

ÜBER PSEUDOBEWERTUNGEN. I.

VON

KURT MAHLER

in GRONINGEN.

Während die HENSELSCHEN p -adischen Zahlen sich bekanntlich auf sehr einfache Weise in die Theorie der *bewerteten Körper* einordnen lassen, ist eine analoge Theorie der *bewerteten Ringe*, die die Lehre von den HENSELSCHEN g -adischen Zahlen umfasst, anscheinend weniger bekannt geblieben. Man gelangt zu derselben durch die folgende einfache Erweiterung des Bewertungsbegriffes:

Sei nämlich R ein beliebiger kommutativer Ring mit Einselement, der auch Nullteiler besitzen darf, $W(a)$ eine Funktion der Elemente a aus R , die stets nichtnegativ reell ist und den beiden Funktionalungleichungen

$$W(a - b) \leq W(a) + W(b),$$

$$W(ab) \leq W(a) W(b)$$

für alle Elementenpaare a, b aus R genügt. Ganz wie üblich zeigt man, dass sich R oder allgemeiner ein Unterring von R zu einem perfekten Ring in bezug auf die Funktion $W(a)$, die ich eine »*Pseudobewertung*« nenne, erweitern lässt. Im Unterschied zu der Theorie der bewerteten Körper ist es hier möglich, aus bekannten Pseudobewertungen neue abzuleiten; so ist vor allem die Summe mehrerer Pseudobewertungen wieder eine. Genügen die Pseudobewertungen, die in dieser Summe als Summanden auftreten, einer gewissen Unabhängigkeitsbedingung, so lässt sich zeigen, dass der der Summe entsprechende perfekte Ring gleich der direkten Summe der perfekten Ringe, die zu den einzelnen Summanden gehören, ist. In diesem Satz ist insbesondere als Spezialfall die Zerlegung der HENSELSCHEN g -adischen Ringe in eine direkte Summe p -adischer Ringe oder Körper enthalten, da die zu verschiedenen Primzahlen gehörigen p -adischen Be-

wertungen unabhängig sind, und zwar sowohl in bezug auf den Ring der ganzen rationalen Zahlen als Grundring, als auch in bezug auf den Körper aller rationalen Zahlen als Grundring, und da die g -adische Pseudobewertung sich als Summe endlichvieler p -adischer Bewertungen darstellen lässt.

Es scheint mir von Interesse zu sein, für einen beliebigen Ring die Gesamtheit aller nichtäquivalenten Pseudobewertungen aufzustellen; dabei betrachte ich Pseudobewertungen als äquivalent, wenn jede unendliche Folge, die in bezug auf die eine gegen Null konvergiert, es auch in bezug auf die andere tut. Für einen beliebigen Ring scheint dieses Problem allerdings recht schwierig zu sein und insbesondere eine Einsicht in seine Struktur zu verlangen. Gelöst habe ich dasselbe bisher für den Ring aller ganzen rationalen Zahlen und ferner für jeden algebraischen Zahlkörper endlichen Grades. In der anschließenden Arbeit findet man die Behandlung des letzteren Falles eingehend dargestellt. Ich hoffe, in weiteren Veröffentlichungen auch den Ring aller ganzen Zahlen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers und ferner spezielle Polynomringe zu behandeln.

Die in der vorliegenden Arbeit dargestellte Theorie ist mancher Verallgemeinerung fähig. In erster Linie kann man allgemeinere Grundringe R zugrunde legen und etwa für R ein beliebiges hyperkomplexes System nehmen: auch in diesem Fall scheint man zu ähnlichen Ergebnissen zu gelangen. Zweitens aber kann man auch allgemeinere Funktionalungleichungen zugrunde legen, etwa

$$W(a - b) \leq \Phi(W(a), W(b)),$$

$$W(ab) \leq \Psi(W(a), W(b)),$$

wo $\Phi(u, v)$ und $\Psi(u, v)$ zwei nichtnegative stetige Funktionen der nichtnegativen Veränderlichen u und v bezeichnen, so dass aus $\Phi(u, v) \rightarrow 0$ das gleichzeitige Konvergieren von u und v gegen Null, und aus $\Psi(u, v) \rightarrow 0$ entweder $u \rightarrow 0$ oder $v \rightarrow 0$ folgt. Unter Zugrundelegung dieser Funktionalungleichungen lässt sich eine analoge Theorie wie in dieser Arbeit entwickeln; so lassen sich die Begriffe wie Äquivalenz und Summenbildung leicht übertragen.

Besonders erwähnt werde der Spezialfall der Ungleichungen

$$W(a - b) \leq \max(W(a), W(b)),$$

$$W(ab) \leq \min(W(a), W(b)),$$

der für $\Phi(u, v) = \max(u, v)$ und $\Psi(u, v) = \min(u, v)$ entsteht. Die Theorie dieser Verallgemeinerung des Bewertungsbegriffes ist nämlich auf das Innigste verknüpft

mit derjenigen der sog. *b_v-adischen Zahlen* von D. VAN DANTZIG (S. seine demnächst in den *Compositio Mathematica* erscheinende Darstellung), und anstatt der von ihm gewählten topologischen Betrachtungen führt auch eine Untersuchungsweise vom Standpunkt der Bewertungstheorie ähnlich wie in dieser Arbeit zum gleichen Ergebnis.

Was die Literatur angeht, so werde besonders auf die beiden klassischen Arbeiten über Bewertungstheorie:

J. KÜRSCHAK, *J. Math.* Bd. 142 (1912), S. 211—253;

A. OSTROWSKI, *Acta mathematica*, Bd. 41 (1918), S. 271—284,

sowie auf die K. HENSELSCHEN Arbeiten über *p*-adischen Zahlen (*z. B. Math. Z.*, Bd. 2 (1918)) verwiesen; von den Ergebnissen und Methoden der ersten Arbeit wird gelegentlich Gebrauch gemacht. Ich habe in verschiedenen Arbeiten die Bewertungstheorie auf Diophantische Probleme angewandt, und mich dabei besonders der *p*-adischen Zahlen bedient, um den THUE-SIEGELSCHEN Satz und einige seiner Folgerungen zu verallgemeinern (S. besonders *Math. Ann.* Bd. 107 (1933) S. 691—730, *Math. Ann.* Bd. 108 (1933), S. 37—55, *J. Math.* Bd. 170 (1934), S. 168—178 und *Acta mathematica* Bd. 62 (1934) S. 91—166). Die Benutzung der Theorie der Pseudobewertungen erlaubt, einige Beweise dieser Arbeiten zu vereinfachen und führt auch noch zu anderen Anwendungen auf Diophantische Approximationen.

I.

1.) Sei R ein beliebiger kommutativer Ring mit Einselement 1. Eine Funktion $W(a)$ der Elemente a aus R , die stets reell und nichtnegativ ist, heisse eine *Pseudobewertung* von R , wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$(1): \quad W(0) = 0, \quad W(1) > 0,$$

$$(2): \quad W(a - b) \leq W(a) + W(b),$$

$$(3): \quad W(ab) \leq W(a) W(b).$$

Genügt sie sogar den schärferen Forderungen:

$$(1'): \quad W(0) = 0, \quad W(a) > 0 \text{ für } a \neq 0,$$

$$(2): \quad W(a - b) \leq W(a) + W(b),$$

$$(3'): \quad W(ab) = W(a) W(b),$$

so werde sie eine *Bewertung* genannt.

Jeder Ring R besitzt z. B. die sogenannte »*triviale Pseudobewertung*»

$$W_0(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a = 0, \\ 1 & \text{für } a \neq 0. \end{cases}$$

Gelegentlich ist es zweckmässig, auch die identisch verschwindende Funktion

$$U(a) = 0 \text{ für alle } a$$

als sogenannte »*uneigentliche Pseudobewertung*» mit zu berücksichtigen.

Nicht jeder Ring besitzt dagegen Bewertungen; hierfür ist vielmehr notwendig und hinreichend, dass der Ring frei von Nullteilern und also ein Integritätsbereich ist. Dass diese Bedingung ausreicht, folgt daraus, dass für einen Integritätsbereich $W_0(a)$ offenbar zu einer *Bewertung*, die wir alsdann die »*triviale Bewertung*» nennen, wird. Die Bedingung ist auch notwendig, denn ist W eine Bewertung von R und $ab = 0$ für zwei Zahlen a und b aus R , so gilt nach (1') und (3'): $W(a)W(b) = 0$, also $W(a) = 0$ oder $W(b) = 0$, und somit entweder $a = 0$ oder $b = 0$.

Falls R ein Integritätsbereich und W eine Bewertung desselben ist, können wir R auf bekannte Weise durch Bildung des Quotientenkörpers in einen Körper K einbetten, und alsdann durch die Forderung

$$W\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{W(a)}{W(b)}$$

die zunächst nur für R definierte Ringbewertung zu einer Körperbewertung von K erweitern; Bewertungen von Ringen sind also nicht allgemeiner als solche von Körpern.

2.) Aus den Definitionsforderungen folgen sogleich einige einfachen Eigenschaften der Pseudobewertungen, speziell der Bewertungen.

Wird in (3), bzw. in (3'), sowohl a , als auch b gleich 1 genommen, so ergibt sich

$$W(1) \leq W(1)^2, \quad \text{bzw.} \quad W(1) = W(1)^2,$$

wegen $W(1) > 0$ nach (1) oder (1') also, dass für eine Pseudobewertung

$$W(1) \geq 1,$$

und für eine Bewertung sogar

$$W(1) = 1$$

ist. Setzt man ferner in (2) für a die Zahl 0 und für b die Zahl $\mp a$ ein, so folgt wegen $W(0) = 0$

$$W(-a) \leq W(a) \quad \text{und} \quad W(a) \leq W(-a),$$

also für jede Pseudobewertung W und jede Zahl a von R

$$W(-a) = W(a).$$

Diese Gleichung zeigt, dass neben (2) noch die weitere Ungleichung

$$W(a + b) \leq W(a) + W(b)$$

für alle Paare a, b aus R erfüllt ist.

Wendet man ferner Formel (2) einmal mit $b, a, a - b$ und einmal mit $a, b, b - a$ anstatt $a - b, a, b$ an, so ergibt sich

$$W(b) - W(a) \leq W(a - b) \quad \text{und} \quad W(a) - W(b) \leq W(a - b) = W(b - a)$$

und also

$$(2'): \quad |W(a) - W(b)| \leq W(a - b).$$

3.) Ist $W(a) = 0$ für ein Element a aus R , und b ein beliebiges zweites Element aus R , so gilt nach (3) auch $W(ab) = 0$. Ist ferner $W(a) = 0$ und $W(b) = 0$ für zwei Elemente a und b aus R , so wird nach (2) auch $W(a - b) = 0$.

Es folgt daher, dass die Elemente a aus R mit

$$W(a) = 0$$

ein Ideal

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_W$$

in R bilden. Seien a und a' irgend zwei Elemente aus R mit

$$a' \equiv a \pmod{\mathfrak{r}},$$

so dass demnach

$$W(a - a') = W(a' - a) = 0$$

ist. Dann folgt aus (2)

$$W(a) \leq W(a') + W(a' - a) = W(a') \quad \text{und} \quad W(a') \leq W(a) + W(a - a') = W(a),$$

und somit

$$W(a') = W(a).$$

Für alle Zahlen

$$a, a', a'', \dots,$$

die in derselben Restklasse *mod* \mathfrak{r} liegen, hat W demnach den gleichen Wert

$$W(a) = W(a') = W(a'') = \dots.$$

Beim Übergang zum Restklassenring

$$R_W = R/\mathfrak{r}_W$$

wird daher in demselben auf folgende Art eine neue Pseudobewertung definiert: Ist A aus R_W die Restklasse aller Elemente $\equiv a \pmod{\mathfrak{r}_W}$ aus R , so sei definitionsweise

$$W(A) = W(a).$$

Speziell kann allein $W(A) = 0$ sein, wenn A gleich dem Nullelement O von R_W , d. h. gleich der Restklasse der in \mathfrak{r}_W liegenden Elemente von R ist. Somit erfüllt die Pseudobewertung $W(A)$ von R_W nicht nur (I), sondern sogar die schärfere Bedingung (I')

$$W(O) = 0, \quad W(A) > 0 \quad \text{für} \quad A \neq O.$$

Sei z. B. \mathfrak{r} ein beliebiges Ideal von R und alsdann

$$W_{\mathfrak{r}}(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a \equiv 0 \pmod{\mathfrak{r}}, \\ 1 & \text{für } a \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{r}}. \end{cases}$$

Dann verschwindet also W gerade für diejenigen Elemente a aus R und nur für diejenigen, welche in dem Ideal \mathfrak{r} liegen, und es ist klar, dass $W_{\mathfrak{r}}(a)$ eine Pseudobewertung von R darstellt. Ist speziell $\mathfrak{r} = (0)$ gleich dem Nullideal von R , so wird $W_{\mathfrak{r}}(a)$ zur trivialen Pseudobewertung $W_0(a)$, während $W_{\mathfrak{r}}(a)$ für $\mathfrak{r} = R$ in die uneigentliche Pseudobewertung $U(a)$ übergeht.

Wenn ferner R speziell ein Körper ist, so existieren bekanntlich in R allein das Nullideal und das Ideal R . Bedeutet $W(a)$ eine eigentliche Pseudobewertung von R , so muss demnach in diesem Fall das zugeordnete Ideal

$$r_W$$

mit dem Nullideal (0) zusammenfallen, so dass $W(a)$ die Forderung (1') erfüllt.

4.) Eine unendliche Folge

$$\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

von Zahlen aus R heisse eine *Fundamentalfolge*, wenn zu jeder positiven Zahl ε eine natürliche Zahl $p = p(\varepsilon)$ existiert, so dass

$$(4): \quad W(a_m - a_n) \leq \varepsilon \quad \text{für } m \geq p(\varepsilon), \quad n \geq p(\varepsilon)$$

ist. Demnach ist insbesondere nach Formel (2')

$$|W(a_m) - W(a_n)| \leq \varepsilon \quad \text{für } m \geq p(\varepsilon), \quad n \geq p(\varepsilon),$$

und es folgt daher, dass für eine Fundamentalfolge die nichtnegativen reellen Zahlen

$$W(a_1), \quad W(a_2), \quad W(a_3), \dots$$

nach oben beschränkt sind, und dass sie gegen einen Grenzwert

$$W(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(a_n)$$

konvergieren, der ebenfalls nichtnegativ reell ist.

Wir ordnen zwei Fundamentalfolgen

$$\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \quad \text{und} \quad \beta = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

als Summe, Differenz und Produkt die drei Folgen

$$\alpha + \beta = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots\},$$

$$\alpha - \beta = \{a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, \dots\},$$

$$\alpha \beta = \{a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots\}$$

zu. Wegen

$$W((a_m + b_m) - (a_n + b_n)) \leq W(a_m - a_n) + W(b_m - b_n),$$

$$W((a_m - b_m) - (a_n - b_n)) \leq W(a_m - a_n) + W(b_m - b_n),$$

$$W(a_m b_m - a_n b_n) = W(a_m(b_m - b_n) + (a_m - a_n)b_n) \leq W(a_m)W(b_m - b_n) + W(a_m - a_n)W(b_n)$$

sind diese abgeleiteten Folgen selbst wieder Fundamentalfolgen, da $W(a_m - a_n)$ und $W(b_m - b_n)$ für genügend grosse Indizes m und n beliebig klein und ferner $W(a_m)$ und $W(b_n)$ für alle m und n beschränkt sind.

Die Fundamentalfolgen

$$\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

in bezug auf W bilden somit einen kommutativen Ring, welcher mit R_W^* bezeichnet werde. Da jede Folge

$$\{a, a, a, \dots\}$$

gewiss eine Fundamentalfolge ist, so enthält R_W^* einen zu R isomorphen Unter-
ring. Ferner ist das Nullelement von R_W^* gleich

$$\omega = \{0, 0, 0, \dots\},$$

und das Einheitselement dieses Ringen gleich

$$\eta = \{1, 1, 1, \dots\}.$$

Die den Elementen

$$\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

von R_W^* zugeordnete nichtnegative reelle Zahl $W(\alpha)$ hat die Eigenschaften

$$W(\omega) = W(0) = 0, \quad W(\eta) = W(1) > 0 \text{ für } W \neq U;$$

ferner ist wegen (2)

$$W(\alpha - \beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(a_n - b_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} W(a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} W(b_n) = W(\alpha) + W(\beta),$$

und wegen (3)

$$W(\alpha \beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(a_n b_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} W(a_n) \lim_{n \rightarrow \infty} W(b_n) = W(\alpha) W(\beta).$$

Demnach bildet $W(\alpha)$ eine Pseudobewertung von R_W^* , und fällt für die speziellen Folgen

$$\alpha = \{a, a, a, \dots\}$$

mit der Pseudobewertung $W(a)$ zusammen.

Ist z. B. \mathfrak{r} ein beliebiges Ideal von R , und bedeutet $W_{\mathfrak{r}}(a)$ die früher definierte Pseudobewertung, so stellt eine Folge

$$\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

von Zahlen aus R offenbar dann und nur dann eine Fundamentalfolge in bezug auf $W_{\mathfrak{r}}(a)$ dar, wenn alle ihre Elemente von einer Stelle ab in der gleichen Restklasse *mod* \mathfrak{r} liegen. Speziell ist für $\mathfrak{r} = (0)$, d. h. in bezug auf die triviale Pseudobewertung $W_0(a)$ eine Folge

$$\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

dann und nur dann Fundamentalfolge, wenn alle ihre Elemente von einer Stelle ab übereinstimmen, etwa gleich der Zahl a aus R werden; alsdann ist

$$W_0(\alpha) = W_0(a).$$

Nimmt man ferner $\mathfrak{r} = R$, betrachtet also die uneigentliche Pseudobewertung $U(a)$, so wird überhaupt jede unendliche Folge

$$\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

zu einer Fundamentalfolge, und man erhält

$$U(\alpha) = 0 \text{ für alle } \alpha,$$

so dass man auch im Erweiterungsring R_U^* zur uneigentlichen Pseudobewertung gelangt.

5.) Zu dem Ring R_W^* der Fundamentalfolgen

$$\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

aus R und zu seiner Pseudobewertung $W(\alpha)$ lässt sich nach § 3 wieder das Ideal

$$\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}_W^*$$

bestimmen, das aus allen α mit $W(\alpha) = 0$, d. h. aus allen Fundamentalfolgen

$$\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(a_n) = 0$$

besteht; dabei genügt diese letztere Limesgleichung schon, damit die Folge α überhaupt Fundamentalfolge ist, denn zu jedem ε gibt es eine natürliche Zahl $p = p(\varepsilon)$, so dass

$$W(a_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n \geq p(\varepsilon)$$

und also in der Tat

$$W(a_m - a_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für } m \geq p(\varepsilon), \quad n \geq p(\varepsilon)$$

ist.

Gemäss § 3 werde zum Restklassenring

$$R'_W = R_W^* / \mathfrak{r}_W^*$$

übergegangen. Wir bezeichnen das Element \mathcal{A} von R'_W , d. h. diejenige Restklasse *mod* \mathfrak{r}_W^* , in der ein Element

$$\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

von R_W^* liegt, mit

$$\mathcal{A} = \lim \alpha(W) \quad \text{oder} \quad \mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(W)$$

und nennen es den Grenzwert der Fundamentalfolge α in bezug auf W . Zwei verschiedene Fundamentalfolgen

$$\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \quad \text{und} \quad \alpha' = \{a'_1, a'_2, a'_3, \dots\}$$

haben somit dann und nur dann den gleichen Grenzwert

$$\mathcal{A} = \lim \alpha = \lim \alpha'(W),$$

wenn $\alpha - \alpha'$ in \mathfrak{r}_W^* liegt, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(a_n - a'_n) = 0$$

ist; insbesondere hat jede Teilfolge

$$\alpha^* = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\} \quad (n_1 < n_2 < n_3 < \dots)$$

von α den gleichen Grenzwert wie α . Ist

$$\mathcal{A} = \lim \alpha(W),$$

so existiert auch der reelle Grenzwert

$$W(\mathcal{A}) = W(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(a_n)$$

und hängt allein von der Restklasse \mathcal{A} ab, in der $a \bmod r_W^*$ liegt. Dieser Grenzwert $W(\mathcal{A})$ definiert eine Pseudobewertung von R'_W , und genügt insbesondere der verschärften Bedingung (1'), d. h. verschwindet allein, wenn \mathcal{A} die durch die Folge

$$\omega = \{0, 0, 0, \dots\}$$

bestimmte Nullklasse O bezeichnet.

Der Ring R'_W enthält insbesondere für jedes a aus R diejenige Restklasse $\bmod r_W^*$, in der die Fundamentalfolge

$$\{a, a, a, \dots\}$$

liegt; diese Restklasse werde mit $\{a\}$ bezeichnet. Nach Definition von R'_W ist dann und nur dann $\{a\} = \{a'\}$, wenn

$$W(a - a') = 0$$

und also

$$a \equiv a' \pmod{r_W}$$

ist, d. h. a und a' das gleiche Element A von R_W erzeugen. Somit bilden die Elemente $\{a\}$ von R'_W einen Unterring hiervon, der zu R_W isomorph ist; wie leicht zu sehen, ist

$$W(\{a\}) = W(a),$$

so dass bei der Zuordnung durch diesen Isomorphismus auch die Werte von W dieselben bleiben. Im allgemeinen, also wenn $r_W^* \neq (0)$ ist, wird dagegen R'_W nicht auch einen zu R selbst isomorphen Unterring besitzen; nur wenn W für alle a aus R der verschärften Bedingung (1') genügt, also z. B., wenn R ein Körper und W eine beliebige Pseudobewertung desselben ist, ist dies immer der Fall.

Als ein Beispiel werde für W die früher definierte Pseudobewertung $W_r(a)$ von R gewählt, wo r ein beliebiges Ideal von R bedeutet. Dann wird $R_{W_r} = R/r$ und $W_r(\mathcal{A})$ die triviale Bewertung hiervon, und die Bemerkungen in § 4 zeigen, dass gerade

$$R'_{W_r} \sim R_{W_r}$$

wird. Insbesondere bekommt man für $r = (0)$, also für $W = W_0$

$$R'_{W_0} \sim R,$$

während für $r = R$, also für $W = U$

$$R'_U \sim (0),$$

d. h. isomorph zum nur aus der Null bestehenden Nullring wird.

Zu interessanteren Ergebnissen kommt man, wenn $W(A)$ in R_W von der trivialen Pseudobewertung verschieden ist (genauer: nicht äquivalent zu ihr ist; siehe hierzu das nächste Kapitel). Die Entstehung des Ringes der ganzen p -adischen Zahlen aus dem Ring der ganzen rationalen Zahlen bei Betrachtung der p -adischen Bewertung ist ein Beispiel hierfür.

Erwähnt sei noch, dass, wenn R ein Körper und W eine Bewertung desselben ist, R'_W zu einem R umfassenden Körper wird, der wieder die aus W durch Fortsetzung entstehende Bewertung besitzt.

6.) Sei

$$A = \lim \alpha(W)$$

ein Element aus R'_W , wo α die Fundamentalfolge

$$\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

bezeichnet. Alsdann ist für $m = 1, 2, 3, \dots$ die Zahl $A - \{a_m\}$ aus R'_W der Grenzwert der Folge

$$\{a_1 - a_m, a_2 - a_m, a_3 - a_m, \dots\},$$

und also erst recht

$$W(A - \{a_m\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(a_n - a_m) \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Aus der Eigenschaft (4) der Fundamentalfolgen ergibt sich demnach, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W(A - \{a_m\}) = 0$$

ist. Da wir α nötigenfalls durch eine seiner Teilfolgen ersetzen können, die ja auch alle den Grenzwert A haben, so ist es demnach erlaubt, anzunehmen, dass

$$W(A - \{a_m\}) \leq \frac{1}{m} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

sei.

Eine unendliche Folge von Elementen aus R'_W :

$$A_1, A_2, A_3, \dots$$

heisse *konvergent*, wenn zu jedem positiven ε eine natürliche Zahl $q = q(\varepsilon)$ existiert, so dass

$$W(A_m - A_n) \leq \varepsilon \quad \text{für } m \geq q(\varepsilon), \quad n \geq q(\varepsilon)$$

ist. Eine Folge der speziellen Gestalt

$$\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \dots$$

wo a_1, a_2, a_3, \dots Zahlen aus R sind, ist also insbesondere dann und nur dann konvergent, wenn

$$W(\{a_m\} - \{a_n\}) = W(\{a_m - a_n\}) = W(a_m - a_n) \leq \varepsilon \quad \text{für } m \geq q(\varepsilon), \quad n \geq q(\varepsilon)$$

und also

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

eine Fundamentalfolge ist; der Grenzwert

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n (W)$$

existiert daher und erfüllt die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(A - \{a_n\}) = 0.$$

Wir wollen zeigen, dass auch für eine allgemeine konvergente Folge

$$A_1, A_2, A_3, \dots$$

von Elementen aus R'_W immer ein Element A dieses Ringes mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(A - A_n) = 0$$

existiert, und dass A eindeutig bestimmt ist.

Zu diesem Zweck werde zu jedem A_n eine solche Fundamentalfolge

$$a_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \dots\}$$

mit

$$A_n = \lim_{v \rightarrow \infty} a_v^{(n)} (W)$$

konstruiert, so dass

$$W(A_n - \{a_v^{(n)}\}) \leq \frac{1}{v} \quad \left(\begin{array}{l} n = 1, 2, 3, \dots \\ v = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right)$$

ist. Setzt man dann

$$r = r(\varepsilon) = \max\left(\frac{3}{\varepsilon}, q\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)\right),$$

so gilt gleichzeitig

$$W(\mathcal{A}_m - \mathcal{A}_n) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } m \geq r(\varepsilon), n \geq r(\varepsilon),$$

$$W(\mathcal{A}_m - \{a_\mu^{(m)}\}) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } m \geq r(\varepsilon), \mu \geq r(\varepsilon),$$

$$W(\mathcal{A}_n - \{a_\nu^{(n)}\}) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } n \geq r(\varepsilon), \nu \geq r(\varepsilon),$$

und also wegen der Eigenschaft (2) der Pseudobewertung $W(\mathcal{A})$

$$W(\{a_\mu^{(m)}\} - \{a_\nu^{(n)}\}) = W(a_\mu^{(m)} - a_\nu^{(n)}) \leq \varepsilon \quad \text{für } m \geq r(\varepsilon), n \geq r(\varepsilon), \mu \geq r(\varepsilon), \nu \geq r(\varepsilon).$$

Insbesondere gilt hiernach

$$W(a_m^{(m)} - a_n^{(n)}) \leq \varepsilon \quad \text{für } m \geq r(\varepsilon), n \geq r(\varepsilon),$$

und also existiert der Grenzwert

$$\mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(n)}(W).$$

Die Differenz $\mathcal{A} - \mathcal{A}_n$ ist gleich dem Grenzwert der Fundamentalfolge

$$\{a_1^{(1)} - a_1^{(n)}, a_2^{(2)} - a_2^{(n)}, a_3^{(3)} - a_3^{(n)}, \dots\},$$

so dass

$$W(\mathcal{A} - \mathcal{A}_n) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} W(a_\nu^{(\nu)} - a_\nu^{(n)})$$

und demnach nach den vorigen Ungleichungen

$$W(\mathcal{A} - \mathcal{A}_n) \leq \varepsilon \quad \text{für } n \geq r(\varepsilon)$$

ist und also die behauptete Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(\mathcal{A} - \mathcal{A}_n) = 0$$

folgt. Wenn für noch ein weiteres Element \mathcal{A}' aus R'_W

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(\mathcal{A}' - \mathcal{A}_n) = 0$$

ist, so folgt aus Eigenschaft (2) der Pseudobewertung W sogleich

$$W(A - A') = 0$$

und also $A = A'$, so dass das Element A eindeutig bestimmt ist. Wir nennen A den Grenzwert der konvergenten Folge

$$A_1, A_2, A_3, \dots$$

und schreiben

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(W).$$

Alsdann ist insbesondere die Relation

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}(W)$$

gleichwertig mit

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(W).$$

Um die letzten Ergebnisse übersichtlich zu machen, stellen wir hier zusammen, zu welchen Idealen und Restklassenringen man gelangt, wenn die Definitionen der früheren Paragraphen auf den Ring

$$\mathfrak{R} = R'_W$$

und seine Pseudobewertung $W(A)$ angewandt werden:

- a: Das Ideal r_W aller Zahlen A aus \mathfrak{R} mit $W(A) = 0$ reduziert sich auf das Nullideal (0) , da $W(A)$ für die Elemente A von \mathfrak{R} der verschärften Bedingung (1') genügt.
- b: Der Restklassenring $\mathfrak{R}_W = \mathfrak{R}/r_W$ wird folglich zu \mathfrak{R} isomorph.
- c: Der Ring \mathfrak{R}_W^* aller Fundamentalreihen

$$\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$$

von Elementen aus \mathfrak{R} in bezug auf W ist identisch mit dem Ring aller konvergenten Folgen, und zu jeder solchen Folge gehört ein eindeutig bestimmter Grenzwert

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(W)$$

aus \mathfrak{R} .

d: Das Ideal \bar{r}_W^* der Elemente

$$\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$$

von \mathfrak{R}_W^* mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(A_n) = 0$$

besteht aus genau denjenigen konvergenten Folgen, die den Grenzwert 0 haben.

e: Bei der Bildung des Restklassenrings $\mathfrak{R}'_W = \mathfrak{R}_W^* / \bar{r}_W^*$ kommen folglich zwei verschiedene Elemente

$$\{A_1, A_2, A_3, \dots\} \quad \text{und} \quad \{A'_1, A'_2, A'_3, \dots\}$$

von \mathfrak{R}'_W dann und nur dann in dieselbe Restklasse, wenn ihre Grenzwerte übereinstimmen, und daher ist

$$\mathfrak{R}'_W \sim \mathfrak{R} = R'_W.$$

Wir nennen weiterhin den Ring R'_W den zu R gehörigen *perfekten Ring* in bezug auf die Pseudobewertung $W(a)$ von R .

So ist also z. B. der perfekte Ring R'_{W_r} von R in bezug auf die Pseudobewertung $W_r(a)$ gerade isomorph zum Restklassenring R/r , insbesondere für die triviale Pseudobewertung $W_0(a)$ isomorph zu R selbst und für die uneigentliche Pseudobewertung $U(a)$ isomorph zum Nullring (0). Interessanter ist der Fall, dass R'_W kein Unterring von R , sondern eine Erweiterung hiervon wird; dieser Fall liegt z. B. vor, wenn für R der Ring aller ganzen rationalen Zahl, für W die p -adische Bewertung und also für R'_W der Ring aller ganzen p -adischen Zahlen genommen wird, der bekanntlich R als Unterring enthält.

II.

7.) Aus bekannten Pseudobewertungen $W(a)$ eines Ringes R lassen sich auf verschiedene Arten neue Pseudobewertungen gewinnen. So ist z. B. leicht einzusehen, dass mit $W(a)$ auch

$$C W(a) \quad \text{und} \quad W(a)^c$$

Pseudobewertungen sind, wenn C eine Konstante ≥ 1 und c eine positive Zahl ≤ 1 sind. Ist ferner $W(a)$ eine sog. »Nicht-Archimedische« Pseudobewertung, d. h. gilt für jedes Zahlpaar a, b aus R statt (2) die verschärfte Ungleichung

so ist die Potenz $W(a-b) \leq \max(W(a), W(b))$,
 $W(a)^c$

sogar für jeden positiven Exponenten wieder eine Pseudobewertung.

Wichtiger ist das folgende Ergebnis:

»Sind

$$W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$$

endlichviele Pseudobewertungen von R , so ist sowohl

$$W_\Sigma(a) = W_1(a) + W_2(a) + \dots + W_n(a),$$

als auch

$$W_\Sigma^*(a) = \max(W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a))$$

wieder eine Pseudobewertung von R , und zwar eine eigentliche Pseudobewertung, wenn mindestens eine der Funktionen $W_k(a)$ von $U(a)$ verschieden ist.»

Zum Beweis werde ohne Einschränkung angenommen, dass nicht alle Pseudobewertungen

$$W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$$

uneigentlich sind. Dann ist klar, dass

$$W_\Sigma(0) = 0, W_\Sigma(1) > 0,$$

und

$$W_\Sigma^*(0) = 0, W_\Sigma^*(1) > 0,$$

ist. Weiter ist offenbar

$$W_\Sigma(a-b) = \sum_{k=1}^n W_k(a-b) \leq \sum_{k=1}^n (W_k(a) + W_k(b)) = W_\Sigma(a) + W_\Sigma(b),$$

und

$$\begin{aligned} W_\Sigma^*(a-b) &= \max_{k=1, 2, \dots, n} W_k(a-b) \leq \max_{k=1, 2, \dots, n} (W_k(a) + W_k(b)) \leq \\ &\leq \max_{k=1, 2, \dots, n} W_k(a) + \max_{k=1, 2, \dots, n} W_k(b) = W_\Sigma^*(a) + W_\Sigma^*(b); \end{aligned}$$

und ferner

$$W_\Sigma(ab) = \sum_{k=1}^n W_k(ab) \leq \sum_{k=1}^n W_k(a) W_k(b) \leq \sum_{k=1}^n W_k(a) \sum_{k=1}^n W_k(b) = W_\Sigma(a) W_\Sigma(b),$$

und

$$\begin{aligned} W_\Sigma^*(ab) &= \max_{k=1, 2, \dots, n} W_k(ab) \leq \max_{k=1, 2, \dots, n} (W_k(a) W_k(b)) \leq \\ &\leq \max_{k=1, 2, \dots, n} W_k(a) \max_{k=1, 2, \dots, n} W_k(b) = W_\Sigma^*(a) W_\Sigma^*(b), \end{aligned}$$

womit alles bewiesen ist.

Z. B. ist also für den Ring (sogar Körper) der rationalen Zahlen der Ausdruck

$$\max(|a|, e\sqrt{|a|} + \pi\sqrt[3]{|a|})$$

eine Pseudobewertung, da der Absolutbetrag $|a|$ sogar eine Bewertung ist.

8.) Da also nach dem vorigen Paragraph sehr viele Pseudobewertungen eines Ringes existieren können, so entsteht die Aufgabe, die wesentlich unterschiedenen unter denselben zu charakterisieren, und zwar wird man naheliegenderweise mehrere Pseudobewertungen von R als wesentlich verschieden betrachten, wenn sie zu abweichenden Konvergenzverhältnissen bei der Bildung des zugehörigen perfekten Ringes R'_W führen. Der Gleichheitsbegriff, der dies leistet, ist der der »Äquivalenz«, und diesen Äquivalenzbegriff führen wir als Spezialfall des noch allgemeineren Begriffs des »Enthaltenseins« ein. Wir definieren:

Definition 1: Von zwei Pseudobewertungen $W_1(a)$ und $W_2(a)$ von R heisst die erste in der zweiten enthalten, in Zeichen

$$W_1(a) \subset W_2(a), \quad \text{oder kürzer: } W_1 \subset W_2,$$

wenn zu jeder positiven Zahl ε_1 eine positive Zahl ε_2 existiert, so dass die Elemente a aus R mit

$$W_2(a) \leq \varepsilon_2$$

zu gleicher Zeit auch der Ungleichung

$$W_1(a) \leq \varepsilon_1$$

genügen.

Definition 2: Die beiden Pseudobewertungen $W_1(a)$ und $W_2(a)$ von R heissen äquivalent, in Zeichen

$$W_1(a) \sim W_2(a), \quad \text{oder kürzer } W_1 \sim W_2,$$

wenn gleichzeitig

$$W_1(a) \subset W_2(a) \quad \text{und} \quad W_2(a) \subset W_1(a)$$

ist.

Die folgenden zwei Sätze zeigen, dass sich diese Definitionen noch durch etwas einfachere ersetzen lassen:

»Dann und nur dann ist $W_1(a) \subset W_2(a)$, wenn jede unendliche Folge

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

von Elementen aus R mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_2(a_n) = 0$$

auch der Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_1(a_n) = 0$$

genügt.»

»Dann und nur dann ist $W_1(a) \sim W_2(a)$, wenn für alle unendlichen Folgen

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

die eine der beiden Beziehungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_1(a_n) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} W_2(a_n) = 0$$

erfüllen, stets auch die andere erfüllt wird.»

Es genügt offenbar, allein den ersten Satz zu beweisen, und zwar kann man sich darauf beschränken, nachzuweisen, dass die angegebene Bedingung hinreichend ist, d. h. dass nicht $W_1(a) \subset W_2(a)$ sein kann, wenn dieselbe nicht erfüllt ist. (Es ist klar nach Definition, dass dieselbe notwendig ist).

Wenn nun aber nicht $W_1(a) \subset W_2(a)$ ist, so existiert eine positive Zahl ε_1 , so dass für keine positive Zahl ε_2 alle Elemente a aus R mit

$$W_2(a) \leq \varepsilon_2$$

auch der Ungleichung

$$W_1(a) \leq \varepsilon_1$$

genügen. Demnach gibt es eine unendliche Folge

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

von Zahlen aus R , so dass der Reihe nach

$$W_2(a_m) \leq \frac{1}{m} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

dagegen

$$W_1(a_m) \geq \varepsilon_1 \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

ist, und also strebt in diesem Fall wohl die reelle Zahlfolge

$$W_2(a_1), W_2(a_2), W_2(a_3), \dots$$

nicht aber die zweite reelle Folge

$$W_1(a_1), W_1(a_2), W_1(a_3), \dots$$

gegen Null. Daraus folgt die Behauptung.

9.) Seien $W_1(a)$ und $W_2(a)$ zwei Pseudobewertungen von R , von denen die erste in der zweiten enthalten ist. Wenn dann

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

eine Fundamentalfolge in bezug auf $W_2(a)$ ist, so gibt es nach Definition zu jeder positiven Zahl ε_2 eine natürliche Zahl $p = p(\varepsilon_2)$, so dass

$$W_2(a_m - a_n) \leq \varepsilon_2 \quad \text{für } m \geq p(\varepsilon_2), n \geq p(\varepsilon_2)$$

ist. Sei nun ε_1 irgend eine positive Zahl; dann können wir nach der Definition des Enthaltenseins eine positive Zahl ε_2 finden, so dass aus

$$W_2(a) \leq \varepsilon_2$$

die Ungleichung

$$W_1(a) \leq \varepsilon_1$$

für alle a aus R folgt. Durch diese Wahl wird $p = p(\varepsilon_2) = p'(\varepsilon_1)$ eine Funktion von ε_1 , und es folgt, dass

$$W_1(a_m - a_n) \leq \varepsilon_1 \quad \text{für } m \geq p'(\varepsilon_1), n \geq p'(\varepsilon_1)$$

ist und

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

auch eine Fundamentalfolge in bezug auf $W_1(a)$ darstellt.

Aus der Existenz von

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m (W_2)$$

folgt demnach auch die Existenz von

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m (W_1),$$

und darüber hinaus zeigt der schon bewiesene Hilfssatz, dass für zwei verschiedene unendliche Folgen

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad \text{und} \quad a'_1, a'_2, a'_3, \dots$$

aus der Gleichung

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} a'_m (W_2)$$

auch die Gleichung

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} a'_m (W_1)$$

folgt.

Insbesondere ist hiernach nur dann

$$a \equiv a' \pmod{r_{W_2}},$$

wenn auch

$$a \equiv a' \pmod{r_{W_1}}$$

ist.

Diese drei Aussagen zeigen, dass das Ideal r_{W_1} ein Teiler des Ideals r_{W_2} , und daher der Ring R_{W_1} im Ring R_{W_2} und ferner der Ring R'_{W_1} im Ring R'_{W_2} enthalten oder genauer einem Unterring des letzteren isomorph ist. Im Fall

$$W_1(a) \sim W_2(a)$$

stimmt insbesondere r_{W_1} mit r_{W_2} , R_{W_1} mit R_{W_2} und R'_{W_1} mit R'_{W_2} überein, so dass die Theorie der Grenzwerte für äquivalente Pseudobewertungen genau dieselbe ist.

Betrachten wir z. B. die zu zwei verschiedenen Idealen r_1 und r_2 von R gehörigen Pseudobewertungen $W_{r_1}(a)$ und $W_{r_2}(a)$, so ist dann und nur dann

$$W_{r_1}(a) \subset W_{r_2}(a),$$

wenn r_1 ein Teiler von r_2 ist, und beide Pseudobewertungen sind allein dann äquivalent, wenn die erzeugenden Ideale übereinstimmen. Weiter ist offenbar die uneigentliche Pseudobewertung $U(a)$ in jeder anderen Pseudobewertung des Ringes und umgekehrt wieder jede der letzteren in der trivialen Pseudobewertung $W_0(a)$ enthalten.

Wird ferner für R der Ring aller ganzen rationalen Zahlen genommen, so sind seine beiden Pseudobewertungen $W_0(a)$ und $|a|$ offenbar äquivalent; *es ist also möglich, dass eine Nicht-Archimedische Pseudobewertung, nämlich $W_0(a)$, zu einer Archimedischen, nämlich $|a|$, äquivalent ist!* Es ist mir nicht bekannt, ob eine solche Äquivalenz zwischen einer Nicht-Archimedischen und einer Archimedischen Pseudobewertung auch dann noch möglich ist, wenn keine von beiden äquivalent einer Pseudobewertung der speziellen Gestalt $W_r(a)$ ist.

Interessant ist auch das folgende Beispiel: Für R werde der reellquadratische Zahlkörper $\mathfrak{K}(\sqrt{2})$ genommen; das zu einem Element α hiervon konjugierte Element werde mit α' bezeichnet. Dann definieren

$$\Omega(\alpha) = |\alpha| \quad \text{und} \quad \Omega'(\alpha) = |\alpha'|$$

zwei offenbar *nichtäquivalente* Pseudobewertungen von R , und die zugehörigen perfekten Ringe R'_Ω und $R'_{\Omega'}$ sind beide zum Ring aller reellen Zahlen und also auch *zueinander isomorph*, aber natürlich nicht *bewertungsisomorph*.

10.) Der Äquivalenzbegriff ist offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv, der Begriff des Enthaltenseins nur reflexiv und transitiv. Ist ferner

$$W_1(a) \sim W_2(a), \quad W'_1(a) \sim W'_2(a)$$

und

$$W_1(a) \subset W'_1(a),$$

so gilt auch

$$W_2(a) \subset W'_2(a).$$

Auf Grund dieser Gesetze ist es erlaubt, zu einander äquivalente Pseudobewertungen in eine Klasse zusammenzufassen, und man kann davon sprechen, dass zwei Klassen übereinstimmen, oder dass eine Klasse in der anderen enthalten ist.

Bei dieser Klasseneinteilung kommen alsdann mit $W(a)$ auch

$$C W(a) \quad \text{und} \quad W(a)^c,$$

wo $C \geq 1$ und c mit $0 < c \leq 1$ (beziehungsweise für Nicht-Archimedische Pseudobewertungen nur $c > 0$) Konstante sind, in die gleiche Klasse, denn es ist leicht einzusehen, dass die so abgeleiteten Pseudobewertungen wieder zur ursprünglichen äquivalent sind.

Sind weiter $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$ irgendwelche endlichvielen Pseudobewertungen von R , so bestimmt ihre Summe

$$W_\Sigma(a) = W_1(a) + W_2(a) + \dots + W_n(a)$$

eine ganz bestimmte Klasse, welche die *Summenklasse* heisse. Diese Summenklasse hängt allein von den Klassen der einzelnen Summanden und nicht von den Summanden selbst ab; denn sind $W'_1(a), W'_2(a), \dots, W'_n(a)$ irgend n Pseudobewertungen von R mit

$$W_h(a) \sim W'_h(a) \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

so zeigt man leicht, dass

$$W_\Sigma(a) \sim W'_1(a) + W'_2(a) + \dots + W'_n(a)$$

ist. Entsprechenderweise folgt aus den Relationen

$$W_h(a) \subset W'_h(a) \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

die Beziehung

$$W_\Sigma(a) \subset W'_1(a) + W'_2(a) + \dots + W'_n(a).$$

Aus der leicht zu beweisenden Äquivalenz

$$W_{\Sigma}(a) \sim \max(W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a))$$

ergibt sich, dass die Summenklasse auch durch Bilden des Maximums gewonnen werden kann.

Man zeigt weiter unschwer die Beziehungen

$$W_h(a) \subset W_1(a) + W_2(a) + \dots + W_n(a) \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

aus denen insbesondere für

$$W_h(a) \subset W_n(a) \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

die Äquivalenz

$$W_n(a) \sim W_1(a) + W_2(a) + \dots + W_n(a)$$

hervorgeht; es existiert also eine zu $W_n(a)$ äquivalente Pseudobewertung, die für kein Element a aus R von einer der zu $W_n(a)$ äquivalenten oder hierin enthaltenen Pseudobewertungen $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$ übertroffen wird.

Aus den vorigen Sätzen ergibt sich z. B., dass die früher erwähnte Pseudobewertung

$$\max(|a|, e\sqrt{|a|} + \pi\sqrt[3]{|a|})$$

des Körpers der rationalen Zahlen äquivalent zu $|a|$ ist.

II.) Wenn R die endlichvielen Pseudobewertungen $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$ besitzt, so interessieren vor allem diejenigen unendlichen Folgen

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

von Elementen aus R , die gleichzeitig in bezug auf diese sämtlichen Pseudobewertungen Fundamentalfolgen sind. Wie leicht einzusehen, ist dazu notwendig und hinreichend, dass die betreffende Folge auch eine Fundamentalfolge in bezug auf die Summen-Pseudobewertung

$$W_{\Sigma}(a) = W_1(a) + W_2(a) + \dots + W_n(a)$$

ist. Der Ring $R_{W_{\Sigma}}^*$ ist demnach in jedem der Ringe $R_{W_1}^*, R_{W_2}^*, \dots, R_{W_n}^*$ enthalten.

Weiter sind die Gleichungen $W_1(a) = W_2(a) = \dots = W_n(a) = 0$ offenbar dann und nur dann erfüllt, wenn $W_{\Sigma}(a) = 0$ ist. Somit ist das zu $W_{\Sigma}(a)$ gehörige Ideal gleich dem Durchschnitt

$$\mathfrak{r}_{W_{\Sigma}} = [\mathfrak{r}_{W_1}, \mathfrak{r}_{W_2}, \dots, \mathfrak{r}_{W_n}]$$

der zu den $W_h(a)$ gehörigen Ideale \mathfrak{r}_{W_h} ; umgekehrt wird der Restklassenring $R_{W_\Sigma} = R/\mathfrak{r}_{W_\Sigma}$ gleich der Summe der Ringe $R_{W_1}, R_{W_2}, \dots, R_{W_n}$, in dem Sinn, dass R_{W_Σ} jeden der R_{W_h} als Unterring enthält. Über den perfekten Ring R'_{W_Σ} lässt sich dagegen im allgemeinen nur aussagen, dass er einen zu dem Durchschnitt der perfekten Ringe $R'_{W_1}, R'_{W_2}, \dots, R'_{W_n}$ isomorphen Unterring besitzt.

Wenden wir die Summenbildung z. B. auf die speziellen Pseudobewertungen $W_{\mathfrak{r}_1}(a), W_{\mathfrak{r}_2}(a), \dots, W_{\mathfrak{r}_n}(a)$ an, wo $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_n$ Ideale aus R sind, so wird gerade

$$W_{\mathfrak{r}_1}(a) + W_{\mathfrak{r}_2}(a) + \dots + W_{\mathfrak{r}_n}(a) \sim W_{\mathfrak{r}}(a),$$

wobei \mathfrak{r} den Durchschnitt

$$\mathfrak{r} = [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_n]$$

bezeichnet.

12.) Im übernächsten Paragraph werden wir Gebrauch machen von dem folgenden einfachen Hilfssatz:

»Sei $W(a)$ eine beliebige Pseudobewertung von R ,

$$o_1, o_2, o_3, \dots$$

eine unendliche Folge von Zahlen aus R mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(o_n) = 0,$$

und

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

eine zweite ganz beliebige Folge von Zahlen aus R . Dann gibt es eine unendliche Teilfolge

$$o_{v_1}, o_{v_2}, o_{v_3}, \dots \quad (v_1 < v_2 < v_3 < \dots)$$

der ersten Folge, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(o_{v_n} a_n) = 0$$

ist.»

Denn es ist offenbar möglich, die Teilfolge so auszuwählen, dass

$$W(o_{v_n}) \leq \frac{1}{W(a_n)n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

wird; hieraus folgt aber

$$W(o_{v_n} a_n) \leq \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

und damit die Behauptung.

13.) *Definition 3:* Die Pseudobewertungen $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$ heißen von einander unabhängig, wenn es zu jedem System von ebenso vielen Zahlen $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ aus R eine unendliche Folge

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

aus R gibt, die den n Bedingungen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_h(a^{(h)} - a_m) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

genügt.

Auf Grund dieser Definition existiert also insbesondere zu jedem der Indizes $k = 1, 2, \dots, n$ eine unendliche Folge

$$d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, d_3^{(k)}, \dots$$

aus R mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_h(\delta_{hk} - d_m^{(k)}) = 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, n).$$

Dabei ist wie üblich

$$\delta_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{für } h = k, \\ 0 & \text{für } h \neq k. \end{cases}$$

Umgekehrt reicht die Existenz dieser Folgen $d_m^{(k)}$ aus, damit die betreffenden Pseudobewertungen von einander unabhängig sind. Denn wird für n beliebige Zahlen $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ aus R

$$a_m = \sum_{k=1}^n a^{(k)} d_m^{(k)} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

gesetzt, so ist

$$a^{(h)} - a_m = \sum_{k=1}^n (a^{(k)} \delta_{hk} - a^{(k)} d_m^{(k)}) \quad \left(\begin{matrix} h = 1, 2, \dots, n \\ m = 1, 2, 3, \dots \end{matrix} \right),$$

also

$$W_h(a^{(h)} - a_m) \leq \sum_{k=1}^n W_h(a^{(k)}) W_h(\delta_{hk} - d_m^{(k)}) \quad \left(\begin{matrix} h = 1, 2, \dots, n \\ m = 1, 2, 3, \dots \end{matrix} \right),$$

und demnach in der Tat

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_h(a^{(h)} - a_m) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Die *Unabhängigkeit* von Pseudobewertungen ist eine *Klasseneigenschaft*: Sind $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$ unabhängig und $W'_1(a), W'_2(a), \dots, W'_n(a)$ gleichviele andere Pseudobewertungen mit

$$W_h(a) \sim W'_h(a) \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

so bilden auch $W'_1(a), W'_2(a), \dots, W'_n(a)$ ein unabhängiges System. Diese Eigenschaft folgt in der Tat sogleich aus der Definition der Äquivalenz und der der Unabhängigkeit.

Es ist trivial, dass *jedes Teilsystem eines Systems von endlich vielen unabhängigen Pseudobewertungen wieder unabhängig* ist. Auf die umgekehrte Frage, ob eine Anzahl von Pseudobewertungen unabhängig ist, wenn jede Teilanzahl von ihnen es ist, werden wir später zu sprechen kommen.

Offenbar kann ein System von endlichvielen Pseudobewertungen und zwar von mindestens zweien nicht unabhängig sein, wenn unter ihnen die triviale Pseudobewertung $W_0(a)$ oder zwei einander äquivalente Pseudobewertungen oder noch allgemeiner eine Pseudobewertung und eine zweite in ihr enthaltene auftreten.

Betrachten wir als ein Beispiel endlichviele Pseudobewertungen der speziellen Gestalt $W_{r_1}(a), W_{r_2}(a), \dots, W_{r_n}(a)$, so sind dieselben offenbar dann und nur dann unabhängig, wenn die zugehörigen Ideale r_1, r_2, \dots, r_n teilerfremd sind:

$$(r_1, r_2, \dots, r_n) = (1).$$

14.) Die Summe von endlichvielen Pseudobewertungen

$$W_{\Sigma}(a) = W_1(a) + W_2(a) + \dots + W_n(a)$$

werde im folgenden stets dann »direkte Summe« von $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$ genannt, wenn die letzteren Funktionen *unabhängig* sind. Für solche direkten Summen lässt sich der zugehörige perfekte Ring $R'_{W_{\Sigma}}$ in sehr einfacher Weise als Funktion der perfekten Ringe $R'_{W_1}, R'_{W_2}, \dots, R'_{W_n}$ explizit angeben.

Dazu zeigen wir zunächst den Satz:

»Seien $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$ unabhängige Pseudobewertungen des Ringes R , und seien ferner

$$a_1^{(h)}, a_2^{(h)}, a_3^{(h)}, \dots \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

n unendliche Folgen aus R , so dass für $h = 1, 2, \dots, n$ die h -te dieser Folgen in bezug auf die h -te Pseudobewertung $W_h(a)$ eine Fundamentalfolge ist und also im perfekten Ring R'_{W_h} einen Grenzwert

$$A^{(h)} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m^{(h)}(W_h) \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

besitzt. Dann gibt es eine unendliche Folge

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

aus R , die gleichzeitig in bezug auf sämtliche n Pseudobewertungen eine Fundamentalfolge ist und die Grenzwerte

$$A^{(h)} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m(W_h) \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

hat. »

Beweis: Zur Abkürzung werde

$$W_h^*(a) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n W_k(a) \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

gesetzt. Nach § 13 existieren wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Pseudobewertungen n Folgen

$$d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, d_3^{(k)}, \dots \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_h(d_{hk} - d_m^{(k)}) = 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, n);$$

oder, was dasselbe besagt, mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_h(1 - d_m^{(h)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} W_h^*(d_m^{(h)}) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Nach dem Hilfssatz aus § 12 lässt sich aus der h -ten dieser Folgen eine unendliche Teilfolge

$$d_{\nu_1}^{(h)}, d_{\nu_2}^{(h)}, d_{\nu_3}^{(h)}, \dots \quad \left(\begin{array}{l} h = 1, 2, \dots, n \\ \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots \end{array} \right)$$

so auswählen, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_h^*(a_m^{(h)} d_{\nu_m}^{(h)}) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

und somit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_k(a_m^{(h)} d_{\nu_m}^{(h)}) = 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, n; h \neq k),$$

oder, was dasselbe besagt,

$$\{0\} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m^{(h)} d_{\nu_m}^{(h)}(W_k) \quad (h, k = 1, 2, \dots, n; h \neq k)$$

ist. Andererseits ist natürlich der Grenzwert

$$A^{(h)} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m^{(h)} d_{\nu_m}^{(h)}(W_h) \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

der gleiche wie der der Folge

$$a_1^{(h)}, a_2^{(h)}, a_3^{(h)}, \dots \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

da ja

$$\{1\} = \lim_{m \rightarrow \infty} d_{\nu^{(h)}}^{(h)} \left(W_h \right) \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

ist.

Setzen wir jetzt

$$a_m = \sum_{k=1}^n a_m^{(k)} d_{\nu^{(k)}}^{(k)} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

so bekommen wir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m^{(h)} d_{\nu^{(h)}}^{(h)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \lim_{m \rightarrow \infty} a_m^{(k)} d_{\nu^{(k)}}^{(k)} \left(W_h \right),$$

und also wirklich

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \mathcal{A}^{(h)} + \{0\} = \mathcal{A}^{(h)} \left(W_h \right) \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

wie gezeigt werden sollte.

15.) Nunmehr lässt sich der folgende Satz beweisen:

»Sind $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$ unabhängige Pseudobewertungen des Ringes R und ist $W_\Sigma(a)$ ihre direkte Summe, so lässt sich der zu $W_\Sigma(a)$ gehörige perfekte Ring R'_{W_Σ} als direkte Summe der perfekten Ringe $R'_{W_1}, R'_{W_2}, \dots, R'_{W_n}$ darstellen.»

Zum Beweis bedeute \mathcal{A} irgend ein Element aus R'_{W_Σ} ; es gibt demnach eine Fundamentalfolge

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

aus R in bezug auf $W_\Sigma(a)$ mit dem Grenzwert

$$\mathcal{A} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m \left(W_\Sigma \right).$$

Diese Folge ist erst recht eine Fundamentalfolge in bezug auf die Pseudobewertungen $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$, und es gibt demnach ein Element $\mathcal{A}^{(1)}$ aus R'_{W_1} , ein Element $\mathcal{A}^{(2)}$ aus R'_{W_2} , u.s.w., endlich ein Element $\mathcal{A}^{(n)}$ aus R'_{W_n} , so dass gleichzeitig

$$\mathcal{A}^{(h)} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m \left(W_h \right) \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

ist. Diese n Grenzwerte $\mathcal{A}^{(1)}, \mathcal{A}^{(2)}, \dots, \mathcal{A}^{(n)}$ sind eindeutig durch \mathcal{A} bestimmt; denn ist

$$\{a'_1, a'_2, a'_3, \dots\}$$

eine zweite Fundamentalfolge mit

$$A = \lim_{m \rightarrow \infty} a'_m (W_\Sigma),$$

so ist nach Definition

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_\Sigma (a_m - a'_m) = 0$$

und folglich erst recht

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_h (a_m - a'_m) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

also auch

$$A^{(h)} = \lim_{m \rightarrow \infty} a'_m (W_h) \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Ist umgekehrt der Reihe nach $A^{(1)}$ ein Element aus R'_{W_1} , $A^{(2)}$ ein Element aus R'_{W_2} , ..., $A^{(n)}$ ein Element aus R'_{W_n} , so existiert nach dem vorigen Paragraphen eine unendliche Folge

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

von Zahlen aus R , die in bezug auf sämtliche Pseudobewertungen $W_1(a)$, $W_2(a)$, ..., $W_n(a)$ Fundamentalfolge ist und die Grenzwerte

$$A^{(h)} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m (W_h) \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

besitzt. Diese Folge ist auch eine Fundamentalfolge in bezug auf $W_\Sigma(a)$ und hat demnach in R'_{W_Σ} einen gewissen Grenzwert

$$A = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m (W_\Sigma),$$

und zwar ist derselbe durch $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ..., $A^{(n)}$ eindeutig bestimmt; denn ist

$$a'_1, a'_2, a'_3, \dots$$

eine zweite unendliche Folge aus R mit

$$A^{(h)} = \lim_{m \rightarrow \infty} a'_m (W_h) \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

so wird

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_h (a_m - a'_m) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

folglich auch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_{\Sigma}(a_m - a'_m) = 0$$

und also in der Tat

$$A = \lim_{m \rightarrow \infty} a'_m(W_{\Sigma}).$$

Damit ist eine umkehrbar-eindeutige Beziehung

$$A \leftrightarrow (A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)})$$

zwischen den Elementen A von $R'_{W_{\Sigma}}$ und den Systemen von je einem Element $A^{(1)}$ aus R'_{W_1} , $A^{(2)}$ aus R'_{W_2} , ..., $A^{(n)}$ aus R'_{W_n} abgeleitet worden. Ist B ein zweites Element aus $R'_{W_{\Sigma}}$ und in entsprechender Weise

$$B \leftrightarrow (B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(n)}),$$

so ist nach den Eigenschaften der Grenzwerte klar, dass

$$A + B \leftrightarrow (A^{(1)} + B^{(1)}, A^{(2)} + B^{(2)}, \dots, A^{(n)} + B^{(n)}),$$

$$A - B \leftrightarrow (A^{(1)} - B^{(1)}, A^{(2)} - B^{(2)}, \dots, A^{(n)} - B^{(n)}),$$

$$AB \leftrightarrow (A^{(1)} B^{(1)}, A^{(2)} B^{(2)}, \dots, A^{(n)} B^{(n)})$$

sein muss. Betrachten wir ferner speziell nur die Elemente

$$A \leftrightarrow (A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)})$$

aus $R'_{W_{\Sigma}}$, für die die zugeordneten Zahlen $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$ mit Ausnahme höchstens der h -ten Zahl $A^{(h)}$ verschwinden, so bilden dieselben einen Unterring von $R'_{W_{\Sigma}}$, der offenbar zu R'_{W_h} isomorph ist; dabei darf h alle Indizes $1, 2, \dots, n$ durchlaufen.

Die so nachgewiesenen Eigenschaften von $R'_{W_{\Sigma}}$ drücken gerade das aus, was wir beweisen wollten, nämlich dass dieser Ring die direkte Summe von $R'_{W_1}, R'_{W_2}, \dots, R'_{W_n}$ ist.

Nehmen wir als Beispiel n unabhängige Pseudobewertungen der speziellen Gestalt $W_{r_1}(a), W_{r_2}(a), \dots, W_{r_n}(a)$, wo r_1, r_2, \dots, r_n teilerfremde Ideale von R sind, so wird ihre Summe isomorph zu $W_r(a)$, wo r den Durchschnitt dieser Ideale bezeichnet. Wegen

$$R'_{W_r} = R_{W_r} = R/r, \quad R'_{W_{r_h}} = R_{W_{r_h}} = R/r_h \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

kommen wir also in diesem Spezialfall zu dem bekannten Satz, dass der Durchschnitt r von n teilerfremden Idealen r_1, r_2, \dots, r_n einen Restklassenring R/r erzeugt, der die direkte Summe der zu den einzelnen Idealen gehörigen Restklassenringe $R/r_1, R/r_2, \dots, R/r_n$ ist.

16.) Der Nachweis, dass ein System von Pseudobewertungen eines Ringes unabhängig ist, kann unter Umständen recht schwierig sein, und führt z. B. im Fall der Hauptordnung endlicher algebraischer Zahlkörper bereits auf ein gar nicht triviales Problem.

Sei etwa \mathfrak{K} ein endlicher algebraischer Zahlkörper n -ten Grades, den wir der Einfachheit halber als totalreell annehmen wollen, und bedeute ferner \mathfrak{R} den Ring aller in \mathfrak{K} enthaltenen ganzen algebraischen Zahlen. Alsdann besitzt jedes Element α aus \mathfrak{R} genau n konjugierte Zahlen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$, unter denen es natürlich vorkommt, und die Absolutbeträge

$$\Omega^{(h)}(\alpha) = |\alpha^{(h)}| \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

definieren sogar n Bewertungen und nicht nur Pseudobewertungen des Ringes. Wir wollen noch annehmen, dass der Grad $n \geq 3$ ist, da die beiden niedrigeren Fälle von trivialerer Art sind.

Wegen $n > 1$ gibt es alsdann Elemente $\alpha \neq 0$ aus \mathfrak{R} , für die $\Omega^{(h)}(\alpha)$ kleiner als eine irgendwie gegebene positive Zahl wird; die n Bewertungen $\Omega^{(h)}(\alpha)$ sind also sämtlich nicht zur trivialen Bewertung äquivalent. Dagegen hat bekanntlich das Ungleichungssystem

$$\Omega^{(h)}(\alpha) < 1 \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

als einzige Lösung in \mathfrak{R} die Zahl 0; somit ergibt sich erst recht die bemerkenswerte Äquivalenz

$$\Omega^{(1)}(\alpha) + \Omega^{(2)}(\alpha) + \dots + \Omega^{(n)}(\alpha) \sim W_0(\alpha).$$

Andrerseits ist jeder der perfekten Ringe

$$\mathfrak{R}'_{\Omega^{(h)}} \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

offenbar zum Ring aller reellen Zahlen isomorph; die direkte Summe dieser Ringe enthält daher einen zum Ring aller reellen Zahlen isomorphen Unterring, und ist somit gewiss nicht isomorph zu \mathfrak{R} . Da aber der zur trivialen Bewertung gehörige perfekte Ring isomorph zu \mathfrak{R} selbst ist, so folgt nach dem Hauptsatz des letzten Paragraphen, dass *die n verschiedenen Bewertungen*

$$\Omega^{(1)}(\alpha), \Omega^{(2)}(\alpha), \dots, \Omega^{(n)}(\alpha)$$

von \Re sicher nicht unabhängig sein können.

Irgend ein System von $n - 1$ dieser Bewertungen, z. B.

$$\Omega^{(1)}(\alpha), \Omega^{(2)}(\alpha), \dots, \Omega^{(n-1)}(\alpha),$$

ist dagegen wohl unabhängig. Denn sind $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_{n-1}$ irgend $n - 1$ reelle Zahlen, so lässt sich mittels des KRONECKERSCHEN Approximationsatzes oder auch mit Hilfe der bekannten WEYLSCHEN Sätze über die Gleichverteilung von Linearformen mit irrationalen Koeffizienten zeigen, dass es zu jeder positiven Zahl ε eine Zahl α aus \Re gibt, so dass gleichzeitig

$$|\alpha^{(h)} - \mathfrak{P}_h| \leq \varepsilon \quad (h = 1, 2, \dots, n - 1)$$

ist, und hieraus ergibt sich die behauptete Unabhängigkeit der vorigen Pseudobewertungen.

Das Beispiel ist darum bemerkenswert, weil es zeigt, dass ein Ring ein endliches System von Pseudobewertungen, ja sogar Bewertungen, haben kann, die selbst nicht unabhängig sind, während jedes Teilsystem von ihnen es ist. Damit wird die in § 13 aufgeworfene Frage in verneinendem Sinne beantwortet.

17.) Seltsamerweise gilt dagegen der folgende Satz:

»Sei R ein Körper und $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$ ein System von endlichvielen Bewertungen desselben, mit der Eigenschaft, dass jedes Untersystem von zweien dieser Bewertungen unabhängig ist. Dann ist das Gesamtsystem auch unabhängig.»

Beweis: Der Satz ist trivialerweise richtig, wenn $n \leq 2$ ist; wir dürfen daher annehmen, dass $n \geq 3$ und der Satz schon für alle Systeme aus $n - 1$ Bewertungen bewiesen ist, und haben ihn dann für Systeme aus n Bewertungen nachzuweisen. Nach der Bemerkung in § 13 und wegen der vollen Symmetrie des Bewertungssystems genügt es hierzu, eine unendliche Folge

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

von Zahlen aus R zu konstruieren, so dass gleichzeitig

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_1(a_m - 1) = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} W_h(a_m) = 0 \quad (h = 2, 3, \dots, n)$$

ist. Wegen der Richtigkeit des Satzes für Systeme aus $n - 1$ Bewertungen gibt es jedenfalls zwei unendliche Folgen

b_1, b_2, b_3, \dots und c_1, c_2, c_3, \dots

aus R , die den geringeren Forderungen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_1(b_m - 1) = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} W_h(b_m) = 0 \quad (h = 3, 4, \dots, n)$$

und

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_1(c_m - 1) = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} W_h(c_m) = 0 \quad (h = 2, 4, \dots, n)$$

genügen. Es können jetzt zwei Fälle eintreten:

Es ist erstens möglich, dass eine unendliche Teilfolge

$$b_{\mu_1}, b_{\mu_2}, b_{\mu_3}, \dots$$

der b -Folge existiert, für die die zugeordneten reellen Zahlen

$$W_2(b_{\mu_m}) \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

beschränkt sind. In diesem Fall lässt sich aus dieser Teilfolge nach dem Hilfssatz in § 12 eine weitere Teilfolge

$$b_{\nu_1}, b_{\nu_2}, b_{\nu_3}, \dots$$

so auswählen, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_3(b_{\nu_m} c_m) = 0$$

ist. Setzen wir nun

$$a_m = b_{\nu_m} c_m \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

so wird in der Tat

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_1(a_m - 1) = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} W_h(a_m) = 0 \quad (h = 2, 3, \dots, n).$$

Zweitens kann die b -Folge die Eigenschaft

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_2(b_m) = \infty, \quad \text{also} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} W_2\left(\frac{1}{b_m}\right) = 0$$

besitzen. Dies ist aber nur möglich, wenn der Körper R unendlichviele Elemente besitzt, und es gibt in ihm daher ein von 0 und -1 verschiedenes Element b . Bilden wir die neue Folge

$$b_m^* = \frac{(b + 1) b_m}{b_m + b} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

so können höchstens endlichviele Elemente derselben sinnlos werden, indem der Nenner verschwindet, und diese dürfen wir ohne Einschränkung fortlassen. Nach den Voraussetzungen über die b -Folge wird alsdann

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_1(b_m^* - 1) = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} W_2(b_m^* - b - 1) = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} W_h(b_m^*) = 0 \quad (h = 3, 4, \dots, n).$$

Wieder auf Grund des Hilfssatzes in § 12 lässt sich eine unendliche Teilfolge

$$b_{v_1}^*, b_{v_2}^*, b_{v_3}^*, \dots$$

aus der neuen Folge so auswählen, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_3(b_{v_m}^* c_m) = 0$$

ist. Wird

$$a_m = b_{v_m}^* c_m \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

gesetzt, so ergibt sich jetzt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_1(a_m - 1) = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} W_h(a_m) = 0 \quad (h = 2, 3, \dots, n),$$

und also folgt die Behauptung.

Es ist nicht schwer, mit einer ähnlichen Schlussweise den allgemeineren, aber auch viel umständlicheren folgenden Satz zu beweisen:

»Die n Pseudobewertungen $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$ des Ringes R seien zu je zweien unabhängig. Wenn ferner eine unendliche Folge aus R :

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

in bezug auf eine oder mehrere dieser Pseudobewertungen, etwa in bezug auf $W_{h_1}(a), \dots, W_{h_g}(a)$, eine Fundamentalfolge ist, so gebe es immer eine weitere unendliche Folge

$$a'_1, a'_2, a'_3, \dots$$

aus R , die in bezug auf $W_{h_1}(a), \dots, W_{h_g}(a)$ ebenfalls Fundamentalfolge und zwar mit den gleichen Grenzwerten wie die erste Folge ist, während ferner die Zahlen

$$W_h(a'_m) \quad \left(\begin{array}{l} h \neq h_1, \dots, h_g \\ m = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right)$$

alle beschränkt bleiben. Dann sind die sämtlichen Pseudobewertungen auch unabhängig.»

III.

18.) Wenn ein beliebiger Ring R vorgegeben ist, so entsteht in jedem Fall das Problem, seine sämtlichen nichtäquivalenten Pseudobewertungen, und falls R ein Integritätsbereich ist, speziell seine Bewertungen anzugeben. Alsdann interessieren ferner die Beziehungen der nichtäquivalenten Pseudobewertungen untereinander, also die Frage, ob eine von ihnen in einer anderen enthalten ist, oder ob eine von ihnen sich als Summe oder sogar als direkte Summe von anderen darstellen lässt.

Besonders das erste Problem, alle nichtäquivalenten Pseudobewertungen eines gegebenen Ringes anzugeben, bietet gewöhnlich ziemliche Schwierigkeiten dar, die ich bisher erst in einigen speziellen Fällen habe lösen können. Einige solche Fälle stelle ich in diesem Kapitel zusammen.

19.) Zu trivialen Ergebnissen gelangt man, wenn man Ringe mit nur endlichvielen Elementen betrachtet. Sei R ein solcher Ring und $W(a)$ eine beliebige Pseudobewertung von R . Es existiert dann das Ideal r_W aller Zahlen a aus R mit $W(a) = 0$, und wie wir in § 3 sahen, hat die Pseudobewertung für alle Elemente derselben Restklasse *mod* r_W den gleichen Wert. Andererseits gibt es natürlich nur endlichviele Restklassen nach dem Ideal, so dass der Wert $W(a)$ für alle nicht in r_W liegenden a grösser als eine feste positive Zahl sein muss. Daraus folgt, dass die Pseudobewertung äquivalent zu $W_{r_W}(a)$ sein muss, wenn wie früher für jedes Ideal r aus R die Funktion

$$W_r(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a \equiv 0 \pmod{r}, \\ 1 & \text{für } a \not\equiv 0 \pmod{r} \end{cases}$$

definiert wird.

Um alle nichtäquivalenten Pseudobewertungen von R zu erhalten, brauchen wir demnach nur die sämtlichen speziellen Pseudobewertungen $W_r(a)$ zu nehmen, wo r durch alle Ideale von R läuft. Da die Anzahl dieser Ideale natürlich endlich ist, so besitzt ein *endlicher Ring* also auch nur *endlich viele nichtäquivalente Pseudobewertungen*.

Sei z. B. f eine beliebige von Eins verschiedene natürliche Zahl und R der Ring aller Restklassen *mod* f im Ring aller ganzen rationalen Zahlen. Bedeutet die natürliche Zahl d einen Teiler von f , so verteilen sich die durch d teilbaren ganzen rationalen Zahlen auf endlichviele Restklassen *mod* f , und diese Restklassen definieren ein Ideal in R , das wir mit (d) bezeichnen. Insbesondere

besteht also (1) aus allen Zahlen von R , während (f) das Nullideal von R ist. Nach dem vorigen Ergebnis hat R keine anderen Pseudobewertungen, als die Funktionen

$$W_{(d)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a \equiv 0 \pmod{d}, \\ 1 & \text{für } a \not\equiv 0 \pmod{d}, \end{cases}$$

wo d durch alle Teiler von f läuft; dabei ist insbesondere

$$W_{(1)}(a) = U(a) \quad \text{und} \quad W_{(f)}(a) = W_0(a).$$

Nimmt man also etwa $f = 20$, so existieren allein die Pseudobewertungen

$$W_{(1)}(a) = U(a), \quad W_{(2)}(a), \quad W_{(4)}(a), \quad W_{(5)}(a), \quad W_{(10)}(a), \quad W_{(20)}(a) = W_0(a),$$

und diese sind mit einander durch die Enthaltensein-Relationen

$$U \subset W_{(2)} \subset W_{(4)} \subset W_0, \quad U \subset W_{(5)} \subset W_{(10)} \subset W_0$$

und die direkten Summen-Darstellungen

$$W_{(10)} \sim W_{(2)} + W_{(5)}, \quad W_0 \sim W_{(4)} + W_{(5)}$$

verknüpft. Man beachte, dass die Pseudobewertung $W_{(4)}(a)$ sich nicht als direkte Summe von zwei Pseudobewertungen darstellen lässt und doch $W_{(2)}(a)$ in ihr enthalten ist.

Falls man Körper R aus nur endlichvielen Elementen betrachtet, so kommt man zu dem noch einfacheren Ergebnis, dass jede Pseudobewertung von R entweder zu $W_0(a)$ oder zu $U(a)$ äquivalent ist; denn ein beliebiger Körper besitzt bekanntlich allein die trivialen Ideale (0) und (1).

20.) Bei Ringen mit unendlichvielen Elementen ist es wesentlich schwieriger, alle nichtäquivalenten Pseudobewertungen wirklich anzugeben. Dabei lassen sich die Körper leichter behandeln, was ja nicht überraschend ist, da in ihnen nur die beiden trivialen Ideale existieren.

In der anschliessenden Arbeit bestimme ich die sämtlichen nichtäquivalenten Pseudobewertungen eines beliebigen *algebraischen Zahlkörpers endlichen Grades*. Sei $R = \mathbb{K}(\mathcal{G})$ ein solcher Zahlkörper, etwa vom Grad n , und seien $R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(n)}$ die zu ihm konjugierten Körper; dabei mögen etwa $R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(r_1)}$ reell und $R^{(r_1+h)}$ und $R^{(r_1+r_2+h)}$ für $h = 1, 2, \dots, r_2$ komplex konjugiert sein. Ist α ein beliebiges Element von R , so bedeute $\alpha^{(l)}$ das hierzu konjugierte Element aus $R^{(l)}$. Die Absolutbeträge

$$\Omega^{(l)}(\alpha) = |\alpha^{(l)}| \quad (l = 1, 2, \dots, r_1 + r_2)$$

definieren alsdann $r_1 + r_2$ nichtäquivalente Bewertungen von R . Ist ferner \mathfrak{p} ein beliebiges Primideal von R und $C > 1$ eine Konstante, so werde unter $|a|_{\mathfrak{p}}$ die \mathfrak{p} -adische Bewertung verstanden, d. h. für $a = 0$ die Zahl 0 und für $a \neq 0$ die Zahl C^f , wenn f diejenige ganze rationale Zahl bezeichnet, für die das Ideal $\mathfrak{p}^f(a)$ zu \mathfrak{p} teilerfremden Zähler und Nenner erhält. Alsdann sind die zu verschiedenen Primidealen gehörigen \mathfrak{p} -adischen Bewertungen nichtäquivalent, während solche Bewertungen mit gleichem Primideal, aber verschiedenem C natürlich äquivalent sind.

Nach einem bekannten Satz von OSTROWSKI ist jetzt jede Bewertung von R , die nicht zu $W_0(a)$ äquivalent ist, zu einer der Absolutbetragbewertungen $\Omega^{(l)}(a)$ oder zu einer der \mathfrak{p} -adischen Bewertungen $|a|_{\mathfrak{p}}$ äquivalent. Mein Ergebnis für die Pseudobewertungen von R lautet, dass *jede nicht zu $W_0(a)$ oder $U(a)$ äquivalente Pseudobewertung des Körpers sich auf eine und nur eine Art als direkte Summe von endlichvielen dieser Bewertungen darstellen lässt*; dabei ist ein System von endlichvielen nicht zu $W_0(a)$ äquivalenten Bewertungen von R , die unter einander nichtäquivalent sind, von selbst unabhängig.

21.) Es ist mir z. Zt. noch nicht geglückt, auch für den Ring aller ganzen algebraischen Zahlen eines Zahlkörpers sämtliche nichtäquivalenten Pseudobewertungen anzugeben. Es ist aber sehr wahrscheinlich, dass in diesem Fall sich jede nicht zu $W_0(a)$ und $U(a)$ äquivalente Pseudobewertung als direkte Summe von endlichvielen Pseudobewertungen

$$\Omega^{(l)}(a), |a|_{\mathfrak{p}}, W_{\mathfrak{p},f}(a)$$

darstellen lässt, wo die Absolutbetragbewertungen $\Omega^{(l)}(a)$ und die \mathfrak{p} -adischen Bewertungen $|a|_{\mathfrak{p}}$ wie im vorigen Paragraphen zu definieren sind, während für jede Potenz \mathfrak{p}^f eines Primideals \mathfrak{p} mit natürlichem Exponenten unter $W_{\mathfrak{p},f}(a)$ die früher definierte Restklassen-Pseudobewertung *mod* \mathfrak{p}^f zu verstehen ist.

Im speziellen Fall des Ringes aller ganzen rationalen Zahlen habe ich diese Vermutung wirklich beweisen können. Hier lässt sich das Ergebnis noch ein wenig einfacher aussprechen. Sei nämlich p eine beliebige natürliche Primzahl und werde alsdann unter $W_{p^\infty}(a)$ für jedes ganze rationale a die p -adische Bewertung

$$W_{p^\infty}(a) = |a|_p,$$

und ferner, wenn f eine natürliche Zahl bezeichnet, unter

$$W_{p^f}(a)$$

die früher eingeführte Restklassenbewertung verstanden. Alsdann lässt sich jede von $W_0(a)$ und $U(a)$ verschiedene Pseudobewertung des Ringes der ganzen rationalen Zahlen darstellen in der Form

$$W(a) \sim W_{p_1 f_1}(a) + W_{p_2 f_2}(a) + \cdots + W_{p_t f_t}(a),$$

wo p_1, p_2, \dots, p_t endlichviele verschiedene Primzahlen, und f_1, f_2, \dots, f_t entweder gleich natürlichen Zahlen oder ∞ sind. Es bestehen die Enthaltensein-Relationen

$$U(a) \subset W_p(a) \subset W_{p^2}(a) \subset W_{p^3}(a) \subset \cdots \subset W_{p^\infty}(a) \subset W_0(a);$$

dagegen sind zwei Pseudobewertungen $W_{p_1 f_1}(a)$ und $W_{p_2 f_2}(a)$, die zu verschiedenen Primzahlen gehören, von einander unabhängig, so dass keine von ihnen in der anderen enthalten ist.

22.) Sei P ein beliebiger Ring und $R = P(z)$ der Ring aller Polynome in einer Unbestimmten z mit Koeffizienten aus P . Es scheint ein recht schwieriges Problem zu sein, die sämtlichen nichtäquivalenten Pseudobewertungen für R zu bestimmen, unter der Voraussetzung, dass diejenigen für P schon bekannt sind. Die Lösung dieser Frage scheint besonders darum wichtig zu sein, weil sie insbesondere zur Bestimmung aller Pseudobewertungen einer beliebigen endlichen algebraischen Erweiterung von P führen würde, da die letzteren offenbar unter den Pseudobewertungen von R enthalten sind.

Es ist nicht schwer, spezielle Pseudobewertungen von R anzugeben. Offenbar definiert eine Pseudobewertung $W(a)$ von R insbesondere eine solche für den Konstantenring P , wenn man sich auf die Polynome vom Grad 0 beschränkt. Diese induzierte Pseudobewertung $\Omega(a)$ von P kann, wie leicht einzusehen, äquivalent zu jeder Pseudobewertung von P sein. Denn ist $\Omega(a)$ eine beliebige Pseudobewertung von P und

$$a(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$$

ein beliebiges Polynom aus R , so definiert die Funktion

$$W(a) = \Omega(a_0) + \Omega(a_1) + \cdots + \Omega(a_m)$$

offenbar eine Pseudobewertung von R . Ist ferner \mathcal{A} irgend ein Element des zu P und $\Omega(a)$ gehörigen perfekten Ringes P'_Ω , so wird auch durch

$$W_A(a) = \Omega(a(A)) = \Omega(\{a_0\} + \{a_1\}A + \cdots + \{a_m\}A^m)$$

eine Pseudobewertung gegeben, und es ist klar, dass man in beiden Fällen für die Elemente des Konstantenringes P gerade zu $\Omega(a)$ zurückkommt.

Weiter lassen sich noch gewisse Pseudobewertungen definieren, die im Konstantenring zur trivialen Pseudobewertung äquivalent sind, und die daher ein besonderes Interesse darbieten. Ist nämlich erstens $p(z)$ ein beliebiges nichtkonstantes Polynom aus R , so definiert die Funktion $W_p(a)$, die für das Nullelement verschwindet, dagegen für ein Element $a \neq 0$ aus R , das genau durch die f -te Potenz von p teilbar ist, den Wert C^{-f} hat, wo $C > 1$ eine Konstante bedeutet, offenbar eine Pseudobewertung. Zweitens bilden die durch p teilbaren Elemente von R ein Ideal (p) , und es lässt sich wieder die hierzu gehörige Restklassenbewertung $W_{(p)}(a)$, die für die Elemente aus (p) verschwindet und sonst gleich 1 ist, herstellen.

Aus allen erwähnten Pseudobewertungen kann man mittels der Summenbildung beliebig viele neue konstruieren. Ob sich auf diese Weise aber alle nicht-äquivalenten Pseudobewertungen von R ergeben, muss dahingestellt bleiben. Jedenfalls scheint diese Vermutung zuzutreffen, wenn für P ein Körper mit nur endlichvielen Elementen genommen wird.

Entsprechende Probleme entstehen, wenn man von einem Körper ausgeht, und den Körper der rationalen Funktionen in z mit P als Konstantenbereich bildet; auch alsdann scheint es im allgemeinen schwierig zu sein, alle Pseudobewertungen aufzufinden.

23.) Seien $W(a)$ und $W_1(a)$ zwei Pseudobewertungen eines Ringes R . Als dann heisse $W_1(a)$ ein Teiler von $W(a)$, in Zeichen

$$W_1(a) \mid W(a),$$

wenn es eine weitere Pseudobewertung $W_2(a)$ von R gibt, so dass $W_1(a)$ und $W_2(a)$ unabhängig sind und

$$W(a) \sim W_1(a) + W_2(a)$$

ist.

Es ist nach Definition der Unabhängigkeit klar, dass $W(a)$ und die uneigentliche Pseudobewertung $U(a)$ gewiss unabhängig sind; wegen

$$W(a) = W(a) + U(a)$$

besitzt daher $W(a)$ stets die beiden uneigentlichen Teiler $W(a)$ und $U(a)$. Jeder Teiler von $W(a)$, der weder zu $W(a)$ noch zu $U(a)$ äquivalent ist, heisse ein

eigentlicher Teiler; ferner werde eine Pseudobewertung irreduzibel genannt, wenn sie keine eigentlichen Teiler besitzt.

Ist $W_1(a) | W(a)$, so gilt offenbar auch $W_1(a) \subset W(a)$. Dagegen folgt aus $W_1(a) \subset W(a)$ nicht unbedingt auch $W_1(a) | W(a)$. Denn z. B. im Falle des Ringes aller ganzen rationalen Zahlen sind die zu einer Primzahl p gehörigen Pseudobewertungen

$$W_{p^f}(a) \quad (f = 1, 2, 3, \dots, \infty)$$

alle irreduzibel, während andererseits

$$W_{p^f}(a) \subset W_{p^g}(a) \text{ für } f < g$$

ist.

Jede Bewertung eines Ringes R ist irreduzibel. Denn besitzt der Ring R die Bewertung $W(a)$, so ist er nach § 1 gewiss ein Integritätsbereich, lässt sich also zu einem Körper Q mit der fortgesetzten Bewertung $W(a)$ erweitern. Als dann ist leicht einzusehen, dass der perfekte Ring R'_W in dem perfekten Körper Q'_W enthalten und also frei von Nullteilern ist. Wäre nun $W(a)$ die direkte Summe zweier eigentlichen Teiler, so könnte nach dem Ergebnis aus § 15 der perfekte Ring R'_W als direkte Summe zweier Ringe, von denen keiner nur aus der Null bestände, dargestellt werden und besäße also Nullteiler, was zu einem Widerspruch führt.

Umgekehrt braucht nicht jede irreduzible Pseudobewertung eines Ringes einer Bewertung äquivalent zu sein; dies zeigt z. B. schon der Ring aller ganzen rationalen Zahlen. Vielleicht kann man dagegen beweisen, dass jede irreduzible Pseudobewertung eines Körpers zu einer Bewertung äquivalent ist; im Falle der endlichen algebraischen Zahlkörper trifft dies jedenfalls zu.

Wir wollen einen Ring R *elementar* nennen, wenn jede Pseudobewertung desselben sich als direkte Summe endlichvieler irreduzibler Pseudobewertungen darstellen lässt. Aus den in § 19—22 zusammengestellten Ergebnissen geht hervor, dass die Ringe aus nur endlichvielen Elementen, die endlichen algebraischen Zahlkörper und der Ring aller ganzen rationalen Zahlen elementar sind. Es wäre von Interesse, Kriterien für elementare Ringe zu bestimmen; wahrscheinlich werden dieselben aus gewissen Endlichkeitsbedingungen bestehen. Die Vermutung liegt nahe, dass mit einem Ring P auch der Polynombereich $R = P(z)$ und also jede endliche algebraische oder transzendente Erweiterung von P elementar ist.

Soviel ich sehe, lässt sich zeigen, dass in einem elementaren Ring jede

Pseudobewertung sich bis auf Äquivalenz, Reihenfolge und etwaige Summanden $U(a)$ eindeutig in eine direkte Summe irreduzibler Pseudobewertungen zerlegen lässt. Hieraus folgt die Existenz nichtelementarer Ringe, etwa auf Grund des folgenden Beispiels:

Man nehme den Ring aller unendlichen Folgen

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

von rationalen Zahlen, für die $|a_n|$ mit zunehmendem n gegen Null strebt, und zwar rechne man mit zwei solchen Folgen

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \text{ und } b = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

nach den Regeln

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots),$$

$$a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, \dots),$$

$$ab = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots).$$

Ist dann n_1, n_2, n_3, \dots irgend eine monoton wachsende unendliche Folge von Indizes, so definiert

$$W(a) = \max (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$$

offenbar eine Pseudobewertung des Ringes; ferner sind zwei solche Pseudobewertungen, die zu elementenfremden Indexfolgen gehören, unabhängig, und ihre Summe wird alsdann äquivalent zu der Pseudobewertung, die zu der Vereinigung der beiden Folgen gehört. Da wir umgekehrt eine unendliche Folge immer in beliebig viele Teilfolgen zerlegen können, so lässt sich auch $W(a)$ als eine direkte Summe von beliebig vielen Pseudobewertungen darstellen, und also nach dem erwähnten Satz nicht als eine direkte Summe von endlichvielen irreduziblen, d.h. der konstruierte Ring ist nicht elementar.

