassen, ist also $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}^* \sim \mathfrak{K}$, so lautet der Riemann-Rochsche Satz

(8) $$[\mathfrak{Q}] = \{\mathfrak{Q}\} + \{\mathfrak{Q}^*\} + \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}^*) \geqq p_a + 1,$$

wo p_a das arithmetische Geschlecht von K und wo $[\mathfrak{Q}]$ zur Abkürzung eingeführt ist. Steht das Gleichheitszeichen, und ist $\{\mathfrak{Q}^*\} = 0$, so heisst die Klasse $(\mathfrak{Q})$ *regulär*.

II. Stellentransformationen.

§ 1. Definition der Stellentransformation.

K sei der Körper der rationalen Funktionen von x, y. Wir definieren die Stellen von K in folgender Weise. Sind a, b irgendzwei Zahlen, so setzen wir

$$x - a = u, \quad y - b = v,$$

wo u und v Ortsfunktionen sein sollen. Unter $x - a$ und $y - b$ sollen x^{-1} und y^{-1} verstanden werden, wenn a und b unendlich sind. Dadurch sind die Stellen von K und ihre Umgebungen definiert, und x, y nehmen an allen Stellen bestimmte Werte an.

Setzen wir $x = \xi$, $y = \xi\eta$, so ist umgekehrt $\xi = x$, $\eta = y/x$, sodass der Körper K identisch ist mit dem Körper der rationalen Funktionen von ξ, η. Wir können daher die Stellen von K auch so definieren, dass ξ und η an allen Stellen bestimmte Werte annehmen, indem wir setzen $\xi - \alpha = u'$, $\eta - \beta = v'$, wo α und β irgendzwei Zahlen sind. Im allgemeinen entsprechen die so definierten Stellen einander eineindeutig, nämlich jedesmal dann, wenn an einer solchen Stelle sowohl x, y wie auch ξ, η bestimmte Werte annehmen. Das gilt aber nicht für alle Stellen. Z. B. wird in der Umgebung der auf die erste Art definierten Stelle S_0, wo x und y beide den Wert 0 annehmen,

$$x = u, \quad y = v, \quad \text{also } \xi = u, \quad \eta = \frac{v}{u}.$$

An der Stelle S_0 wird daher η unbestimmt, während $\xi = 0$ wird. Der Stelle S_0

entspricht daher keine bestimmte der Stellen, die wir bei der zweiten Definition der Stellen von K erhalten. Vielmehr entsprechen ihr unendlichviele Stellen, nämlich alle die, wo $\xi = 0$, während η irgendeinen Wert hat.

Hiermit hängt folgendes zusammen. Setzen wir im Körper der rationalen Funktionen von ξ, η die Grösse $\xi = 0$, so wird dieser Körper auf den Körper der rationalen Funktionen von η homomorph abgebildet. Der dadurch definierte Primteiler $\mathfrak{A}$ ist ein Primteiler erster Art. Denn er wird z. B. in der Umgebung von $\xi = \eta = 0$ durch $\mathfrak{A}(u', v') \equiv u' = 0$ definiert. Da wegen $x = \xi$, $y = \xi\eta$ die Grössen x und y für $\mathfrak{A} = 0$ beide in 0 übergehen, so lässt sich $\mathfrak{A}$ nicht durch eine Gleichung zwischen x und y definieren. Wollen wir den Körper der rationalen Funktionen von x und y auf $[\mathfrak{A}]$ abbilden, so setzen wir erst $x = u$, $y = v$, dann $v = v_1(u) = \tau u$ und lassen u nach 0 gehen. Daher ist $\mathfrak{A}$ in bezug auf die erste Definition der Stellen ein Primteiler zweiter Art. Wir ersehen hieraus, dass bei einer Änderung in der Definition der Stellen Primteiler erster Art in solche zweiter Art übergehen können, und umgekehrt. Damit kommen wir zu folgender Aufgabe.

In einem algebraischen Körper von zwei unabhängigen Veränderlichen seien die Stellen auf zwei Arten definiert. Er sei mit K oder K' bezeichnet, je nachdem die Stellen auf die eine oder die andere Art definiert sind. Die Beziehungen zwischen K und K' sind herzuleiten. Den Übergang von K zu K' und umgekehrt nennen wir eine *Stellentransformation.*

Dabei bezeichnen wir den Körper K immer mit K und deuten durch Indizes an, dass seine Stellen in bestimmter Weise definiert sind.

§ 2. Die Transformationsformeln.

Wir betrachten die Stellentransformation $K \rightleftarrows K'$. Die Primteiler haben wir in zwei Arten eingeteilt. Diese Einteilung hängt von der Definition der Stellen ab, wie wir in dem Beispiel im § 1 gesehen haben. Es seien

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\sigma$$

die Primteiler zweiter Art von K, die Primteiler erster Art von K' sind. Wir bezeichnen sie als solche mit

$$\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \ldots, \mathfrak{A}'_\sigma.$$

Ferner seien

$$\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}'_2, \ldots, \mathfrak{a}'_\varrho$$

die Primteiler zweiter Art von K', die in die Primteiler erster Art

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\varrho$$

von K übergehen. Diese Primteiler nennen wir die *ausgezeichneten Primteiler der Transformation.* Ihre Anzahl ist bei den Anwendungen immer endlich. Jedenfalls betrachten wir nur Stellentransformationen, bei denen ϱ und σ endlich sind.

Für $\mathfrak{a}_i = 0$ geht der Körper K in $[\mathfrak{a}_i]$ über, und für $\mathfrak{A}'_i = 0$ geht K' in $[\mathfrak{A}'_i]$ über. Die Körper K und K' sind aber dieselben algebraischen Körper, die sich nur durch die Definition der Stellen unterscheiden. Da $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{A}'_i$ denselben Primteiler bezeichnen, so sind die Körper $[\mathfrak{a}_i]$ und $[\mathfrak{A}'_i]$ identisch. Trotzdem ist nicht einfach $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{A}'_i$, weil in $\mathfrak{A}'_i$ die Primteiler $\mathfrak{a}'_k$ enthalten sein können, und weil diese Primteiler beim Übergang von K' zu K in Primteiler erster Art übergehen, also selbstständig werden, und nicht in $\mathfrak{a}_i$ enthalten sind. Bezeichnen wird also das Produkt der in $\mathfrak{A}'_i$ enthaltenen Primteiler $\mathfrak{a}'_k$ mit $s(\mathfrak{A}'_i)$ und entsprechend das Produkt der in $\mathfrak{A}_i$ enthaltenen Primteiler $\mathfrak{a}_k$ mit $s(\mathfrak{A}_i)$, so ist

$$\text{(9)} \qquad \frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)} = \mathfrak{a}'_i, \quad \frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)} = \mathfrak{a}_i.$$

Es sei $\mathfrak{P}$ ein von den ausgezeichneten Primteilern verschiedener Primteiler erster Art von K. Die Abbildung von K auf $[\mathfrak{P}]$ bildet auch K' auf $[\mathfrak{P}]$ ab, da ja die Körper K und K' als algebraische Körper identisch sind. Durch diese Abbildung wird also auch ein Primteiler $\mathfrak{P}'$ von K' definiert. Die Körper $[\mathfrak{P}]$ und $[\mathfrak{P}']$ sind dieselben, aber die Primteiler $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ stimmen doch nicht vollkommen überein. Zunächst ist $\mathfrak{P}'$ Primteiler erster Art von K', da $\mathfrak{P}$ nicht zu den ausgezeichneten Primteilern der Transformation gehört. Das Produkt der in $\mathfrak{P}$ enthaltenen Primteiler $\mathfrak{a}_k$ sei $s(\mathfrak{P})$ und das der in $\mathfrak{P}'$ enthaltenen Primteiler $\mathfrak{a}'_k$ sei $s(\mathfrak{P}')$. Die in $\mathfrak{P}$ enthaltenen Primteiler $\mathfrak{a}_k$ werden Primteiler erster Art von K' und sind daher nicht in $\mathfrak{P}'$ enthalten. Ebenso sind die in $\mathfrak{P}'$ enthaltenen Primteiler $\mathfrak{a}'_k$ nicht in $\mathfrak{P}$ enthalten. Daher besteht die Transformationsformel

$$\text{(10)} \qquad \frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})} = \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}.$$

Ist endlich $\mathfrak{c}$ ein Primteiler zweiter Art von K, der auch als Primteiler von K' ein Primteiler $\mathfrak{c}'$ zweiter Art ist, so gilt

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'.$$

Es sei

$$(11) \qquad \begin{cases} s(\mathfrak{A}_i) = \mathfrak{a}_1^{\alpha_{1i}} \mathfrak{a}_2^{\alpha_{2i}} \dots \mathfrak{a}_\sigma^{\alpha_{\sigma i}}, \\ s(\mathfrak{A}'_i) = \mathfrak{a}_1'^{\alpha'_{1i}} \mathfrak{a}_2'^{\alpha'_{2i}} \dots \mathfrak{a}_\varrho'^{\alpha'_{\varrho i}}, \\ s(\mathfrak{P}) = \mathfrak{a}_1^{p_1} \mathfrak{a}_2^{p_2} \dots \mathfrak{a}_\sigma^{p_\sigma}. \end{cases}$$

Die Divisoren, in die $s(\mathfrak{A}_i)$, $s(\mathfrak{A}'_i)$, $s(\mathfrak{P})$ bei der Transformation übergehen, bezeichnen wir mit $s[\mathfrak{A}_i]'$, $s[\mathfrak{A}'_i]$, $s[\mathfrak{P}]'$, setzen also

$$s[\mathfrak{A}_i]' = \left(\frac{\mathfrak{A}'_1}{s(\mathfrak{A}'_1)}\right)^{\alpha_{1i}} \left(\frac{\mathfrak{A}'_2}{s(\mathfrak{A}'_2)}\right)^{\alpha_{2i}} \dots \left(\frac{\mathfrak{A}'_\sigma}{s(\mathfrak{A}'_\sigma)}\right)^{\alpha_{\sigma i}},$$

$$s[\mathfrak{A}'_i] = \left(\frac{\mathfrak{A}_1}{s(\mathfrak{A}_1)}\right)^{\alpha'_{1i}} \left(\frac{\mathfrak{A}_2}{s(\mathfrak{A}_2)}\right)^{\alpha'_{2i}} \dots \left(\frac{\mathfrak{A}_\varrho}{s(\mathfrak{A}_\varrho)}\right)^{\alpha'_{\varrho i}},$$

$$s[\mathfrak{P}]' = \left(\frac{\mathfrak{A}'_1}{s(\mathfrak{A}'_1)}\right)^{p_1} \left(\frac{\mathfrak{A}'_2}{s(\mathfrak{A}'_2)}\right)^{p_2} \dots \left(\frac{\mathfrak{A}'_\sigma}{s(\mathfrak{A}'_\sigma)}\right)^{p_\sigma}.$$

Dann wird nach (9) und (10)

$$(12) \qquad \mathfrak{A}_i = \mathfrak{a}'_i s[\mathfrak{A}_i]', \quad \mathfrak{A}'_i = \mathfrak{a}_i s[\mathfrak{A}'_i], \quad \mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')} s[\mathfrak{P}]'.$$

Setzen wir

$$\mathfrak{A}_1'^{\alpha_{1i}} \mathfrak{A}_2'^{\alpha_{2i}} \dots \mathfrak{A}_\sigma'^{\alpha_{\sigma i}} = \mathfrak{A}_i'^{*},$$

$$\mathfrak{A}_1^{\alpha'_{1i}} \mathfrak{A}_2^{\alpha'_{2i}} \dots \mathfrak{A}_\varrho^{\alpha'_{\varrho i}} = \mathfrak{A}_i^{*},$$

$$\mathfrak{P}' \mathfrak{A}_1'^{p_1} \mathfrak{A}_2'^{p_2} \dots \mathfrak{A}_\sigma'^{p_\sigma} = \mathfrak{P}'^{*},$$

so lässt sich (12) in der Form schreiben

$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{a}'_i \frac{\mathfrak{A}_i'^{*}}{s(\mathfrak{A}_i'^{*})}, \quad \mathfrak{A}'_i = \mathfrak{a}_i \frac{\mathfrak{A}_i^{*}}{s(\mathfrak{A}_i^{*})}, \quad \mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{P}'^{*}}{s(\mathfrak{P}'^{*})}.$$

Wir nennen die in diesen Gleichungen rechts stehenden Divisoren die Divisoren, in die $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}'_i$, $\mathfrak{P}$ bei der Transformation *übergehen*. Dagegen nennen wir $\mathfrak{a}'_i$, $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}$ die Primteiler, die den Primteilern $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}'_i$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ *entsprechen*. Ist

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{a}_1^{\alpha_1} \mathfrak{a}_2^{\alpha_2} \dots \mathfrak{a}_\sigma^{\alpha_\sigma} \mathfrak{A}_1^{\beta_1} \mathfrak{A}_2^{\beta_2} \dots \mathfrak{A}_\varrho^{\beta_\varrho} \mathfrak{P}_1^{\gamma_1} \mathfrak{P}_2^{\gamma_2} \dots \mathfrak{P}_n^{\gamma_n}$$

ein Divisor von K, und ist $\mathfrak{P}'_k$ der $\mathfrak{P}_k$ entsprechende Primteiler von K', so nennen wir

$$\mathfrak{Q}' = \mathfrak{a}_1'^{\beta_1} \mathfrak{a}_2'^{\beta_2} \ldots \mathfrak{a}_\varrho'^{\beta_\varrho} \mathfrak{A}_1'^{\alpha_1} \mathfrak{A}_2'^{\alpha_2} \ldots \mathfrak{A}_\sigma'^{\alpha_\sigma} \mathfrak{P}_1'^{\gamma_1} \mathfrak{P}_2'^{\gamma_2} \ldots \mathfrak{P}_n'^{\gamma_n}$$

den $\mathfrak{Q}$ entsprechenden Divisor. Den Divisor, in den $\mathfrak{Q}$ übergeht, erhalten wir aus $\mathfrak{Q}$ durch die Transformationsformeln (9), (10) und (12).

Die Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}_i$ gehören zu einer endlichen Zahl von Stellen $S_1, S_2, \ldots, S_l$ von K und die Primteiler $\mathfrak{a}_i'$ zu endlichvielen Stellen $S_1', S_2', \ldots, S_m'$ von K'. Diese Stellen heissen die *ausgezeichneten Stellen der Transformation.* Jeder Stelle S_k entsprechen unendlichviele Stellen von K', und jeder Stelle S_k' unendlichviele Stellen von K. Gehört z. B. $\mathfrak{a}_i$ zu S_k, so entsprechen S_k unter anderen alle Stellen von K', durch die $\mathfrak{A}_i'$ geht. Dagegen entsprechen die nicht ausgezeichneten Stellen einander mit ihren Umgebungen eineindeutig.

§ 3. Die E-Transformation.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall einer Stellentransformation, nämlich den Fall, wo nur die Definition einer einzigen Stelle in einfacher Weise geändert wird. Diese Stelle sei S mit den Ortsfunktionen u, v. Statt u, v führen wir neue Veränderliche ein durch die Gleichungen

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} \text{I.} & u = u', & v = u'v', & \left|\dfrac{v}{u}\right| \leqq r, & \text{also } |v'| \leqq r; \\ \text{II.} & u = u''v'', & v = u'' & \left|\dfrac{v}{u}\right| > r, & \text{also } |v''| < \dfrac{1}{r}. \end{array}\right.$$

Dabei bedeutet r irgendeine positive Zahl. Durch diese Gleichungen wird die Stelle S mit ihrer Umgebung abgebildet auf unendlichviele Stellen mit ihren Umgebungen, nämlich auf die Stellen $u' = 0$, $v' = t'$ und $u'' = 0$, $v'' = t''$, wo t' und t'' irgendzwei Zahlen sind, die den Bedingungen $|t'| \leqq r$, $|t''| < r^{-1}$ genügen. Die Stelle S selbst wird auf unendlichviele Stellen abgebildet, aber die Stellen ihrer Umgebung werden eineindeutig abgebildet. Die neuen Stellen heissen Stellen 1. Ordnung, während die ursprüngliche Stelle S eine Stelle 0. Ordnung genannt wird. Dies Verfahren stammt von Max Noether. Allerdings benutzt er es nur im grossen und nicht zur Auflösung nur einer Stelle. Den Körper K bezeichnen wir bei dieser neuen Definition der Stellen mit K'. Eine solche Stellentransformation nennen wir eine *E-Transformation* und die dazu entgegengesetzte eine *E^{-1}-Transformation.* Jede von ihnen heisst eine *Elementartransformation.*

$S'(u'=0,\ v'=t')$ sei eine der Stellen erster Ordnung. Als Ortsfunktionen können wir wählen

$$u'=\lambda',\quad v'-t'=\mu'.$$

Im Körper K' wird durch $\lambda'=0$ ein Primteiler erster Art definiert, der mit $\mathfrak{A}'$ bezeichnet sei. Da $u=v=0$ für $\lambda'=0$, so ist $\mathfrak{A}'$ im Körper K ein Primteiler zweiter Art, der mit $\mathfrak{a}$ bezeichnet sei. Da μ' und also auch v' für $\mathfrak{A}'=0$ oder $\mathfrak{a}=0$, was dasselbe ist, veränderlich bleibt, so wird in K der Primteiler $\mathfrak{a}$ definiert durch

$$v=tu,\quad u\to 0.$$

Die Eichfunktion von $\mathfrak{a}$ ist also

$$A\equiv v-\tau u.$$

Wählen wir statt S' eine der durch II. gegebenen Stellen, etwa $S''\equiv(u''=0,\ v''=t'')$, so können wir als Ortsfunktionen wählen $u''=\lambda'$, $v''-t''=\mu'$ und dieselben Überlegungen anstellen. Wählt man r gross, so kann man i. a. mit $t''=0$ auskommen. Durch $\lambda'=0$ wird wieder der Primteiler $\mathfrak{A}'$ definiert. Der Primteiler $\mathfrak{A}'$ geht also durch alle Stellen erster Ordnung und nur durch diese. Da die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{A}'$ an jeder dieser Stellen λ' ist, so hat $\mathfrak{A}'$ nirgends einen mehrfachen Punkt, sodass

$$\sigma(\mathfrak{A}')=0. \tag{14}$$

Da beim Übergang von K zu K' nur der eine Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}$ in einen Primteiler erster Art übergeht, so lauten die Transformationsformeln

$$\mathfrak{a}\equiv\mathfrak{A}',\quad \frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}=\mathfrak{P}',$$

wo $s(\mathfrak{P})=\mathfrak{a}^p$, wenn $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{P}$ in der Potenz p enthalten ist.

Es sei $|\tau_1|<r$ gewählt. Da u und v dem Körper K angehören, so ist $A(\tau_1)$ eine Funktion aus K. Ihr Zähler sei mit $\mathfrak{Q}$ und ihr Nenner mit $\mathfrak{N}$ bezeichnet. Da $\mathfrak{N}$ nicht durch die Stelle S_0 geht, so ist $s(\mathfrak{N})=1$. Ferner ist $s(\mathfrak{Q})=\mathfrak{a}$. Also wird

$$A(\tau_1)\equiv v-\tau_1 u=\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{N}}=\frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{N}'}. \tag{15}$$

Die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{Q}$ ist $v-\tau_1 u$ für S_0 und $\lambda'(t'-\tau_1+\mu')$ für S'. Da λ' die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{A}'$ ist, so ist $t'-\tau_1+\mu'$ die von $\mathfrak{Q}'$. Diese ist nur dann keine Einheit, wenn $t' = \tau_1$. Sie ist dann μ'. Da die Kurven $\lambda' = 0$ und $\mu' = 0$ in $\lambda' = \mu' = 0$ einen Schnittpunkt haben, und $\mathfrak{A}'$ nur durch die Stellen erster Ordnung geht, so ist

$$(16) \qquad (\mathfrak{A}', \mathfrak{Q}') = 1.$$

Da $\mathfrak{N}$ nicht durch die Stelle $u = v = 0$ geht, so geht $\mathfrak{N}'$ durch keine der Stellen erster Ordnung, sodass

$$(17) \qquad (\mathfrak{A}', \mathfrak{N}') = 0.$$

Aus (15) folgt $\mathfrak{A}'\mathfrak{Q}' \sim \mathfrak{N}'$ und durch Zusammensetzen mit $\mathfrak{A}'$

$$(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}') + (\mathfrak{A}', \mathfrak{Q}') = (\mathfrak{A}', \mathfrak{N}'),$$

also wegen (16) und (17)

$$(18) \qquad (\mathfrak{A}', \mathfrak{A}') = -1.$$

Da das Geschlecht von $\mathfrak{A}'$ gleich 0 ist, und da nach (14) $\sigma(\mathfrak{A}') = 0$, so wird nach (7)

$$2\pi(\mathfrak{A}') - 2 = -2 = (\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'\mathfrak{K}') = (\mathfrak{A}', \mathfrak{A}') + (\mathfrak{A}', \mathfrak{K}')$$

oder wegen (18)

$$(\mathfrak{A}', \mathfrak{K}') = -1,$$

wo $(\mathfrak{K}')$ die kanonische Klasse von K' ist. Daher haben wir:

Wird durch eine Elementartransformation eine Stelle S_0 in unendlichviele Stellen aufgelöst, so geht ein Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}$ in einen Primteiler erster Art $\mathfrak{A}'$ über. Für diesen gilt

$$(19) \qquad \pi(\mathfrak{A}') = \sigma(\mathfrak{A}') = 0, \quad (\mathfrak{A}', \mathfrak{A}') = (\mathfrak{A}', \mathfrak{K}') = -1,$$

wo $(\mathfrak{K}')$ die kanonische Klasse des durch die Transformation entstehenden Körpers ist.

§ 4. Die E^{-1}-Transformation.

Wir beweisen in diesem Paragraphen die Umkehrung des im vorigen bewiesenen Satzes. Zunächst zeigen wir, dass aus den letzten der Gleichungen (19) die ersten folgen. Da nämlich $\pi(\mathfrak{A}') \geqq 0$, $\sigma(\mathfrak{A}') \geqq 0$, so folgt aus der Identität (7), nämlich

$$2\pi(\mathfrak{A}') + 2\sigma(\mathfrak{A}') = (\mathfrak{A}', \mathfrak{A}') + (\mathfrak{A}', \mathfrak{K}') + 2,$$

dass $\pi(\mathfrak{A}') = \sigma(\mathfrak{A}') = 0$, wenn $(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}') = (\mathfrak{A}', \mathfrak{K}') = -1$ ist. Daher können wir den zu beweisenden Satz in der Form aussprechen:

$\mathfrak{A}$ *sei im Körper K, dessen kanonische Klasse* $(\mathfrak{K})$ *ist, ein Primteiler erster Art, der den folgenden Bedingungen genügt*

$$(20) \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{K}) = -1.$$

Dann gibt es eine Stellentransformation, die nur den Primteiler $\mathfrak{A}$ *in einen Primteiler* $\mathfrak{a}'$ *zweiter Art verwandelt, während im übrigen alle Primteiler ihre Art behalten.*

1. $(\mathfrak{C})$ sei eine reguläre primitive Klasse, sodass nach I, § 3

$$(21) \qquad \{\mathfrak{C}^*\} = \{\mathfrak{K}\,\mathfrak{C}^{-1}\} = 0, \quad [\mathfrak{C}] = \{\mathfrak{C}\} - \frac{1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) = p_a + 1.$$

Haben die ganzen Divisoren aus $(\mathfrak{C})$ allen gemeinsame Schnittpunkte, so sollen diese nicht auf $\mathfrak{A}$ liegen. Ferner sei

$$(22) \qquad \{\mathfrak{C}\} \geqq 2, \quad (\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) = h > 0.$$

Eine solche Klasse gibt es immer.

2. Wir bestimmen eine Klasse $(\mathfrak{G})$ mit den Eigenschaften:

   1. $(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) = 0$, sodass $(\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}^{-1}, \mathfrak{A}) = 1$,
   2. $\{\mathfrak{G}\} \geqq 3$, $\{\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}^{-1}\} \geqq 2$,
   3. $(\mathfrak{G})$ und $(\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}^{-1})$ sind regulär und primitiv,
   4. der Schnittpunkt von $\mathfrak{A}$ mit den ganzen Divisoren von $(\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}^{-1})$ ist beweglich.

Dazu gehen wir von der Klasse $(\mathfrak{C})$ aus und setzen

$$(\mathfrak{C}^{(k)}) = (\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}^{k}), \quad (k > 0).$$

Da $\{\mathfrak{K}\,\mathfrak{C}^{-1}\} = 0$, so ist auch

$$\left\{\mathfrak{K}\,\mathfrak{C}^{(k)-1}\right\} = 0.$$

Daher wird

$$[\mathfrak{C}^{(1)}] = \{\mathfrak{C}^{(1)}\} - \frac{1}{2}(\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}, \mathfrak{C}\,\mathfrak{A}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}, \mathfrak{K})$$

oder wegen (21) und (22)

$$[\mathfrak{C}^{(1)}] = \{\mathfrak{C}^{(1)}\} - \frac{1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) - h,$$

$$(23) \qquad [\mathfrak{C}^{(1)}] = [\mathfrak{C}] + \{\mathfrak{C}^{(1)}\} - \{\mathfrak{C}\} - h = p_a + 1 + \{\mathfrak{C}^{(1)}\} - \{\mathfrak{C}\} - h.$$

$\{\mathfrak{C}^{(1)}\} - \{\mathfrak{C}\}$ ist gleich der Zahl der Bedingungen dafür, dass ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{C}^{(1)}) = (\mathfrak{C}\mathfrak{A})$ durch $\mathfrak{A}$ teilbar ist, da man die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{C})$ aus denen der Klasse $(\mathfrak{C}\mathfrak{A})$ dadurch erhält, dass man diejenigen aufsucht, die durch $\mathfrak{A}$ teilbar sind. Die Zahl dieser Bedingungen ist aber höchstens gleich

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) + 1 = (\mathfrak{C}^{(1)}, \mathfrak{A}) + 1 = h.$$

Denn ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{C}^{(1)})$ muss $\mathfrak{A}$ ganz enthalten, wenn er mit $\mathfrak{A}$ auch nur einen Schnittpunkt mehr hat, als im allgemeinen. Daher ist

$$\{\mathfrak{C}^{(1)}\} - \{\mathfrak{C}\} \leqq h. \tag{24}$$

Aus (23) und (24) folgt

$$[\mathfrak{C}^{(1)}] \leqq p_a + 1.$$

Andererseits ist nach dem Riemann-Rochschen Satz

$$[\mathfrak{C}^{(1)}] \geqq p_a + 1,$$

sodass

$$[\mathfrak{C}^{(1)}] = p_a + 1.$$

Also ist auch $(\mathfrak{C}^{(1)})$ regulär. Ferner muss in (24) das Gleichheitszeichen stehen, sodass

$$\{\mathfrak{C}^{(1)}\} - \{\mathfrak{C}\} = h > 0. \tag{25}$$

Daraus schliessen wir, dass die Klasse $(\mathfrak{C}^{(1)})$ ausser den durch $\mathfrak{A}$ teilbaren ganzen Divisoren noch h andere linear unabhängige enthält, dass sie also primitiv ist. Weiter ergibt sich aus (25), dass von den allen gemeinsamen Schnittpunkten, die die ganzen Divisoren aus $(\mathfrak{C}^{(1)})$ etwa haben, keiner auf $\mathfrak{A}$ liegen kann. Würde nämlich eine solche gemeinsame Stelle auf $\mathfrak{A}$ liegen, so würden höchstens noch $h - 1$ Bedingungen dafür notwendig sein, dass $\mathfrak{A}$ mit einem ganzen Divisor aus $(\mathfrak{C}^{(1)})$ mindestens $h = (\mathfrak{C}^{(1)}, \mathfrak{A}) + 1$ Schnittpunkte hat, sodass im Widerspruch zu (25) $\{\mathfrak{C}^{(1)}\} - \{\mathfrak{C}\} \leqq h - 1$ sein würde.

Folglich ist $(\mathfrak{C}^{(1)}) = (\mathfrak{C}\mathfrak{A})$ wie $(\mathfrak{C})$ regulär und primitiv. Auch liegen etwa vorhandene gemeinsame Schnittpunkte aller ganzen Divisoren von $(\mathfrak{C}^{(1)})$ nicht auf $\mathfrak{A}$. Ist $(\mathfrak{C}^{(1)}, \mathfrak{A}) = h - 1 > 0$, so folgt ebenso, dass $(\mathfrak{C}^{(2)}) = (\mathfrak{C}^{(1)}\mathfrak{A}) = (\mathfrak{C}\mathfrak{A}^2)$ regulär und primitiv ist. Dasselbe gilt von $(\mathfrak{C}^{(3)}), \ldots, (\mathfrak{C}^{(h)})$. Ausserdem liegt von den allen gemeinsamen Punkten, die die ganzen Divisoren dieser Klassen etwa haben, keiner auf $\mathfrak{A}$, und es ist nach (25) und den entsprechenden Formeln

$$\{\mathfrak{C}^{(1)}\} - \{\mathfrak{C}\} = h,\ \{\mathfrak{C}^{(2)}\} - \{\mathfrak{C}^{(1)}\} = h - 1,\ \ldots,\ \{\mathfrak{C}^{(h)}\} - \{\mathfrak{C}^{(h-1)}\} = 1,$$

also

$$\{\mathfrak{C}^{(h)}\} = \{\mathfrak{C}\} + \frac{1}{2} h(h+1) > \{\mathfrak{C}\} \geqq 2.$$

Wählen wir daher $(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{C}^{(h)}) = (\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}^h)$, so erfüllt $(\mathfrak{G})$ die unter 2. angegebenen Bedingungen.

3. Es sei $\mathfrak{G}_0$ ein nicht durch $\mathfrak{A}$ teilbarer ganzer Divisor aus $(\mathfrak{G})$, und es seien $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ zwei ganze Divisoren aus $(\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}^{-1})$, die $\mathfrak{A}$ nicht in demselben Punkt treffen. Wir setzen

$$u' = \frac{\mathfrak{H}_1 \mathfrak{A}}{\mathfrak{G}_0},\quad v' = \frac{\mathfrak{H}_2 \mathfrak{A}}{\mathfrak{G}_0},\quad \frac{v'}{u'} = \frac{\mathfrak{H}_2}{\mathfrak{H}_1} = t. \tag{26}$$

Da $(\mathfrak{H}_i, \mathfrak{A}) = (\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}^{-1}, \mathfrak{A}) = 1$, so geht für $\mathfrak{A} = 0$ die Funktion t in eine Funktion τ ersten Grades des Körpers $[\mathfrak{A}]$ über, und zwar in eine wirkliche Funktion und nicht in eine Konstante, da $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ den Primteiler $\mathfrak{A}$ in verschiedenen Punkten treffen. Da τ eine Funktion ersten Grades im Körper $[\mathfrak{A}]$ ist, so lassen sich die Funktionen aus $[\mathfrak{A}]$ als rationale Funktionen von τ darstellen. Hieraus folgt wieder, dass $\pi(\mathfrak{A}) = 0$ ist. Ferner sind die Stellen des Körpers oder Primteilers $\mathfrak{A}$ eineindeutig den Werten von τ, also den Werten zugeordnet, die t an diesen Stellen annimmt.

S_1 sei die Stelle, wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}_1$ einander treffen und S eine von S_1 verschiedene Stelle von $\mathfrak{A}$. Die Ortsfunktionen seien λ, μ. Es nehme t in S den Wert t' an. Da S von S_1 verschieden ist, so ist t' endlich. $\mathfrak{G}_0$ ist an jeder auf $\mathfrak{A}$ liegenden Stelle S eine Einheit, da $(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{A}) = 0$. Ferner ist $\mathfrak{H}_1$ bei S eine Einheit. Also sind u' und $\frac{u'}{v'} - t' = t - t'$ bei S gewöhnliche Potenzreihen von λ, μ, die für $\lambda = \mu = 0$ verschwinden, etwa

$$u' = \mathfrak{P}_1(\lambda, \mu) = a\lambda + b\mu + \cdots, \tag{27}$$

$$\frac{v'}{u'} - t' = t - t' = \mathfrak{P}_2(\lambda, \mu) = c\lambda + d\mu + \cdots. \tag{28}$$

Nach (26) ist u' eine zugeordnete Funktion von $\mathfrak{A}$ bei S, da $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{H}_1$ bei S Einheiten sind. Hieraus folgt, dass in (27) a und b nicht beide 0 sind, weil $\mathfrak{A}$ nirgends eine mehrfache Stelle hat. Es sei etwa $b \neq 0$. Dann ergibt sich μ

aus $u' = \mathfrak{P}_1(\lambda, \mu) = 0$ als gewöhnliche Potenzreihe $\mu = p(\lambda)$ von λ. Da $\mathfrak{A}$ in der Umgebung von S durch $u' = 0$ definiert wird, so ist λ, $\mu = p(\lambda)$ für kleines $|\lambda|$ eine Stelle $S(\lambda)$ in der Umgebung von S, durch die $\mathfrak{A}$ geht. Setzen wir $p(\lambda)$ für μ in (28) ein, so erhalten wir für $t - t'$ eine gewöhnliche Potenzreihe $q(\lambda)$ von λ, aus der sich der Wert von t ergibt, den t an der Stelle $S(\lambda)$ von $\mathfrak{A}$ hat. Da aber nicht nur zu jeder Stelle von $\mathfrak{A}$ ein Wert von t gehört, sondern auch zu jedem Wert von t eine und nur eine Stelle von $\mathfrak{A}$, so muss die Reihe $q(\lambda)$ mit dem Glied erster Ordnung beginnen. Daher ist $ad - bc \neq 0$ und aus (27) und (28) folgt

$$\frac{D(u', t - t')}{D(\lambda, \mu)} = E(\lambda, \mu),$$

wo E eine Einheit bei S ist.

Hieraus ergibt sich einmal, dass u' und $t - t'$, also auch u' und v' voneinander unabhängig sind und ferner, dass sich aus (27) und (28) λ und μ als gewöhnliche Potenzreihen von u' und $t - t'$ ergeben. Bei S werden also λ und μ eindeutige Funktionen von u' und $t - t' = \frac{v'}{u'} - t'$ und damit auch von u' und v'. Dasselbe gilt für alle Funktionen aus K, die sich ja bei S alle als gewöhnliche Potenzreihen von λ, μ oder als Quotienten solcher darstellen lassen. Die gleichen Überlegungen gelten auch für die bisher ausgeschlossene Stelle S_1, wie man in ähnlicher Weise zeigt, indem man u' mit v' vertauscht. Daher werden in einer genügend kleinen Umgebung von $u' = v' = 0$ die Funktionen aus K eindeutige Funktionen von u' und v'.

Wir wählen u' und v' als unabhängige Veränderliche und dazu z als inbezug auf u' und v' primitive Grösse des Körpers K; z sei so gewählt, dass es bei $u' = v' = 0$ ganz ist. Die rationale, den Körper K definierende Gleichung zwischen u', v', z sei $F(u', v', z) = 0$. Bei $u' = v' = 0$ sei F in Faktoren zerlegt, die rationale Funktionen von z sind, während die Koeffizienten gewöhnliche Potenzreihen von u', v' sind. Diese Faktoren sollen selbst nicht weiter in dieser Weise zerlegbar sein. Ist $F_1(u', v', z)$ der Faktor, der, gleich 0 gesetzt, die Werte von z in der Umgebung der auf $\mathfrak{A}$ liegenden Stelle S liefert, so muss F_1 in z linear sein, da bei jeder solchen Stelle die Funktionen aus K eindeutige Funktionen von u', v' sind. Somit ergibt sich aus $F_1 = 0$ für z eine gewöhnliche Potenzreihe von u', v'. Die Funktionen aus K, die rationale Funktionen von u', v', z sind, werden demnach gewöhnliche Potenzreihen von u', v' oder Quotienten solcher.

Wir können daher u' und v' als Ortsfunktionen einer Stelle S' auffassen. Da für $\mathfrak{A} = 0$ sowohl u' wie v' zu 0 wird, so enthält diese Stelle S' alle Stellen, durch die $\mathfrak{A}$ geht. Da $v'/u' = t$ für $\mathfrak{A} = 0$ veränderlich bleibt, so wird der Primteiler $\mathfrak{A}$ auch durch die Abbildung $v' = tu'$, $u' \rightarrow 0$ definiert. Es ist also $\mathfrak{A}$ ein zur Stelle S' gehörender Primteiler $\mathfrak{a}'$ zweiter Art mit der Eichfunktion $A' \equiv v' - tu'$.

Um die Beziehung, die zwischen der Stelle S' und den Stellen S auf $\mathfrak{A}$ besteht, einfach zu übersehen, führen wir an der Stelle S statt λ, μ neue Ortsfunktionen λ^*, μ^* durch die Gleichungen

$$\lambda^* = \mathfrak{P}_1(\lambda, \mu), \quad \mu^* = \mathfrak{P}_2(\lambda, \mu)$$

ein, wo $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ die in (27) und (28) vorkommenden Potenzreihen sind. Wegen $ad - bc \neq 0$ ergeben sich hieraus λ und μ als gewöhnliche Potenzreihen von λ^*, μ^*, sodass diese als Ortsfunktionen gewählt werden können. Die Gleichungen (27), (28) lauten dann

$$u' = \lambda^*, \quad v' = \lambda^*(t' + \mu^*). \tag{29}$$

Das gilt für alle endlichen Werte von t', also für alle von S_1 verschiedenen Stellen von $\mathfrak{A}$. Durch Vertauschen von u' mit v' erhält man bei passender Wahl der Ortsfunktionen λ^*, μ^* bei S_1 die Gleichungen

$$u' = \lambda^* \mu^*, \quad v' = \lambda^*. \tag{30}$$

Setzen wir in (29) $\lambda^* = u$, $t' + \mu^* = v$ und in (30) $\lambda^* = \bar{u}$, $\mu^* = \bar{v}$, so erhalten wir die Gleichungen

$$\text{I.} \quad u' = u, \quad v' = uv; \qquad \text{II.} \quad u' = \bar{u}\bar{v}, \quad v' = \bar{u}.$$

Durch Vergleich mit (13) des vorigen Paragraphen ergibt sich daher:

Die durch Einführen der Stelle S' statt der unendlichvielen Stellen S, durch die $\mathfrak{A}$ geht, gegebene Stellentransformation ist einer E-Transformation entgegengesetzt, also eine E^{-1}-Transformation.

Bezeichnen wir den aus K durch diese Stellentransformation hervorgehenden Körper mit K', so entsteht K' aus K durch eine E^{-1}- und K aus K' durch eine E-Transformation. Damit ist der zu Anfang dieses Paragraphen angegebene Satz bewiesen.

III. Einseitige Stellentransformationen.

§ 1. Definition der einseitigen Transformation.

Wir nennen die Stellentransformation, die den Körper K in den Körper K' überführt, *einseitig,* wenn zwar Primteiler zweiter Art des einen Körpers in Primteiler erster Art des anderen übergehen, aber keine Primteiler erster Art des einen in Primteiler zweiter Art des anderen.

Solche Transformationen können wir in folgender Weise erhalten. Wir lösen endlichviele Stellen von K durch eine E-Transformation in unendlichviele Stellen 1. Ordnung auf. Dann lösen wir endlichviele Stellen erster Ordnung durch E-Transformationen in unendlichviele Stellen 2. Ordnung auf, usw. Machen wir das endlich oft, so erhalten wir eine einseitige Stellentransformation und nennen eine derartige Transformation eine *Noether-Transformation.* Wir wollen zeigen, *dass jede einseitige Stellentransformation eine Noethersche ist.* Dabei können wir gleichzeitig mehr beweisen, nämlich folgenden Satz:

Bei der Stellentransformation $K \to K'$, die nicht einseitig zu sein braucht, mögen die Primteiler $\mathfrak{a}_k$ für $k = 1, 2, \ldots, s$ zu derselben Stelle S_0 von K, die übrigen zu anderen Stellen gehören. Ferner sei

$$s(\mathfrak{A}'_k) = 1 \quad \textit{für} \quad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Dann entstehen die s Primteiler erster Art $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \ldots, \mathfrak{A}'_s$ aus den Primteilern $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_s$ durch Auflösen der Stelle S_0 nach dem Noetherschen Verfahren.

Den in diesem Satz angegebenen Fall können wir auf den Fall einer einseitigen Stellentransformation zurückführen durch Abänderung der Stellendefinition von K in folgender Weise. Die Stelle S_0 geht durch die Transformation $K \to K'$ in die auf den Primteilern $\mathfrak{A}'_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ liegenden Stellen von K' über. Ist S' eine Stelle von K', die auf einem dieser Primteiler liegt, so entspricht ihrer Umgebung in K eineindeutig ein Teil der Umgebung von S_0. Das gilt für alle diese Stellen S', da nach Voraussetzung $s(\mathfrak{A}'_k) = 1$, sodass keiner dieser Stellen S' unendlichviele Stellen von K entsprechen. Wir können daher die Stelle S_0 mit ihrer Umgebung ersetzen durch die Stellen, die ihr in K' entsprechen, während wir im übrigen alle Stellen so definieren wie in K. Durch diese Abänderung der Stellendefinition gehe K in K'' über. Es ist dann die Transformation von K nach K'' eine einseitige Stellentransformation. Die Transformation von K nach K' können wir in zwei Schritten ausführen, von K nach

K'' und dann von K'' nach K'. Bei der ersten geht nur die Stelle S_0 in die Stellen der Primteiler $\mathfrak{A}'_k\ (k = 1, 2, \ldots, s)$ über, und bei der zweiten bleiben diese Stellen ungeändert, sodass die beiden Transformationen sich gegenseitig nicht stören. Um Eigenschaften der Primteiler $\mathfrak{A}'_k\ (k = 1, 2, \ldots, s)$ zu finden, genügt es daher, die Transformation von K nach K'' zu betrachten.

Wir bezeichnen K'' wieder mit K', setzen also voraus, dass bei der Transformation $K \to K'$ nur Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}_k$ von K in Primteiler erster Art $\mathfrak{A}'_k$ von K' übergehen, und dass die Primteiler $\mathfrak{a}_k$ alle zu derselben Stelle S_0 gehören. Ihre Anzahl sei mit s bezeichnet. Da keine Primteiler $\mathfrak{a}'_k$ und $\mathfrak{A}_k$ vorhanden sind, so lauten die Transformationsformeln (9), (10) jetzt

$$\mathfrak{a}_k = \mathfrak{A}'_k, \quad \frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})} = \mathfrak{P}', \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{P}'\, s\,[\mathfrak{P}]'. \tag{31}$$

Die Eichfunktion von $\mathfrak{a}_k$ sei

$$A_k(u, v; \tau_k)$$

und der Grad von A_k in u, v sei

$$[A_k] = (\delta_{k1}, \delta_{k2}).$$

Die Zahl der Schnittpunkte der Kurven $A_i(u, v; \tau_{i1}) = 0$ und $A_k(u, v; \tau_{k2}) = 0$ in $u = v = 0$ sei mit a_{ik} bezeichnet. Das soll auch für $i = k$ gelten. Es ist

$$a_{ik} = a_{ki} > 0. \tag{32}$$

Die Matrix der a_{ik} bezeichnen wir mit a. Die Gleichung

$$A_i(u, v; \tau_{i1}) = 0$$

hat bei $u = 0$ für v die Lösung

$$v = v_i = a_0\, u^{\frac{1}{\delta_{i2}}} + \cdots + t_{i1}\, u^{\frac{\delta_{i1}}{\delta_{i2}}}$$

und die hierzu konjugierten. Setzen wir diese in $A_k(u, v; \tau_{k2})$ ein, so wird nach der Definition der Schnittpunkte zweier Kurven bei $u = v = 0$

$$A_k(u, v_i; \tau_{k2}) = u^{\frac{a_{ik}}{\delta_{i2}}} E,$$

wo E eine Einheit bei $u = 0$ ist. Daraus aber folgt nach I, § 2, dass A_k genau durch die a_{ik}-te Potenz von $\mathfrak{a}_i$ teilbar ist, sodass

$$s(A_i) = \mathfrak{a}_1^{a_{i1}}\, \mathfrak{a}_2^{a_{i2}} \cdots \mathfrak{a}_s^{a_{is}}. \tag{33}$$

§ 2. Beziehung zwischen den kanonischen Klassen ($\mathfrak{K}$) und ($\mathfrak{K}'$) von K und K'.

Sind x, y zwei voneinander unabhängige Grössen aus K, und setzen wir für die Stellen S von K

$$dx\,dy = \mathfrak{K}\,du\,dv, \tag{34}$$

so ist, wie schon in I, § 3 angegeben, der hierdurch definierte Divisor $\mathfrak{K}$ ein Divisor der kanonischen Klasse ($\mathfrak{K}$) von K. Ebenso finden wir aus

$$dx\,dy = \mathfrak{K}'\,du'\,dv' \tag{35}$$

einen Divisor $\mathfrak{K}'$ der kanonischen Klasse ($\mathfrak{K}'$) von K'. Während wir im allgemeinen mit $\mathfrak{P}'$ den Divisor von K' bezeichnen, der dem Divisor $\mathfrak{P}$ von K entspricht, machen wir bei $\mathfrak{K}'$ eine Ausnahme. Es ist also $\mathfrak{K}'$ *nicht* der Divisor, der $\mathfrak{K}$ bei der Transformation entspricht. Ist S nicht die ausgezeichnete Stelle S_0, so ist S gleichzeitig Stelle von K', sodass wir $u' = u$, $v' = v$ wählen können, und $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ bei jeder solchen Stelle übereinstimmen.

Es sei jetzt S die Stelle S_0 und es sei S' eine Stelle von K', durch die der Primteiler $\mathfrak{A}'_k$ geht. $\mathfrak{A}'_k$ sei in S' regulär, sodass die zugeordnete Funktion $\mathfrak{A}'_k(u', v')$ von $\mathfrak{A}'_k$ die Form hat

$$\mathfrak{A}'_k(u', v') = au' + bv' + \cdots,$$

wo a und b nicht beide 0 sind. Ist etwa $b \neq 0$, so setzen wir

$$\mathfrak{A}'_k(u', v') = \lambda, \quad u' = \mu. \tag{36}$$

Da sich aus (36) v' als gewöhnliche Potenzreihe von $u' = \mu$ und λ ergibt, so können wir λ und μ als Ortsfunktionen wählen. Es gehören u und v dem Körper K an, sodass sie sich bei S' als gewöhnliche Potenzreihen von λ und μ oder als Quotienten solcher darstellen lassen. Da aber der Primteiler $\mathfrak{A}'_k$ bei der Transformation in die Stelle $S_0\,(u = v = 0)$ übergeht, und da $\mathfrak{A}'_k$ durch $\lambda = 0$ gegeben wird, so müssen u und v durch positive Potenzen von λ teilbar sein. Es sei

$$u = \lambda^{\alpha}\frac{P_1(\lambda, \mu)}{Q_1(\lambda, \mu)}, \quad v = \lambda^{\beta}\frac{P_2(\lambda, \mu)}{Q_2(\lambda, \mu)}, \quad \alpha > 0, \ \beta > 0. \tag{37}$$

Hierin sind $P_k(0, \mu)$ und $Q_k(0, \mu)$ nicht identisch 0. Sollte eine der Zahlen $P_k(0, 0)$, $Q_k(0, 0)$ verschwinden, so können wir μ_0 innerhalb des Konvergenzgebietes der in (37) vorkommenden Reihen so wählen, dass $P_k(0, \mu_0) \neq 0$, $Q_k(0, \mu_0) \neq 0$.

Setzen wir dann $\mu = \mu_0 + \mu'$, so werden P_k und Q_k gewöhnliche Potenzreihen von λ, μ', die für $\lambda = \mu' = 0$ nicht verschwinden, also Einheiten. Wir erhalten demnach für u, v, wenn wir für μ' wieder μ schreiben, die Darstellungen

$$u = \lambda^\alpha \mathfrak{P}_1(\lambda, \mu), \quad v = \lambda^\beta \mathfrak{P}_2(\lambda, \mu), \tag{38}$$

wo $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ gewöhnliche Potenzreihen von λ, μ sind, die für $\lambda = \mu = 0$ nicht verschwinden. Aus (38) ergibt sich

$$\lambda = c_0 u^{\frac{1}{\alpha}} + c_1 u^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots.$$

Setzen wir dies in die zweite der Gleichungen (38) ein, so folgt

$$v = e_0 u^{\frac{\beta}{\alpha}} + e_1 u^{\frac{\beta+1}{\alpha}} + \cdots + e_\nu u^{\frac{\beta+\nu}{\alpha}} + \cdots, \tag{39}$$

wo die e_k gewöhnliche Potenzreihen von μ sind. Der erste Koeffizient, der von μ wirklich abhängt, sei e_ν. Für $\lambda = 0$ geht der Körper K' in den Körper $[\mathfrak{A}'_k]$ über. Dabei gehen u und v in 0 über, aber so, dass bei dem Grenzübergang zwischen u und v die Gleichung (39) besteht. Das bedeutet, dass man die Abbildung von K auf $[\mathfrak{A}'_k]$ erhält, wenn man

$$v = e_0 u^{\frac{\beta}{\alpha}} + e_1 u^{\frac{\beta+1}{\alpha}} + \cdots + e_{\nu-1} u^{\frac{\beta+\nu-1}{\alpha}} + t u^{\frac{\beta+\nu}{\alpha}}$$

setzt und dann u nach 0 gehen lässt. Daher ist

$$\alpha = \delta_{k2}, \quad \beta + \nu = \delta_{k1}. \tag{40}$$

Da λ, μ Ortsfunktionen für S' sind, so ist bei S' wegen (34) und (35)

$$\mathfrak{K}' = \frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \frac{D(u, v)}{D(\lambda, \mu)} = \mathfrak{K} \frac{D(u, v)}{D(\lambda, \mu)}. \tag{41}$$

Aus der ersten der Gleichungen (38) folgt, da $\mathfrak{P}_1$ eine Einheit bei S' ist,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_\mu = \lambda^{\alpha-1} E_1(\lambda, \mu),$$

wo E_1 eine Einheit ist. Ferner ergibt sich aus (39), da e_ν der erste Koeffizient ist, der von μ wirklich abhängt,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \mu}\right)_u = e'_\nu u^{\frac{\beta+\nu}{\alpha}} + \cdots = \lambda^{\beta+\nu} E_2,$$

wo E_2 nicht den Faktor λ hat. Somit wird

$$\frac{D(u,v)}{D(\lambda,\mu)} = \frac{D(u,v)}{D(u,\mu)}\,\frac{D(u,\mu)}{D(\lambda,\mu)} = \left(\frac{\partial v}{\partial \mu}\right)_u \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_\mu = \lambda^{\alpha+\beta+\nu-1} E_1 E_2$$

oder wegen (40)

$$\frac{D(u,v)}{D(\lambda,\mu)} = \lambda^{\delta_{k1}+\delta_{k2}-1} E_1 E_2 .$$

Wegen (41) folgt, dass $\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}$ genau durch die $(\delta_{k1}+\delta_{k2}-1)$-te Potenz von $\mathfrak{A}'_k$ teilbar ist. Daraus ergibt sich:

Setzen wir

(42) $$\delta_k = \delta_{k1} + \delta_{k2} - 1,$$

(43) $$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'^{\delta_1}_1 \mathfrak{A}'^{\delta_2}_2 \ldots \mathfrak{A}'^{\delta_s}_s = \mathfrak{a}^{\delta_1}_1 \mathfrak{a}^{\delta_2}_2 \ldots \mathfrak{a}^{\delta_s}_s = \mathfrak{a},$$

so ist

(44) $$\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}\mathfrak{A}' = \mathfrak{K}\mathfrak{a}$$

ein Divisor der kanonischen Klasse von K', wenn $\mathfrak{K}$ einer von K ist.

Wir nennen $\mathfrak{A}'$ den *kanonischen Divisor* der aus S_0 hervorgehenden *Primteiler* $\mathfrak{A}'_k$ und $\mathfrak{a}$ den *kanonischen Divisor* der zu S_0 gehörenden *Primteiler* $\mathfrak{a}_k$.

§ 3. Verhalten der Schnittpunktszahlen zweier Divisoren bei der Transformation.

Die Zahlen der Schnittpunkte zweier Divisoren erster Art haben wir in I, § 3 definiert, sodass die Zahlen $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ und $(\mathfrak{Q}'_1, \mathfrak{Q}'_2)$ als bekannt gelten können, wenn $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ zwei Divisoren erster Art von K und $\mathfrak{Q}'_1, \mathfrak{Q}'_2$ zwei solche aus K' sind. Wir wollen die Definition von $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ auch auf den Fall ausdehnen, wo die Divisoren $\mathfrak{Q}_i$ auch Primteiler $\mathfrak{a}_k$ enthalten, oder ganz aus solchen bestehen. Dabei soll die Rechenregel (5), I, § 3 erhalten bleiben.

Da in dem hier betrachteten Fall $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{A}'_k$, so definieren wir

(45) $$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = (\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{A}'_k) = (\mathfrak{A}'_k, \mathfrak{A}'_i) = (\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_i).$$

Wegen der Regel (5) gilt allgemeiner:

Sind $\mathfrak{a}^{(1)}$ und $\mathfrak{a}^{(2)}$ zwei Divisoren, die aus den Primteilern $\mathfrak{a}_k$ bestehen, und sind $\mathfrak{A}'^{(1)}$ und $\mathfrak{A}'^{(2)}$ die aus ihnen durch die Transformation entstehenden Divisoren, so ist

(46) $$(\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}) = (\mathfrak{A}'^{(1)}, \mathfrak{A}'^{(2)}).$$

Diese Definition für die Zahlen $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ *gilt aber nur für den hier betrachteten Fall der einseitigen Stellentransformation.* Im allgemeinen Fall werden wir sie durch eine andere ersetzen. (Vgl. IV, § 2.)

$\mathfrak{Q}$ sei ein Divisor erster Art von K. Er gehe bei der Transformation über in $\mathfrak{Q}^* = \mathfrak{Q}' s [\mathfrak{Q}]'$, wo $\mathfrak{Q}'$ der $\mathfrak{Q}$ entsprechende Divisor ist. Da $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{A}'_i$ einander entsprechende Primteiler sind, so geht K bei der Abbildung $\mathfrak{a}_i = 0$ in denselben Körper über wie K' bei der Abbildung $\mathfrak{A}'_i = 0$, nämlich in den Körper $[\mathfrak{A}'_i]$ nach der oben eingeführten Bezeichnung. Die Klasse $(\mathfrak{Q})$ geht für $\mathfrak{a}_i = 0$ in dieselbe Klasse $(\mathfrak{q})$ über wie die Klasse $(\mathfrak{Q}^*)$ für $\mathfrak{A}'_i = 0$, da die Divisoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}^*$ einander gleich sind. Nach I, § 3 ist die Ordnung $[\mathfrak{q}]$ von $(\mathfrak{q})$ gleich $(\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{Q}^*)$. Wir setzen jetzt fest, dass auch $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{Q}) = [\mathfrak{q}]$ sein soll, sodass

$$(47) \qquad (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{Q}^*) = [\mathfrak{q}].$$

An der Stelle S_0, zu der $\mathfrak{a}_i$ gehört, sei

$$\mathfrak{Q}(u, v) \equiv \frac{G(u, v)}{H(u, v)},$$

wo G und H gewöhnliche Potenzreihen von u, v sind. Für $\mathfrak{a}_i = 0$ geht nach I, § 2 $\mathfrak{Q}$ über in eine Konstante oder in eine rationale Funktion von τ_i. Das heisst aber, die Klasse $(\mathfrak{q})$ ist die Hauptklasse des Körpers $[\mathfrak{a}_i]$, so dass $[\mathfrak{q}] = 0$ ist. Nach (47) ist daher

$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{Q}^*) = (\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{Q}' s [\mathfrak{Q}]') = 0.$$

Wegen der Regel (5) folgt hieraus, wenn $\mathfrak{a}^{(1)}$ irgendein aus den Primteilern $\mathfrak{a}_k$ bestehender Divisor, $\mathfrak{A}'^{(1)}$ der aus ihm durch die Transformation hervorgehende Divisor und $\mathfrak{Q}$ ein Divisor erster Art von K ist,

$$(48) \qquad (\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{A}'^{(1)}, \mathfrak{Q}^*) = (\mathfrak{A}'^{(1)}, \mathfrak{Q}' s [\mathfrak{Q}]') = 0.$$

Es sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von K und $\mathfrak{P}'$ der ihm entsprechende Primteiler von K'. Die Klasse $(\mathfrak{Q})$ geht für $\mathfrak{P} = 0$ in dieselbe Klasse $(\mathfrak{q})$ über wie $(\mathfrak{Q}^*)$ für $\mathfrak{P}' = 0$, da K für $\mathfrak{P} = 0$ in denselben Körper übergeht, wie K' für $\mathfrak{P}' = 0$, sodass

$$(49) \qquad (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}^*) = (\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}' s [\mathfrak{Q}]').$$

Ist $\mathfrak{P}$ kein Primteiler, sondern ein Divisor erster Art, etwa

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \dots \mathfrak{P}_m^{\lambda_m},$$

wo die $\mathfrak{P}_i$ Primteiler sind, und entspricht $\mathfrak{P}'_i$ dem Primteiler $\mathfrak{P}_i$, so ist nach (49)

$$(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{P}'_i, \mathfrak{Q}^*).$$

Da aber

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_1'^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2'^{\lambda_2} \ldots \mathfrak{P}_m'^{\lambda_m},$$

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = \sum \lambda_k (\mathfrak{P}_k, \mathfrak{Q}), \quad (\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}^*) = \sum \lambda_k (\mathfrak{P}'_k, \mathfrak{Q}^*),$$

so folgt, dass (49) auch gilt, wenn $\mathfrak{P}$ ein Divisor erster Art ist.

Da $s[\mathfrak{P}]'$ nur Primteiler $\mathfrak{A}'_k$ enthält, so ist nach (48)

$$(s[\mathfrak{P}]', \mathfrak{Q}^*) = 0.$$

Aus (49) folgt also wegen $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}' s[\mathfrak{P}]'$

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}^*) + (s[\mathfrak{P}]', \mathfrak{Q}^*) = (\mathfrak{P}^*, \mathfrak{Q}^*). \tag{50}$$

$\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ seien irgendzwei aus Primteilern erster Art und aus den Primteilern $\mathfrak{a}_k$ bestehende Divisoren von K, etwa

$$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{a}^{(1)}, \quad \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{a}^{(2)},$$

wo in $\mathfrak{a}^{(i)}$ die in $\mathfrak{T}_i$ vorkommenden Primteiler $\mathfrak{a}_k$ zusammengefasst sein sollen. Der aus $\mathfrak{a}^{(i)}$ durch die Transformation entstehende Divisor sei $\mathfrak{A}'^{(i)}$, sodass

$$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_1^* = \mathfrak{Q}_1^* \mathfrak{A}'^{(1)}, \quad \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2^* = \mathfrak{Q}_2^* \mathfrak{A}'^{(2)}.$$

Wegen (48) ist

$$(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) + (\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}),$$

$$(\mathfrak{T}_1^*, \mathfrak{T}_2^*) = (\mathfrak{Q}_1^*, \mathfrak{Q}_2^*) + (\mathfrak{A}'^{(1)}, \mathfrak{A}'^{(2)}),$$

also nach (46) und (50)

$$(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = (\mathfrak{T}_1^*, \mathfrak{T}_2^*).$$

Damit haben wir den Satz:

Sind $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ irgendzwei Divisoren von K, die aus Primteilern erster Art und den Primteilern $\mathfrak{a}_k$ bestehen, und sind $\mathfrak{T}_1^*$ und $\mathfrak{T}_2^*$ die Divisoren von K', in die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ bei der einseitigen Transformation $K \to K'$ übergehen, so ist

$$(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = (\mathfrak{T}_1^*, \mathfrak{T}_2^*). \tag{51}$$

Ist ferner $\mathfrak{Q}$ ein Divisor erster Art von K, $\mathfrak{a}^{(1)}$ ein aus den $\mathfrak{a}_k$ bestehender Divisor, und gehen bei der Transformation $K \to K'$ die Divisoren $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{a}^{(1)}$ in $\mathfrak{Q}^*$, $\mathfrak{A}'^{(1)}$ über, so ist

$$(\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{A}'^{(1)}, \mathfrak{Q}^*) = 0. \tag{52}$$

Im besonderen folgt aus (44)

(53) $$(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}') = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}).$$

Die Zahl der Schnittpunkte zweier Primteiler erster Art $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von K bleibt also im allgemeinen nicht erhalten. Sind nämlich $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_2$ die $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ entsprechenden Primteiler, und ist $s(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{a}^{(i)}$, so wird

$$(\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_2) = (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) + (\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}).$$

Der Divisor $\mathfrak{a}^{(i)}$ ist dann und nur dann von 1 verschieden, wenn $\mathfrak{P}_i$ durch die Stelle S_0 geht. Daher ist immer $(\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_2) = (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)$, wenn nicht beide Primteiler $\mathfrak{P}_i$ durch S_0 gehen. Durch die Transformation ist die Stelle S_0 in die Primteiler $\mathfrak{A}'_k$ aufgelöst. Die Zahl der Schnittpunkte, die $\mathfrak{P}'_1$ und $\mathfrak{P}'_2$ auf den Primteilern $\mathfrak{A}'_k$ haben, kann aber höchstens kleiner sein als die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ in S_0. Daher ist $(\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}) \leqq 0$. Man kann nach einem Satz von M. Noether durch eine Folge von E-Transformationen die Stelle S_0 im besonderen so auflösen, dass der $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ entsprechende Divisor $\mathfrak{P}'_1 \mathfrak{P}'_2$ an keiner der aus S_0 hervorgehenden Stellen einen mehrfachen Punkt hat. In diesem Falle haben $\mathfrak{P}'_1$ und $\mathfrak{P}'_2$ überhaupt keinen Schnittpunkt auf den aus S_0 hervorgehenden Primteilern $\mathfrak{A}'_k$, sodass dann $-(\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)})$ die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ in S_0 ist.

§ 4. Beziehungen zwischen den a_{ik} und $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$.

Wir setzen

(54) $$\mathfrak{a}_{ki} = \mathfrak{a}_{ik} = -(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = -(\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{A}'_k).$$

Da für $i \neq k$ die Primteiler $\mathfrak{A}'_i$ und $\mathfrak{A}'_k$ voneinander verschieden sind, so ist

(55) $$\mathfrak{a}_{ik} \leqq 0 \quad \text{für} \quad i \neq k.$$

Die quadratische symmetrische Matrix der $\mathfrak{a}_{ik}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}$, die der in § 1 definierten Zahlen a_{ik} mit a. Wir wollen beweisen, dass $\mathfrak{a}$ und a zueinander reziprok sind, dass also

(56) $$a\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\,a = 1.$$

Den Zähler der Eichfunktion $A_i(u, v; \tau_i)$, die ja als rationale Funktion von u, v eine Funktion aus K ist, bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_i(\tau_i)$, sodass $A_i(u, v; \tau_i)$ die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}_i(\tau_i)$ bei S_0 ist. Daher ist der Beitrag, den die

Stelle S_0 zu der Zahl $(\mathfrak{P}_i(\tau_{i1}), \mathfrak{P}_k(\tau_{k2}))$ der Schnittpunkte der Divisoren $\mathfrak{P}_i(\tau_{i1})$ und $\mathfrak{P}_k(\tau_{k2})$ liefert, gleich der Zahl der Schnittpunkte der Kurven $A_i(u, v; \tau_{i1}) = 0$, $A_k(u, v; \tau_{k2}) = 0$ in S_0, also nach III, § 1 gleich a_{ik}. Bezeichnen wir durch den Index 0, dass nur der Teil einer Grösse gemeint ist, der von S_0 herrührt, so ist

$$a_{ik} = (\mathfrak{P}_i(\tau_{i1}), \mathfrak{P}_k(\tau_{k2}))_0. \tag{57}$$

Ferner folgt aus (33)

$$s(\mathfrak{P}_i(\tau_i)) = \mathfrak{a}_1^{a_{1i}} \mathfrak{a}_2^{a_{2i}} \dots \mathfrak{a}_s^{a_{si}}.$$

Ist also $\mathfrak{P}'_i(\tau_i)$ der $\mathfrak{P}_i(\tau_i)$ in K' entsprechende Divisor, so ist

$$\mathfrak{P}_i(\tau_i) = \mathfrak{A}_1'^{a_{1i}} \mathfrak{A}_2'^{a_{2i}} \dots \mathfrak{A}_s'^{a_{si}} \mathfrak{P}'_i(\tau_i) = \mathfrak{P}'_i(\tau_i)\, s\,[\mathfrak{P}_i(\tau_i)]'. \tag{58}$$

Da die Funktionen $A_k(\tau_{k1})$ und $A_k(\tau_{k2})$ denselben Nenner haben, so ist

$$R = \frac{A_k(\tau_{k1})}{A_k(\tau_{k2})} = \frac{\mathfrak{P}_k(\tau_{k1})}{\mathfrak{P}_k(\tau_{k2})} = \frac{\mathfrak{P}'_k(\tau_{k1})}{\mathfrak{P}'_k(\tau_{k2})}, \tag{59}$$

wo R zur Abkürzung eingeführt ist. Für $\mathfrak{A}'_k = \mathfrak{a}_k = 0$ wird nach (2), I, § 2

$$\lim_{\mathfrak{a}_k = 0} (R) = \frac{\tau_k - \tau_{k1}}{\tau_k - \tau_{k2}}. \tag{60}$$

Wegen (59) kann die Nullstelle τ_{k1} dieser Funktion nur von einem Schnittpunkt von $\mathfrak{P}'_k(\tau_{k1})$ mit $\mathfrak{A}'_k$ herrühren, sodass

$$(\mathfrak{A}'_k, \mathfrak{P}'_k) \geqq 1. \tag{61}$$

Nach (52) ist $(s(\mathfrak{P}_i(\tau_{i1})), \mathfrak{P}_k(\tau_{k2})) = 0$, also, da die in $s(\mathfrak{P}_i)$ enthaltenen Primteiler $\mathfrak{a}_k$ alle zu S_0 gehören, auch $(s(\mathfrak{P}_i(\tau_{i1})), \mathfrak{P}_k(\tau_{k2}))_0 = 0$. Aus (57) folgt daher

$$a_{ik} = (\mathfrak{P}_i(\tau_{i1}), \mathfrak{P}_k(\tau_{k2}))_0 = \left(\frac{\mathfrak{P}_i(\tau_{i1})}{s(\mathfrak{P}_i(\tau_{i1}))}, \mathfrak{P}_k(\tau_{k2})\right)_0$$

$$= (\mathfrak{P}'_i(\tau_{i1}), \mathfrak{A}_1'^{a_{1k}} \mathfrak{A}_2'^{a_{2k}} \dots \mathfrak{A}_s'^{a_{sk}} \mathfrak{P}'_k(\tau_{k2}))_0,$$

also

$$a_{ik} = a_{1k}(\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{P}'_i) + \cdots + a_{ik}(\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{P}'_i) + \cdots + a_{sk}(\mathfrak{A}'_s, \mathfrak{P}'_i) + (\mathfrak{P}'_i, \mathfrak{P}'_k)_0. \tag{62}$$

Bei den Grössen $(\mathfrak{A}'_\lambda, \mathfrak{P}'_i)$ können wir den Index 0 fortlassen, da die $\mathfrak{A}'_\lambda$ nur durch Stellen gehen, die aus S_0 entstehen. Da $a_{\alpha\beta} > 0$ und nach (61) $(\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{P}'_i) > 0$, alle anderen in (62) vorkommenden Grössen aber nicht negativ sind, so folgt

(63) $$(\mathfrak{A}'_k,\ \mathfrak{P}'_i) = \begin{cases} 0 \text{ für } k \neq i, \\ 1 \text{ für } k = i, \end{cases}$$

$$(\mathfrak{P}'_i(\tau_{i1}),\ \mathfrak{P}'_k(\tau_{k2}))_0 = 0.$$

Da $(\mathfrak{a}_k,\ \mathfrak{P}_i) = (\mathfrak{A}'_k,\ \mathfrak{P}'_i s[\mathfrak{P}_i]') = 0$ nach (48), so folgt aus (58) mit Beachtung von (54) und (63)

(64) $$a_{i1}\mathfrak{a}_{1k} + a_{i2}\mathfrak{a}_{2k} + \cdots + a_{is}\mathfrak{a}_{sk} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k, \\ 1 \text{ für } i = k. \end{cases}$$

D. h. aber, es ist, wie behauptet, $a\mathfrak{a} = \mathfrak{a}a = 1$. Da a und $\mathfrak{a}$ ganzzahlig sind, so sind die Determinanten $|a|$ und $|\mathfrak{a}|$ ganze Zahlen. Ferner folgt noch, dass $|a| = |\mathfrak{a}| = \pm 1$, da nach (64) $|a|\,|\mathfrak{a}| = 1$ ist. Wie wir später sehen werden, ist

(65) $$|a| = |\mathfrak{a}| = +1.$$

Aus (64) ergibt sich, da alle $a_{ik} > 0$ sind und ferner $\mathfrak{a}_{ik} \leqq 0$ für $i \neq k$,

(66) $$\mathfrak{a}_{kk} > 0.$$

§ 5. Eigenschaften der Zahlen $\mathfrak{a}_{ik}$.

Wie wir in I, § 2 gesehen haben, sind die Stellen der Körper $[\mathfrak{a}_k] = [\mathfrak{A}'_k]$ eineindeutig den Werten von τ_k zugeordnet. Nach (63) hat $\mathfrak{A}'_k$ mit $\mathfrak{P}'(\tau_{k1})$ einen Schnittpunkt, der wegen (60) bei $\tau_k = \tau_{k1}$ liegt, der also mit τ_{k1} veränderlich ist. Daher kann $\mathfrak{A}'_k$ keine mehrfachen Punkte haben, sodass

$$\sigma(\mathfrak{A}'_k) = 0.$$

Da ferner das Geschlecht von $\mathfrak{A}'_k$ gleich 0 ist, so folgt nach (7)

(67) $$(\mathfrak{A}'_k,\ \mathfrak{A}'_k\mathfrak{K}') = -2$$

oder wegen (44)

$$(\mathfrak{a}_k,\ \mathfrak{a}_k\mathfrak{a}\mathfrak{K}) = -2$$

und wegen $(\mathfrak{a}_k,\ \mathfrak{K}) = 0$

$$(\mathfrak{a}_k,\ \mathfrak{a}_k\mathfrak{a}) = (\mathfrak{A}'_k,\ \mathfrak{A}'_k\mathfrak{A}') = -2.$$

Unter Benutzung der Bezeichnungen (43) und (54) folgt, wenn wir noch setzen

$$c_k = 2 - \mathfrak{a}_{kk},$$

(68) $$\delta_1\mathfrak{a}_{1k} + \delta_2\mathfrak{a}_{2k} + \cdots + \delta_s\mathfrak{a}_{sk} = c_k.$$

Verstehen wir unter δ und c die einzeiligen Matrizen

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s), \quad c = (c_1, c_2, \ldots, c_s),$$

so können wir (68) in der Form

$$\delta \mathfrak{a} = c$$

schreiben, woraus durch Rechtsmultiplikation mit a folgt

$$\delta = c\,a.$$

Hieraus können wir eine sehr wichtige Folgerung ziehen. Da nämlich $\delta_k > 0$, $a_{ik} > 0$, so folgt, dass nicht alle c_k negativ sein können. Es gibt daher mindestens ein λ so, dass $c_\lambda = 2 - \mathfrak{a}_{\lambda\lambda} > 0$ oder $\mathfrak{a}_{\lambda\lambda} < 2$. Da aber nach (66) $\mathfrak{a}_{\lambda\lambda} > 0$, so muss $\mathfrak{a}_{\lambda\lambda} = 1$ sein. Daher ist $(\mathfrak{A}'_\lambda, \mathfrak{A}'_\lambda) = -\mathfrak{a}_{\lambda\lambda} = -1$ und damit wegen (67) $(\mathfrak{A}'_\lambda, \mathfrak{K}') = -1$. Also:

Unter den Primteilern $\mathfrak{A}'_k$ gibt es mindestens einen $\mathfrak{A}'_\lambda$, für den

$$(\mathfrak{A}'_\lambda, \mathfrak{A}'_\lambda) = -1, \quad (\mathfrak{A}'_\lambda, \mathfrak{K}') = -1.$$

Hieraus folgt nach II, § 4, wenn wir die Bezeichnung so gewählt annehmen, dass $\lambda = s$:

Durch eine E^{-1}-Transformation können wir K' in einen Körper K_{s-1} transformieren, sodass $\mathfrak{A}'_s$ in einen Primteiler zweiter Art übergeht, während sonst kein Primteiler seine Art ändert. Die Transformation, die von K zu K_{s-1} führt, ist eine Stellentransformation, die die $s-1$ Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{s-1}$, die zur Stelle S_0 gehören, in Primteiler erster Art überführt, während kein anderer Primteiler seine Art ändert. Folglich gelten dieselben Schlüsse wie bei der Transformation von K zu K', und es gibt bei passender Wahl der Bezeichnung eine E^{-1}-Transformation, die $\mathfrak{A}'_{s-1}$ in einen Primteiler zweiter Art verwandelt und sonst die Art von keinem Primteiler ändert. Durch diese Transformation gehe K_{s-1} in K_{s-2} über. Die Transformation von K zu K_{s-2} ist wieder eine einseitige Stellentransformation, die die Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{s-2}$ in Primteiler erster Art verwandelt. In dieser Weise können wir fortfahren und erhalten:

Wir können den Körper K in den Körper K' durch E-Transformationen verwandeln.

Damit sind die in § 1 angegebenen Sätze bewiesen.

§ 6. **Die einseitige Stellentransformation.**

Auf den Fall der einseitigen Stellentransformation gehen wir noch genauer ein. Die Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\sigma$ mögen zu den Stellen $S_0, S_1, \ldots, S_{\mu-1}$ gehören. Wir setzen wieder

$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = (\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{A}'_k) = -\mathfrak{a}_{ik}.$$

Gehören $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k$ zu zwei verschiedenen Stellen S_λ, etwa zu S_0 und S_1, so können $\mathfrak{A}'_i$ und $\mathfrak{A}'_k$ keinen Schnittpunkt haben. Hätten sie nämlich einen, etwa in S', so müsste S' beim Übergang von K' zu K sowohl in S_0 wie in S_1 übergehen da alle Stellen von $\mathfrak{A}'_i$ in S_0 und alle von $\mathfrak{A}'_k$ in S_1 transformiert werden. Das wäre aber nur dadurch möglich, dass ein zu S' gehörender Primteiler zweiter Art von K' in einen durch S_0 und S_1 gehenden Primteiler erster Art von K überginge. Da nach Annahme derartige Primteiler nicht vorhanden sind, so ist immer $\mathfrak{a}_{ik} = 0$, wenn $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k$ zu verschiedenen Stellen gehören. Die Matrix $\mathfrak{a}$ zerfällt also in soviel Matrizen, wie es Stellen S_λ gibt. Diese Teilmatrizen seien $\mathfrak{a}^{(0)}, \mathfrak{a}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{a}^{(\mu-1)}$, und zwar gehöre $\mathfrak{a}^{(\lambda)}$ zu S_λ. Die Matrix a, die zu der Stelle S_λ gehört, sei mit $a^{(\lambda)}$ bezeichnet, und es bedeute jetzt a die aus den Matrizen $a^{(\lambda)}$ zusammengesetzte Matrix. Für jede der Stellen S_λ gelten die für die Stelle S_0 angestellten Betrachtungen. Daher ist

$$\mathfrak{a}^{(\lambda)} a^{(\lambda)} = 1, \quad \text{also} \quad \mathfrak{a}\, a = 1.$$

§ 7. **Noch einmal die Elementartransformation.**

Wir betrachten zunächst noch einmal die Elementartransformation. K gehe durch eine solche in K' über. Der Primteiler zweiter Art von K, der in einen Primteiler erster Art von K' übergeht, sei mit $\mathfrak{a}_0$ bezeichnet, und der ihm in K' entsprechende Primteiler mit $\mathfrak{A}'_0$. Die Stelle von K, zu der er gehört, sei S. Nach II, § 3 ist die Eichfunktion von $\mathfrak{a}_0$

$$A_0 \equiv u - \tau_0 v,$$

sodass

$$\delta_{01} = \delta_{02} = 1, \quad \delta_0 = \delta_{01} + \delta_{02} - 1 = 1, \quad a_{00} = 1.$$

Der zu $\mathfrak{a}_0$ gehörende kanonische Divisor ist daher

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{A}' = \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{A}'_0.$$

Ferner wird nach (44) und (53)

$$\mathfrak{K}' = \mathfrak{a}\,\mathfrak{K} = \mathfrak{A}'\mathfrak{K}, \quad (\mathfrak{K}', \mathfrak{K}') = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) \tag{69}$$
$$= (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_0).$$

Nach II, § 3 ist $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{A}'_0, \mathfrak{A}'_0) = -1$, sodass $\mathfrak{a}_{00} = 1$. Die Matrizen a und $\mathfrak{a}$ bestehen hier aus nur je einem Element, und zwar ist

$$a = a_{00} = 1, \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{00} = 1.$$

Aus (69) folgt

$$(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}') = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) - 1.$$

$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ seien zwei Primteiler erster Art von K und $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{Q}'$ die ihnen in K' entsprechenden Primteiler. Wir betrachten wegen späterer Verwendung einige besondere Fälle.

1. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gehen nicht durch S, sodass $s(\mathfrak{P}) = s(\mathfrak{Q}) = 1$. Dann ist

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}', \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}', \quad (\mathfrak{P}', \mathfrak{P}') = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}), \quad (\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}') = (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$$

und wegen $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{P}) = 0$

$$(\mathfrak{P}', \mathfrak{A}'_0) = 0.$$

2. $\mathfrak{P}$ gehe einfach durch S und $\mathfrak{Q}$ gehe nicht durch S, sodass $s(\mathfrak{P}) = \mathfrak{a}_0$, $s(\mathfrak{Q}) = 1$. Dann ist

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{a}_0} = \mathfrak{P}', \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{A}'_0\,\mathfrak{P}', \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}'.$$

Wegen $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{P}) = (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{Q}) = 0$, $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_0) = -1$ folgt

$$(\mathfrak{P}', \mathfrak{P}') = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) - 1, \quad (\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}') = (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}), \quad (\mathfrak{P}', \mathfrak{A}'_0) = 1.$$

3. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ mögen beide einfach durch S gehen, dort einen Schnittpunkt haben und sonst keinen, sodass $s(\mathfrak{P}) = s(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{a}_0$, $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = 1$. Es wird

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{a}_0} = \mathfrak{P}', \quad \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{a}_0} = \mathfrak{Q}', \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{A}'_0\,\mathfrak{P}', \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{A}'_0\,\mathfrak{Q}',$$

also

$$(\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}') = (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) + (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_0) = 1 - 1 = 0,$$
$$(\mathfrak{P}', \mathfrak{A}'_0) = (\mathfrak{Q}', \mathfrak{A}'_0) = 1.$$

Fassen wir zusammen, so haben wir:

Der Körper K werde durch eine E-Transformation, bei der der zur Stelle S gehörende Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}_0$ in den Primteiler erster Art $\mathfrak{A}'_0$ übergeht, in K' transformiert, sodass $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{A}'_0$. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ seien zwei Primteiler aus K. Die ihnen entsprechenden Primteiler aus K' seien $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{Q}'$. Dann gilt:

1. $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$, wenn $\mathfrak{P}$ nicht durch S geht.
2. $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}'_0 \mathfrak{P}'$, wenn $\mathfrak{P}$ einfach durch S geht.
3. $(\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}') = (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$, wenn auch nur einer der Primteiler $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nicht durch S geht.
4. $(\mathfrak{P}', \mathfrak{A}'_0) = 0$ oder 1, jenachdem $\mathfrak{P}$ nicht durch S oder einfach durch S geht.
5. $(\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}') = 0$, wenn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in S einen einfachen Schnittpunkt haben und sonst keinen.
6. Der Grad der kanonischen Klasse wird um 1 vermindert.

§ 8. Wie die Primteiler $\mathfrak{A}'_k$ der Reihe nach entstehen.

Wir kehren zur allgemeinen einseitigen Stellentransformation zurück. Wie wir in § 5 gesehen haben, können wir K in K' durch σ der Reihe nach ausgeführte E-Transformationen überführen, wenn σ die Zahl der Primteiler zweiter Art ist, die in solche erster Art verwandelt werden. Da bei jeder der Grad der kanonischen Klasse um 1 vermindert wird, so wird er im ganzen um σ kleiner. Daher haben wir:

Gehen bei einer einseitigen Stellentransformation, die den Körper K in K' überführt, σ Primteiler zweiter Art von K in Primteiler erster Art von K' über, so ist der Grad der kanonischen Klasse von K' um σ kleiner als der der kanonischen Klasse von K.

Durch Vergleich mit (53) folgt noch:

Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{A}'$ der kanonische Divisor, der zu den Primteilern $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{A}'_k$ gehört, besteht also zwischen den kanonischen Klassen $(\mathfrak{K})$ und $(\mathfrak{K}')$ von K und K' die Beziehung $\mathfrak{K}' = \mathfrak{a}\,\mathfrak{K}$, so ist

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{A}', \mathfrak{A}') = -\sigma. \tag{70}$$

Für das folgende nehmen wir wieder an, dass die Primteiler $\mathfrak{a}_i$ alle zu derselben Stelle S_0 gehören. Wir verfolgen, wie diese Stelle der Reihe nach durch E-Transformationen aufgelöst wird.

1. Es geht durch die erste E-Transformation ein Primteiler $\mathfrak{a}_1$ in einen Primteiler $\mathfrak{A}_1^{(1)}$ über. Dadurch gehe K in K_1 über. Die Matrix $\mathfrak{a}$ besteht aus einem Element $\mathfrak{a}_{11} = 1$.

2. Durch die zweite E-Transformation gehe K_1 in K_2 über. Der Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}_2$ von K_1 werde zu einem Primteiler erster Art $\mathfrak{A}_2^{(2)}$ von K_2. Er ist auch Primteiler zweiter Art von K. Als solcher sei er auch mit $\mathfrak{a}_2$ bezeichnet. Die Stelle $S^{(1)}$ von K_1, zu der $\mathfrak{a}_2$ gehört, muss auf $\mathfrak{A}_1^{(1)}$ liegen, damit $\mathfrak{a}_2$ als Primteiler von K zu S_0 gehört. Da $\mathfrak{A}_1^{(1)}$ nur einfache Stellen hat, so geht $\mathfrak{A}_1^{(1)}$ einfach durch $S^{(1)}$. Der Primteiler, der $\mathfrak{A}_1^{(1)}$ in K_2 entspricht, sei $\mathfrak{A}_1^{(2)}$. Nach § 7, wo $\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_2^{(2)}$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}_1^{(1)}$ zu wählen ist, ergibt sich

$$\mathfrak{A}_1^{(1)} = \mathfrak{A}_1^{(2)}\mathfrak{A}_2^{(2)}, \quad (\mathfrak{A}_1^{(2)}, \mathfrak{A}_1^{(2)}) = (\mathfrak{A}_1^{(1)}, \mathfrak{A}_1^{(1)}) - 1 = -2,$$

$$(\mathfrak{A}_1^{(2)}, \mathfrak{A}_2^{(2)}) = 1, \quad (\mathfrak{A}_2^{(2)}, \mathfrak{A}_2^{(2)}) = -1.$$

Da für den Übergang von K zu K_2 gilt

$$\mathfrak{a}_{ik} = -(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = -(\mathfrak{A}_i^{(2)}, \mathfrak{A}_k^{(2)}),$$

so wird

$$\mathfrak{a}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}.$$

3. Durch die dritte E-Transformation gehe K_2 in K_3 über. Die Stelle $S^{(2)}$ von K_2, die aufgelöst wird, muss auf $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ oder auf $\mathfrak{A}_2^{(2)}$ liegen, damit der Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}_3$, der in einen Primteiler erster Art $\mathfrak{A}_3^{(3)}$ übergeht, als Primteiler von K zu S_0 gehört. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden.

Fall 1. $S^{(2)}$ ist nicht der Schnittpunkt von $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{A}_2^{(2)}$. Es liege etwa $S^{(2)}$ auf $\mathfrak{A}_2^{(2)}$. Dann geht $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ nicht durch $S^{(2)}$ und $\mathfrak{A}_2^{(2)}$ geht einfach durch $S^{(2)}$, da $\mathfrak{A}_2^{(2)}$ keine mehrfachen Stellen hat. Die Primteiler, die den Primteilern $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{A}_2^{(2)}$ in K_3 entsprechen, seien $\mathfrak{A}_1^{(3)}$ und $\mathfrak{A}_2^{(3)}$. Nach § 7, wo $\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_3^{(3)}$ zu setzen ist, wird

$$\mathfrak{A}_1^{(3)} = \mathfrak{A}_1^{(2)}, \quad \mathfrak{A}_2^{(2)} = \mathfrak{A}_2^{(3)}\mathfrak{A}_3^{(3)},$$

$$(\mathfrak{A}_1^{(3)}, \mathfrak{A}_1^{(3)}) = (\mathfrak{A}_1^{(2)}, \mathfrak{A}_1^{(2)}), \quad (\mathfrak{A}_1^{(3)}, \mathfrak{A}_2^{(3)}) = (\mathfrak{A}_1^{(2)}, \mathfrak{A}_2^{(2)}),$$

$$(\mathfrak{A}_1^{(3)}, \mathfrak{A}_3^{(3)}) = 0, \quad (\mathfrak{A}_2^{(3)}, \mathfrak{A}_2^{(3)}) = (\mathfrak{A}_2^{(2)}, \mathfrak{A}_2^{(2)}) - 1 = -2,$$

$$(\mathfrak{A}_2^{(3)}, \mathfrak{A}_3^{(3)}) = 1, \quad (\mathfrak{A}_3^{(3)}, \mathfrak{A}_3^{(3)}) = -1.$$

Setzen wir also

$$\mathfrak{a}_{ik}^{(3)} = -(\mathfrak{A}_i^{(3)}, \mathfrak{A}_k^{(3)}),$$

so wird jetzt die Matrix $\mathfrak{a}$ gleich

$$\mathfrak{a}^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Würden wir $S^{(2)}$ auf $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ gewählt haben, so hätten wir erhalten

$$\mathfrak{a}^{(3)} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Fall 2. Es sei $S^{(2)}$ die Stelle, wo $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{A}_2^{(2)}$ einander treffen. Nach § 7 geht durch die Transformation dieser Schnittpunkt verloren, und der Primteiler $\mathfrak{A}_3^{(3)}$ schneidet $\mathfrak{A}_1^{(3)}$ und $\mathfrak{A}_2^{(3)}$ in je einem Punkt. Ferner wird

$$(\mathfrak{A}_i^{(3)}, \mathfrak{A}_i^{(3)}) = (\mathfrak{A}_i^{(2)}, \mathfrak{A}_i^{(2)}) - 1, \quad i = 1, 2,$$

also

$$\mathfrak{a}^{(3)} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. In dieser Weise können wir fortfahren. Es seien $\lambda - 1$ E-Transformationen ausgeführt. Dadurch sei der Körper K in $K_{\lambda-1}$ übergegangen. Die Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{\lambda-1}$ seien zu Primteilern erster Art geworden, und zwar $\mathfrak{a}_k$ zu $\mathfrak{A}_k^{(\lambda-1)}$. Die nächste E-Transformation führe $\mathfrak{a}_\lambda$ in $\mathfrak{A}_\lambda^{(\lambda)}$ über. Dabei entstehe aus $K_{\lambda-1}$ der Körper K_λ. Die Primteiler, die den Primteilern $\mathfrak{A}_k^{(\lambda-1)}$ entsprechen, seien $\mathfrak{A}_k^{(\lambda)}$. Die Stelle, zu der $\mathfrak{a}_k$ in $K_{\lambda-1}$ gehört, sei $S^{(\lambda-1)}$.

In den bisher betrachteten Fällen gilt:

a. Die Zahlen $\mathfrak{a}_{ik}^{(\alpha)}$ sind für $i \neq k$ entweder 0 oder -1. Die Primteiler $\mathfrak{A}_i^{(\alpha)}$ und $\mathfrak{A}_k^{(\alpha)}$ haben also für $i \neq k$ höchstens einen Schnittpunkt.

b. Die Zahl dieser Schnittpunkte ist $\alpha - 1$.

c. Die Primteiler $\mathfrak{A}_k^{(\alpha)}$ und $\mathfrak{A}_i^{(\alpha)}$ schneiden einander nicht, wenn $\mathfrak{A}_k^{(\alpha)}$ und $\mathfrak{A}_i^{(\alpha)}$ beide $\mathfrak{A}_l^{(\alpha)}$ treffen. $(\alpha \geqq 3)$.

Wir nehmen an, dass a. b. c. für $\alpha = 3, 4, \ldots, \lambda - 1$ gelten und zeigen, dass die Eigenschaften auch für $\alpha = \lambda$ bestehen. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1. $S^{(\lambda-1)}$ liegt auf nur einem der Primteiler $\mathfrak{A}_i^{(\lambda-1)}$, etwa auf $\mathfrak{A}_{\lambda-1}^{(\lambda-1)}$. Da die $\mathfrak{A}_i^{(\alpha)}$ nur einfache Punkte haben, so geht $\mathfrak{A}_{\lambda-1}^{(\lambda-1)}$ einfach durch $S^{(\lambda-1)}$. Nach § 7 folgt für $i \neq k$

$$(\mathfrak{A}_i^{(\lambda)}, \mathfrak{A}_k^{(\lambda)}) = (\mathfrak{A}_i^{(\lambda-1)}, \mathfrak{A}_k^{(\lambda-1)}) \tag{71}$$

und ferner

$$(\mathfrak{A}_i^{(\lambda)}, \mathfrak{A}_\lambda^{(\lambda)}) = \begin{cases} 0 \text{ für } i = 1, 2, \ldots, \lambda - 2, \\ 1 \text{ für } i = \lambda - 1. \end{cases} \tag{72}$$

Hieraus folgt, dass die Eigenschaften a., b., c. erhalten bleiben.

Zu a. Es ist $\mathfrak{a}_{ik}^{(\lambda)} = 0$ oder -1 für $i \neq k$.

Zu b. Die Zahl der Schnittpunkte je zweier verschiedener der Primteiler $\mathfrak{A}_i^{(\lambda)}$ ist nach (71), (72) um 1 grösser als die je zweier verschiedener der Primteiler $\mathfrak{A}_i^{(\lambda-1)}$. Es kommt der Schnittpunkt zwischen $\mathfrak{A}_{\lambda-1}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{A}_\lambda^{(\lambda)}$ hinzu. Die Anzahl ist daher $\lambda - 1$, da sie nach Annahme für $\alpha = \lambda - 1$ den Wert $\lambda - 2$ hat.

Zu c. Wegen (71) könnte die Eigenschaft c. nur verloren gehen, wenn der Primteiler $\mathfrak{A}_\lambda^{(\lambda)}$ mindestens zwei der anderen Primteiler $\mathfrak{A}_i^{(\lambda)}$ treffen würde. Nach (72) schneidet er aber nur einen.

Fall 2. $S^{(\lambda-1)}$ ist Schnittpunkt zweier der Primteiler $\mathfrak{A}_i^{(\lambda-1)}$, etwa von $\mathfrak{A}_{\lambda-2}^{(\lambda-1)}$ und $\mathfrak{A}_{\lambda-1}^{(\lambda-1)}$. Diese beiden Primteiler haben nach Annahme a. in $S^{(\lambda-1)}$ einen einfachen Schnittpunkt. Ferner kann wegen der Annahme c. keiner der anderen Primteiler $\mathfrak{A}_i^{(\lambda-1)}$ durch $S^{(\lambda-1)}$ gehen. Nach § 7 folgt, dass

$$(\mathfrak{A}_{\lambda-1}^{(\lambda)}, \mathfrak{A}_{\lambda-2}^{(\lambda)}) = (\mathfrak{A}_{\lambda-1}^{(\lambda-1)}, \mathfrak{A}_{\lambda-2}^{(\lambda-1)}) - 1 = 0, \tag{73}$$

während im übrigen

$$(\mathfrak{A}_i^{(\lambda)}, \mathfrak{A}_k^{(\lambda)}) = (\mathfrak{A}_i^{(\lambda-1)}, \mathfrak{A}_k^{(\lambda-1)}) \text{ für } i \neq k = 1, 2, \ldots, \lambda - 2. \tag{74}$$

Ferner ist

$$(\mathfrak{A}_i^{(\lambda)}, \mathfrak{A}_\lambda^{(\lambda)}) = \begin{cases} 0 \text{ für } i = 1, 2, \ldots, \lambda - 3, \\ 1 \text{ für } i = \lambda - 2, \lambda - 1. \end{cases} \tag{75}$$

Es bleiben auch hier die Eigenschaften a. b. c. erhalten.

Zu a. Für diese Eigenschaft folgt das aus (73), (74), (75).

Zu b. Der Schnittpunkt von $\mathfrak{A}_{\lambda-2}^{(\lambda-1)}$ und $\mathfrak{A}_{\lambda-1}^{(\lambda-1)}$ geht verloren. Dafür kommen die beiden Schnittpunkte von $\mathfrak{A}_\lambda^{(\lambda)}$ mit $\mathfrak{A}_{\lambda-1}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{A}_{\lambda-2}^{(\lambda)}$ neu hinzu. Die Anzahl wird also um 1 vermehrt.

Zu c. Diese Eigenschaft kann wieder nur dadurch verloren gehen, dass $\mathfrak{A}_\lambda^{(\lambda)}$ zwei Primteiler trifft und diese sich auch schneiden. Es trifft hier zwar $\mathfrak{A}_\lambda^{(\lambda)}$ zwei Primteiler, nämlich $\mathfrak{A}_{\lambda-1}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{A}_{\lambda-2}^{(\lambda)}$, aber diese schneiden sich nicht.

Hiernach geht die Matrix $\mathfrak{a}^{(\lambda-1)}$ in folgender Weise aus der Matrix $\mathfrak{a}^{(\lambda)}$ hervor. Man addiere die letzte Zeile von $\mathfrak{a}^{(\lambda)}$ zu der oder zu den beiden Zeilen von $\mathfrak{a}^{(\lambda)}$, die in der λ-ten Spalte -1 enthalten. Dadurch wird -1 wegen $a_{\lambda\lambda}^{(\lambda)} = 1$ in 0 verwandelt. Dann lasse man die λ-te Zeile und Spalte fort. Die entstehende Matrix der Ordnung $\lambda - 1$ ist $\mathfrak{a}^{(\lambda-1)}$.

Hieraus ergibt sich noch, dass die Determinanten der Matrizen $\mathfrak{a}^{(\lambda)}$ alle einander gleich sind, also alle gleich $+1$, da z. B. $|\mathfrak{a}^{(2)}| = +1$. (Vergl. III, § 4.)

§ 9. Eine geometrische Veranschaulichung der Primteiler $\mathfrak{A}'_k$.

Die Primteiler $\mathfrak{A}'_k$ können wir uns in der Weise veranschaulichen, dass wir jeden durch eine Strecke darstellen, die wir mit $\overline{\mathfrak{A}}_k$ bezeichnen. Im folgenden bezeichnen wir der Übersichtlichkeit wegen die Primteiler $\mathfrak{A}_k^{(\alpha)}$ alle so wie den Primteiler, in den sie schliesslich übergehen, also mit $\mathfrak{A}'_k$. Wir beginnen mit $\overline{\mathfrak{A}}_1$. Da $\mathfrak{A}'_2$ aus einer Stelle von $\mathfrak{A}'_1$ entsteht, so lassen wir $\overline{\mathfrak{A}}_2$ in einem inneren Punkt von $\overline{\mathfrak{A}}_1$ beginnen. Geht $\mathfrak{A}'_3$ aus einer Stelle von $\mathfrak{A}'_1$ oder $\mathfrak{A}'_2$ hervor, aber nicht aus ihrer Schnittstelle, so lassen wir $\overline{\mathfrak{A}}_3$ in einem inneren Punkt von $\overline{\mathfrak{A}}_1$ oder $\overline{\mathfrak{A}}_2$ beginnen. Entsteht aber $\mathfrak{A}'_3$ aus dem Schnittpunkt von $\mathfrak{A}'_1$ und $\mathfrak{A}'_2$, so geht dieser Schnittpunkt verloren, während $\mathfrak{A}'_3$ mit $\mathfrak{A}'_1$ und $\mathfrak{A}'_2$ je einen Schnittpunkt hat. Wir lösen daher die Verbindung zwischen $\overline{\mathfrak{A}}_1$ und $\overline{\mathfrak{A}}_2$ und stellen durch die Strecke $\overline{\mathfrak{A}}_3$ eine neue Verbindung her, sodass $\overline{\mathfrak{A}}_3$ von einem inneren Punkt von $\overline{\mathfrak{A}}_1$ nach einem Endpunkt $\overline{\mathfrak{A}}_2$ geht. In dieser Weise können wir fortfahren. Wir haben jedes Mal entweder an einem inneren Punkt einer Strecke $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ eine neue Strecke $\overline{\mathfrak{A}}_\beta$ anzufügen, oder die Verbindung zweier Strecken $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$, $\overline{\mathfrak{A}}_\beta$ zu lösen und eine neue Strecke zwischenzufügen. Diese eingefügten Strecken nennen wir *Strecken zweiter Art*, die anderen *erster Art*. Ist der Schnittpunkt von $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ und $\overline{\mathfrak{A}}_\beta$ Endpunkt jeder dieser Strecken, so beginnt die neue Strecke in einem Endpunkt von $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ und endigt in einem von $\overline{\mathfrak{A}}_\beta$. Als Veranschaulichung der Primteiler $\mathfrak{A}'_\alpha$ erhalten wir so einen Graph, der in topologischem Sinne ein

Baum ist. Daraus ersehen wir, dass die Primteiler $\mathfrak{A}'_\alpha$ durch Schnittpunkte zusammenhängen, dass aber dieser Zusammenhang so gering wie möglich ist. Löst man auch nur eine Verbindung, so zerfällt der Graph. Aus diesem kann man ohne weiteres die Zahlen $(\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{A}'_k)$ für $i \neq k$ entnehmen. Aber auch die Zahlen $(\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{A}'_\iota)$ kann man aus ihm ablesen, und zwar in folgender Weise.

Die Strecken zweiter Art bilden Streckenzüge, sodass jede solche Strecke zu einem bestimmten Zug gehört. Ein solcher Streckenzug kann auch aus nur einer Strecke bestehen. Der eine Endpunkt eines derartigen Streckenzuges ist innerer Punkt einer Strecke erster oder zweiter Art, der andere Endpunkt einer Strecke erster Art. Ein solcher Streckenzug — er heisse z — sei

$$\overline{\mathfrak{A}}_{\lambda_1},\ \overline{\mathfrak{A}}_{\lambda_2},\ \ldots,\ \overline{\mathfrak{A}}_{\lambda_s}.$$

Die Strecken, die hierdurch verbunden werden, seien $\overline{\mathfrak{A}}_{\lambda_0}$ und $\overline{\mathfrak{A}}_{\lambda_{s+1}}$, und zwar beginne $\overline{\mathfrak{A}}_{\lambda_1}$ in einem inneren Punkte von $\overline{\mathfrak{A}}_{\lambda_0}$, während der Endpunkt von $\overline{\mathfrak{A}}_{\lambda_s}$ mit dem Anfangspunkt von $\overline{\mathfrak{A}}_{\lambda_{s+1}}$ zusammenfalle. Wir ordnen z und jeder Strecke von z eine Zahl zu. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Strecken mit ihrem Index. Beim Entstehen des Graphs wurde zuerst die Strecke λ_{s+1} an die Strecke λ_0 angefügt, wodurch $(\mathfrak{A}'_{\lambda_0}, \mathfrak{A}'_{\lambda_0})$ um 1 kleiner wurde, und dann wurden die anderen Strecken eingeschoben. Von den Zahlen λ_i ist daher λ_0 die kleinste und λ_{s+1} die zweitkleinste. Von den übrigen sei λ_α die kleinste. Dann wurde λ_α zwischen λ_0 und λ_{s+1} eingeschaltet, wodurch $(\mathfrak{A}'_{\lambda_0}, \mathfrak{A}'_{\lambda_0})$ wieder um 1 kleiner wurde. Die kleinste der Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\alpha-1}$ sei λ_β. Dann wurde λ_β zwischen λ_0 und λ_α eingeschoben, wodurch wieder $(\mathfrak{A}'_{\lambda_0}, \mathfrak{A}'_{\lambda_0})$ um 1 verkleinert wurde. In dieser Weise fahren wir fort. Die Anzahl der Zahlen $\lambda_{s+1}, \lambda_\alpha, \lambda_\beta, \ldots$, die wir so erhalten, sei $\nu(z)$. Durch den Streckenzug z wird dann $(\mathfrak{A}'_{\lambda_0}, \mathfrak{A}'_{\lambda_0})$ um $\nu(z)$ kleiner.

Jetzt betrachten wir die Strecke λ_k, $(0 < k \leqq s)$. Unter den Zahlen $\lambda_{k-1}, \lambda_{k-2}, \ldots, \lambda_0$ sei λ_{α_1} und unter den Zahlen $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_{s+1}$ sei λ_{β_1} die erste, die kleiner ist als λ_k. Bei der Entstehung des Graphs ist dann die Strecke λ_k zwischen die Strecken λ_{α_1} und λ_{β_1} eingeschoben. Dann ist zunächst $(\mathfrak{A}'_{\lambda_k}, \mathfrak{A}'_{\lambda_k}) = -1$. Die kleinste der zwischen λ_{α_1} und λ_k liegenden Zahlen λ_i sei λ_{α_2} und die kleinste zwischen λ_k und λ_{β_1} sei λ_{β_2}. Die Strecke λ_{α_2} ist dann zwischen den Strecken λ_k und λ_{α_1} und die Strecke λ_{β_2} zwischen den Strecken λ_k und λ_{β_1} eingeschaltet. Durch jeden dieser Vorgänge ist $(\mathfrak{A}'_{\lambda_k}, \mathfrak{A}'_{\lambda_k})$ um 1 verkleinert. Die kleinste der Zahlen

λ_i zwischen λ_{α_2} und λ_k sei λ_{α_3} und die zwischen λ_k und λ_{β_2} sei λ_{β_3}. In dieser Weise fahren wir fort. Die Anzahl der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$, die wir so erhalten, sei mit $\nu(\lambda_k) + 1$ bezeichnet. Für den Fall, dass λ_k eine Strecke erster Art ist, sei $\nu(\lambda_k) = 1$ gesetzt.

Dann gilt:

Von der Strecke $\overline{\mathfrak{A}_\alpha}$ mögen von inneren Punkten n Strecken erster Art und r Streckenzüge zweiter Art $z_1, z_2, \ldots, z_r$ ausgehen. Dann ist

$$(\mathfrak{A}'_\alpha, \mathfrak{A}'_\alpha) = -(n + \nu(z_1) + \cdots + \nu(z_r) + \nu(\alpha)).$$

§ 10. Vollkommene Systeme von Primteilern erster Art.

Wir nennen eine Gesamtheit von Primteilern erster Art, die durch Auflösen von endlichvielen Stellen nach dem Noetherschen Verfahren entstehen, ein *vollkommenes System von Primteilern erster Art.* Ein solches kann auch aus einem einzigen Primteiler bestehen. Diesen nennen wir dann einen *vollkommenen Primteiler.* Nach II, § 3 und § 4 gilt:

Ein Primteiler erster Art $\mathfrak{P}$ ist dann und nur dann vollkommen, wenn

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{K}) = -1.$$

Ein vollkommenes System von Primteilern besteht aus soviel Teilsystemen, wie Stellen aufgelöst sind. Ehe wir angeben, woran man erkennen kann, ob σ Primteiler erster Art ein vollkommenes System bilden, leiten wir noch eine Eigenschaft der Teilsysteme her. Ein Teilsystem bestehe aus den s Primteilern $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \ldots, \mathfrak{A}'_s$. In § 8 haben wir gesehen, wie die Primteiler $\mathfrak{A}'_k$ der Reihe nach durch s E-Transformationen entstehen. Die Eigenschaft, um die es sich handelt, ist die, dass sich diese Primteiler durch s E^{-1}-Transformationen in Primteiler zweiter Art verwandeln lassen. Das wollen wir etwas genauer ausführen, wobei wir die Bezeichnungen des § 8 benutzen.

Nach § 5 gibt es unter den Zahlen $\mathfrak{a}_{kk} = -(\mathfrak{A}'_k, \mathfrak{A}'_k)$ mindestens eine, die gleich 1 ist. Es sei etwa $\mathfrak{a}_{ss} = 1$. Dann lässt sich $\mathfrak{A}'_s$ durch eine E^{-1}-Transformation in einen Primteiler zweiter Art verwandeln. Die Primteiler, die hierbei den $\mathfrak{A}'_k$ entsprechen, seien $\mathfrak{A}_k^{(s-1)}$. Nach § 8 erhalten wir die zu den $\mathfrak{A}_k^{(s-1)}$ gehörende Matrix $\mathfrak{a}^{(s-1)}$, indem wir die s-te Zeile von $\mathfrak{a}$ zu den Zeilen addieren, wo in der s-ten Spalte -1 steht, und dann die s-te Zeile und Spalte fortlassen. Sind die Primteiler durch Auflösen einer Stelle aus Primteilern zweiter Art entstanden, bilden sie also ein vollkommenes System, so ist auch in $\mathfrak{a}^{(s-1)}$ eine der Zahlen $\mathfrak{a}_{kk}^{(s-1)}$ gleich 1, etwa $\mathfrak{a}_{s-1,s-1}^{(s-1)}$. Dann kann $\mathfrak{A}_{s-1}^{(s-1)}$ durch eine E^{-1}-Transformation in einen Primteiler zweiter Art verwandelt werden. Dies Verfahren muss sich fortsetzen lassen, bis die $\mathfrak{A}'_k$ alle in Primteiler zweiter Art verwandelt sind, und es lässt sich soweit fortsetzen, wenn die der Reihe nach entstehenden Matrizen $\mathfrak{a}^{(s-1)}$, $\mathfrak{a}^{(s-2)}$, ... immer wieder die Eigenschaften von $\mathfrak{a}$ haben, vor allem mindestens ein Diagonalelement enthalten, das 1 ist.

Damit haben wir den Satz:

Die Primteiler erster Art $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \ldots, \mathfrak{A}'_\sigma$ *bilden dann und nur dann ein vollkommenes System, wenn sie folgenden Bedingungen genügen. Dabei sei* $(\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{A}'_k) = -\mathfrak{a}_{ik}$ *gesetzt, und* $\mathfrak{a}$ *sei die Matrix der* $\mathfrak{a}_{ik}$.

1. $\pi(\mathfrak{A}'_k) = \sigma(\mathfrak{A}'_k) = 0$.

2. *Sie zerfallen in Gruppen derart, dass kein Primteiler einer Gruppe einen aus einer anderen trifft. Sie können auch aus nur einer solchen Gruppe bestehen.*

3. *Die Primteiler einer Gruppe hängen durch Schnittpunkte miteinander zusammen.*

4. $\mathfrak{a}_{ik} = 0$ *oder* $\mathfrak{a}_{ik} = -1$ *für* $i \neq k$.

5. $\mathfrak{a}_{ii} > 0$, *und mindestens ein* $\mathfrak{a}_{ii}$ *ist gleich* 1.

6. *Ist* $\mathfrak{a}_{\alpha\alpha} = 1$ *und leitet man aus* $\mathfrak{a}$ *eine Matrix* $\mathfrak{a}^*$ *der Ordnung* $\sigma - 1$ *in der Weise ab, dass man die* α*-te Zeile von* $\mathfrak{a}$ *zu denjenigen Zeilen addiert, in deren* α*-ter Spalte* -1 *steht, und dann die* α*-te Zeile und Spalte fortlässt, so hat* $\mathfrak{a}^*$ *wieder die Eigenschaften* 1. *bis* 6.

Mit dem hier eingeführten Begriffe des vollkommenen Systems können wir die in § 5 und § 6 bewiesenen Sätze in folgender Form aussprechen:

Die Primteiler erster Art $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \ldots, \mathfrak{A}'_\sigma$ *lassen sich dann und nur dann durch eine einseitige Stellentransformation in endlich viele Stellen verwandeln, wenn sie ein vollkommenes System bilden.*

Gehen bei einer einseitigen Stellentransformation die Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\sigma$ *in solche erster Art über, so bilden diese ein vollkommenes System.*

Besteht ein vollkommenes System aus Teilsystemen, die nicht durch Schnittpunkte verbunden sind, so ist jedes dieser Teilsysteme ein vollkommenes System.

Jedes vollkommene System enthält mindestens einen vollkommenen Primteiler.

Es sei darauf hingewiesen, dass es in einem Körper mehrere vollkommene Systeme geben kann, die aber zusammen kein vollkommenes System zu bilden brauchen, da Primteiler des einen Primteiler des anderen schneiden können.

IV. Die allgemeine Stellentransformation.

§ 1. Zurückführung der allgemeinen Stellentransformation auf die einseitigen.

S_1 sei eine der ausgezeichneten Stellen von K, und es mögen zu ihr die ausgezeichneten Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_s$ gehören. Sie bilden im allgemeinen, wie Beispiele zeigen, kein vollkommenes System. Wie wir jetzt zeigen, können wir durch Hinzufügen von endlichvielen Primteilern zweiter Art ein vollkommenes System erhalten.

Dazu betrachten wir die Funktion

$$R = \frac{A_1(u, v; \tau_{11}) A_2(u, v; \tau_{21}) \ldots A_s(u, v; \tau_{s1})}{A_1(u, v; \tau_{12}) A_2(u, v; \tau_{22}) \ldots A_s(u, v; \tau_{s2})}$$

und lösen die Stelle S_1 so weit auf, dass die Funktion R an keiner der entstehenden Stellen höherer Ordnung unbestimmt ist. Bei dieser Transformation gehen endlichviele zu S_1 gehörende Primteiler zweiter Art in Primteiler erster Art über. Diese bilden nach Definition ein vollkommenes System. Wenn wir zeigen, dass unter ihnen die Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_s$ vorkommen, ist unsere Behauptung bewiesen. Diesen Nachweis führen wir indirekt.

Bei der durch Auflösen von S_1 hervorgerufenen Stellentransformation bleibe etwa $\mathfrak{a}_1$ ein Primteiler zweiter Art. Er gehöre zu der aus S_1 hervorgegangenen Stelle S', und λ, μ seien Ortsfunktionen für diese Stelle. Dann gehen λ und μ für $\mathfrak{a}_1 = 0$ in null über. Da sich aber R nach Voraussetzung an jeder der aus S_1 hervorgegangenen Stellen bestimmt verhält, so nimmt R für $\lambda = \mu = 0$, also auch für $\mathfrak{a}_1 = 0$, einen bestimmten konstanten Wert an. Andrerseits geht R nach (2) und (3) in I, § 2 für $\mathfrak{a}_1 = 0$ über in

$$(R)_{\mathfrak{a}_1=0} = \text{Konst.}\ \frac{\tau_1 - \tau_{11}}{\tau_1 - \tau_{12}},$$

wird also nicht konstant. Daher muss $\mathfrak{a}_1$ in einen Primteiler erster Art übergehen und gehört zu denjenigen Primteilern zweiter Art, die bei der Auflösung von S_1 in solche erster Art übergehen.

In derselben Weise lösen wir die anderen ausgezeichneten Stellen von K auf, sodass auch die zu diesen gehörenden ausgezeichneten Primteiler zu vollkommenen Systemen ergänzt werden. Die Primteiler zweiter Art, die dadurch im ganzen zu den $\mathfrak{a}_i$ hinzukommen, bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{c}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{c}_\tau.$$

Die Eichfunktion von $\mathfrak{c}_i$ sei

$$\Gamma_i(u,\ v;\ \vartheta_i).$$

Den Körper K bezeichnen wir, wenn die ausgezeichneten Stellen in der angegebenen Weise aufgelöst sind, mit $\overline{K}$. Der Übergang von K zu $\overline{K}$ ist eine einseitige Stellentransformation. Dabei gehen die Primteiler zweiter Art

$$\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{a}_\sigma;\quad \mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{c}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{c}_\tau$$

in Primteiler erster Art über, die mit

$$\overline{\mathfrak{A}}_1,\ \overline{\mathfrak{A}}_2,\ \ldots,\ \overline{\mathfrak{A}}_\sigma;\quad \overline{\mathfrak{C}}_1,\ \overline{\mathfrak{C}}_2,\ \ldots,\ \overline{\mathfrak{C}}_\tau$$

bezeichnet seien.

Im Punkte $u = v = 0$ mögen die zu derselben Stelle gehörenden Kurven

$$\begin{array}{lr} A_i(u,\ v;\ \tau_{i1}) = 0 \text{ und } A_k(u,\ v;\ \tau_{k2}) = 0 & a_{ik}, \\ A_i(u,\ v;\ \tau_{i1}) = 0 \text{ und } \Gamma_k(u,\ v;\ \vartheta_{k2}) = 0 & e_{ik}, \\ \Gamma_i(u,\ v;\ \vartheta_{i1}) = 0 \text{ und } \Gamma_k(u,\ v;\ \vartheta_{k2}) = 0 & c_{ik}, \end{array}$$

Schnittpunkte haben. Im übrigen sei, $a_{ik} = c_{ik} = e_{ik} = 0$. Die Matrizen der Grössen a_{ik}, c_{ik}, e_{ik} seien a, c, e. Dabei soll e σ Zeilen und τ Spalten haben, sodass

$$e_{11},\ e_{12},\ \ldots,\ e_{1\tau}$$

die erste Zeile von e ist. Überhaupt bezeichne immer der erste Index die Zeile und der zweite die Spalte. Ferner sei

$$A = \begin{pmatrix} a & e \\ \bar{e} & c \end{pmatrix}, \tag{76}$$

wo hier wie im folgenden durch Überstreichen die gestürzte Matrix bezeichnet wird. A ist eine symmetrische Matrix mit $\sigma + \tau$ Reihen. Da die Primteiler $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{C}_i$ ein vollkommenes System bilden, so ist $|A| = 1$. Setzen wir

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{a}_k)^* &= (\overline{\mathfrak{A}}_i,\ \overline{\mathfrak{A}}_k) = -\,\mathfrak{a}^*_{ik}, \\ (\mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{c}_k) &= (\overline{\mathfrak{A}}_i,\ \overline{\mathfrak{C}}_k) = -\,\mathfrak{e}_{ik}, \\ (\mathfrak{c}_i,\ \mathfrak{c}_k) &= (\overline{\mathfrak{C}}_i,\ \overline{\mathfrak{C}}_k) = -\,\mathfrak{c}_{ik}, \end{aligned}$$

so wird nach III, § 4

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^* & \mathfrak{e} \\ \bar{\mathfrak{e}} & \mathfrak{c} \end{pmatrix}. \tag{77}$$

Das Produkt der in einem Primteiler oder Divisor $\mathfrak{P}$ erster Art von K enthaltenen Primteiler $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{c}_i$ sei $s^*(\mathfrak{P})$. Dann bestehen, wenn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ irgendzwei Primteiler oder Divisoren erster Art von K bedeuten, die Gleichungen

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_i = \overline{\mathfrak{A}}_i, \quad \mathfrak{c}_i = \overline{\mathfrak{C}}_i, \\ \dfrac{\mathfrak{P}}{s^*(\mathfrak{P})} = \overline{\mathfrak{P}}, \quad \dfrac{\mathfrak{Q}}{s^*(\mathfrak{Q})} = \overline{\mathfrak{Q}}, \quad \dfrac{\mathfrak{A}_i}{s^*(\mathfrak{A}_i)} = \overline{\mathfrak{A}}'_i. \end{cases} \tag{78}$$

Ferner gilt der Satz, dass die Zahl der Schnittpunkte zweier Divisoren von K, die aus Primteilern erster Art und aus den Primteilern $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{c}_i$ irgendwie zusammengesetzt sind, gleich der Zahl der Schnittpunkte derjenigen Divisoren ist, in die sie bei der Transformation $K \to \overline{K}$ übergehen.

Jetzt betrachten wir den Übergang von $\overline{K}$ zu K'. Die einzigen Primteiler, die hierbei ihre Art ändern, sind die Primteiler $\overline{\mathfrak{A}}'_i$ und $\overline{\mathfrak{C}}_i$, die in die Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}'_i$ und $\mathfrak{c}'_i$ übergehen, wenn wir die Primteiler $\mathfrak{c}_i$ als Primteiler von K' mit $\mathfrak{c}'_i$ bezeichnen. Wir haben es daher auch hier mit einer einseitigen Stellentransformation zu tun. Die Primteiler $\overline{\mathfrak{A}}'_i$, $\overline{\mathfrak{C}}_i$ bilden also ein vollkommenes System, und die Transformation kann durch Auflösen der ausgezeichneten Stellen von K' gewonnen werden. Der Übergang von K' zu $\overline{K}$ ist von derselben Art wie der von K zu $\overline{K}$.

Die Eichfunktion von $\mathfrak{a}'_i$ sei $A'_i(u, v; \tau_i)$ und die von $\mathfrak{c}'_i$ sei $\Gamma'_i(u, v; \vartheta_i)$. Im Punkte $u = v = 0$ mögen die zu derselben Stelle gehörenden Kurven

$$\begin{aligned} &A'_i(u, v; \tau_{i1}) = 0 \text{ und } A_k(u, v; \tau_{k2}) = 0 && a'_{ik}, \\ &A'_i(u, v; \tau_{i1}) = 0 \text{ und } \Gamma_k(u, v; \vartheta_{k2}) = 0 && e'_{ik}, \\ &\Gamma'_i(u, v; \vartheta_{i1}) = 0 \text{ und } \Gamma_k(u, v; \vartheta_{k2}) = 0 && c'_{ik}, \end{aligned}$$

Schnittpunkte haben. Im übrigen sei $a'_{ik} = c'_{ik} = e'_{ik} = 0$. Die Matrizen der Grössen a'_{ik}, c'_{ik}, e'_{ik} bezeichnen wir mit a', c', e' und setzen

$$A' = \begin{pmatrix} a' & e' \\ \bar{e}' & c' \end{pmatrix}, \quad A'^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}'^* & \mathfrak{e}' \\ \bar{\mathfrak{e}}' & \mathfrak{c}' \end{pmatrix}. \tag{79}$$

Dann gelten die Gleichungen

$$(\mathfrak{a}'_i, \mathfrak{a}'_k)^* = (\overline{\mathfrak{A}}'_i, \overline{\mathfrak{A}}'_k) = -\,\mathfrak{a}'^*_{ik},$$

$$(\mathfrak{a}'_i, \mathfrak{c}'_k) = (\overline{\mathfrak{A}}'_i, \overline{\mathfrak{C}}_k) = -\,\mathfrak{e}'_{ik},$$

$$(\mathfrak{c}'_i, \mathfrak{c}'_k) = (\overline{\mathfrak{C}}_i, \overline{\mathfrak{C}}_k) = -\,\mathfrak{c}'_{ik}.$$

Das Produkt der in einem Primteiler oder Divisor erster Art $\mathfrak{P}'$ von K' enthaltenen Primteiler $\mathfrak{a}'_i$ und $\mathfrak{c}'_i$ sei $s^*(\mathfrak{P}')$. Sind $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{Q}'$ irgendzwei Divisoren erster Art von K', so bestehen die Gleichungen

$$\text{(80)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{a}'_i = \overline{\mathfrak{A}}'_i, \quad \mathfrak{c}' = \overline{\mathfrak{C}}_i, \\ \dfrac{\mathfrak{P}'}{s^*(\mathfrak{P}')} = \overline{\mathfrak{P}}', \quad \dfrac{\mathfrak{Q}'}{s^*(\mathfrak{Q}')} = \overline{\mathfrak{Q}}', \quad \dfrac{\mathfrak{A}'_i}{s^*(\mathfrak{A}'_i)} = \overline{\mathfrak{A}}'_i. \end{cases}$$

Auch hier gilt der Satz: Die Zahl der Schnittpunkte zweier Divisoren aus K', die aus Primteilern erster Art und aus den $\mathfrak{a}'_i$ und $\mathfrak{c}'_i$ zusammengesetzt sind, ist gleich der Zahl der Schnittpunkte der Divisoren, in die sie beim Übergang von K' zu $\overline{K}$ übergehen.

Ist $\mathfrak{P}$ ein Primteiler erster Art von K und $\mathfrak{P}'$ der ihm entsprechende Primteiler von K', so sind die Körper $[\mathfrak{P}]$ und $[\mathfrak{P}']$, in die K für $\mathfrak{P} = 0$ und K' für $\mathfrak{P}' = 0$ übergehen, dieselben. Entsprechen den Primteilern $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ in $\overline{K}$ die Primteiler $\overline{\mathfrak{P}}$ und $\overline{\mathfrak{P}}'$, so müssen die Körper einer Veränderlichen, in die $\overline{K}$ für $\overline{\mathfrak{P}} = 0$ und $\overline{\mathfrak{P}}' = 0$ übergeht, übereinstimmen. Denn sie sind beide gleich den Körpern $[\mathfrak{P}]$ und $[\mathfrak{P}']$. Daraus folgt, dass $\overline{\mathfrak{P}}$ und $\overline{\mathfrak{P}}'$ identisch sind. *Es sei darauf aufmerksam gemacht, dass $\overline{\mathfrak{A}}_i$ und $\overline{\mathfrak{A}}'_i$ nicht übereinstimmen.* Sie entsprechen $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}'_i$. Wohl aber können wir $\overline{\mathfrak{C}}_i$ auch mit $\overline{\mathfrak{C}}'_i$ bezeichnen.

Aus (78) und (80) folgt also

$$\text{(81)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{A}_i}{s^*(\mathfrak{A}_i)} = \mathfrak{a}'_i, \quad \dfrac{\mathfrak{A}'_i}{s^*(\mathfrak{A}'_i)} = \mathfrak{a}_i, \qquad \mathfrak{c}_i = \mathfrak{c}'_i, \\ \dfrac{\mathfrak{P}}{s^*(\mathfrak{P})} = \dfrac{\mathfrak{P}'}{s^*(\mathfrak{P}')}, \quad \dfrac{\mathfrak{Q}}{s^*(\mathfrak{Q})} = \dfrac{\mathfrak{Q}'}{s^*(\mathfrak{Q}')}. \end{cases}$$

Ausserdem ergibt sich: Sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ irgendzwei Divisoren von K, die aus Primteilern erster Art und den Primteilern $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{c}_i$ gebildet sind, und gehen sie beim Übergang von K zu K' unter Verwendung der Formeln (81) in $\mathfrak{Q}_1^*$ und $\mathfrak{Q}_2^*$ über, so ist

$$(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = (\mathfrak{Q}_1^*, \mathfrak{Q}_2^*).$$

Entsprechendes gilt für den umgekehrten Übergang von K' zu K. Im besonderen ist z. B. $(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{c}_k) = (\mathfrak{c}'_i, \mathfrak{c}'_k)$ oder $\mathfrak{c}_{ik} = \mathfrak{c}'_{ik}$, sodass

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'.$$

§ 2. Befreiung von den hilfsweise eingeführten Primteilern $\mathfrak{c}_i$.

Wir wollen uns jetzt von den Primteilern $\mathfrak{c}_i$ befreien, die sowohl in K wie in K' von der zweiten Art sind. Zunächst gelten die Transformationsformeln in II, § 2, in denen die $\mathfrak{c}_i$ nicht vorkommen. Ferner werden wir folgenden Satz beweisen:

Setzen wir

$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{P}) = 0, \quad (\mathfrak{a}'_i, \mathfrak{P}') = 0, \tag{82}$$

wenn $\mathfrak{P}$ ein Primteiler erster Art von K und $\mathfrak{P}'$ ein solcher von K' ist, und

$$\mathfrak{a} = a^{-1}, \quad \mathfrak{a}' = a'^{-1}, \quad (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = -\mathfrak{a}_{ik}, \quad (\mathfrak{a}'_i, \mathfrak{a}'_k) = -\mathfrak{a}'_{ik}, \tag{83}$$

so gilt wiederum: Die Zahl der Schnittpunkte zweier Divisoren von K, die aus Primteilern erster Art und den $\mathfrak{a}_i$ bestehen, ist gleich der Zahl der Schnittpunkte derjenigen Divisoren von K', in die die gegebenen Divisoren beim Übergang von K zu K' unter Verwendung der Transformationsformeln in II, § 2 übergehen.

Durch (83) sind die Zahlen $\mathfrak{a}_{ik}$ und $\mathfrak{a}'_{ik}$ für eine allgemeine Stellentransformation definiert, während sie bisher nur für die einseitigen erklärt waren. (Vgl. III, § 3.) Die Zahlen $-\mathfrak{a}_{ik}$, $-\mathfrak{a}'_{ik}$ lassen sich jetzt nicht mehr als Schnittpunktzahlen von Primteilern deuten wie früher. Wie Beispiele zeigen, sind sie nicht einmal immer ganzzahlig.

Es genügt, den Satz für Primteiler zu beweisen. Zunächst schreiben wir die zu beweisenden Formeln auf. Zu beachten ist, dass wegen (82)

$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{A}_k) = (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{a}'_i, \mathfrak{A}'_k) = (\mathfrak{a}'_i, \mathfrak{Q}') = 0,$$

also auch

$$(s(\mathfrak{A}_i), \mathfrak{A}_k) = (s(\mathfrak{P}), \mathfrak{A}_k) = (s(\mathfrak{A}'_i), \mathfrak{A}'_k) = (s(\mathfrak{P}'), \mathfrak{A}'_k) = 0,$$

$$(s(\mathfrak{A}_i), \mathfrak{Q}) = (s(\mathfrak{P}), \mathfrak{Q}) = (s(\mathfrak{A}'_i), \mathfrak{Q}') = (s(\mathfrak{P}'), \mathfrak{Q}') = 0.$$

Hierin wie auch im folgenden bedeuten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ Primteiler erster Art von K und $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ solche von K'.

$$\mathrm{I}\quad\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)},\ \frac{\mathfrak{A}_k}{s(\mathfrak{A}_k)}\right)=(\mathfrak{A}_i,\ \mathfrak{A}_k)+(s(\mathfrak{A}_i),\ s(\mathfrak{A}_k))=(\mathfrak{a}'_i,\ \mathfrak{a}'_k),\\&\left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)},\ \frac{\mathfrak{A}'_k}{s(\mathfrak{A}'_k)}\right)=(\mathfrak{A}'_i,\ \mathfrak{A}'_k)+(s(\mathfrak{A}'_i),\ s(\mathfrak{A}'_k))=(\mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{a}_k).\end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{II}\quad\left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)},\ \mathfrak{a}_k\right)=\left(\mathfrak{a}'_i,\ \frac{\mathfrak{A}'_k}{s(\mathfrak{A}'_k)}\right)=-(\mathfrak{a}_k,\ s(\mathfrak{A}_i))=-(\mathfrak{a}'_i,\ s(\mathfrak{A}'_k)).$$

$$\mathrm{III}\quad\left\{\begin{aligned}&(\mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{A}_k)=0=\left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)},\ \mathfrak{a}'_k\,s[\mathfrak{A}_k]'\right),\\&(\mathfrak{a}'_i,\ \mathfrak{A}'_k)=0=\left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)},\ \mathfrak{a}_k\,s[\mathfrak{A}'_k]\right).\end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{IV}\quad\left\{\begin{aligned}&(\mathfrak{A}_i,\ \mathfrak{A}_k)=\left(\mathfrak{A}_i,\ \frac{\mathfrak{A}_k}{s(\mathfrak{A}_k)}\right)=(\mathfrak{a}'_i\,s[\mathfrak{A}_i]',\ \mathfrak{a}'_k)=(\mathfrak{a}'_i\,s[\mathfrak{A}_i]',\ \mathfrak{a}'_k\,s[\mathfrak{A}_k]'),\\&(\mathfrak{A}'_i,\ \mathfrak{A}'_k)=\left(\mathfrak{A}'_i,\ \frac{\mathfrak{A}'_k}{s(\mathfrak{A}'_k)}\right)=(\mathfrak{a}_i\,s[\mathfrak{A}'_i],\ \mathfrak{a}_k)=(\mathfrak{a}_i\,s[\mathfrak{A}'_i],\ \mathfrak{a}_k\,s[\mathfrak{A}'_k]).\end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{V}\quad\left\{\begin{aligned}&\left(\mathfrak{a}_i,\ \frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}\right)=-(\mathfrak{a}_i,\ s(\mathfrak{P}))=\left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)},\ \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}\right),\\&\left(\mathfrak{a}'_i,\ \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}\right)=-(\mathfrak{a}'_i,\ s(\mathfrak{P}'))=\left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)},\ \frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}\right).\end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{VI}\quad\left\{\begin{aligned}&(\mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{P})=0=\left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)},\ \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}\,s[\mathfrak{P}]'\right),\\&(\mathfrak{a}'_i,\ \mathfrak{P}')=0=\left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)},\ \frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}\,s[\mathfrak{P}']\right).\end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{VII}\quad\left\{\begin{aligned}(\mathfrak{A}_i,\ \mathfrak{P})&=\left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)},\ \mathfrak{P}\right)=\left(\mathfrak{a}'_i,\ \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}\,s[\mathfrak{P}]'\right)=\left(\mathfrak{A}_i,\ \frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}\right)\\&=\left(\mathfrak{a}'_i\,s[\mathfrak{A}_i]',\ \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}\right)=\left(\mathfrak{a}'_i\,s[\mathfrak{A}_i]',\ \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}\,s[\mathfrak{P}]'\right),\\(\mathfrak{A}'_i,\ \mathfrak{P}')&=\left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)},\ \mathfrak{P}'\right)=\left(\mathfrak{a}_i,\ \frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}\,s[\mathfrak{P}']\right)=\left(\mathfrak{A}'_i,\ \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}\right)\\&=\left(\mathfrak{a}_i\,s[\mathfrak{A}'_i],\ \frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}\right)=\left(\mathfrak{a}_i\,s[\mathfrak{A}'_i],\ \frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}\,s[\mathfrak{P}']\right).\end{aligned}\right.$$

$$\text{VIII}\left\{\begin{aligned}\left(\frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}, \frac{\mathfrak{Q}}{s(\mathfrak{Q})}\right) &= (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) + (s(\mathfrak{P}), s(\mathfrak{Q})) = \left(\frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}, \frac{\mathfrak{Q}'}{s(\mathfrak{Q}')}\right)\\ &= (\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}') + (s(\mathfrak{P}'), s(\mathfrak{Q}')).\end{aligned}\right.$$

$$\text{IX}\left\{\begin{aligned}(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) &= \left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{Q}}{s(\mathfrak{Q})}\right) = \left(\frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')} s[\mathfrak{P}]', \frac{\mathfrak{Q}'}{s(\mathfrak{Q}')}\right) = \left(\frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}, \mathfrak{Q}\right)\\ &= \left(\frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}, \frac{\mathfrak{Q}'}{s(\mathfrak{Q}')} s[\mathfrak{Q}]'\right) = \left(\frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')} s[\mathfrak{P}]', \frac{\mathfrak{Q}'}{s(\mathfrak{Q}')} s[\mathfrak{Q}]'\right).\end{aligned}\right.$$

Zunächst zeigen wir, dass die Formeln III, IV, VI, VII, und IX aus den anderen folgen.

Beweise:

Zu III.

Aus I folgt

$$(84)\quad\left\{\begin{aligned}&(\mathfrak{a}_i, s(\mathfrak{A}_k)) = \left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)}, s[\mathfrak{A}_k]'\right);\ (\mathfrak{a}'_i, s(\mathfrak{A}'_k)) = \left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)}, s[\mathfrak{A}'_k]\right),\\ &(s(\mathfrak{A}_i), s(\mathfrak{A}_k)) = (s[\mathfrak{A}_i]', s[\mathfrak{A}_k]');\ (s(\mathfrak{A}'_i), s(\mathfrak{A}'_k)) = (s[\mathfrak{A}'_i], s[\mathfrak{A}'_k]),\\ &(\mathfrak{a}_i, s(\mathfrak{P})) = \left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)}, s[\mathfrak{P}]'\right);\ (\mathfrak{a}'_i, s(\mathfrak{P}')) = \left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)}, s[\mathfrak{P}']\right),\\ &(s(\mathfrak{P}), s(\mathfrak{Q})) = (s[\mathfrak{P}]', s[\mathfrak{Q}]');\ (s(\mathfrak{P}'), s(\mathfrak{Q}')) = (s[\mathfrak{P}'], s[\mathfrak{Q}']).\end{aligned}\right.$$

Ferner ergibt sich aus II

$$(85)\quad\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)}, s(\mathfrak{A}_k)\right) = (\mathfrak{a}'_i, s[\mathfrak{A}_k]');\ \left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)}, s(\mathfrak{A}'_k)\right) = (\mathfrak{a}_i, s[\mathfrak{A}'_k]),\\ &\left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)}, s(\mathfrak{P})\right) = (\mathfrak{a}'_i, s[\mathfrak{P}]');\ \left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)}; s(\mathfrak{P}')\right) = (\mathfrak{a}_i, s[\mathfrak{P}']),\\ &(s(\mathfrak{A}_i), s(\mathfrak{P})) = (s[\mathfrak{A}_i]', s[\mathfrak{P}]');\ (s(\mathfrak{A}'_i), s(\mathfrak{P}')) = (s[\mathfrak{A}'_i], s[\mathfrak{P}']).\end{aligned}\right.$$

Mit Benutzung von (84) folgt aus II

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)}, \mathfrak{a}'_k s[\mathfrak{A}_k]'\right) &= \left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)}, \mathfrak{a}'_k\right) + \left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)}, s[\mathfrak{A}_k]'\right)\\ &= \left(\mathfrak{a}_i, \frac{\mathfrak{A}_k}{s(\mathfrak{A}_k)}\right) + (\mathfrak{a}_i, s(\mathfrak{A}_k)) = (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{A}_k) = 0.\end{aligned}$$

Das ist aber Gleichung III.

Zu IV.

Wegen I und (85) ist

$$(\mathfrak{a}'_i s[\mathfrak{A}_i]', \ \mathfrak{a}'_k) = (\mathfrak{a}'_i, \ \mathfrak{a}'_k) + (s[\mathfrak{A}_i]', \ \mathfrak{a}'_k) = \left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)}, \ \frac{\mathfrak{A}_k}{s(\mathfrak{A}_k)}\right) + \left(s(\mathfrak{A}_i), \ \frac{\mathfrak{A}_k}{s(\mathfrak{A}_k)}\right) = (\mathfrak{A}_i, \ \mathfrak{A}_k).$$

Also wird

$$(\mathfrak{a}'_i s[\mathfrak{A}_i]', \ \mathfrak{a}'_k s[\mathfrak{A}_k]') = (\mathfrak{a}'_i, \ \mathfrak{a}'_k) + (\mathfrak{a}'_i, \ s[\mathfrak{A}_k]') + (\mathfrak{a}'_k, \ s[\mathfrak{A}_i]') + (s[\mathfrak{A}_i]', \ s[\mathfrak{A}_k]')$$
$$= \left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)}, \ \frac{\mathfrak{A}_k}{s(\mathfrak{A}_k)}\right) + \left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)}, \ s(\mathfrak{A}_k)\right) + \left(\frac{\mathfrak{A}_k}{s(\mathfrak{A}_k)}, \ s(\mathfrak{A}_i)\right) + (s(\mathfrak{A}_i), s(\mathfrak{A}_k)) = (\mathfrak{A}_i, \ \mathfrak{A}_k).$$

Damit ist IV bewiesen.

Zu VI.

Nach V und (84) ist

$$\left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)}, \ \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')} s[\mathfrak{P}]'\right) = \left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)}, \ \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}\right) + \left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s(\mathfrak{A}'_i)}, \ s[\mathfrak{P}]'\right)$$
$$= \left(\mathfrak{a}_i, \ \frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}\right) + (\mathfrak{a}_i, \ s(\mathfrak{P})) = (\mathfrak{a}_i, \ \mathfrak{P}) = 0.$$

Damit ist VI bewiesen.

Zu VII.

Nach V und (85) ist

$$\left(\mathfrak{a}'_i, \ \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')} s[\mathfrak{P}]'\right) = \left(\mathfrak{a}'_i, \ \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}\right) + (\mathfrak{a}'_i, \ s[\mathfrak{P}]')$$
$$= \left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)}, \ \frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}\right) + \left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s(\mathfrak{A}_i)}, \ s(\mathfrak{P})\right) = (\mathfrak{A}_i, \ \mathfrak{P}).$$

Das ist der erste Teil von VII.

Aus V ergibt sich ferner

$$(86) \quad \begin{cases} \left(s(\mathfrak{A}_i), \ \dfrac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}\right) = \left(s[\mathfrak{A}_i]', \ \dfrac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}\right); \ \left(s(\mathfrak{A}'_i), \ \dfrac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}\right) = \left(s[\mathfrak{A}'_i], \ \dfrac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}\right), \\ \left(s(\mathfrak{Q}), \ \dfrac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}\right) = \left(s[\mathfrak{Q}]', \ \dfrac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}\right); \ \left(s(\mathfrak{Q}'), \ \dfrac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}\right) = \left(s[\mathfrak{Q}'], \ \dfrac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}\right). \end{cases}$$

Nach V, (85), (86) und dem eben bewiesenen ersten Teil von VII ist

$$\left(\mathfrak{a}'_i s[\mathfrak{A}_i]', \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')} s[\mathfrak{P}]'\right) = \left(\mathfrak{a}'_i, \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')} s[\mathfrak{P}]'\right) + \left(s[\mathfrak{A}_i]', \frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}\right) + (s[\mathfrak{A}_i]', s[\mathfrak{P}]')$$

$$= (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{P}) + \left(s(\mathfrak{A}_i), \frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}\right) + (s(\mathfrak{A}_i), s(\mathfrak{P})) = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{P}).$$

Damit ist VII vollständig bewiesen.

Zu IX.

Nach VIII und (86) ist

$$\left(\frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')} s[\mathfrak{P}]', \frac{\mathfrak{Q}'}{s(\mathfrak{Q}')}\right) = \left(\frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}, \frac{\mathfrak{Q}'}{s(\mathfrak{Q}')}\right) + \left(s[\mathfrak{P}]', \frac{\mathfrak{Q}'}{s(\mathfrak{Q}')}\right)$$

$$= \left(\frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}, \frac{\mathfrak{Q}}{s(\mathfrak{Q})}\right) + \left(s(\mathfrak{P}), \frac{\mathfrak{Q}}{s(\mathfrak{Q})}\right) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}).$$

Hiernach und nach (84), (86) wird

$$\left(\frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')} s[\mathfrak{P}]', \frac{\mathfrak{Q}'}{s(\mathfrak{Q}')} s[\mathfrak{Q}]'\right) = \left(\frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')} s[\mathfrak{P}]', \frac{\mathfrak{Q}'}{s(\mathfrak{Q}')}\right) + \left(\frac{\mathfrak{P}'}{s(\mathfrak{P}')}, s[\mathfrak{Q}]'\right) + (s[\mathfrak{P}]', s[\mathfrak{Q}]')$$

$$= (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) + \left(\frac{\mathfrak{P}}{s(\mathfrak{P})}, s(\mathfrak{Q})\right) + (s(\mathfrak{P}), s(\mathfrak{Q})) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}).$$

Das ist aber IX.

Wir haben noch die Formeln I, II, V, VIII zu beweisen.

Zunächst einige Bezeichnungen. Wir setzen

$$\begin{aligned}
s^*(\mathfrak{A}_i) &= \mathfrak{a}_1^{\alpha_{1i}}\, \mathfrak{a}_2^{\alpha_{2i}} \ldots \mathfrak{a}_\sigma^{\alpha_{\sigma i}}\, \mathfrak{c}_1^{\gamma_{1i}}\, \mathfrak{c}_2^{\gamma_{2i}} \ldots \mathfrak{c}_\tau^{\gamma_{\tau i}},\\
s^*(\mathfrak{A}'_i) &= \mathfrak{a}'^{\alpha'_{1i}}_1\, \mathfrak{a}'^{\alpha'_{2i}}_2 \ldots \mathfrak{a}'^{\alpha'_{\varrho i}}_\varrho\, \mathfrak{c}_1^{\gamma'_{1i}}\, \mathfrak{c}_2^{\gamma'_{2i}} \ldots \mathfrak{c}_\tau^{\gamma'_{\tau i}},\\
s^*(\mathfrak{P}) &= \mathfrak{a}_1^{p_1}\, \mathfrak{a}_2^{p_2} \ldots \mathfrak{a}_\sigma^{p_\sigma}\, \mathfrak{c}_1^{\varphi_1}\, \mathfrak{c}_2^{\varphi_2} \ldots \mathfrak{c}_\tau^{\varphi_\tau},\\
s^*(\mathfrak{P}') &= \mathfrak{a}'^{p'_1}_1\, \mathfrak{a}'^{p'_2}_2 \ldots \mathfrak{a}'^{p'_\varrho}_\varrho\, \mathfrak{c}_1^{\varphi'_1}\, \mathfrak{c}_2^{\varphi'_2} \ldots \mathfrak{c}_\tau^{\varphi'_\tau},\\
s^*(\mathfrak{Q}) &= \mathfrak{a}_1^{q_1}\, \mathfrak{a}_2^{q_2} \ldots \mathfrak{a}_\sigma^{q_\sigma}\, \mathfrak{c}_1^{\psi_1}\, \mathfrak{c}_2^{\psi_2} \ldots \mathfrak{c}_\tau^{\psi_\tau},\\
s^*(\mathfrak{Q}') &= \mathfrak{a}'^{q'_1}_1\, \mathfrak{a}'^{q'_2}_2 \ldots \mathfrak{a}'^{q'_\varrho}_\varrho\, \mathfrak{c}_1^{\psi'_1}\, \mathfrak{c}_2^{\psi'_2} \ldots \mathfrak{c}_\tau^{\psi'_\tau}.
\end{aligned}$$

Die Divisoren $s(\mathfrak{A}_i)$, $s(\mathfrak{A}'_i)$, $s(\mathfrak{P})$ usw. gehen hieraus hervor, indem man die $\mathfrak{c}_k$ fortlässt.

Es seien α, α', γ, γ' die Matrizen der Exponenten α_{ik}, α'_{ik}, γ_{ik}, γ'_{ik}, wobei der erste Index die Zeile und der zweite die Spalte bezeichnen soll. Wir setzen noch

$$P_i = (\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_i), \quad Q_i = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{A}_i), \quad P'_i = (\mathfrak{P}', \mathfrak{A}'_i), \quad Q'_i = (\mathfrak{Q}', \mathfrak{A}'_i)$$

und verstehen allgemein unter m und m' Matrizen mit nur einer Spalte, die Elemente m_i und m'_i enthalten. Schliesslich seien noch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ die quadratischen Matrizen der Schnittpunktzahlen $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k)$ und $(\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{A}'_k)$.

Beweise:

Zu I und II.

Die Gleichungen I und II lauten in Matrizenform

$$(87) \qquad \mathfrak{A} - \bar{\alpha}\, \mathfrak{a}\, \alpha = -\mathfrak{a}', \quad \mathfrak{A}' - \bar{\alpha}'\, \mathfrak{a}'\, \alpha' = -\mathfrak{a},$$

$$(88) \qquad \bar{\alpha}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}'\, \alpha', \qquad \mathfrak{a}\, \alpha = \bar{\alpha}'\, \mathfrak{a}'.$$

Die beiden letzten Gleichungen gehen auseinander hervor, indem man Zeilen mit Spalten vertauscht. In Verbindung mit (88) können wir (87) in der Form schreiben

$$(89) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A} - \bar{\alpha}\, \bar{\alpha}'\, \mathfrak{a}' = -\mathfrak{a}', & \mathfrak{A}' - \bar{\alpha}'\, \bar{\alpha}\, \mathfrak{a} = -\mathfrak{a}, \\ \mathfrak{A} - \mathfrak{a}'\, \alpha'\, \alpha = -\mathfrak{a}', & \mathfrak{A}' - \mathfrak{a}\, \alpha\, \alpha' = -\mathfrak{a}. \end{cases}$$

Durch Multiplikation mit $a = \mathfrak{a}^{-1}$ oder $a' = \mathfrak{a}'^{-1}$ erhalten wir aus (88) und (89)

$$(90) \qquad \begin{cases} 1.\ \mathfrak{A}\, a' - \bar{\alpha}\, \bar{\alpha}' = -1, & 2.\ \mathfrak{A}'\, a - \bar{\alpha}'\, \bar{\alpha} = -1, \\ 3.\ a'\, \mathfrak{A} - \alpha'\, \alpha = -1, & 4.\ a\, \mathfrak{A}' - \alpha\, \alpha' = -1, \\ 5.\ a'\, \bar{\alpha} = \alpha'\, a, & 6.\ \alpha\, a' = a\, \bar{\alpha}'. \end{cases}$$

Da umgekehrt aus diesen Gleichungen die ursprünglichen folgen, so genügt es, diese zu beweisen. Wir beweisen die 3. und 5. Die anderen ergeben sich durch Vertauschen von K mit K' oder durch Vertauschen der Zeilen und Spalten.

Da nach § 1 der zu beweisende Satz richtig ist, wenn wir die Primteiler $\mathfrak{c}_k$ berücksichtigen, so bestehen die Gleichungen

$$(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k) + (s^*(\mathfrak{A}_i), s^*(\mathfrak{A}_k)) = (\mathfrak{a}'_i, \mathfrak{a}'_k)^* = -\mathfrak{a}'^*_{ik},$$

$$\left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s^*(\mathfrak{A}_i)}, \mathfrak{c}_k\right) = -(s^*(\mathfrak{A}_i), \mathfrak{c}_k) = (\mathfrak{a}'_i, \mathfrak{c}'_k) = -\mathfrak{c}'_{ik},$$

$$(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{c}_k) = -\mathfrak{c}_{ik} = (\mathfrak{c}'_i, \mathfrak{c}'_k) = -\mathfrak{c}'_{ik}$$

oder in Matrizenform

$$(91) \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^* & \mathfrak{c} \\ \bar{\mathfrak{c}} & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathfrak{a}'^* & \mathfrak{c}' \\ \bar{\mathfrak{c}}' & \mathfrak{c} \end{pmatrix}.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{\mathfrak{A}_i}{s^*(\mathfrak{A}_i)},\ \mathfrak{a}_k\right) = -(s^*(\mathfrak{A}_i),\ \mathfrak{a}_k) = \left(\mathfrak{a}'_i,\ \frac{\mathfrak{A}'_k}{s^*(\mathfrak{A}'_k)}\right) = -(\mathfrak{a}'_i,\ s^*(\mathfrak{A}'_k)),$$

$$(\mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{c}_k) = -\mathfrak{e}_{ik} = \left(\frac{\mathfrak{A}'_i}{s^*(\mathfrak{A}'_i)},\ \mathfrak{c}'_k\right) = -(s^*(\mathfrak{A}'_i),\ \mathfrak{c}'_k),$$

$$\left(\mathfrak{c}_i,\ \frac{\mathfrak{A}_k}{s^*(\mathfrak{A}_k)}\right) = -(\mathfrak{c}_i,\ s^*(\mathfrak{A}_k)) = (\mathfrak{c}'_i,\ \mathfrak{a}'_k) = -\mathfrak{e}'_{ki},$$

$$\mathfrak{c}_{ik} = \mathfrak{c}'_{ik}$$

oder

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^* & \mathfrak{e} \\ \bar{\mathfrak{e}} & \mathfrak{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}'^* & \mathfrak{e}' \\ \bar{\mathfrak{e}}' & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ \gamma' & -1 \end{pmatrix}. \tag{92}$$

Aus (91) folgt in Verbindung mit (92)

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{a}'^* & \mathfrak{e}' \\ \bar{\mathfrak{e}}' & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ \gamma' & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathfrak{a}'^* & \mathfrak{e}' \\ \bar{\mathfrak{e}}' & \mathfrak{c} \end{pmatrix}. \tag{93}$$

Wir multiplizieren (92) vorn mit A' und hinten mit A und (93) vorn mit A', wo A und A' durch (76) und (79) gegeben sind, und erhalten wegen (77)

$$\begin{pmatrix} a' & e' \\ \bar{e}' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ \gamma' & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & e \\ \bar{e} & c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a' & e' \\ \bar{e}' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ \gamma' & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn wir immer nur die erste Zeile mit der ersten Spalte multiplizieren,

$$a'\bar{\alpha} = \alpha' a, \quad a'\mathfrak{A} - \alpha'\alpha = -1.$$

Das sind aber die Gleichungen, die wir beweisen wollten.

Zu V und VIII.

Diese Gleichungen lauten in Matrizenform

$$\mathfrak{a}p = P' - \bar{\alpha}'\mathfrak{a}'p', \quad \mathfrak{a}'p' = P - \bar{\alpha}\mathfrak{a}p, \tag{94}$$

$$(\mathfrak{P},\ \mathfrak{Q}) - \bar{p}\mathfrak{a}q = (\mathfrak{P}',\ \mathfrak{Q}') - \bar{p}'\mathfrak{a}'q'. \tag{95}$$

Ebenso bestehen die Gleichungen

$$(96) \qquad \mathfrak{a}\, q = Q' - \dot{\bar{\alpha}}' \mathfrak{a}' q', \quad \mathfrak{a}' q' = Q - \bar{\alpha}\, \mathfrak{a}\, q.$$

Aus (94) und (96) folgt in Verbindung mit (88)

$$(97) \qquad \begin{cases} \mathfrak{a}\, p = P' - \mathfrak{a}\, \alpha\, p', & \mathfrak{a}' p' = P - \mathfrak{a}' \alpha' p, \\ \mathfrak{a}\, q = Q' - \mathfrak{a}\, \alpha\, q', & \mathfrak{a}' q' = Q - \mathfrak{a}' \alpha' q. \end{cases}$$

Durch vordere Multiplikation mit $a = \mathfrak{a}^{-1}$ und $a' = \mathfrak{a}'^{-1}$ erhalten wir

$$(98) \qquad \begin{cases} p = a\, P' - \alpha\, p', & p' = a' P - \alpha' p, \\ q = a\, Q' - \alpha\, q', & q' = a' Q - \alpha' q. \end{cases}$$

Unter Benutzung von (96) wird

$$\bar{p}\, \mathfrak{a}\, q = \bar{p}\, Q' - (\bar{p}\, \bar{\alpha}')\, \mathfrak{a}' q'.$$

Aus der zweiten Gleichung (98) folgt durch Vertauschen der Zeilen und Spalten

$$\bar{p}' = \bar{P} a' - \bar{p}\, \bar{\alpha}',$$

sodass sich ergibt

$$\bar{p}\, \mathfrak{a}\, q = \bar{p}\, Q' + \bar{p}' \mathfrak{a}' q' - \bar{P} a' \mathfrak{a}' q'.$$

$$\bar{p}\, \mathfrak{a}\, q - \bar{p}\, Q' = \bar{p}' \mathfrak{a}' q' - \bar{P} q'.$$

Durch Addition zu (95) folgt

$$(99) \qquad (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) - \bar{p}\, Q' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}') - \bar{P} q'.$$

Da die betrachteten Umformungen auch in umgekehrter Reihenfolge möglich sind, so genügt es, statt der Gleichungen V und VIII die Gleichungen (98) und (99) zu betrachten. Von den Gleichungen (98) brauchen wir nur eine zu beweisen, da die anderen aus ihr durch Vertauschen von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q}$ oder von K mit K' hervorgehen.

Nach § 1 ist

$$\left(\mathfrak{a}_i, \frac{\mathfrak{P}}{s^*(\mathfrak{P})}\right) = -(\mathfrak{a}_i, s^*(\mathfrak{P})) = (\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{P}') + (s^*(\mathfrak{A}'_i), s^*(\mathfrak{P}')),$$

$$\left(\mathfrak{c}_i, \frac{\mathfrak{P}}{s^*(\mathfrak{P})}\right) = -(\mathfrak{c}_i, s^*(\mathfrak{P})) = \left(\mathfrak{c}'_i, \frac{\mathfrak{P}'}{s^*(\mathfrak{P}')}\right) = -(\mathfrak{c}'_i, s^*(\mathfrak{P}'))$$

oder

$$(100) \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^* & \mathfrak{e} \\ \bar{\mathfrak{e}} & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P' \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\alpha}' & \bar{\gamma}' \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}'^* & \mathfrak{e}' \\ \bar{\mathfrak{e}}' & \mathfrak{c}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ \varphi' \end{pmatrix}.$$

Durch Transposition folgt aus (92)

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha}' & \bar{\gamma}' \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}'^* & \mathfrak{e}' \\ \bar{\mathfrak{e}}' & \mathfrak{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^* & \mathfrak{e} \\ \bar{\mathfrak{e}} & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & -1 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir dies in (100) ein, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a}^* & \mathfrak{e} \\ \bar{\mathfrak{e}} & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P' \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^* & \mathfrak{e} \\ \bar{\mathfrak{e}} & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ \varphi' \end{pmatrix}.$$

Durch vordere Multiplikation mit A folgt hieraus

$$(101)\qquad \begin{pmatrix} p \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & e \\ e & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P' \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ \varphi' \end{pmatrix}.$$

Durch Ausrechnen ergibt sich unter anderem

$$p = a\, P' - \alpha\, p'.$$

Das ist die erste der Gleichungen (98).

Nach § 1 ist ferner

$$\left(\frac{\mathfrak{P}}{s^*(\mathfrak{P})}, \frac{\mathfrak{Q}}{s^*(\mathfrak{Q})}\right) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) + (s^*(\mathfrak{P}), s^*(\mathfrak{Q})) = \left(\frac{\mathfrak{P}'}{s^*(\mathfrak{P}')}, \frac{\mathfrak{Q}'}{s^*(\mathfrak{Q}')}\right)$$
$$= (\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}') + (s^*(\mathfrak{P}'), s^*(\mathfrak{Q}'))$$

oder

$$(102)\qquad (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) - [\bar{p}\,\bar{\varphi}] \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^* & \mathfrak{e} \\ \bar{\mathfrak{e}} & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \psi \end{pmatrix} = (\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}') - [\bar{p}'\,\bar{\varphi}'] \begin{pmatrix} \mathfrak{a}'^* & \mathfrak{e}' \\ \bar{\mathfrak{e}}' & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' \\ \psi' \end{pmatrix}.$$

Analog zu (100) ist

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a}^* & \mathfrak{e} \\ \bar{\mathfrak{e}} & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q' \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\alpha}' & \bar{\gamma}' \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}'^* & \mathfrak{e}' \\ \bar{\mathfrak{e}}' & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' \\ \psi' \end{pmatrix}.$$

Daher folgt aus (102)

$$(103)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) - [\bar{p}\,\bar{\varphi}] \begin{pmatrix} Q' \\ 0 \end{pmatrix} + [\bar{p}\,\bar{\varphi}] \begin{pmatrix} \bar{\alpha}' & \bar{\gamma}' \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}'^* & \mathfrak{e}' \\ \bar{\mathfrak{e}}' & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' \\ \psi' \end{pmatrix} \\ &\qquad = (\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}') - [\bar{p}'\,\bar{\varphi}'] \begin{pmatrix} \mathfrak{a}'^* & \mathfrak{e}' \\ \bar{\mathfrak{e}}' & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' \\ \psi' \end{pmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Aus (101) folgt durch Vertauschen von K mit K'

$$\begin{pmatrix} p' \\ \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & e' \\ \bar{e}' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ \gamma' & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \varphi \end{pmatrix}$$

und hieraus durch Transposition

$$[\bar{p}'\,\bar{\varphi}'] = [\bar{P}\,0] \begin{pmatrix} a' & e' \\ \bar{e}' & c' \end{pmatrix} - [\bar{p}\,\bar{\varphi}] \begin{pmatrix} \bar{\alpha}' & \bar{\gamma}' \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sodass nach (103)

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) - [\bar{p}\,\bar{\varphi}] \begin{pmatrix} Q' \\ 0 \end{pmatrix} - [\bar{p}'\,\bar{\varphi}'] \begin{pmatrix} \mathfrak{a}'^{*} & \mathfrak{e}' \\ \bar{\mathfrak{e}}' & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' \\ \psi' \end{pmatrix} + [\bar{P}\,0] \begin{pmatrix} a' & e' \\ \bar{e}' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}'^{*} & \mathfrak{e}' \\ \bar{\mathfrak{e}}' & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' \\ \psi' \end{pmatrix}$$

$$= (\mathfrak{P}', Q') - [\bar{p}'\,\bar{\varphi}'] \begin{pmatrix} \mathfrak{a}'^{*} & \mathfrak{e}' \\ \bar{\mathfrak{e}}' & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' \\ \psi' \end{pmatrix}$$

oder

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) - [\bar{p}\,\bar{\varphi}] \begin{pmatrix} Q' \\ 0 \end{pmatrix} = (\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}') - [\bar{P}\,0] \begin{pmatrix} q' \\ \psi' \end{pmatrix}.$$

oder auch

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) - \bar{p}\, Q' = (\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}') - \bar{P} q'.$$

Das ist aber die Gleichung (99).

Damit sind V und VIII bewiesen.

§ 3. Das Verhalten der kanonischen Klasse bei einer allgemeinen Stellentransformation.

Es seien $(\mathfrak{K})$, $(\bar{\bar{\mathfrak{K}}})$ und $(\mathfrak{K}')$ die kanonischen Klassen der Körper K, $\bar{\bar{K}}$ und K'. Die Grade der Eichfunktionen A_h, A'_h, Γ_h, Γ'_h in u, v seien $(\delta_{h1}, \delta_{h2})$, $(\delta'_{h1}, \delta'_{h2})$, $(\gamma_{h1}, \gamma_{h2})$, $(\gamma'_{h1}, \gamma'_{h2})$. Wir setzen

$$\delta_h = \delta_{h1} + \delta_{h2} - 1, \quad \delta'_h = \delta'_{h1} + \delta'_{h2} - 1, \quad \gamma_h = \gamma_{h1} + \gamma_{h2} - 1, \quad \gamma'_h = \gamma'_{h1} + \gamma'_{h2} - 1,$$

$$\mathfrak{A} = \Pi\, \mathfrak{A}_h^{\delta'_h}, \quad \mathfrak{A}' = \Pi\, \mathfrak{A}_h'^{\delta_h}, \quad \bar{\bar{\mathfrak{C}}} = \Pi\, \bar{\bar{\mathfrak{C}}}_h^{\gamma_h}, \quad \bar{\bar{\mathfrak{C}}}' = \Pi\, \bar{\bar{\mathfrak{C}}}_h^{\gamma'_h},$$

$$\mathfrak{a}' = \Pi\, \mathfrak{a}_h'^{\delta'_h}, \quad \mathfrak{a} = \Pi\, \mathfrak{a}_h^{\delta_h}, \quad \mathfrak{c} = \Pi\, \mathfrak{c}_h^{\gamma_h}, \quad \mathfrak{c}' = \Pi\, \mathfrak{c}_h'^{\gamma'_h},$$

$$\bar{\bar{\mathfrak{A}}} = \Pi\, \bar{\bar{\mathfrak{A}}}_h^{\delta'_h}, \quad \bar{\bar{\mathfrak{A}}}' = \Pi\, \bar{\bar{\mathfrak{A}}}_h'^{\delta_h}.$$

Eine Verwechslung mit den gleichbezeichneten Matrizen des vorigen Paragraphen ist wohl ausgeschlossen. Da die Übergänge $K \to \bar{\bar{K}}$ und $\bar{\bar{K}} \to K'$ einseitige Transformationen sind, so gilt nach III, § 2

$$(\overline{\mathfrak{K}}) = (\mathfrak{K}\,\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{C}}) = (\mathfrak{K}'\,\overline{\mathfrak{A}}'\,\overline{\mathfrak{C}}'),$$

sodass

$$\left(\mathfrak{K}\frac{\mathfrak{A}'}{s^*(\mathfrak{A}')}\,\mathfrak{c}\right) = \left(\mathfrak{K}'\frac{\mathfrak{A}}{s^*(\mathfrak{A})}\,\mathfrak{c}'\right).$$

Setzen wir $s^*(\mathfrak{A}') = \mathfrak{c}_0\, s(\mathfrak{A}')$, $s^*(\mathfrak{A}) = \mathfrak{c}'_0\, s(\mathfrak{A})$, so folgt

$$\left(\mathfrak{K}\frac{\mathfrak{A}'}{s(\mathfrak{A}')}\right) = \left(\mathfrak{K}\frac{\mathfrak{A}}{s(\mathfrak{A})}\frac{\mathfrak{c}'\,\mathfrak{c}_0}{\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}'_0}\right)$$

oder mit Benutzung der Transformationsformeln in II, § 2

$$(\mathfrak{K}\,\mathfrak{a}) = \left(\mathfrak{K}'\,\mathfrak{a}'\frac{\mathfrak{c}'\,\mathfrak{c}_0}{\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}'_0}\right).$$

Andrerseits kann $(\mathfrak{K}\,\mathfrak{a})$ durch die Formeln in II, § 2 nur in einen Divisor übergehen, der die Primteiler $\mathfrak{c}_h$ nicht explizit enthält. Daher muss $\mathfrak{c}'\,\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}'_0$ sein, sodass

(104) $$(\mathfrak{K}\,\mathfrak{a}) = (\mathfrak{K}'\,\mathfrak{a}').$$

Da nach (82) $(\mathfrak{a}_h, \mathfrak{Q}) = 0$ und $(\mathfrak{a}'_h, \mathfrak{Q}') = 0$, wenn $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ Divisoren erster Art von K und von K' sind, so ist $(\mathfrak{K}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{K}', \mathfrak{a}') = 0$ und aus (104) folgt

(105) $$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{K}', \mathfrak{K}') + (\mathfrak{a}', \mathfrak{a}').$$

Nach III, § 8 ist

$$(\overline{\mathfrak{K}}, \overline{\mathfrak{K}}) = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) - (\sigma + \tau) = (\mathfrak{K}', \mathfrak{K}') - (\varrho + \tau)$$

oder

(106) $$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + \varrho = (\mathfrak{K}', \mathfrak{K}') + \sigma.$$

Wir haben daher den Satz:

Bei einer Stellentransformation $K \rightleftarrows K'$ *ist die Summe aus dem Grad der kanonischen Klasse und der Zahl der ausgezeichneten Primteiler erster Art für beide Körper* K *und* K' *dieselbe.*

Aus (105) und (106) ergibt sich noch

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) - (\mathfrak{a}', \mathfrak{a}') = \varrho - \sigma.$$

Es ist also die Differenz $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) - (\mathfrak{a}', \mathfrak{a}')$ immer ganzzahlig, was, wie Beispiele zeigen, für $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}')$ nicht immer gilt.

V. Ausgezeichnete Stellendefinitionen.

§ 1. Einteilung der algebraischen Körper.

Man unterscheidet folgende Arten algebraischer Körper von zwei unabhängigen Veränderlichen.

1. **Rationale Körper.**

In einem solchen Körper kann man (auf unendlich viele Arten) zwei Grössen x, y so wählen, dass er mit dem Körper (x, y) der rationalen Funktionen von x, y identisch wird.

2. **Halbrationale Körper.**

Einen solchen Körper erhält man, indem man zu einem algebraischen Körper einer Veränderlichen eine unabhängige Veränderliche adjungiert. Der Körper einer Veränderlichen sei durch die Gleichung

$$f(y, z) = 0 \tag{107}$$

definiert und habe das Geschlecht p. Die hinzukommende Veränderliche sei x. Der halbrationale Körper besteht dann aus den rationalen Funktionen von x, y, z, wobei zwischen y und z die Gleichung (107) besteht. Es muss $p > 0$ sein, weil sonst der Körper (x, y, z) rational wird.

3. **Eigentlich algebraische Körper.**

Das sind die Körper, die nicht rational und nicht halbrational sind. In einem solchen Körper enthält die kanonische Klasse oder eine ihrer positiven Potenzen mindestens einen ganzen Divisor.

§ 2. Ein Satz über $s(\mathfrak{A}_i)$ und $s(\mathfrak{A}'_i)$.

Es sei $s(\mathfrak{A}'_i) = 1$, also $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{A}'_i$ für $i = 1, 2, \ldots, \sigma$. Das bedeutet: Keiner der Primteiler $\mathfrak{A}'_i$ möge durch eine der ausgezeichneten Stellen von K' gehen. In der Bezeichnung von IV, § 2 ist also die Matrix α' gleich 0. Aus der zweiten der Gleichungen (88), IV, § 2 folgt $\mathfrak{a}\alpha = 0$. Da aber $|\mathfrak{a}| \neq 0$, so ist $\alpha = 0$, d. h. $s(\mathfrak{A}_i) = 1$. Berücksichtigen wir noch den in III, § 1 angegebenen Satz, so haben wir:

Hat eine Stellentransformation $K \rightleftarrows K'$ die Eigenschaft, dass die ausgezeichneten Primteiler erster Art $\mathfrak{A}'_i$ von K' durch keine der ausgezeichneten Stellen von K'

gehen, so gehen auch die ausgezeichneten Primteiler erster Art $\mathfrak{A}_i$ *von* K *durch keine der ausgezeichneten Stellen von* K. *Ferner bilden sowohl die* $\mathfrak{A}_i$ *wie die* $\mathfrak{A}'_i$ *vollkommene Systeme.*

Die Betrachtungen in IV, § 2 vereinfachen sich in diesem Falle wesentlich, da die Primteiler $\mathfrak{c}_k$ nicht eingeführt zu werden brauchen.

§ 3. Eigentlich algebraische Körper.

Der Körper K sei eigentlich algebraisch, und es sei etwa

$$\{\mathfrak{K}^\nu\} > 0, \quad \nu > 0.$$

Ferner sei $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{K}^\nu)$. Er habe die Form

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1^{\lambda_1}\mathfrak{A}_2^{\lambda_2} \ldots \mathfrak{A}_\varrho^{\lambda_\varrho}\mathfrak{H},$$

wo $\mathfrak{H}$ keinen der Primteiler $\mathfrak{A}_i$ enthalten soll. Der Divisor, der $\mathfrak{H}$ bei der Transformation entspricht, sei $\mathfrak{H}'$, sodass

$$\frac{\mathfrak{H}}{s(\mathfrak{H})} = \frac{\mathfrak{H}'}{s(\mathfrak{H}')}.$$

Nach IV, § 3 geht die Klasse $(\mathfrak{K}\,\mathfrak{a})$ in $(\mathfrak{K}'\,\mathfrak{a}')$, also die Klasse $(\mathfrak{K}^\nu\,\mathfrak{a}^\nu)$ in $(\mathfrak{K}'^\nu\,\mathfrak{a}'^\nu)$ über, und der Divisor $\mathfrak{G}\,\mathfrak{a}^\nu$ in einen Divisor $\mathfrak{G}'\,\mathfrak{a}'^\nu$ der Klasse $(\mathfrak{K}'^\nu\,\mathfrak{a}'^\nu)$. Dieser habe die Form

(108) $$\mathfrak{G}'\,\mathfrak{a}'^\nu = \mathfrak{A}_1'^{\mu_1}\mathfrak{A}_2'^{\mu_2} \ldots \mathfrak{A}_\sigma'^{\mu_\sigma}\mathfrak{H}'_0\,\mathfrak{a}'^\nu,$$

wo $\mathfrak{H}'_0$ keinen der Primteiler $\mathfrak{A}'_i$ enthalten soll. $\mathfrak{G}'$ ist ein Divisor aus $(\mathfrak{K}'^\nu)$ und enthält nur Primteiler erster Art von K'. Ebenso ist $\mathfrak{H}'_0$ ein Divisor erster Art von K'. Nach den Transformationsformeln wird

$$\mathfrak{G}'\,\mathfrak{a}'^\nu = \mathfrak{G}\,\mathfrak{a}^\nu = \mathfrak{a}_1'^{\lambda_1}\mathfrak{a}_2'^{\lambda_2} \ldots \mathfrak{a}_\varrho'^{\lambda_\varrho}(s[\mathfrak{A}_1]')^{\lambda_1} \ldots (s[\mathfrak{A}_\varrho]')^{\lambda_\varrho} \cdot \frac{\mathfrak{H}'}{s(\mathfrak{H}')} \cdot \frac{\mathfrak{A}'^\nu}{(s(\mathfrak{A}'))^\nu}\, s[\mathfrak{H}]'.$$

Hieraus folgt durch Vergleich mit (108) zunächst $\mathfrak{H}'_0 = \mathfrak{H}'$. Setzen wir

$$s(\mathfrak{H}) = \mathfrak{a}_1^{h_1}\mathfrak{a}_2^{h_2} \ldots \mathfrak{a}_\sigma^{h_\sigma}, \quad s(\mathfrak{H}') = \mathfrak{a}_1'^{h'_1}\mathfrak{a}_2'^{h'_2} \ldots \mathfrak{a}_\varrho'^{h'_\varrho},$$

so ergibt sich, mit Benutzung der Gleichungen in II, § 2, indem man die Exponenten von $\mathfrak{A}'_k$ auf beiden Seiten einander gleich setzt,

(109) $$\mu_k = \nu\alpha_k + h_k + \alpha_{k1}\lambda_1 + \alpha_{k2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{k\varrho}\lambda_\varrho.$$

Ganz ebenso folgt, indem man den Divisor $\mathfrak{G}'\mathfrak{a}'^{\nu}$ durch den Divisor ersetzt, in den er beim Übergang von K' zu K übergeht,

$$\lambda_k = \nu\alpha'_k + h'_k + \alpha'_{k1}\mu_1 + \alpha'_{k2}\mu_2 + \cdots + \alpha'_{k\sigma}\mu_\sigma. \tag{110}$$

Da $\nu > 0$, $\alpha_k > 0$ und alle anderen auf der rechten Seite von (109) vorkommenden Grössen nicht negativ sind, so folgt, dass alle μ_k grösser als 0 sind. Ebenso ergibt sich aus (110), dass alle λ_k positiv sind, wenn $\mu_k \geqq 0$. Daher sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ gleichzeitig ganze Divisoren. Jedem ganzen Divisor aus $(\mathfrak{K}^{\nu})$ entspricht also ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{K}'^{\nu})$ und umgekehrt, sodass

$$\{\mathfrak{K}^{\nu}\} = \{\mathfrak{K}'^{\nu}\} \quad \text{für} \quad \nu > 0.$$

Ausserdem zeigt sich, dass alle ganzen Divisoren aus $(\mathfrak{K}^{\nu})$ durch jeden der Primteiler $\mathfrak{A}_k$ und alle ganzen Divisoren aus $(\mathfrak{K}'^{\nu})$ durch jeden der Primteiler $\mathfrak{A}'_k$ teilbar sind. Wir führen folgende Bezeichnung ein:

Ein Primteiler erster Art von K, der bei irgendeiner Stellentransformation in einen Primteiler zweiter Art übergeht, der also bei irgendeiner Stellentransformation ausgezeichnet ist, soll ausgezeichneter Primteiler von K heissen.

Dann können wir sagen: Jeder ganze Divisor aus $(\mathfrak{K}^{\nu})$, $\nu > 0$, enthält jeden ausgezeichneten Primteiler von K. Da aber die ganzen Divisoren aus $(\mathfrak{K}^{\nu})$ nur eine endliche Zahl von Primteilern enthalten, so folgt weiter, dass ein eigentlich algebraischer Körper nur endlichviele ausgezeichnete Primteiler hat. Freilich ist hierbei vorausgesetzt, dass man die Definition der Stellen, also die Uniformisierung im Kleinen, etwa nach dem Blackschen Verfahren vorgenommen hat, und nicht irgendwie unnötig kompliziert. Wenn es einem nämlich Vergnügen macht, kann man sich unendlich viele Stellen nach dem Noetherschen Verfahren aufgelöst denken. Dann enthält jeder ganze Divisor aus $(\mathfrak{K}^{\nu})$ unendlich viele ausgezeichnete Primteiler.

Aus den Gleichungen (109) und (110) folgt noch in Verbindung mit der zweiten der Gleichungen (88) in IV, § 2, wie wir jetzt zeigen wollen, dass die Zahlen α_{ik} und α'_{ik} alle gleich 0 sind. Den Beweis führen wir indirekt. Es sei etwa $\alpha_{m1} \neq 0$. Dann geht $\mathfrak{A}_1$ durch die Stelle S von K, zu der $\mathfrak{a}_m$ gehört. Zu S mögen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_s$, $(s \geqq m)$, gehören, sodass die Zahlen $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{s1}$ sämtlich grösser als null sind. Aus (109) folgt daher für $k = 1, 2, \ldots, s$

$$\mu_1 > \lambda_1,\ \mu_2 > \lambda_1,\ \ldots,\ \mu_s > \lambda_1. \tag{111}$$

Aus (110) ergibt sich dann für $k = 1$

$$\alpha'_{11} = \alpha'_{12} = \cdots = \alpha'_{1s} = 0.$$

Denn wäre etwa $\alpha'_{1i} > 0$, so würde aus (110) im Widerspruch zu (111) $\lambda_1 > \mu_i$ folgen. Es besagt aber $\alpha'_{1i} = 0$, dass $\mathfrak{A}'_i$ nicht durch die Stelle S' geht, zu der $\mathfrak{a}'_1$ gehört. Zu S' mögen ausser $\mathfrak{a}'_1$ noch $\mathfrak{a}'_2, \ldots, \mathfrak{a}'_r$ gehören. Dann kann $\mathfrak{A}'_i$ auch diese Primteiler nicht enthalten, sodass auch $\alpha'_{2i} = \alpha'_{3i} = \cdots = \alpha'_{ri} = 0$. Also ist

$$\alpha'_{hi} = 0 \begin{cases} h = 1, 2, \ldots, r, \\ i = 1, 2, \ldots, s. \end{cases} \tag{112}$$

Die Matrizen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ zerfallen in Einzelmatrizen, von denen jede zu einer ausgezeichneten Stelle gehört. Die der Stelle S zugehörige Teilmatrix von $\mathfrak{a}$ sei $\mathfrak{a}_0$, sodass $\mathfrak{a}_0 = (\mathfrak{a}_{ik})$ für $i, k = 1, 2, \ldots, s$. Ferner ist die erste Zeile von $\mathfrak{a}'$

$$\mathfrak{a}'_{11}, \mathfrak{a}'_{12}, \ldots, \mathfrak{a}'_{1r}, 0, 0, \ldots, 0.$$

Wenn wir uns also in der Gleichung $\bar{\alpha}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'\alpha'$ auf die erste Zeile des ersten Faktors und auf die ersten s Spalten des zweiten beschränken, so erhalten wir

$$(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{s1})\,\mathfrak{a}_0 = (\mathfrak{a}'_{11}, \mathfrak{a}'_{12}, \ldots, \mathfrak{a}'_{1r}) \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \ldots & \alpha'_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha'_{r1} & \ldots & \alpha'_{rs} \end{pmatrix}$$

oder wegen (112)

$$(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{s1})\,\mathfrak{a}_0 = 0.$$

Da aber $|\mathfrak{a}_0| \neq 0$, so wird $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \cdots = \alpha_{s1} = 0$, also im besonderen $\alpha_{m1} = 0$. Unsere Annahme, dass ein α_{ik} von null verschieden ist, kann daher nicht richtig sein. Ebenso folgt, dass alle α'_{ik} null sind. Nach dem Satze in III, § 1 sind daher sowohl die $\mathfrak{A}_i$ wie die $\mathfrak{A}'_i$ ein vollkommenes System von Primteilern erster Art. Die Primteiler $\mathfrak{A}_i$ lassen sich also durch eine einseitige Stellentransformation in Primteiler zweiter Art verwandeln. Damit haben wir:

Ein eigentlich algebraischer Körper hat nur endlichviele ausgezeichnete Primteiler. Diese bilden zusammen immer ein vollkommenes System.

Die Stellen eines eigentlich algebraischen Körpers lassen sich so definieren, dass keine ausgezeichneten Primteiler vorhanden sind.

Bei dieser Stellendefinition bezeichnen wir den Körper mit K_0.

Der Körper K_0 ist eindeutig bestimmt. Ist nämlich K'_0 ein auch aus K durch Stellentransformation entstehender Körper ohne ausgezeichnete Primteiler, so gehen K_0 und K'_0 durch Stellentransformation auseinander hervor. Bei dieser Transformation kann es aber keine ausgezeichneten Primteiler geben, da weder K_0 noch K'_0 ausgezeichnete Primteiler erster Art enthalten. Die Stellen sind daher in K_0 und K'_0 im wesentlichen gleich definiert, d. h. $K'_0 \equiv K_0$. Wir nennen die Stellendefinition von K_0 die *einfachste.*

Sind die Stellen irgendwie definiert, und bezeichnen wir den Körper bei dieser Definition mit K, so ist *die Transformation von K_0 zu K einseitig,* da K_0 keine ausgezeichneten Primteiler erster Art enthält. Nach III, § 1 erhalten wir daher K aus K_0 durch eine Noethertransformation.

§ 4. Rationale Körper.

Ist K rational, so seien die Funktionen x, y aus K so gewählt, dass K gleich dem Körper (xy) der rationalen Funktionen von x, y ist. Sind a, b irgendzwei Konstante, so wird durch

$$x - a = u, \quad y - b = v$$

eine Stelle von K definiert, wobei u, v die Ortsfunktionen sind. Unter $x - a$, $y - b$ ist x^{-1}, y^{-1} zu verstehen, wenn a oder b unendlich sind. Diese Stellendefinition heisse *eine einfache.* Solcher einfachen Definitionen gibt es unendlichviele, da sich x, y auf unendlichviele Arten in obiger Weise wählen lassen.

In K gibt es ausgezeichnete Primteiler, sogar unendlichviele. Bezeichnen wir nämlich K bei einer zweiten einfachen Stellendefinition mit K', so gibt es i. a. bei der Transformation $K \rightleftarrows K'$ ausgezeichnete Primteiler erster Art sowohl in K wie auch in K'. Aber es sind in K keine Primteiler erster Art vorhanden, die ein vollkommenes System bilden. Nach III, § 10 ist nämlich in einem solchen System immer mindestens ein Primteiler $\mathfrak{P}$ vorhanden, für den $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = -1$ gilt. Bei der gewählten Stellendefinition ist aber $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{M}^\mu$, $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$, wo $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ die Nenner von x und y sind. Da $(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}) = 0$, $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = 1$, so wird

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = 2\lambda\mu \geqq 0.$$

§ 5. Halbrationale Körper.

Der Körper K sei halbrational und gleich dem Körper (xyz) der rationalen Funktionen von x, y, z, wo zwischen y, z die Gleichung

$$f(y, z) = 0$$

bestehe. K sei also aus dem Körper (x) der rationalen Funktionen von x und aus dem durch $f=0$ definierten Körper $k \equiv (y z)$ der rationalen Funktionen von y, z zusammengesetzt. Das Geschlecht von k sei $p > 0$. Eine derartige Darstellung von K ist auf unendlichviele Arten möglich, wie wir jetzt zeigen wollen. Es sei etwa $K \equiv (\xi \eta \zeta)$, wo

$$\varphi(\eta, \zeta) = 0.$$

Da $(x y z) \equiv (\xi \eta \zeta)$, so sind η und ζ rationale Funktionen von x, y, z, etwa

$$\eta = R_1(x, y, z), \quad \zeta = R_2(x, y, z).$$

Zwischen η und ζ besteht die Gleichung $\varphi = 0$ für alle Werte von x, y, z. Würden die Funktionen R_1 und R_2 x enthalten, so könnten wir die Konstanten b und c so wählen, dass $f(b, c) = 0$ und R_1 und R_2 für $y = b$, $z = c$ rationale Funktionen von x werden, die nicht beide konstant sind. Dann aber würde der Körper $(\eta \zeta)$ gleich einem Körper rationaler Funktionen von x, hätte also das Geschlecht 0. Das ist nicht möglich, da K rational wäre. Daher sind R_1 und R_2 von x unabhängig, und η und ζ gehören dem Körper $(y z)$ an. Ebenso folgt, dass y und z Funktionen des Körpers $(\eta \zeta)$ sind. Also ist $(y z) \equiv (\eta \zeta)$, sodass

$$K \equiv (x y z) \equiv (\xi \eta \zeta) = (\xi y z).$$

Hieraus folgt, dass der Körper $(x b c)$ der rationalen Funktionen von x gleich dem Körper $(\xi b c)$ der rationalen Funktionen von ξ ist, wenn $f(b, c) = 0$. Da das für alle solche Werte b, c gilt, so muss zwischen x und ξ eine bilineare Gleichung bestehen, deren Koeffizienten dem Körper k angehören.

Wenn wir also K aus einem rationalen Körper und einem Körper k zusammensetzen, so ist zwar k, aber nicht der rationale Körper eindeutig bestimmt.

Es sei s eine Stelle von k, $\mathfrak{p}$ der zugehörige Primteiler und v eine Ortsfunktion für s. Ist a eine Konstante, und sind b und c die Werte, die y und z in s annehmen, so können wir setzen

$$(113) \qquad x - a = u, \quad y - b = g(v), \quad z - c = h(v),$$

wo g und h gewöhnliche Potenzreihen von v sind. Wenn a, b oder c unendlich sind, so ist unter $x - a$, $y - b$, $z - c$ zu verstehen x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}. Durch (113) wird eine Stelle S von K definiert, wobei u und v die Ortsfunktionen sind. Eine derartige Stellendefinition nennen wir *eine einfache*. Solcher gibt es unendlichviele, weil man x durch eine wesentlich verschiedene Grösse ξ ersetzen kann.

Setzen wir $v = 0$, so erhalten wir die den Primteiler $\mathfrak{p}$ definierende homomorphe Abbildung des Körpers k auf einen Konstantenkörper $[\mathfrak{p}]$. Gleichzeitig bekommen wir eine homomorphe Abbildung von K auf den Körper der rationalen Funktionen von x. Der hierdurch definierte Primteiler $\mathfrak{P}$ hat das Geschlecht 0 und für die Stelle S die zugeordnete Funktion v. Jedem Primteiler $\mathfrak{p}$ von k entspricht auf diese Weise ein Primteiler $\mathfrak{P}$ von K. So erhalten wir ein Büschel vom Geschlechte p von Primteilern vom Geschlechte 0.

Da durch jede Stelle S von K ein und nur ein Primteiler des Büschels, nämlich der durch $v = 0$ definierte, geht, so ist $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) = 0$, wenn $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ beide dem Büschel angehören. Wie wir jetzt zeigen, gilt das auch für $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$. Es sei r eine Funktion aus k, die den Primteiler $\mathfrak{p}_1$ enthält, dem der Primteiler $\mathfrak{P}_1$ entspricht. In Primteiler zerlegt sei etwa

$$r = \mathfrak{p}_1^{\lambda_1} \mathfrak{p}_2^{\lambda_2} \ldots \mathfrak{p}_m^{\lambda_m}.$$

Dann hat r als Funktion von K die Zerlegung

$$r = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \ldots \mathfrak{P}_m^{\lambda_m},$$

wenn $\mathfrak{P}_i$ der $\mathfrak{p}_i$ entsprechende Primteiler ist. Da $r \sim 1$, so folgt durch Zusammensetzen mit $\mathfrak{P}_1$

$$\lambda_1 (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1) + \lambda_2 (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) + \cdots + \lambda_m (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_m) = 0.$$

Hieraus ergibt sich, da $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_i) = 0$ für $i \neq 1$, dass auch $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1) = 0$.

Der Körper K enthält ausgezeichnete Primteiler, sogar unendlichviele, wie sich bei der Betrachtung des Überganges von einer einfachen Stellendefinition zu einer anderen ergibt. Aber *es gibt keine ausgezeichneten Primteiler, die ein vollkommenes System bilden.* Wäre das der Fall, so müsste es einen Primteiler $\mathfrak{P}$ geben, dessen Geschlecht 0 ist, und für den $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = -1$ gilt.

Es sei $\mathfrak{P}$ ein derartiger Primteiler. Da K für $\mathfrak{P} = 0$ in einen Körper $[\mathfrak{P}]$ vom Geschlecht 0 übergehen muss, so müssen y und z für $\mathfrak{P} = 0$ in Konstante übergehen, weil sonst $[\mathfrak{P}]$ den Körper $(y\,z)$ vom Geschlecht $p > 0$ enthalten würde. Daher kann $\mathfrak{P}$ nur ein Primteiler des Büschels sein, sodass $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = 0$ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Zum Schluss beweisen wir noch:

Die Grössen des Körpers k nehmen an jeder Stelle S des Körpers K bestimmte Werte an, gleichgültig, wie man die Stellen von K definiert.

Es sei ζ eine Funktion aus k, die an einer Stelle S unbestimmt wird. Dann gibt es einen zur Stelle S gehörenden Primteiler zweiter Art $\mathfrak{a}$ so, dass ζ für $\mathfrak{a} = 0$ in eine rationale Funktion eines Parameters τ übergeht. Da aber für $\mathfrak{a} = 0$ alle Funktionen aus K, also auch alle Funktionen aus k in rationale Funktionen von τ übergehen, so werden die Funktionen aus k rationale Funktionen von τ, die nicht alle konstant sind. Das aber ist nicht möglich, da das Geschlecht von k grösser als 0 ist.

Halle-S. März 1936.