ÜBER EINE STABILITÄTSFRAGE IN DER THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

VON

A. WIMAN

in UPSALA.

1. In einer nachgelassenen Note von FATOU, die in den Comptes rendus der Pariser Akademie, Band 189 (1929), p. 967 publiziert worden ist, handelt es sich um die Differentialgleichung

$$x'' + \Phi(t)x = 0, \tag{1}$$

wo $\Phi(t)$ eine für alle reellen t stetige reelle Funktion bedeutet, die zwischen positiven Schranken

$$a^2 \leqq \Phi(t) \leqq b^2 \tag{2}$$

bleibt. In dieser Note versucht FATOU zu beweisen, dass die Integrale der Differentialgleichung sowie ihre Ableitungen beschränkt sind. Indessen hat später O. PERRON in einer kurzen Note[1] durch ein Beispiel, auf welches wir hier wiederkommen werden, gezeigt, dass der obige Satz von FATOU nicht richtig ist. Betreffend die Folgerungen, die FATOU an seinen Satz knüpft, bemerkt PERRON nur, dass dieselben bis auf weiteres als unbewiesen gelten müssen.

Für die Gültigkeit des obigen Stabilitätssatzes sind mithin weitere Bedingungen nötig. Bei PERRON wird aber auf solche Fragen nicht eingegangen. Nun haben wir in einer vor mehreren Jahren veröffentlichten Arbeit[2] eine Formel hergeleitet, welche uns eine entscheidende Bedeutung für das in Rede

[1] »*Über ein vermeintliches Stabilitätskriterium*», Göttinger Nachrichten (1930).

[2] »*Über die reellen Lösungen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*», Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Band 12 (1917).

16—35150. *Acta mathematica.* 66. Imprimé le 15 octobre 1935.

stehende Problem zu haben scheint. In dieser Formel tritt die Ableitung $\Phi'(t)$ explizit auf, und es lässt sich deshalb schliessen, dass für ein allgemein geltendes Stabilitätskriterium Annahmen über $\Phi'(t)$ (oder damit äquivalente Annahmen) nötig sind. In unserer früheren Arbeit haben wir jedoch keine Schlüsse aus der Formel gezogen, welche sich auf die obige Stabilitätsfrage beziehen. Es wurden dort auch hauptsächlich solche Fälle berücksichtigt, wo $\Phi(t)$ zwischen keinen endlichen Grenzen schwankt, sondern entweder $\Phi(t) \to \infty$ oder $\Phi(t) \to 0$. Da die Resultate unserer vorhergehenden Abhandlung ziemlich unbekannt sein dürften, so wollen wir hier zunächst dieselben für den Fall $\Phi(t) > 0$ wiedergeben. Es werden dann Anwendungen auf die von FATOU aufgeworfenen Fragen hinzugefügt.

2. In dieser Nummer wollen wir einige Tatsachen zusammenstellen, welche wohl ziemlich bekannt sein dürften. Wir vergleichen die Integrale zweier Differentialgleichungen

$$(3) \qquad \begin{aligned} x'' + \Phi_1(t)x = 0, \\ x'' + \Phi_2(t)x = 0, \end{aligned}$$

wobei für das zu untersuchende Intervall stets $\Phi_2(t) \geqq \Phi_1(t)$ sein soll. Diese Integrale bezeichnen wir bzw. mit x_1 und x_2. Wir machen die Voraussetzung, es seien für $t = t_0$, $x_1 = x_2$ und $x_1' = x_2'$, wobei wir entweder $x_1 = x_2 > 0$ oder, falls $x_1 = x_2 = 0$, $x_1' = x_2' > 0$ annehmen können. Es ergibt sich

$$(4) \qquad x_2 x_1'' - x_1 x_2'' = [\Phi_2(t) - \Phi_1(t)]\, x_1 x_2 \geqq 0$$

für ein Intervall $t_0 \cdots t$, in welchem für die Integrale x_1 und x_2 keine Nullstelle liegt. Hieraus bekommt man weiter

$$(5) \qquad \begin{aligned} [x_2 x_1' - x_1 x_2']_{t_0}^{t_1} = x_2(t_1)\, x_1'(t_1) - x_1(t_1)\, x_2'(t_1) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} [\Phi_2(t) - \Phi_1(t)]\, x_1 x_2 \, dt \geqq 0, \end{aligned}$$

wobei $t_1 > t_0$ vorausgesetzt wird. Da für $t_0 < t \leqq t_1$ x_1 und $x_2 > 0$ sind, so erhalten wir

$$(6) \qquad \frac{x_1'(t_1)}{x_1(t_1)} - \frac{x_2'(t_1)}{x_2(t_1)} \geqq 0,$$

woraus man erschliesst, dass im fraglichen Intervalle

$$\log \frac{x_1}{x_2} \geqq 0 \tag{7}$$

ist. Aus diesem Resultate lässt sich schliessen, dass, falls nicht immer $\Phi_2(t) = \Phi_1(t)$ ist, in welchem Falle x_1 und x_2 identisch gleich werden, das Integral x_2 unterhalb des Integrals x_1 verläuft. Man findet jetzt leicht, dass das Integral x_2 früher als das Integral x_1 eine Nullstelle bekommt. Nach (5) erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = -\frac{1}{x_1^2}\int_{t_0}^{t} [\Phi_2(t) - \Phi_1(t)]\, x_1 x_2\, dt = -\frac{\Psi(t)}{x_1^2}, \tag{8}$$

wo $\Psi(t)$ in dem von uns betrachteten Intervalle eine monoton zunehmende Funktion bedeutet. Nach den Voraussetzungen folgt hieraus

$$\frac{x_2}{x_1} - 1 = -\int_{t_0}^{t} \frac{\Psi(t)}{x_1^2}\, dt. \tag{9}$$

Nun ist aus der Differentialgleichung leicht zu ersehen, dass, falls x_1 gegen eine Nullstelle $t = \tau$ rückt, $|x_1'|$ endlich bleiben muss. Es gibt mithin eine Grösse $A > 0$, so dass man für die nächste Umgebung der Nullstelle

$$x_1^2 < A\,(t - \tau)^2$$

erhält. Das Integral rechts in (9) wird mithin für $t \to \tau$ unendlich gross. Es muss folglich einen Wert $\tau_0 < \tau$ geben, für welchen man

$$1 = \int_{t_0}^{\tau_0} \frac{\Psi(t)}{x_1^2}\, dt$$

hat, und man bekommt nach (9) $x_2(\tau_0) = 0$. *Die erste Nullstelle, zu welcher man beim Fortschreiten von einer Berührungsstelle der Integrale x_1 und x_2 gelangt, gehört also zum Integral x_2, und dasselbe gilt, falls man als Ausgangspunkt eine gemeinsame Nullstelle der beiden Integrale nimmt.*

Wir wollen besonders auf den Fall

$$\Phi_1(t) = \mu_1\,\Phi(t), \quad \Phi_2(t) = \mu_2\,\Phi(t) \tag{10}$$

die Aufmerksamkeit lenken, wo μ_1 und μ_2 konstante Grössen > 0 bedeuten, und $\mu_2 > \mu_1$ angenommen wird. Setzt man hier $\mu_2 = \mu_1 + \varepsilon$, so findet man leicht, wie die Nullstellen von x_2 mit ε stetig variieren.

Wir betrachten noch besonders den Fall, wo man für $t \to \infty$

$$\frac{\Phi(t+h)}{\Phi(t)} \to 1 \qquad \left(|h| \leqq \frac{k}{\sqrt{\Phi(t)}}\right) \tag{11}$$

hat, wobei für k irgend welche positive Grösse genommen werden kann. Diese Bedingung ist z. B. für

$$\Phi(t) = c t^n \qquad (n > -2)$$

erfüllt. Man findet leicht, dass, falls (11) gilt, die Integrale der Differentialgleichung unendlich viele Nullstellen besitzen. Wir nehmen an, es sei für ein Integral $t = t_0$ eine Nullstelle. Für ein Intervall

$$|t - t_0| \leqq \frac{k}{\sqrt{\Phi(t_0)}},$$

wo die Konstante $k > \pi$ genommen wird, bezeichnen wir den Maximal- bzw. Minimalwert von $\Phi(t)$ mit M bzw. m. Nach (11) weichen die beiden Verhältnisse

$$\frac{M}{\sqrt{\Phi(t_0)}}, \quad \frac{m}{\sqrt{\Phi(t_0)}},$$

wenn t_0 hinreichend gross ist, beliebig wenig von 1 ab. Die Integralkurve zwischen t_0 und den beiden nächstliegenden Nullstellen lässt sich dann zwischen den Kurven

$$x = \frac{x'(t_0)}{\sqrt{M}} \sin \sqrt{M}(t - t_0) \tag{12_1}$$

und

$$x = \frac{x'(t_0)}{\sqrt{m}} \sin \sqrt{m}(t - t_0) \tag{12_2}$$

einschliessen. Nach den Voraussetzungen nähern sich aber die beiden einschliessenden Kurven (12_1) und (12_2) für $t_0 \to \infty$ einander unbegrenzt.

3. Wir nehmen jetzt noch an, dass auch die erste Ableitung $\Phi'(t)$ existiert und stetig ist. Wir gehen von der Identität

$$x''x' + \Phi(t)xx' = 0 \tag{13}$$

aus und erhalten durch Integration zwischen t_0 und T

$$x'^2(T) - x'^2(t_0) + \Phi(T)x^2(T) - \Phi(t_0)x^2(t_0) - \int_{t_0}^{T} x^2\Phi'(t)dt = 0. \tag{14}$$

Hat nun das Integral x t_0 und T als Nullstellen, so ergibt sich hieraus

$$x'^2(T) - x'^2(t_0) = \int_{t_0}^{T} x^2\Phi'(t)dt. \tag{15}$$

Eine solche Identität gilt selbstverständlich auch für jedes Paar aufeinanderfolgender Nullstellen t_n, t_{n+1}, so dass wir schreiben können

$$x'^2(t_{n+1}) - x'^2(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} x^2\Phi'(t)\,dt. \tag{16}$$

Es ist die hier erhaltene Relation, welche für das Stabilitätsproblem eine entscheidende Bedeutung besitzt. Doch sind wir in unserer vorhergehenden Publikation nicht besonders auf diese Frage eingegangen. Wir beschränkten uns dort in der Tat auf den Fall, wo man für $\Phi'(t)$ eine analoge Eigenschaft mit derjenigen hat, welche wir in (11) für $\Phi(t)$ angenommen haben, also für $t \to \infty$

$$\frac{\Phi'(t+h)}{\Phi'(t)} \to 1 \qquad \left(|h| \leqq \frac{k}{\sqrt{\Phi(t)}}\right). \tag{17}$$

Die Eigenschaft (17) involviert offenbar, dass $\Phi(t)$ eine monoton zunehmende oder abnehmende Funktion sein muss. Schreiben wir jetzt

$$x'^2(t_{n+1}) - x'^2(t_n) = \Delta x_n'^2, \quad t_{n+1} - t_n = \Delta t_n,$$

so ergibt sich aus (16) und (17)

$$\frac{\Delta x_n'^2}{\Phi'(t_n)} \cdot \frac{1}{\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} x^2\,dt} \to 1. \tag{18}$$

Im Intervalle Δt_n ist nun, wie aus der Bedeutung von (12_1) und (12_2) hervorgeht, die Lösung x zwischen zwei Sinusoiden eingeschlossen. Dieselben nähern sich für $n \to \infty$ einander asymptotisch in einer Weise, welche mit

$$(19) \qquad \frac{\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} x^2\,dt}{\int\limits_{t_n}^{t_n+\frac{\pi}{\sqrt{\Phi(t_n)}}} \frac{x_n'^2}{\Phi(t_n)} \sin^2\left[\sqrt{\Phi(t_n)}(t-t_n)\right] dt} \to 1$$

äquivalent ist. Bei Berücksichtigung, dass

$$\frac{\Delta t_n \sqrt{\Phi(t_n)}}{\pi} \to 1,$$

erhalten wir aus (19)

$$(20) \qquad \frac{\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} x^2\,dt}{\dfrac{x_n'^2\,\Delta t_n}{2\,\Phi(t_n)}} \to 1.$$

Hierdurch lässt sich (18) in

$$(21) \qquad \frac{2\Delta x_n'^2\,\Phi(t_n)}{x_n'^2\,\Phi'(t_n)\Delta t_n} \to 1$$

umformen. Da (11) und (17) als gültig angenommen sind, so hat man

$$(22) \qquad \frac{\Delta \log \Phi(t_n)}{\dfrac{\Phi'(t_n)}{\Phi(t_n)}\Delta t_n} \to 1.$$

Für die Umformung von (21) gilt jetzt noch

$$(23) \qquad \frac{\Delta x_n'^2}{x_n'^2\,\Delta \log x_n'^2} \to 1,$$

so dass wir erhalten

$$(24) \qquad \frac{\Delta \log x_n'^2}{\dfrac{\Delta \log \Phi(t_n)}{2}} \to 1.$$

Hat man nun für $t \to \infty$ $\Phi(t) \to a^2 > 0$, so erhält man offenbar aus (24) für $x_n'^2$ einen endlichen nicht verschwindenden Grenzwert c^2, und die Integrale sind im Sinne von FATOU beschränkt. Gilt aber $\Phi(t) \to 0$ oder ∞, so lässt sich (24) integrieren, und man bekommt

$$(25) \qquad \frac{\log \dfrac{x_n'^2}{x_0'^2}}{\dfrac{1}{2} \log \dfrac{\Phi(t_n)}{\Phi(t_0)}} \to 1,$$

wo die feste Nullstelle t_0 in geeigneter Weise gewählt wird. Aus (25) ergibt sich

$$(26) \qquad x_n'^2 = [\Phi(t_n)]^{\frac{1}{2} + \alpha_n} \qquad (\alpha_n \to 0).$$

Man erhält weiter

$$(27) \qquad \frac{x_n'}{\sqrt{\Phi(t_n)}} = \pm [\Phi(t_n)]^{-\frac{1}{4} + \frac{\alpha_n}{2}},$$

worin wir einen Ausdruck für die Beziehungen zwischen den Amplituden des Integrals und der Funktion $\Phi(t)$ haben.

Die erhaltenen Resultate lassen sich in der folgenden Weise zusammenfassen:

Sind die Bedingungen (11) *und* (17) *für* $\Phi(t)$ *und die erste Ableitung* $\Phi'(t)$ *erfüllt, so können wir im Sinne von* (26) *und* (27) *behaupten, dass die Amplituden der Lösungen wie* $[\Phi(t)]^{-\frac{1}{4}}$, *die absoluten Beträge der Winkelkoeffizienten an den Nullstellen dagegen wie* $[\Phi(t)]^{\frac{1}{4}}$ *geändert werden. Für* $\Phi(t) \to \infty$ *werden die Oszillationsintervalle, welche sich ja wie* $[\Phi(t)]^{-\frac{1}{2}}$ *ändern, immer kleiner; dann werden zwar auch die Amplituden vermindert, aber dessen ungeachtet verlaufen die Integralkurven zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen immer steiler. In umgekehrter Weise verhält es sich für* $\Phi(t) \to 0$.

4. Im jetzt behandelten Falle sind die Integrale von (1) in derselben Weise mit einander gleichartig wie für den wohlbekannten Fall $\Phi(t) = a^2$. Um einen Fall zu konstruieren, in welchem Integrale mit verschiedenartigen Eigenschaften existieren, genügt es anzunehmen, dass zwar (11) noch besteht, dass aber (17) durch die Forderung ersetzt wird, dass $\Phi(t)$ monoton wächst oder fällt, so dass also $\Phi'(t)$ nicht das Zeichen wechseln kann. Es ist aus (16) ersichtlich, dass $x_n'^2$ mit $\Phi(t)$ zunimmt oder abnimmt. Mit den jetzigen Annahmen ist es

nun verträglich, dass für eine besondere Lösung x das Integral rechts in (16) ein Glied einer konvergenten Reihe darstellt. Im extremen Falle kann man ja, von einer geeigneten Umgebung der Nullstellen der Lösung abgesehen, $\Phi'(t) = 0$ setzen. Die absoluten Beträge der Winkelkoeffizienten an den Nullstellen der Lösung streben dann nach einem endlichen nicht verschwindenden Grenzwert. Umgekehrt nehmen die Amplituden der Lösung wie $[\Phi(t)]^{-\frac{1}{2}}$ zu oder ab. Wie man leicht erkennt, wirkt diese Lösung auf die anderen Lösungen der Differentialgleichung für $\Phi(t) \to \infty$ abstossend und für $\Phi(t) \to 0$ anziehend.

Es lässt sich noch ein anderer extremer Fall herstellen, in welchem für eine gewisse Lösung $\Phi'(t) = 0$, wenn von den nächsten Umgebungen der Extremalstellen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der Lösung abgesehen wird. Man hat sogar Grund anzunehmen, dass gleichzeitig Lösungen von den beiden hier beschriebenen Arten auftreten können. Bei der jetzigen Annahme lässt sich das Integral rechts in (16) durch

$$\frac{x_n'^2}{\Phi(t_n)}[\Phi(t_{n+1}) - \Phi(t_n)] = \frac{x_n'^2}{\Phi(t_n)} \Delta \Phi(t_n)$$

annähernd ausdrücken. Man wird in dieser Weise zu Lösungen gelangen können, für welche die absoluten Beträge der Winkelkoeffizienten an den Nullstellen sich wie $[\Phi(t)]^{\frac{1}{2}}$ ändern, und deren Maximalbeträge zwischen den Nullstellen nach endlichen nicht verschwindenden Grenzwerten streben. Ein derartiges Integral wirkt auf die anderen Lösungen für $\Phi(t) \to \infty$ anziehend[1] und für $\Phi(t) \to 0$ abstossend. Natürlich kann man sich allgemeiner Fälle denken, wo die oben beschriebenen Lagebeziehungen nicht bei demselben Integrale bleiben, sondern von einer Lösung zu anderen übergehen.

Zuletzt sehen wir noch von der Forderung ab, dass (11) gelten soll, und nehmen nur an, dass $\Phi(t)$ monoton wächst oder abnimmt. Es ist bereits hervorgehoben, dass im diesem Falle nach (16) $x_n'^2$ gleichzeitig mit $\Phi(t)$ steigt oder fällt. Es sei $\bar{t}_n$ die Extremalstelle im Intervalle $t_n \cdots t_{n+1}$. Man hat $x'(\bar{t}_n) = 0$. Aus (14) bekommen wir die mit (16) analoge Relation

$$x^2(\bar{t}_{n+1})\,\Phi(\bar{t}_{n+1}) - x^2(\bar{t}_n)\,\Phi(\bar{t}_n) = \int_{\bar{t}_n}^{\bar{t}_{n+1}} x^2\,\Phi'(t)\,dt. \tag{28}$$

[1] D. h., die Nullstellen der anderen Integrale haben eine Tendenz sich den Nullstellen dieses Integrals zu annähern.

Man ersieht unmittelbar aus (28), dass auch $x^2(\bar{t}_n)\,\Phi(\bar{t}_n)$ mit $\Phi(t)$ steigt oder fällt. Mit $x^2(\bar{t}_n)$ verhält es sich aber in der umgekehrten Weise. Wir schreiben

$$x^2(\bar{t}_{n+1}) - x^2(\bar{t}_n) = \varDelta \bar{x}_n^2, \quad \Phi(\bar{t}_{n+1}) - \Phi(\bar{t}_n) = \varDelta \bar{\Phi}_n.$$

Das linke Glied von (28) lässt sich dann in die beiden Gestalten überführen

$$\bar{x}_{n+1}^2 \varDelta \bar{\Phi}_n + \bar{\Phi}_n \varDelta \bar{x}_n^2 = \bar{x}_n^2 \varDelta \bar{\Phi}_n + \bar{\Phi}_{n+1} \varDelta \bar{x}_n^2. \tag{29}$$

Andererseits kann offenbar das Integral rechts in (28) einen grösseren Betrag als entweder $\bar{x}_n^2 \varDelta \bar{\Phi}_n$ oder $\bar{x}_{n+1}^2 \varDelta \bar{\Phi}_n$ nicht besitzen. Hieraus ist ersichtlich, dass in (29) zwei zusammenstehende Glieder dasselbe Zeichen nicht haben können.

Wenn also $\Phi(t)$ monoton zunimmt, wachsen auch die absoluten Beträge der Winkelkoeffizienten an den Nullstellen. Dagegen bilden die Amplituden der Lösungen in den Intervallen zwischen den Nullstellen eine abnehmende Folge. In der entgegengesetzten Weise verhält es sich, wenn $\Phi(t)$ monoton abnimmt.

Betrachten wir jetzt den Fall, wo $\Phi(t)$ monoton gegen einen endlichen Grenzwert $a > 0$ strebt. Steigt dabei $\Phi(t)$, so nehmen zwar die Amplituden der Lösungen ab, ihre Produkte mit den Grössen $\Phi(\bar{t}_n)$ wachsen aber, und die Lösungen sind stabil. Ist dagegen $\Phi(t)$ abnehmend, so wachsen die Amplituden der Lösungen, ihre Produkte mit den Grössen $\Phi(\bar{t}_n)$ nehmen ab, und man bekommt auch in diesem Falle stabile Lösungen. *Wenn sich also $\Phi(t)$ monoton einem endlichen Grenzwert nähert, so hat die Differentialgleichung* (1) *stabile Lösungen.*

Nun ist es aber unmittelbar verständlich, dass es die aus der Monotonität folgende Eigenschaft ist, dass man in $\log \Phi(t)$ eine Funktion mit beschränkter Variation hat, welche für die letztere Eigenschaft entscheidend ist. Wenn $\log \Phi(t)$ eine nicht monotone Funktion mit beschränkter Variation ist, so wirken ja die Intervalle, in denen die Funktion steigt, und diejenigen, in welchen dieselbe fällt, in entgegengesetzter Richtung, was die Stabilität befördern muss. *Als hinreichende Bedingung dafür, dass* (1) *stabile Lösungen hat, ergibt sich also, dass* $\log \Phi(t)$ *eine Funktion mit beschränkter Variation darstellt.* Bei unbeschränkter Variation ist es aber für Stabilität nicht ausreichend, dass $\log \Phi(t)$ beschränkt bleibt. Dies ist insbesondere nicht zu erwarten, wenn für eine Lösung die Intervalle, wo $\Phi(t)$ steigt (bzw. fällt), in der Nähe der Nullstellen und diejenigen, wo $\Phi(t)$ fällt (bzw. steigt), in der Nähe der Extremalstellen liegen.

5. Die vorhergehenden Auseinandersetzungen wollen wir jetzt durch das von PERRON gegebene Beispiel beleuchten. Doch mit der Veränderung, dass wir einen Exponenten allgemein $= k$ schreiben, der bei PERRON $= 1$ gesetzt wird. Es wird dabei von einer Lösung mit geeigneten Eigenschaften ausgegangen und nachher die zu befriedigende Differentialgleichung gesucht. Wir setzen dementsprechend

$$x = \sin t\,[c^2 + (t - \sin t \cos t)^2]^k. \tag{30}$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} x' = \cos t\,[c^2 + (t - \sin t \cos t)^2]^k &+ \\ + 4k \sin^3 t\,(t - \sin t \cos t)\,&[c^2 + (t - \sin t \cos t)^2]^{k-1}. \end{aligned} \tag{31}$$

Es ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} x'' = &- \sin t\,[c^2 + (t - \sin t \cos t)^2]^k + \\ &+ 16k \sin^2 t \cos t\,(t - \sin t \cos t)\,[c^2 + (t - \sin t \cos t)^2]^{k-1} + \\ &+ 8k \sin^5 t\,[c^2 + (t - \sin t \cos t)^2]^{k-1} + \\ &+ 16k(k-1) \sin^5 t\,(t - \sin t \cos t)^2\,[c^2 + (t - \sin t \cos t)^2]^{k-2}. \end{aligned} \tag{32}$$

Es lässt sich jetzt $\Phi(t)$ aus (30) und (32) bestimmen, und man bekommt

$$\begin{aligned} \Phi(t) = 1 &- \frac{16k \sin t \cos t\,(t - \sin t \cos t)}{c^2 + (t - \sin t \cos t)^2} - \\ &- \frac{8k \sin^4 t}{c^2 + (t - \sin t \cos t)^2} - \frac{16k(k-1)\sin^4 t\,(t - \sin t \cos t)^2}{[c^2 + (t - \sin t \cos t)^2]^2}. \end{aligned} \tag{33}$$

Wie man sieht, hat man $\Phi(t) \to 1$ für $t \to \infty$. Und doch kennen wir bereits ein Integral (30), für welches die Stabilitätsbedingungen nicht erfüllt sind, indem für $k > 0$ dasselbe zwischen den Nullstellen über jede gegebene Grenze wächst und für $k < 0$ sich unbegrenzt an die t-Achse schliesst.

Es ist zu untersuchen, wie letztere Eigenschaften aus der Relation (16) zu erklären sind. Wie man leicht sieht, gibt es in $\Phi'(t)$ nur das einzige Glied

$$-\frac{16k \cos 2t\,(t - \sin t \cos t)}{c^2 + (t - \sin t \cos t)^2}$$

welches für die unbeschränkte Variation von $\Phi(t)$ Bedeutung hat. Sieht man von einer beschränkten Variation ab, so lässt sich dieses Glied durch

$$- \frac{16k\cos 2t}{t} \tag{34}$$

ersetzen. Für die Nullstellen der Lösung hat man $x_n = n\pi$ und für die Extremalstellen annäherungsweise $\bar{x}_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$. Wir finden also, was nach den vorhergehenden Erörterungen zu erwarten war, dass für $k > 0$ $\Phi(t)$ in der Umgebung der Nullstellen fällt und in der Umgebung der Extremalstellen steigt, und dass es sich für $k < 0$ in der umgekehrten Weise verhält.

Für die Lösung (30) haben wir

$$\frac{x_n'^2}{(n\pi)^{4k}} \to 1. \tag{35}$$

Die Instabilität rührt von dem Faktor n^{4k} im Nenner her. Es muss möglich sein diesen Faktor herzuleiten, wenn man in (16) für $\Phi'(t)$ das die Instabilität erzeugende Glied (34) setzt. Da t zwischen $n\pi$ und $(n+1)\pi$ variieren soll, so ist hierbei noch die weitere Vereinfachung zulässlich, dass man t durch $n\pi$ ersetzt. Da hier (11) gilt, so lässt sich die Lösung zwischen $n\pi$ und $(n+1)\pi$ annähernd durch

$$x = x_n' \sin(t - n\pi)$$

darstellen. Als das eigentlich wichtige Glied im Integrale rechts in (16) ergibt sich mithin

$$- \frac{16k\,x_n'^2}{n\pi} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 t \cos 2t\,dt = 4k\frac{x_n'^2}{n}.$$

In diesem Beispiel bekommt man hiernach aus (16)

$$\frac{\Delta x_n'^2}{x_n'^2} : \frac{4k}{n} \to 1,$$

und hieraus ergibt sich das gewünschte Resultat

$$\frac{\log x_n'^2}{4k\log n} \to 1, \tag{36}$$

das ja mit (35) in Übereinstimmung steht.

6. Aus seinem Satze hat Fatou die Folgerung gezogen, dass für die Gyldénsche Gleichung

$$x'' + (a^2 + b^2 \cos 2t)x = 0 \qquad (b^2 < a^2) \tag{37}$$

die charakteristischen Exponenten »purement imaginaires (ou égaux à ± 1[1])» sind. Es ist nun für uns leicht zu beweisen, dass es sich mit dieser Differentialgleichung in der ganz entgegengesetzten Weise verhält, indem dieselbe unbeschränkte Lösungen haben kann. Es ist hier bequem in (37) die Änderung vorzunehmen, dass man in $\Phi(t)$ einen unbestimmten Parameter $\mu > 0$ einführt, so dass

$$\Phi(t) = \mu(a^2 + b^2 \cos 2t) \tag{38}$$

geschrieben wird. Wir betrachten ein Integral mit der Nullstelle $t = \alpha$. Wenn μ mit dem Ausgangspunkte von $\mu = 0$ steigt, so nähert sich die nächstfolgende Nullstelle stetig, und für einen gewissen Wert $\mu = \mu_1$ hat man für dieselbe $t = \alpha + \pi$. Die Nullstellen wiederholen sich dann periodisch, und man hat $t_n = \alpha + n\pi$. Soll nun für dieses Integral der Multiplikator, der hier negativ sein muss, $= -1$ sein, so muss offenbar das Integral rechts in (16) verschwinden. Dass aber dies nicht für jeden Wert α möglich ist, lässt sich durch leichte Überlegungen darlegen. Am einfachsten gestaltet sich die Sache, wenn das veränderliche Glied von $\Phi(t)$ klein wird, weil dann die Integralkurve zwischen $n\pi$ und $(n+1)\pi$ sich durch eine Sinusoide approximieren lässt. Setzen wir also $\mu_1 b^2 = \varepsilon$, so hat man für das fragliche Integral, wenn vom Faktor $2x_n'^2 \varepsilon$ abgesehen wird, für $\varepsilon \to 0$ annäherungsweise

$$-\int_0^\pi \sin^2 t \sin 2(\alpha + t)\, dt = \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha. \tag{39}$$

Dieses Resultat deutet darauf, dass nur für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ der Multiplikator $= -1$ ist, in welchem Falle man eine einfach periodische Funktion mit der Periode 2π als Integral erhält, dass für $\sin 2\alpha > 0$, d. h. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, das In-

[1] Hier muss offenbar gemeint werden, dass, da zu rein imaginären Exponenten Zahlen mit dem Betrag 1 gehören, keine anderen reellen Multiplikatoren der Integrale als ± 1 erhalten werden können.

tegral keine endliche Beschränkung zulässt, und dass für $\sin 2\alpha < 0$, d. h. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, das Integral sich asymptotisch unbegrenzt der Achse nähert. Der vollständige Beweis für die Tatsache, dass hier für $\alpha \equiv 0, \frac{\pi}{2}$ der Multiplikator -1 erhalten wird, ergibt sich aus Symmetriegründen, wenn man $-t$ für t substituiert.

Es erscheint vorteilhaft das Problem der Bestimmung des speziellen Wertes μ_1 in (38), bei welchem ein Integral mit den aufeinanderfolgenden Nullstellen α, $\alpha + \pi$ existiert, ein wenig abzuändern. Wir setzen dementsprechend

$$\Phi(t) = 1 + \delta + \varepsilon \cos 2t. \tag{40}$$

Wenn wir dabei ε als gegeben betrachten, so gilt es also δ als Funktion von ε und α auszudrücken. Hierbei lässt sich für $\varepsilon \to 0$ das Hauptglied leicht bestimmen. Es sei $x = x_2$ die Lösung der Differentialgleichung

$$x'' + [1 + \delta + \varepsilon \cos 2(t + \alpha)]\, x = 0 \tag{41}$$

mit den aufeinanderfolgenden Nullstellen 0, π und $x'(0) = 1$. Es ist $x = x_1 = \sin t$ eine Lösung von

$$x'' + x = 0.$$

Wir bekommen

$$x_2 x_1'' - x_1 x_2'' = [\delta + \varepsilon \cos 2(t + \alpha)]\, x_1 x_2. \tag{42}$$

Integrieren wir jetzt zwischen 0 und π, so ergibt sich,

$$\int_0^\pi [\delta + \varepsilon \cos 2(t + \alpha)]\, x_1 x_2\, dt = 0. \tag{43}$$

Für $\varepsilon \to 0$ ist offenbar auch $\delta \to 0$. Man hat dann annäherungsweise $x_2 = \sin t$. Als Hauptglied in (43) bekommt man hiernach

$$\int_0^\pi [\delta + \varepsilon \cos 2(t + \alpha)] \sin^2 t\, dt = \frac{\delta\pi}{2} - \varepsilon \cos 2\alpha \frac{\pi}{4}. \tag{44}$$

Wir bekommen hieraus

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2} \cos 2\alpha + \cdots \tag{45}$$

und kennen also in der Entwicklung von δ das Anfangsglied. Dieses Glied hat, da wir $\varepsilon > 0$ vorausgesetzt haben, den Maximalwert $\frac{\varepsilon}{2}$ für $\alpha \equiv 0$ und den Minimalwert $-\frac{\varepsilon}{2}$ für $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}$. In der Tat muss auch, wie wir sofort finden werden, wenn δ einen Extremalwert bekommt, das Integral den Multiplikator -1 haben.

7. Die Gleichung für die Multiplikatoren $\varkappa_1, \varkappa_2$ ist bekanntlich von der Gestalt[1]

$$\varkappa^2 - I\varkappa + 1 = 0. \tag{46}$$

Sind die Wurzeln hier konjugiert imaginär, so hat die Differentialgleichung beschränkte Lösungen. Sind aber die Wurzeln reell und verschieden, so können die Lösungen nicht beschränkt sein. Hat man endlich eine Doppelwurzel -1 oder $+1$, so existieren die beiden denkbaren Möglichkeiten, dass es entweder nur eine beschränkte Lösung gibt, oder dass sämtliche Lösungen beschränkt sind. Um eine Übersicht über die hiermit in Zusammenhang stehenden Fragen zu bekommen, scheint es vorteilhaft zu sein μ in (38) von 0 bis ∞ stetig variieren zu lassen. Die Multiplikatoren variieren dann auch stetig. Wir geben denselben die Gestalt

$$\varkappa_1, \varkappa_2 = e^{\pm r\pi i}. \tag{47}$$

Da wir hier aus sofort verständlichen Gründen r nicht (mod 2π) nehmen, so ändert sich r stetig mit μ, und man bekommt nie zweimal denselben r-Wert.[2] Für $\mu \to 0$ wird das Verhältniss des Abstandes zwischen zwei Nullstellen eines Integrales zu π unbegrenzt gross. In einem solchen Intervalle kehren also die Werte von $\Phi(t)$ immer öfter wieder. Hierin liegt ein Umstand, aus welchem man schliessen kann, dass für $\mu \to 0$ der nicht variable Teil von (38) den hauptsächlichen Einfluss auf die Multiplikatoren ausübt. Für $\mu \to 0$ hat man also auch $r \to 0$. Bei der weiteren Veränderung ist r immer im Intervalle zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen stetig wachsend und enthält keinen imaginären Teil. Ein derartiger Teil kann nämlich nur zu einem ganzzahligen reellen Teil von r hinzukommen und gibt dann einen reellen Beitrag zum Expo-

[1] Wir verweisen hier auf FORSYTH, »*Theory of differential equations*», Part III: »*Ordinary linear equations*» (1902), p. 437.

[2] Doch gilt dies, wie wir sogleich sehen werden, nur, wenn r durchaus reell ist.

nenten in (47), der mit Null anfängt und zu einem grössten Betrage wächst und dann wieder zu Null heruntersinkt. *Das μ-Intervall, welches in solcher Weise zu einem festbleibenden ganzzahligen Teil von r gehört, kann man als ein Instabilitätsintervall bezeichnen.* Es lässt sich aber noch denken, dass r bei einem ganzzahligen Wert keinen Aufenthalt macht, sondern unmittelbar weiter wächst. Zu einer solchen ganzen Zahl gehört kein Instabilitätsintervall. Kennt man nun den Ausdruck von $\Phi(t)$ in einfachperiodischen Funktionen, so ist also die Frage, wie man die ganzen Zahlen bestimmen kann, zu denen Instabilitätsintervalle gehören.

Die Zahl r (bzw. der reelle Teil von r, wenn dieser eine ganze Zahl ist) steht in Zusammenhang mit der durchschnittlichen Anzahl der Nullstellen eines Integrals, indem, wenn ν die Anzahl der Nullstellen auf einer Strecke $n\pi$ bezeichnet, man für $n \rightarrow \infty$ $\frac{\nu}{n} \rightarrow r$ erhält. *In einem Instabilitätsintervalle wird also die durchschnittliche Anzahl der Nullstellen ungeändert.* Es muss ja auch, auf Grund der alternierenden Lage der Nullstellen zweier Integrale, für diese durchschnittliche Anzahl von entscheidender Bedeutung sein, wenn für ein besonderes Integral zwei Nullstellen, zwischen denen eine gewisse Anzahl $r - 1$ anderer Nullstellen liegen können, den Abstand π von einander haben. Nun gibt es hier zwei denkbare Möglichkeiten, indem entweder gleichzeitig für sämtliche Integrale zwei Nullstellen mit dem gegenseitigen Abstand π existieren können oder nicht. Im zweiten Falle hat man ein zusammenhängendes μ-Intervall, für welches es Integrale mit dem Abstand π zwischen zwei Nullstellen gibt, und eben dieses ist ein Instabilitätsintervall.

Dass nun betreffs der Gyldénschen Gleichung zu $r = 1$ ein Instabilitätsintervall gehört, sieht man auch daraus, dass in (45) δ von α abhängig ist. Die extremen Werte von δ erhält man für $\cos 2\alpha = -1$ und $\cos 2\alpha = 1$. Es lässt sich hieraus schliessen, dass man beim Anfang des Instabilitätsintervalles $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und beim Ende desselben $\alpha = 0$ hat. Dieser Umstand hängt damit zusammen, dass, wie übrigens eine leichte Überlegung zeigt, auf den Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen eine Änderung von $\Phi(t)$ in der Nähe einer Extremalstelle einen grösseren Einfluss als in der Nähe einer Nullstelle übt.

Es liegt jetzt nahe zu fragen, ob für die Gyldénsche Gleichung auch für andere ganze Zahlen als $r = 1$ Instabilitätsintervalle existieren. Wir betrachten für $r > 1$ die Differentialgleichung

$$x'' + [r^2 + \delta + \varepsilon \cos 2(t + \alpha)]\, x = 0. \tag{48}$$

Es gilt hier für kleine ε-Werte δ so zu bestimmen, dass ein Integral existiert, welches $t = 0,\ \pi$ als Nullstellen und hierzu noch $r - 1$ zwischenliegende Nullstellen besitzt. Als erste Annäherung für ein solches Integral setzen wir $x = \sin rt$. In analoger Weise wie in der vorhergehenden Nummer zu (44) gelangen wir jetzt zu

$$\int_0^\pi [\delta + \varepsilon \cos 2(t + \alpha)] \sin^2 rt\, dt = \delta \frac{\pi}{2}. \tag{44$_1$}$$

Man erschliesst hieraus, dass $\frac{\delta}{\varepsilon} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. Suchen wir ein Integral, das hier dieselbe Rolle spielt wie (39) für $r = 1$, so erhalten wir

$$\int_0^\pi \sin^2 rt \sin 2(t + \alpha) = 0. \tag{39$_1$}$$

Das Verschwinden dieses Integrales liefert natürlich keinen vollständigen Beweis dafür, dass die Lösungen der Gyldénschen Differentialgleichung für ganze Zahlen $r > 1$ beschränkt sind. Wir werden in der Tat finden, dass auch zu diesen Zahlen Instabilitätsintervalle gehören, wenn auch von niedrigerer Grössenordnung als für $r = 1$.

8. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'' + (r^2 + \delta + \varepsilon \cos 2t)\, x = 0, \tag{49}$$

in welcher r eine ganze Zahl bedeutet. Unter den beiden übrigen Konstanten denken wir uns nur ε als gegeben. Dagegen soll δ nur die Forderung erfüllen, dass es eine Lösung gibt, welche zwei Nullstellen mit dem Abstand π nebst $r - 1$ dazwischenliegenden besitzt. Von vornherein sind hier zwei Möglichkeiten denkbar. Würde es der Fall sein, dass sämtliche Integrale von (49) gleichzeitig die obige Eigenschaft erhielten, so wäre mit der fraglichen ganzen Zahl r keine Instabilität verbunden. Bei der anderen Möglichkeit existiert es für δ ein Intervall, in welchem Integrale mit der besprochenen Eigenschaft existieren, und eben dieses Intervall ist als ein Instabilitätsintervall zu bezeichnen. An den Endpunkten dieses Intervalles hat die Differentialgleichung je eine Lösung, welche durch einfachperiodische Funktionen ausgedrückt wird, wobei als Periode π bzw. 2π auftritt, je nachdem r gerade oder ungerade ist. Nun werden wir sogleich eine Methode entwickeln, vermittelst welcher sich zwei Lösungen mit der letzteren Eigenschaft bestimmen lassen. Eine von diesen Lösungen wird durch lauter Sinusfunktionen und die andere durch lauter Cosinusfunktionen ausgedrückt. *Es wird aber δ für dieselben verschieden ausfallen, und in der Differenz zwischen diesen δ-Werten haben wir einen Maass für die Instabilität.*

Diese Lösungen erhalten wir in der Gestalt von Entwicklungen nach ε vermittelst der Methode der sukzessiven Approximationen. Zu dem Ende setzen wir

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots, \tag{50}$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n + \cdots. \tag{51}$$

Dabei soll das Glied x_i bzw. δ_i den Faktor ε^i enthalten. Für die Bestimmung der einzelnen Glieder von (50) bietet sich ein rekurzives Verfahren dar. Es soll dementsprechend x_n der Differentialgleichung

$$x_n'' + r^2 x_n + \varepsilon \cos 2t \cdot x_{n-1} + \delta_1 x_{n-1} + \delta_2 x_{n-2} + \cdots + \delta_n x_0 = 0 \quad . \tag{52}$$

genügen. Als Anfangsglieder setzen wir

$$x_0 = \sin rt; \quad \bar{x}_0 = \cos rt. \tag{53}$$

Wir unterscheiden also die zweite Lösung von der ersten durch die Bezeichnungen $\bar{x}_i$, $\bar{\delta}_i$.

In (52) formen wir stets Produkte in einfache Glieder um vermittelst der Reduktionen

$$\begin{aligned} \sin nt \cos 2t &= \frac{1}{2}[\sin (n+2)t + \sin (n-2)t]; \\ \cos nt \cos 2t &= \frac{1}{2}[\cos (n+2)t + \cos (n-2)t]. \end{aligned} \tag{54}$$

Soll nun (52) eine einfachperiodische Funktion als Integral besitzen, so darf offenbar das von x_n'' und x_n unabhänge Aggregat kein Glied in $\sin rt$ bzw. $\cos rt$ enthalten. Die hierin liegende Forderung lässt sich aber immer befriedigen, da wir über ein unbestimmtes Glied $\delta_n \sin rt$ bzw. $\bar{\delta}_n \cos rt$ verfügen, und wir haben hier das Gesetz, nach welchem diese Grössen δ_n, $\bar{\delta}_n$ bestimmt werden. Eine oberflächliche Betrachtung könnte nun mit Rücksicht auf die Umformungen (54) leicht zur Vermutung führen, dass man aus (52) die Relation für $\bar{x}_n$ erhalten würde, indem man die Sinusfunktionen mit beibehaltenen Koeffizienten durch Cosinusfunktionen ersetzt. Eine naheliegende Folgerung wäre dann, dass man immer $\delta_n = \bar{\delta}_n$ erhielte, so dass keine Instabilitätsintervalle existieren würden. Man würde aber dabei nicht in der gebührenden Weise beobachtet haben, dass bei den Umformungen zuletzt auch Funktionen $\cos(-rt)$, $\sin(-rt)$ herauskommen, welche durch $\cos rt$, $-\sin rt$ zu ersetzen sind. Doch kann dies erst nach r Schritten eintreten, so dass man für $i < r$ stets $\delta_i = \bar{\delta}_i$ hat. Die Differenz $\delta - \bar{\delta}$ enthält demnach stets den Faktor ε^r. Da man sich wohl in erster Instanz für die Fälle interessiert, in denen ε klein ist, und überdies die Nenner in den fraglichen Differenzen sehr schnell mit r wachsen, so darf man vielleicht sagen, dass *die Grössenordnungen der Instabilitätsbereiche mit wachsendem r abnehmen.*

Für die Bestimmung von x_1 bzw. $\bar{x}_1$ hat man

$$(55)\quad \begin{aligned} x_1'' + r^2 x_1 + \frac{\varepsilon}{2}[\sin(r+2)t + \sin(r-2)t] + \delta_1 \sin rt = 0; \\ \bar{x}_1'' + r^2 \bar{x}_1 + \frac{\varepsilon}{2}[\cos(r+2)t + \cos(r-2)t] + \bar{\delta}_1 \cos rt = 0. \end{aligned}$$

Ist $r > 1$, so ergibt sich hieraus $\delta_1 = \bar{\delta}_1 = 0$ oder dasselbe Resultat, das wir schon früher durch Vermittlung von (44_1) gefunden haben. Für $r = 1$ erhält man dagegen

$$(56)\quad \delta_1 = \frac{\varepsilon}{2};\ \bar{\delta}_1 = -\frac{\varepsilon}{2};\ \delta_1 - \bar{\delta}_1 = \varepsilon.$$

Dieses Ergebniss steht in Übereinstimmung mit (45).

Für $r > 1$ wollen wir die Rechnungen noch weiter verfolgen. Bei dem nächsten Schritt nimmt nun $r = 2$ eine Ausnahmestellung. Es sei also zunächst $r > 2$. Wir erhalten aus (55)

$$(57)\quad \begin{aligned} x_1 = \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{\sin(r+2)t}{(r+2)^2 - r^2} - \frac{\sin(r-2)t}{r^2 - (r-2)^2}\right]; \\ \bar{x}_1 = \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{\cos(r+2)t}{(r+2)^2 - r^2} - \frac{\cos(r-2)t}{r^2 - (r-2)^2}\right]. \end{aligned}$$

Es wäre hier erlaubt ein Glied in $\sin rt$ bzw. $\cos rt$ hinzuzufügen. Dies würde aber nur eine Änderung in dem konstanten Faktor des betreffenden Integrals x bzw. $\bar{x}$ bedeuten. Beim nächsten Schritt ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&x_2'' + r^2 x_2 + \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{\sin(r+4)t}{4(r+1)} - \frac{\sin(r-4)t}{4(r-1)} + \frac{\sin rt}{4(r+1)} - \frac{\sin rt}{4(r-1)}\right] + \delta_2 \sin rt = 0\\
(58)\quad &\bar{x}_2'' + r^2 \bar{x}_2 + \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{\cos(r+4)t}{4(r+1)} - \frac{\cos(r-4)t}{4(r-1)} + \frac{\cos rt}{4(r+1)} - \frac{\cos rt}{4(r-1)}\right] + \bar{\delta}_2 \cos rt = 0.
\end{aligned}
$$

Man findet hieraus für $r > 2$

$$
(59)\qquad \delta_2 = \bar{\delta}_2 = \frac{\varepsilon^2}{16}\left[\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r+1}\right] = \frac{\varepsilon^2}{8(r^2-1)}\,.
$$

Für $r = 2$ bekommt man aus (57)

$$
(60)\qquad x_1 = \frac{\varepsilon}{24}\sin 4t;\quad \bar{x}_1 = \frac{\varepsilon}{8}\left(\frac{\cos 4t}{3} - 1\right).
$$

Man erhält weiter für $r = 2$

$$
\begin{aligned}
&x_2'' + 4x_2 + \frac{\varepsilon^2}{48}(\sin 6t + \sin 2t) + \delta_2 \sin 2t;\\
(61)\quad &\bar{x}_2'' + 4\bar{x}_2 + \frac{\varepsilon^2}{8}\left(\frac{\cos 6t}{6} + \frac{\cos 2t}{6} - \cos 2t\right) + \bar{\delta}_2 \cos 2t.
\end{aligned}
$$

Es ist also

$$
(62)\qquad \delta_2 = -\frac{\varepsilon^2}{48};\quad \bar{\delta}_2 = -\frac{\varepsilon^2}{48} + \frac{\varepsilon^2}{8};\quad \delta_2 - \bar{\delta}_2 = -\frac{\varepsilon^2}{8}\qquad (r = 2).
$$

Wir können auch leicht in entsprechender Weise wie für $r = 1, 2$ für $r > 2$ das Anfangsglied $\delta_r - \bar{\delta}_r$ in $\delta - \bar{\delta}$ berechnen. Ist r gerade, so enthält $\bar{\delta}_r$ ein Glied, das nicht in δ_r vorkommt. Wenn dagegen r ungerade ist, treten in δ_r und $\bar{\delta}_r$ zwei Glieder mit entgegengesetztem Zeichen auf. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\delta_r - \bar{\delta}_r = \frac{\varepsilon^r}{2^{r-1}(r^2-1)^2(r^2-9)^2\cdots[r^2-(r-2)^2]^2} \qquad (r \text{ ungerade});\\
(63)\quad &\delta_r - \bar{\delta}_r = -\frac{\varepsilon^r}{2^{r-1}r^2(r^2-4)^2(r^2-16)^2\cdots[(r^2-(r-2)^2)]^2} \qquad (r \text{ gerade}).
\end{aligned}
$$

Insbesondere erhält man

$$
\delta_r - \bar{\delta}_r = \varepsilon,\ -\frac{\varepsilon^2}{8},\ \frac{\varepsilon^3}{256},\ -\frac{\varepsilon^4}{18432},\ \frac{\varepsilon^5}{2359296}\qquad (r = 1, 2, 3, 4, 5).
$$

Wenn ε genügend klein ist, schliessen sich offenbar die Nullstellen von x und $\bar{x}$ unmittelbar den Nullstellen von $\sin rt$ und $\cos rt$ an. Da die Integrale stetig von ε abhängen, so kann in der hierin liegenden Eigenschaft, dass die durchschnittliche Anzahl der Nullstellen auf einer Strecke π r ist, keine Änderung eintreten. Zwei reelle Nullstellen können sich ja nicht in eine doppelte vereinigen, um nachher konjugiert imaginär zu werden; aus demselben Grunde eine zweite Nullstelle von x auch nicht in $t = 0$ oder $t = \pi$ übergehen, und für $\bar{x}$ können letztere beiden Punkte nie Nullstellen werden, da $\bar{x}$ eine paare Funktion ist, und es sich also um doppelte Nullstellen handeln würde.

Die Angabe des genauen Konvergenzbereiches der Entwicklungen von x und $\bar{x}$ nach ε scheint mit Schwierigkeiten verbunden zu sein. Insbesondere müssen wir die Frage unentschieden lassen, ob man immer Konvergenz bekommt, wenn Integrale von den erwünschten Eigenschaften existieren. Bei jeder neuen Integration treten, wie das Beispiel (57) zeigt, in den Nennern Faktoren von der Gestalt $2[(r+2\nu)^2 - r^2]$ oder $2[r^2 - (r-2\nu)^2]$ hinzu, die $\geqq 8(r-1)$ sind; doch sind für $r = 1$ die Faktoren immer von der ersten Gestalt und also $\geqq 8(r+1) = 16$. Hierzu kommt, dass man beim Übergang von x_{n-1} zu x_n eine grössere Anzahl von Gliedern zu erwarten hat. Eine leichte Überlegung zeigt jedoch, dass man hier auf der sicheren Seite steht, wenn man bei jedem neuen Schritt eine viermal so grosse Anzahl von Gliedern annimmt. Diese Gesichtspunkte genügen schon, um einen ersten Aufschluss über den Konvergenzbereich zu geben. Die Argumente der Sinus- und Cosinusfunktionen in den Lösungen sind von der Gestalt $(r \pm 2\nu)t$, und die äussersten Argumente sind offenbar $(r \pm 2n)t$. Da dabei, wie leicht einzusehen ist, nur die Argumente $(r+2n)t$, $(r+2n-4)t$, $\cdots (r-2n+4)t$, $(r-2n)t$ vorkommen können, wobei $r - 2\nu$, falls < 0, durch $2\nu - r$ zu ersetzen ist, so versteht man, dass, wenn sämtliche Glieder mit demselben Argumente in ein einziges Glied zusammengeführt werden, man höchstens $n+1$ Glieder in x_n und $\bar{x}_n$ erhält. Kennt man die dabei resultierenden Koeffizienten, so findet man unmittelbar einen Ausdruck für den Konvergenzbereich der Entwicklungen. Leider sind wir nicht im Stande einen leicht überschaulichen allgemeinen Ausdruck für diese Koeffizienten anzugeben.

9. Es ist ziemlich einleuchtend, dass die obigen Methoden auch auf einen allgemeineren Fall, nämlich die Hillsche Gleichung

$$x'' + \left[a^2 + \sum_{\nu=1}^{h} \varepsilon_\nu \cos 2k_\nu t\right] x = 0, \tag{64}$$

Anwendung finden, wobei wir annehmen, dass kein gemeinsamer ganzzahliger Teiler > 1 für die h ganzen Zahlen k_ν existiert. Zu jeder ganzen Zahl r gehören auch hier zwei Integrale x, $\bar{x}$ in einfach periodischen Funktionen, und in den zugehörigen Differentialgleichungen lässt sich von vornherein $\Phi(t)$ nicht exakt angeben, sondern, wenn man

$$\Phi(t) = r^2 + \delta + \sum_1^h \varepsilon_\nu \cos 2 k_\nu t \tag{65}$$

schreibt, so erhält man in demselben Maasse, wie die Entwicklungen für die Integrale fortschreiten, eine Bestimmung von δ in den Grössen $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_k$. Für die beiden Integrale x und $\bar{x}$ erhält dann δ verschiedene Bestimmungen, und wenn δ zwischen diesen liegt, so bekommt man instabile Lösungen. Wir versuchen auch hier für x und δ mit den Entwicklungen (50) und (51). Für x_n erhalten wir, in Analogie mit (52),

$$x_n'' + r^2 x_n + \sum_1^h \varepsilon_\nu \cos 2 k_\nu t \,.\, x_{n-1} + \delta_1 x_{n-1} + \delta_2 x_{n-2} + \cdots + \delta_n x_0 = 0, \tag{66}$$

wobei, wenn wir $x_0 = \sin rt$, $\bar{x}_0 = \cos rt$ annehmen, δ_n (bzw. $\bar{\delta}_n$) durch die Forderung bestimmt wird, dass die Glieder in $\sin rt$ (bzw. $\cos rt$) einander aufheben sollen. Hier aber werden die Grössen δ_n und $\bar{\delta}_n$ homogene Funktionen n-ter Ordnung von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_h$. Wünschen wir nun zu wissen, von welcher Ordnung das zur ganzen Zahl r gehörende Instabilitätsintervall klein ist, so hat man nur die erste nicht verschwindende Differenz $\delta_n - \bar{\delta}_n$ zu bestimmen. Vergegenwärtigt man sich die Auseinandersetzungen der vorigen Nummer, so ersieht man dass dies zum ersten mal bei der niedrigsten Anzahl von Gliedern eintrifft, für welche eine Relation

$$\sum_1^h \pm m_\nu k_\nu = r$$

besteht, so dass man

$$n = m_1 + m_2 + \cdots + m_h$$

hat. Instabilitätsintervalle von der ersten Ordnung gibt es also nur für $r = k_1, k_2, \ldots k_h$. Für Intervalle von der zweiten Ordnung hat man $r = 2k_\nu$, $k_\nu \pm k_{\nu_1}$.

Als Beispiel nehmen wir den Fall $h = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 5$. Für die Instabilitätsintervalle der niedrigsten drei Ordnungen bekommen wir:

$$n = 1, \; r = 2, 5;$$
$$n = 2, \; r = 3, 4, 7, 10;$$
$$n = 3, \; r = 1, 6, 8, 9, 12, 15.$$

Wie für die Gyldénsche Gleichung erkennt man auch hier die Instabilitätsintervalle erster Ordnung bereits dadurch, dass für dieselben das Integral

$$\int_0^\pi \Phi'(t + \alpha) \sin^2 rt\, dt$$

nicht identisch verschwindet, wo $\Phi(t)$ in (65) gegeben wird.

10. Wir wollen in dieser Nummer nachweisen, wie man für die Gyldénsche Gleichung die Reihenentwicklungen der Lösungen nach ε in den Instabilitätsintervallen herleiten kann. Die beiden Integrale mit Multiplikatoren lassen sich in der Gestalt $e^{\gamma t} f(t)$, $e^{-\gamma t} f_1(t)$ schreiben, wo $f(t), f_1(t)$ gewöhnliche einfachperiodische Funktionen bedeuten. Da $\Phi(t)$ eine paare Funktion ist, so hat man überdies $f_1(t) = f(-t)$. Da wir die Entwicklung für $f(t)$ zu kennen wünschen, so substituieren wir in (49), wo wir δ durch δ' ersetzen,

$$x = e^{\gamma t}\, y.$$

Es ergibt sich hieraus

$$x'' = e^{\gamma t}[y'' + 2\gamma y' + \gamma^2 y].$$

Es soll mithin y die Differentialgleichung

$$(67) \qquad y'' + 2\gamma y' + (r^2 + \delta' + \gamma^2 + \varepsilon \cos 2t)\, y = 0$$

befriedigen. Wir denken uns, dass für y, δ' und γ Reihenentwicklungen nach ε existieren,

$$(68) \qquad y = y_0 + y_1 + \cdots + y_n + \cdots;$$

$$(69) \qquad \delta' = \delta'_1 + \delta'_2 + \cdots + \delta'_n + \cdots;$$

$$(70) \qquad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n + \cdots.$$

Für γ^2 ergibt sich aus (70) die Entwicklung

$$(71)\qquad \gamma^2 = \gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2 + (\gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_3) + \cdots = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \cdots + \Gamma_n + \cdots.$$

Die Glieder $y_0, y_1, \ldots y_n, \ldots$ bestimmen wir jetzt vermittels eines sukzessiven Rekursionsverfahrens, und zwar erhalten wir für y_n

$$(72)\qquad \begin{aligned} y_n'' + r^2 y_n + \varepsilon \cos 2t \cdot y_{n-1} + 2\gamma_1 y_{n-1}' + \cdots + 2\gamma_n y_0' + \delta_1' y_{n-1} + \\ + \cdots + \delta_n' y_0 + \Gamma_2 y_{n-2} + \cdots + \Gamma_n y_0 = 0. \end{aligned}$$

Hier sind $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ als aus den früheren Relationen schon bestimmt zu betrachten. Dagegen kennen wir noch nicht die Konstanten δ_n' und γ_n. Dieselben lassen sich aber dadurch ermitteln, dass in (72) die von y_n'' und y_n unabhängigen Glieder $\sin rt$ und $\cos rt$ nicht enthalten dürfen. Nehmen wir als Ausgangspunkt

$$(73)\qquad y_0 = \cos\alpha \sin rt - \sin\alpha \cos rt,$$

so ergibt sich hieraus

$$(74)\qquad y_0' = r[\cos\alpha \cos rt + \sin\alpha \sin rt].$$

Für $n = 1, 2, \ldots r-1$ haben wir nach der 8. Nummer $\delta_n = \bar{\delta}_n$. Es lässt sich hieraus unmittelbar schliessen, dass

$$(75)\qquad \delta_n' = \delta_n = \bar{\delta}_n;\ \gamma_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots r-1).$$

Wenn wir für $n = r$ die Koeffizienten für $\sin rt$ und $\cos rt$ in (72) gleich Null setzen, so bekommen wir die Bedingungen

$$\delta_r' \cos\alpha + 2r\gamma_r \sin\alpha = \delta_r \cos\alpha;\ \delta_r' \sin\alpha - 2r\gamma_r \cos\alpha = \bar{\delta}_r \sin\alpha.$$

Hieraus ergibt sich

$$(76)\qquad \delta_r' = \delta_r \cos^2\alpha + \bar{\delta}_r \sin^2\alpha;\ \gamma_r = \frac{(\delta_r - \bar{\delta}_r)\sin\alpha\cos\alpha}{2r}.$$

Wie man sieht, gilt für δ_r' die Beschränkung zwischen δ_r und $\bar{\delta}_r$. Es muss auch nach den vorangehenden Entwicklungen δ' zwischen δ und $\bar{\delta}$ liegen, und es ist eine Aufgabe dies durch die Entwicklungen für die fraglichen Grössen zu bestätigen. Die Bestimmung von δ_n' aus δ_n und $\bar{\delta}_n$ erfolgt in derselben Weise wie in (76), so lange man $n < 2r$ hat. Für $n \geqq 2r$ treten aber die Glieder in der Entwicklung (71) von γ^2 störend ein. Es lässt sich auch ohne Schwierigkeit nachweisen, dass sämtliche Glieder in der Entwicklung von γ den Faktor $\sin\alpha\cos\alpha$ enthalten, wie wir dies für das Anfangsglied in (76) gesehen haben. Dasselbe gilt also auch für γ.

Wird nun y_0 durch (73) gegeben, so erhält man y in der Gestalt

$$(77) \qquad y = \cos\alpha\, F(t) - \sin\alpha\, \bar{F}(t),$$

wobei in $F(t)$ nur Sinusfunktionen und in $\bar{F}(t)$ Cosinusfunktionen auftreten. In den ersten Gliedern bis y_{2p-1} stimmen $F(t)$ und $\bar{F}(t)$ mit den Entwicklungen von x bzw. $\bar{x}$ in der 8. Nummer überein. Bei den folgenden Gliedern treten aber Änderungen ein, indem $F(t)$ und $\bar{F}(t)$ von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ abhängig werden; doch in der vereinfachten Form, dass man nur eine Abhängigkeit von $\sin^2\alpha$ und $\cos^2\alpha$ erhält. In der entsprechenden Weise erweist sich γ, wenn vom Faktor $\sin\alpha\cos\alpha$ abgesehen wird, als von $\sin^2\alpha$ und $\cos^2\alpha$ abhängig, und dasselbe gilt für δ'. Es wird mithin δ' nicht geändert, wenn als Anfangsglied von (68)

$$(73_1) \qquad y_0 = \cos\alpha \sin rt + \sin\alpha \cos rt$$

genommen wird; dagegen wechselt γ das Zeichen. Es ist jetzt einleuchtend, dass wir die beiden Lösungen von (49) mit Multiplikatoren in der Gestalt

$$(78) \qquad e^{\gamma t}[\cos\alpha\, F(t) - \sin\alpha\, \bar{F}(t)]; \;\; e^{-\gamma t}[\cos\alpha\, F(t) + \sin\alpha\, \bar{F}(t)]$$

geben können. Diese beiden Integrale fallen aber zusammen für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Wir haben dann die Fälle mit einfachperiodischen Lösungen der 8. Nummer, und es gehen $F(t)$ und $\bar{F}(t)$ in die dort betrachteten Integrale x und $\bar{x}$ über. In der bei solchen Fragestellungen üblichen Weise können wir aber in diesen Fällen durch Grenzübergang noch ein zweites Integral herleiten.[1] Wir wollen dies für $\alpha = 0$ näher ausführen. Es sei

$$(79) \qquad \lim_{\alpha \to 0} \frac{\gamma}{\sin\alpha} = \gamma_0.$$

---

[1] Man sehe auch FORSYTH, l. c., p. 415.

Wir setzen

$$(80)\qquad x^{(1)} = \frac{1}{2\sin\alpha}\left[e^{-\gamma t}\left[\cos\alpha\, F(t) + \sin\alpha\, \bar{F}(t)\right] - e^{\gamma t}\left[\cos\alpha\, F(t) - \sin\alpha\, \bar{F}(t)\right]\right].$$

Offenbar hat $x^{(1)}$ die Bedeutung eines partikulären Integrals, das für $\alpha \to 0$ in

$$(81)\qquad x^{(1)} = \bar{F}(t) - \gamma_0 t F(t)$$

übergeht. Es ist hier $F(t)$ die bereits bekannte Lösung x. Dagegen ist $\bar{F}(t)$ nicht mit dem Integral $\bar{x}$ der 8. Nummer zu verwechseln, da $\bar{F}(t)$ in dieses Integral für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und nicht für $\alpha = 0$ übergeht.

Es dürfte ohne weiteres verständlich sein, dass die obige Methode auf eine allgemeine Klasse von Differentialgleichungen Anwendung findet. Zu dieser Klasse gehört die in der vorhergehenden Nummer besprochene Hillsche Gleichung sowie auch die Verallgemeinerung hiervon, welche man erhält, wenn in (64) $\cos k_\nu t$ durch $\cos(k_\nu t - \beta_\nu)$ ersetzt wird. Doch begnügen wir uns, wenigstens bei dieser Gelegenheit, mit den obigen Andeutungen.

Wie ich später bemerkt habe, kann man in der obigen Weise sogar Integrale für die an den Instabilitätsbereichen angrenzenden Teilen der Stabilitätsbereiche erhalten. Man braucht nur in (73) $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ durch die hyperbolischen Funktionen $\cosh\alpha$ und $i\sinh\alpha$ zu ersetzen. Dabei ist es die durch Null gehende Funktion $\cos\alpha$ oder $\sin\alpha$, die nacher in $i\sinh\alpha$ übergeht.